Stacionární proud

NFUF103-3

2020/2021 M. Rotter

Stacionární proud

Pohyb elektrického náboje pod vlivem elektrického pole nebo vtištěných sil
- fyzikální veličiny popisující stav systému nezávisí explicitně na čase - stacionární
- ve vodičích se náboje volně pohybují na makroskopické vzdálenosti

Na přenosu náboje se může podílet několik druhů nositelů náboje q_α
s počtem nositelů Δn_α náboje q_α hustota nábojů je $\rho_\alpha = \frac{\Delta n_\alpha}{\Delta V} q_\alpha = N_\alpha q_\alpha$

Celková hustota náboje je $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha = \frac{1}{\Delta V} \sum_\alpha q_\alpha \Delta n_\alpha = \sum_\alpha N_\alpha q_\alpha$

Analogicky k hybnosti jako charakteristice transportu hmoty $m_i \vec{v}_i$ N_α - hustota nábojů α
charakterizuje přenos náboje výraz $q_i \vec{v}_i$
Hustota proudu (vektorový výraz) $\vec{i}_\alpha = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{\Delta n_\alpha} q_i \vec{v}_i$

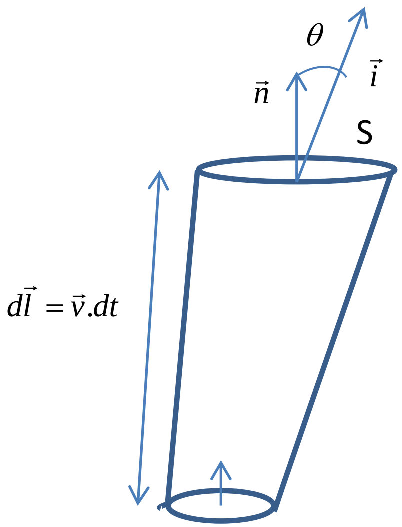
Pro různé typy nositelů proudu $\vec{i} = \frac{1}{\Delta V} \sum_\alpha \left(q_\alpha \sum_{j=1}^{\Delta n_\alpha} \vec{v}_{\alpha j} \right)$

Střední rychlost nositelů náboje (rychlost driftu) $\vec{\bar{v}}_\alpha = \frac{1}{\Delta n_\alpha} \sum_{j=1}^{\Delta n_\alpha} \vec{v}_{\alpha j}$

Hustota proudu $\vec{i} = \sum_\alpha \vec{i}_\alpha = \sum_\alpha N_\alpha q_\alpha \vec{\bar{v}}_\alpha = \sum_\alpha \rho_\alpha \vec{\bar{v}}_\alpha$

Intenzita elektrického proudu (elektrický proud)

- tok hustoty proudu orientovanou plochou $\vec{S} = S.\vec{n}$



$$I = \int_S \vec{i}.\vec{n}dS$$

jednotka proudu – **ampér** [*A*] = C.s^{-1}

$$dI = \vec{i}\vec{n}dS = \rho v dS\cos\theta = \rho\frac{dl}{dt}dS\cos\theta = \frac{\delta q}{dt}$$

časová změna pohyblivého náboje

$$I = \frac{\delta Q}{dt}$$

celkový pohyblivý náboj, který projde plochou S za čas dt

pohyblivý náboj v uzavřeném prostoru $Q = \int_V \rho dV$

úbytek náboje Q v objemu V $dQ = -\delta Q$

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \vec{i}\vec{n}dS = -I$$

Z Gaussova – Ostrogradského teorému

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = \int_V \left(-div\vec{i}\right)dV$$

Platí obecný lokální vztah (**rovnice kontinuity**) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec{i} = 0$ **<u>Zákon zachování náboje</u>**

Stacionární stav

- fyzikální veličiny charakterizující systém nezávisí explicitně na čase

$\vec{E}\left(\vec{r}\left(t\right),t\right)$ $\qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$

např. pole v místě pohybující se částice $\vec{r}\left(t\right)$

$$\frac{d\vec{E}\left(\vec{r}\left(t\right),t\right)}{dt}=\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

po složkách, pro $\vec{i}$ $\qquad \frac{dE_x}{dt}=\frac{\partial E_x}{\partial t}+\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\right)E_x=\frac{\partial E_x}{\partial t}+\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)E_x$

$\frac{d\vec{E}}{dt}=\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{E}$ $\qquad$ ve stacionárním stavu $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=0$ $\qquad \rightarrow \frac{d\vec{E}}{dt}=\left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{E}$

Má-li být $\frac{d\vec{E}}{dt}=0$ $\qquad$ je buď $\vec{v}=0$ $\qquad$ částice se nepohybuje (jako v elektrostatice)

nebo je $\vec{E}$ homogenní (nezávisí na souřadnicích)

Ve stacionárním stavu $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ a je tedy $div\vec{i} = 0$

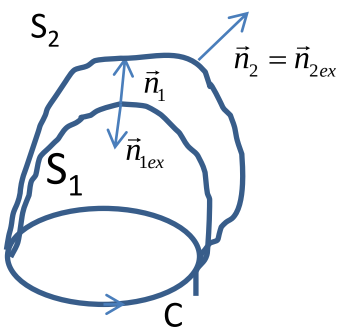
v objemu V omezeném uzavřenou plochou S $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \frac{dQ}{dt} = 0$

→ náboj v objemu V je konstantní

Proud I uzavřenou plochou S $I = \oint_S \vec{i}.\vec{n}dS = \int_V div\vec{i}dV = 0$ v libovolném okamžiku

Ve stacionárním stavu do objemu *V* vchází stejné množství náboje, jako z něho vychází

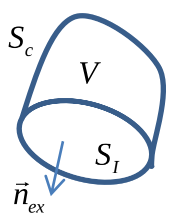
2 plochy sklenuté nad jednou uzavřenou křivkou *C*



$$0 = \oint_S \vec{i}.\vec{n}_{ex}dS = \int_{S_1} \vec{i}.\vec{n}_{1ex}dS + \int_{S_2} \vec{i}.\vec{n}_{2ex}dS$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_{1ex} \qquad \vec{n}_2 = \vec{n}_{2ex}$$

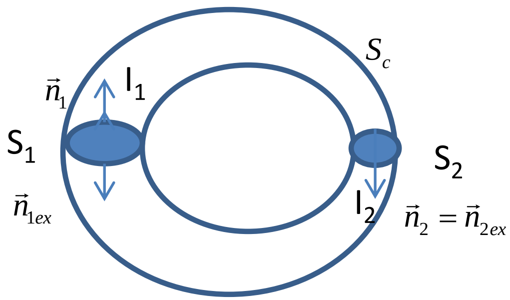
$\int_{S_1} \vec{i}.\vec{n}_1 dS = \int_{S_2} \vec{i}.n_2 dS$ a tedy $I_1 = I_2$ **konzervativní tok**



Objem *V* (jednoduše souvislá oblast) je uzavřen plochou *S*,
jejíž část S_c je pro náboj neprostupná, pro zbylou prostupnou část S_I musí platit

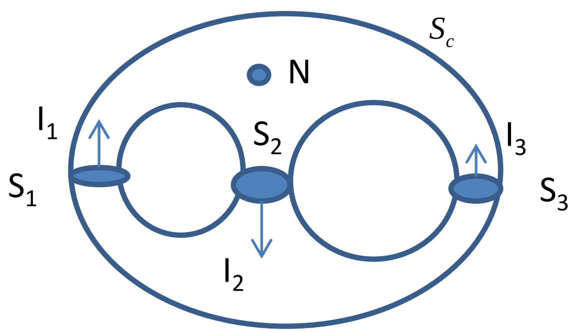
$\int_{S_I} \vec{i}.\vec{n}_{ex}dS = 0$ ve stacionárním režimu musí v každém okamžiku na množství náboje vycházejícího z objemu V připadat stejné množství náboje do objemu V vstupujícího

Pro dvojnásobně souvislou oblast, pro horní část anuloidu (donutu) platí $\int_{S_1} \vec{i}\,.\vec{n}_{1ex}\,dS + \int_{S_2} \vec{i}\,.\vec{n}_{2ex}\,dS = 0$



$$I_1 = \int_{S_1} \vec{i}\,.\vec{n}_1\,dS = \int_{S_2} \vec{i}\,.\vec{n}_2\,dS = I_2 = I$$

proud v okruhu nezávisí na průřezu proudové trubice



N - společný bod smyček = uzel $\qquad I_2 = I_1 + I_3$

obecně $\sum_k \varepsilon_k I_k = 0 \qquad \varepsilon_k = +1$ proud do uzlu vstupující

$\varepsilon_k = -1$ proud z uzlu vystupující

První Kirchhoffův zákon

Součet proudů do uzlu vstupujících a z uzlu vycházejících se v každém okamžiku musí rovnat nule

Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887)

Lokální (diferenciální) Ohmův zákon

Nevyplývá z obecných zákonů elektromagnetismu, je odvozen z experimentu,
spojuje proud a jeho příčiny, zahrnuje vliv prostředí
Proud může být vyvolán – gradientem potenciálu
- gradientem teploty
- gradientem koncentrace nositelů náboje

Ohmův zákon pro homogenní izotropní vodič

$\vec{i} = \sigma \vec{E}$ σ – měrná elektrická vodivost $[\sigma] = \Omega^{-1}m^{-1}$

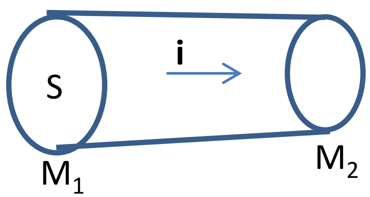
obecně tenzorový výraz v nehomogenním prostředí $\vec{i}_l = \vec{\sigma}_{lj} \vec{E}_j \quad l, j = x, y, z$

Absence hustoty proudu **i** = 0 znamená, že pole uvnitř vodiče je nulové $\vec{E}_{in} = 0$
a tedy ϕ_{in} = konst. → elektrostatická rovnováha
Pole $\vec{E}$ působí na náboj q silou $\vec{F} = q.\vec{E} = m.\vec{a}$, což vede k rovnoměrnému zrychlenému pohybu.
Ustálený proud ve stacionárním stavu je výsledkem rovnováhy s brzdícími silami
(interakce s jinými náboji)
Příklad: proud 1 A v měděném vodiči s průřezem S = 1 mm^{-2} $I = i.S = N.e.\bar{v}.S$
N – hustota volných elektronů (1 elektron na atom mědi) *N* = 8,4.10^{28} m^{-3}
Rychlost driftu $\bar{v}$ = **7.10^{-5}ms^{-1}** (střední kvadratická rychlost elektronů v_q = 1,2.10^{5} ms^{-1}!)
Přenos náboje je způsoben vysokou koncentrací nositelů a jejich srážkami, přechodový stav
Ustálení proudu je velmi krátké τ < 1 ps

Integrální Ohmův zákon

Vztah mezi proudem a napětím formuloval Georg Simon Ohm (1789 – 1854) v roce 1826

R = U/I



$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_{M_1}^{M_2} \vec{E} d\vec{r}}{\int_S \vec{i}.\vec{n} dS}$$

odpor R - jednotka ohm [Ω] =V.A^{-1}

1/R = S jednotka siemens $[S] = A.V^{-1} = \Omega^{-1}$

Přímý vodič konstantního průřezu S a délky l $R = \frac{E.l}{\sigma E.S} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}$ (válcový rezistor)

σ = 5,8.10^{7} S.m^{-1} Cu
σ ≈ 10^{-11} S.m^{-1} sklo
σ = 4.10^{-6} S.m^{-1} destilovaná voda

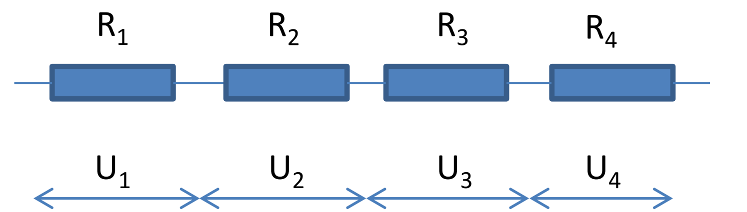
$\rho = \frac{1}{\sigma}$ měrný odpor [ρ] = Ω.m

Příklad: měděný drát délky l = 1 m a průřezu S = 1 mm^2 $R = \frac{1}{5,8.10^7} \frac{4.1}{\pi.1.10^{-6}} = 17 m\Omega$

Příklad: lidské tělo R ≈ 2,5 kΩ, bezpečný proud I < 10 mA → U < 2,5.10^3.10^{-2} = 25 V → bezpečné napětí

Skládání rezistorů

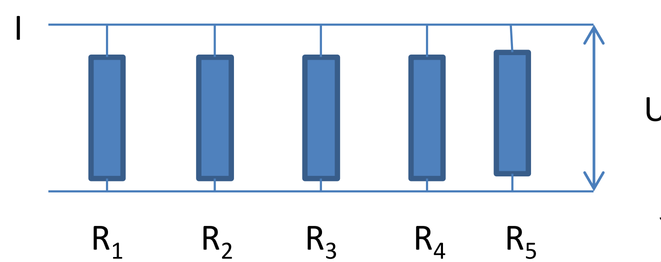
Sériové zapojení (za sebou)



$$U = \sum_k R_k I_k = I \sum_k R_k = I.R$$

$$\sum_k R_k = R$$ celkový odpor

Paralelní řazení (vedle sebe)



$$I = \sum_j I_j = \sum_j \frac{U}{R_j} = U \sum_j \frac{1}{R_j} = \frac{U}{R}$$

$$\sum_j \frac{1}{R_j} = \frac{1}{R} = G$$ celková vodivost

Složitější kombinovaná zapojení rezistorů se řeší metodami analýzy sítí.

Výkon elektrických polí

Síla působící na pohyblivý elektrický náboj $\vec{F} = q.\vec{E}$

Pole koná elementární práci $dW = \vec{F}.d\vec{r} = q.\vec{E}.d\vec{r}$

Výkon sily $\dfrac{dW}{dt} = q.\vec{E}.\dfrac{d\vec{r}}{dt} = q.\vec{E}.\vec{v}$ $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (rychlost driftu)

V elementu objemu *dV* je *n.dV* pohyblivých nositelů náboje,

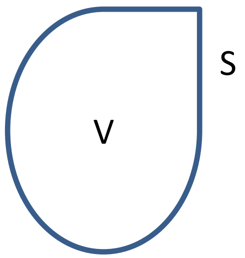
na objem *dV* připadá výkon *dN* $dN = \dfrac{dW}{dt} n.dV = n.q.\vec{v}.\vec{E}.dV = \vec{i}.\vec{E}.dV$

Hustota výkonu je tedy $\upsilon(t) = \vec{i}(t).\vec{E}(t)$

V objemu *V* síly pole vytvářejí výkon *N* $N = \int_V \upsilon(\vec{r})dV = \int_V \vec{i}.\vec{E}dV = -\int_V \vec{i}.\vec{\nabla}\varphi dV$

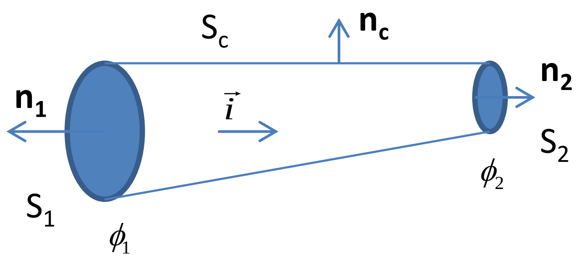
pro stacionární proudy $\left(div\vec{i} = 0\right)$ $\vec{\nabla}\left(\vec{i}\varphi\right) = \varphi\left(\vec{\nabla}\vec{i}\right) + \vec{i}\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \vec{i}.\vec{\nabla}\varphi$

$N = -\int_V \vec{\nabla}\left(\vec{i}.\varphi\right)dV = -\oint_S \left(\vec{i}.\varphi\right)\vec{n}dS$ (tok uzavřenou plochou *S*)



Výraz pro výkon aplikovaný na proudovodič (omezený povrchem S_c pro náboj neprostupným)

platí $\vec{i}.\vec{n}_c = 0$



$$N = -\int_{S_1} \vec{i}.\varphi_1.\vec{n}_1 dS - \int_{S_2} \vec{i}.\varphi_2.\vec{n}_2 dS - \int_{S_c} \vec{i}.\varphi.\vec{n}_c dS$$

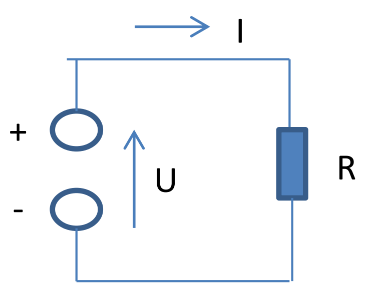
$$-\varphi_1 \int_{S_1} \vec{i}.\vec{n}_1 dS = \varphi_1.I \qquad -\varphi_2 \int_{S_2} \vec{i}.\vec{n}_2 dS = -\varphi_2 I$$

$$N = I\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = I.U = R.I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Ve vodiči, v němž platí Ohmův zákon, neroste vlivem pole rychlost elektronů,
nemění se střední kinetická energie nositelů náboje,
výkon se přenáší na mřížku ve formě **tepelné energie.** **Jouleovo teplo**

Elektrický obvod

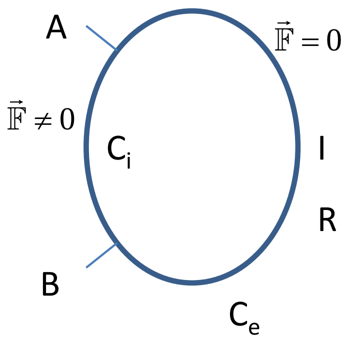
Působí-li v obvodu zdroj proudu, je třeba přidat do Ohmova zákona pole vtištěných sil



$\vec{i} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{\mathbb{F}}\right)$ $\vec{\mathbb{F}}$ - pole vtištěných sil (nekonzervativní)

Konvenční směr proudu v obvodu – od kladného k zápornému pólu zdroje
(uvnitř zdroje v opačném směru → působení vtištěných sil)

Vtištěné síly – chemický proces, Seebeckův jev, magnetický generátor)



Zobecněný Ohmův zákon $\vec{i} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{\mathbb{F}}\right)$

Pro vnější část obvodu – C_e: $\vec{\mathbb{F}} = 0$

$$\int_{C_e} \frac{\vec{i}}{\sigma} d\vec{l} = I.\int_{C_e} \frac{dl}{\sigma.\Delta S} = I.R = \int_{C_e} \vec{E}.d\vec{l} = U$$

Pro konzervativní pole **E** platí:

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{l} = 0 = \int_{C_e} \vec{E}.d\vec{l} + \int_{C_i} \vec{E}.d\vec{l} = U + \int_{C_i} \vec{E}.d\vec{l}$$ odtud $$\int_{C_i} \vec{E}.d\vec{l} = -U$$

Pro vnitřní část obvodu – C_i (vnitřek zdroje proudu): $$\int_{C_i} \frac{\vec{i}}{\sigma} d\vec{l} = I.\int_{C_i} \frac{dl}{\sigma.\Delta S} = I.R_i = \int_{C_i} \vec{E}.d\vec{l} + \int_{C_i} \vec{\mathbb{F}}.d\vec{l} = -U + \mathfrak{I}$$

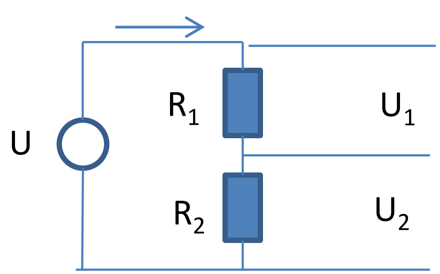
$$\boxed{U = \mathfrak{I} - R_i.I}$$

$\int_{C_i} \frac{dl}{\sigma.\Delta S} = R_i$ je vnitřní odpor zdroje proudu

$\mathfrak{I}$ označuje elektromotorické napětí zdroje

U je svorkové napětí zdroje

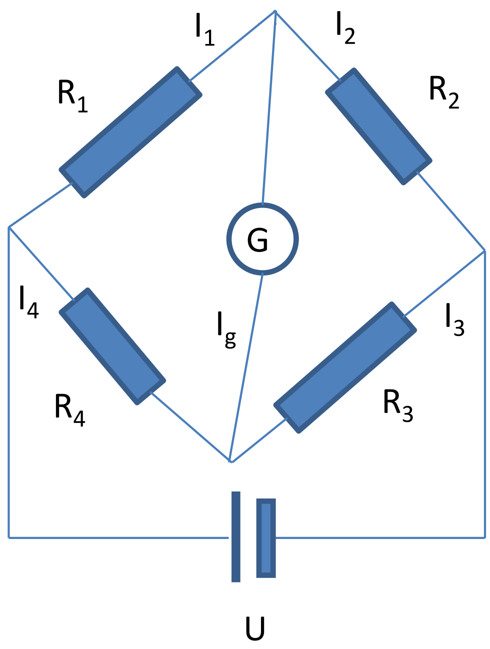
V uzavřené smyčce platí 2. Kirchhoffův zákon $$\sum_i \mathfrak{I}_i = \sum_j U_j = \sum_j R_j.I_j$$



Napěťový dělič

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \qquad U_1 = R_1.I = U\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad U_2 = R_2.I = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



Wheatstonův můstek

podmínka rovnováhy → $I_g = 0$

$I_1 = I_2$ $\qquad U_1 = R_1 I_1 = R_4 I_4 = U_4$

$I_3 = I_4$ $\qquad U_2 = R_2 I_2 = R_2 I_1 = R_3 I_3 = R_3 I_4 = U_3$

odtud $\qquad \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_4}{R_3}$

$R_1 = R_2 \dfrac{R_4}{R_3}$ $\qquad$ určení neznámého odporu R_1

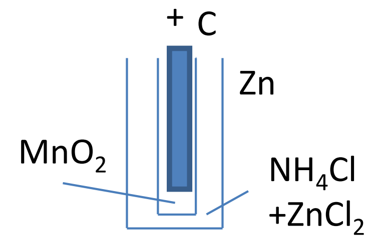
Zdroje proudu

Termočlánky: teplotní závislost kontaktního potenciálu mezi dvěma kovy – Seebeckův jev
Např.: Cu – konstantan, Fe – konstantan, Pt – PtRh, chromel – alumel

Chemické články: kovy seřazené podle kontaktních potenciálů (Alessandro Volta)
Al, Zn, Sn, Cd,Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd
Při styku kovů přecházejí volné elektrony k vyrovnání potenciálů – přebytek elektronů (záporný náboj)

Daniellův článek: elektrody Zn (elektrolyt: roztok $ZnSO_4$),
Cu kladná elektroda (elektrolyt roztok $CuSO_4$)
odděleny porézní přepážkou U = 1,1 V

Leclanchéův (suchý) článek: elektroda Zn, elektrolyt: $NH_4Cl + ZnCl_2$
kladná elektroda: uhlík obklopen MnO_2, U = 1,5 V



Westonův normální článek: elektrody HgCd a Hg (kladná), elektrolyt roztok $CdSO_4$, U = 1,0183 V
až do nové definice (2019) soustavy SI - etalon jednotky elektrického napětí

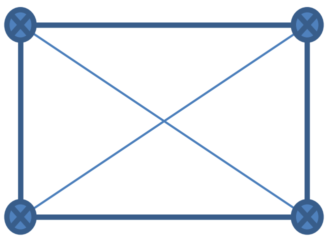
Akumulátory – opakované nabíjení – závažný problém skladování energie z obnovitelných zdrojů
olověný: elektrody Pb, elektrolyt roztok H_2SO_4 (25 – 30 %), nabití 35%, U = 2,1 V
Ni-Fe, Ni-Cd elektrolyt KOH, U = 1,4 V
Ni – MH (metalhydrid), Li-ion miniaturizace, nabíjecí kapacita

Metody řešení sítí

Sítě jsou tvořeny větvemi, které jsou propojeny uzly, větev musí obsahovat alespoň jeden rezistor nebo zdroj proudu (uvažujeme prozatím jen o sítích stejnosměrného proudu).
K řešení nepostačí skládání rezistorů sériově či paralelně.
Řešit sítě lze pomocí **1. a 2. Kirchhoffova zákona** nebo **metodou úplného stromu.**

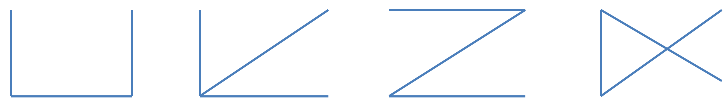
Úplný strom – soustava větví propojených uzly splňující následující kritéria:

a) každý uzel je spojen s ostatními uzly prostřednictvím větví úplného stromu
b) vlastnost a) přestane platit, vyjmeme-li jedinou libovolnou větev



4 možnosti, 16 variant úplného stromu

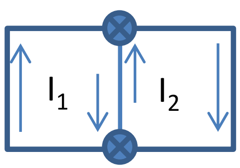
Síť - 4 uzly, 6 větví



Nezávislé větve – <u>nepatří</u> k úplnému stromu – p
n větví, q uzlů

$$p = n - (q - 1)$$

Smyčkové proudy – náleží k nezávislým větvím



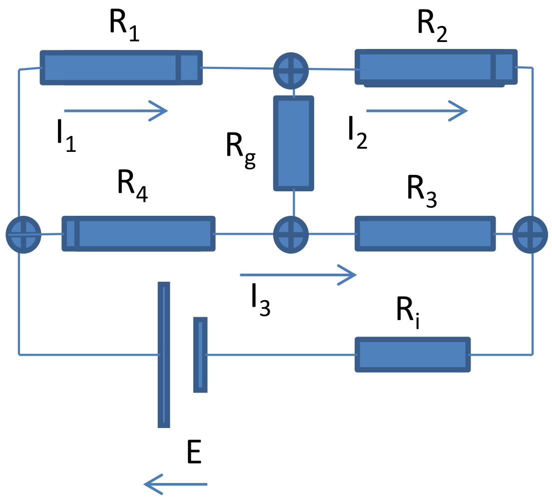
$n = 3,\ q = 2$ ⇒ $p = 3 - (2 - 1) = 2$

2 nezávislé smyčkové proudy, soustava 2 rovnic

zdroje proudu ve větvích – s vyznačenou polaritou

Příklad: Wheatstonův můstek n = 6, q = 4 p = 6 – (4 – 1) = 3

soustava 3 rovnic pro 3 smyčkové proudy I_1, I_2, I_3



$$0 = \left(R_1 + R_4 + R_g\right) I_1 - R_g I_2 - R_4 I_3$$

$$0 = -R_g I_1 + \left(R_2 + R_3 + R_g\right) - R_3 I_3$$

$$E = -R_4 I_1 - R_3 I_2 + \left(R_4 + R_3 + R_i\right) I_3$$

Sloupcová matice levé strany rovnic a matice rezistorů 3x3

$$(D) = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 + R_g & -R_g & -R_4 \\ -R_g & R_2 + R_3 + R_g & -R_3 \\ -R_4 & -R_3 & R_4 + R_3 + R_i \end{pmatrix}$$

Výpočet determinantu D např. Sarussovým pravidlem.
Výpočet determinantu D_j, v němž je sloupec koeficientů pro I_j nahrazen sloupcem levých stran soustavy rovnic

$$I_j = \frac{D_j}{D}$$

Metoda smyčkových proudů se dá uplatnit i pro řešení sítí střídavých proudů, místo reálných odporů se použijí komplexní impedance

Duální metodou je metoda uzlových napětí, využívá 1. Kirchhoffův zákon

Věta o superpozici

V síti je zařazeno n zdrojů elektromotorického napětí U_j s vnitřními odpory r_j,
I_k^l je proud k –tou větví, je-li zařazen pouze l – tý zdroj proudu, ostatní zdroje jsou nahrazeny svými vnitřními odpory.
Pro všechny zařazené zdroje platí pro proud k – tou větví

$$I_k = \sum_{l=1}^{n} I_k^l$$

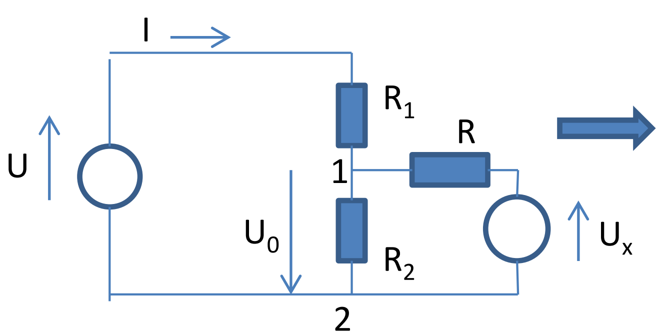
Thevéninova věta (o ekvivalentním generátoru)

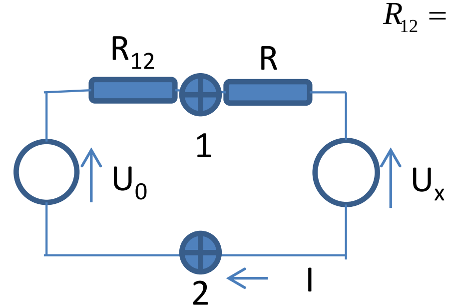
Hledáme řešení pouze pro proud jednou větví,
zbytek sítě se vůči této větvi chová jako ekvivalentní generátor
s elektromotorickým napětím a vnitřním odporem.

Příklad: napěťový dělič, kompenzátor

$$U_0 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$ (dělič napětí,
svorkové napětí ekvivalentního zdroje)

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$ vnitřní odpor





$$I = \frac{U_0 - U_x}{R + R_{12}} = \left(\frac{1}{R + R_{12}}\right)\left(U \frac{R_2}{R_1 + R_2} - U_x\right)$$

$$U_x = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$ pro $I = 0$
(kompenzátor)

Mechanismy elektrického proudu

1) **kondukční proud (vodivý)**

Pohyb volných nositelů náboje v látkovém prostředí
volné elektrony v kovech, elektrony a díry v polovodičích,
kladné a záporné ionty v kapalinách,
ionizované atomy nebo molekuly plynů

2) **konvekční proud**

Pohyb nositelů náboje v prázdném prostoru
proud elektronů, ionizovaných atomů ve vakuu
i makroskopických částic nesoucích náboj
- nedochází k interakci s prostředím

3) **posuvný proud v dielektriku**

Pohyb nábojů při změně polarizace dielektrika
časová změna vázaných nábojů
- proud nemůže být časové nezávislý
nepřispívá k stacionárnímu proudu

$$\vec{i} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ hustota posuvného proudu