Kvazistacionární obvody
- přechodové jevy

NFUF103-7

2020/2021 M. Rotter

Proudy v obvodech proměnné v čase – **kvazistacionární režim**

Doba šíření elektromagnetického signálu v jednotlivých částech obvodu je zanedbatelná oproti charakteristické době časových změn signálu

Impulz se v obvodu šíří rychlostí blízkou rychlosti světla c = 299 792 458 m.s^{-1}
(což rozhodně není driftová rychlost elektronů) – přenos vzájemnými interakcemi elektronů

Charakteristický rozměr elektronických obvodů d = 10 cm překoná impulz za δt = d/c ≈ 0,3 ns
Při frekvenci střídavého proudu f = 50 Hz perioda činí T = 1/f = 20 ms
Relativní změna napětí o 1 % odpovídá zhruba 1 % ze čtvrtperiody, proběhne za δt = 5.10^{-5} s
impulz za tuto dobu urazí dráhu d = c.δt ≈ 3.10^{8}.5.10^{-5} = 15 km
Můžeme tedy považovat napětí a proud v běžném obvodu za všude stejné, tedy stacionární.

Platí Faradayův indukční zákon $\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = u_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}.\vec{n}dS$

Pro časově neproměnnou smyčku $\oint_C \vec{E}.d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\vec{n}dS \quad \rightarrow rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (diferenciální tvar)

V kvazistacionárním režimu platí dále: $rot\vec{H} = \vec{i} \quad div\vec{D} = \rho \quad div\vec{B} = 0 \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Z definice vlastní indukčnosti $L = \frac{\Phi}{I}$ $\boxed{e_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}}$ indukované napětí na cívce

Analogicky pro více smyček s proudy I_1, I_2,….I_N – indukované napětí v i-té smyčce $e_i = -\sum_{k=1}^{N} L_{ik}\frac{dI_k}{dt}$

Kvazistacionární obvod

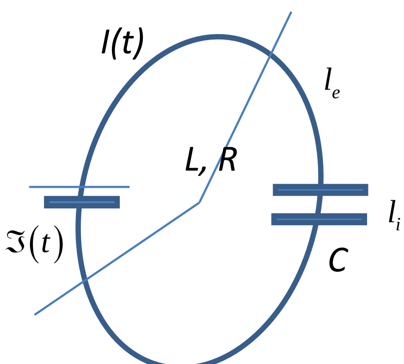
Soustava N vodivých uzavřených smyček, v každé působí časově proměnné vtištěné síly,
- vzniká časové proměnné elektromotorické napětí $\Im_i(t)$

Ohmův zákon pro i-tou smyčku $R_{ci} I_i = \Im_i(t) + e_i \quad \rightarrow R_{ci} I_i = \Im_i(t) - \sum_{k=1}^{N} L_{ik} \frac{dI_k}{dt}$ *R_{ci} – celkový odpor smyčky*

V případě jedné smyčky $$\boxed{R_c I = \Im(t) - L \frac{dI}{dt}}$$ diferenciální rovnice 1. řádu, nutnost stanovení počátečních podmínek

Nutno uvážit i vliv kondenzátorů v obvodech (nemůže jimi téct stacionární proud)
– vzniká časově proměnný proud při změnách náboje na elektrodách kondenzátoru

Diferenciální Ohmův zákon $\vec{i} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{\mathbb{F}}\right)$ $\quad \vec{\mathbb{F}}$ - (nekonzervativní) pole vtištěných sil



vnější část okruhu l_e > l_i - vnitřní část kondenzátoru

$$\int_{l_e} \frac{\vec{i}}{\sigma} d\vec{l} = \int_{l_e} \left(\vec{E} + \vec{\mathbb{F}}\right) d\vec{l} \qquad \int_{l_e} \frac{\vec{i}}{\sigma} d\vec{l} = \int_{l_e} \frac{I}{S\sigma} dl = R_c . I = \Im(t) + \int_{l_e} \vec{E}.d\vec{l}$$

v přítomnosti cívky $\Im(t) \rightarrow \Im(t) - L \frac{dI}{dt}$

Časově proměnné pole **E**(t) je konzervativní $0 = \oint_l \vec{E}.d\vec{l} = \int_{l_e} \vec{E}.d\vec{l} + \int_{l_i} \vec{E}.d\vec{l}$

Napětí mezi elektrodami kondenzátoru $U_C(t) = \int_{l_i} \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q(t)}{C}$

$$R_c I(t) + U_C(t) = \Im(t) - L \frac{dI(t)}{dt} \qquad \boxed{\rightarrow R_c I(t) + \frac{Q(t)}{C} = \Im(t) - L \frac{dI(t)}{dt}} \qquad \text{(A)}$$

platí $$Q(t)=\int_0^t I(t)\,dt \qquad I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$$

Z rovnice (A) dostaneme po časové derivaci $$\boxed{L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R_c\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{d}{dt}\Im(t)} \qquad \text{(B)}$$

Z rovnice kontinuity: proud v každém průřezu nerozvětvené části obvodu je **stejný**
Platí 1. Kirchhoffův zákon – součet proudů v uzlu je v každém okamžiku **nulový**
Platí 2. Kirchhoffův zákon – součet napětí na všech rezistorech a kondenzátorech je v každém okamžiku roven součtu celkového elektromotorického napětí zdrojů a indukovaných napětí na všech cívkách ve smyčce

Energetická bilance obvodu

Rovnice (A) vynásobena I(t) ≠ 0

$$R_cI^2(t)+I(t)\frac{Q(t)}{C}=\Im(t)I(t)-LI(t)\frac{dI(t)}{dt} \qquad \text{(C)}$$

lze přepsat jako $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2(t)\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2(t)}{C}\right)+R_cI^2(t)=\Im(t)I(t) \qquad \text{(D)}$$

$\frac{1}{2}\frac{Q^2(t)}{C}$ - energie elektrického pole v prostoru kondenzátoru

$\frac{1}{2}LI^2(t)$ - energie magnetického pole vytvářeného proudem v obvodu

$R_cI^2(t)$ - okamžitá hodnota Jouleova výkonu

$\Im(t)I(t)$ - okamžitý výkon zdroje

Přechodové jevy

Obvod RC

L = 0

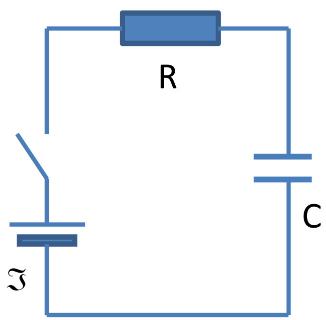
podle vztahu (B) $R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=0$

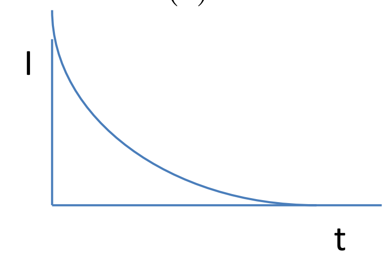
Počáteční podmínka: pro t = 0 $\mathfrak{I}$ = konst. Q(0) = 0

Řešení diferenciální rovnice $I(t)=K.e^{-\frac{t}{RC}}$

z rovnice (A) pro t = 0 $RI(0)=\mathfrak{I}=RK$

$$\boxed{I(t)=\frac{\mathfrak{I}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}}$$



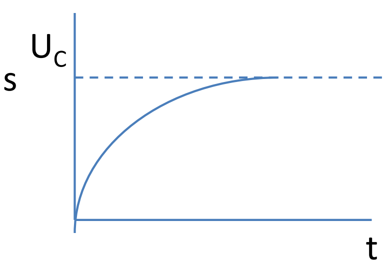


Pro napětí U_C na kondenzátoru

$RI(t)+U_C=\mathfrak{I}$ $\rightarrow U_C=\mathfrak{I}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ pro $t\rightarrow\infty$ $U_C=\mathfrak{I}$

Časová konstanta nabíjení kondenzátoru $\tau=RC$

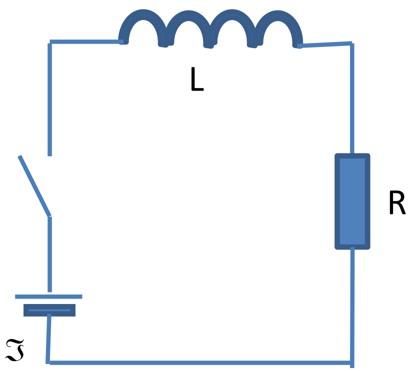
Příklad: C = 10 μF, R = 10 kΩ → $\tau = 10^{-5}.10^{4} = 0{,}1$ s



V kondenzátoru se nahromadí energie $W_e=\frac{1}{2}C\mathfrak{I}^2$

Baterie kondenzátorů o velké kapacitě se používají k buzení cívek velkých pulzních magnetických polí a k zážehu výbojek, které startují výkonové lasery.

Obvod RL



$$R.I(t) = \Im(t) - L\frac{dI(t)}{dt} \qquad \text{(E)}$$

nehomogenní diferenciální rovnice 1. stupně

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \Im(t)\frac{1}{L}$$

řešení homogenní rovnice (bez pravé strany) - časová konstanta $\tau = \frac{L}{R}$

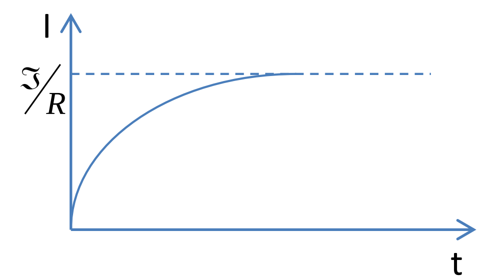
$$I(t) = K.e^{-\frac{R.t}{L}} + C$$

partikulární řešení pro $t \to \infty$ $\quad I_\infty = \frac{\Im}{R} \to C = \frac{\Im}{R}$

po zapnutí $\quad I(t) = K.e^{-\frac{R.t}{L}} + \frac{\Im}{R}$ (E) $\quad$ *t = 0* $\quad I(0) = 0 \to K = -\frac{\Im}{R}$

úplné řešení

$$\boxed{I(t) = \frac{\Im}{R}\left(1 - e^{-\frac{R.t}{L}}\right)}$$



Při vypnutí se v cívce indukuje napětí
dostatečné k přeskočení jiskry mezi kontakty $\qquad$ odpor výbojové dráhy $\quad R^* > R$

Řešení diferenciální rovnice (E) pro R → R^* $\qquad I(t) = K.e^{-\frac{R^*.t}{L}} + \frac{\Im}{R^*}$

počáteční podmínka pro t = 0 $\quad I(0) = \frac{\Im}{R} \quad \to \frac{\Im}{R} = K + \frac{\Im}{R^*} \approx K$

řešení $\qquad I(t) = \frac{\Im}{R}e^{-\frac{R^*.t}{L}} + \frac{\Im}{R^*}$

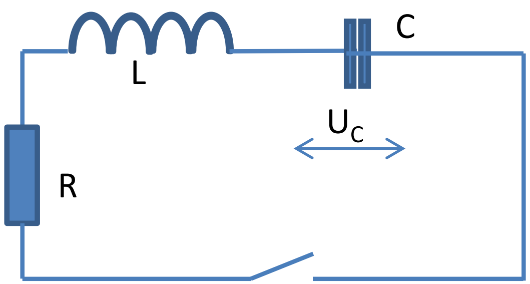
Napětí na cívce v okamžiku výboje t = 0 $\qquad U_L(0) = -L\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = -L\frac{\Im}{R}\left(-\frac{R^*}{L}\right).1 = \frac{R^*}{R}\Im$

Může mnohonásobně překročit napětí zdroje

Energie magnetického pole v cívce se přemění v Jouleovo teplo ve výboji.
Pro cívky s velkou indukčností (např. supravodivé solenoidy) je třeba zabezpečit ochranu proti přepětí (diody, vyvaděče energie, zkratové rezistory).

Obvod RLC

Pro účely výpočtu není v obvodu zařazen zdroj proudu, kondenzátor je nabit na napětí U_{C0}.
V čase t = 0 sepneme spínač, kondenzátor se vybíjí přes L a R $\quad \Im(t) = 0$



Z rovnice (B) $\quad L\dfrac{d^2I}{dt^2} + R\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{1}{C}I = 0$

diferenciální rovnice 2. řádu → charakteristická rovnice, kořeny λ_1, λ_2

$L\lambda^2 + R\lambda + \dfrac{1}{C} = 0 \qquad$ řešení diferenciální rovnice $\quad I(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$

Kořeny charakteristické rovnice $\quad \lambda_{1,2} = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\dfrac{L}{C}}}{2L} = -\dfrac{R}{2L} \pm \dfrac{1}{2L}\sqrt{D} \qquad$ diskriminant $\quad D = R^2 - 4\dfrac{L}{C}$

Pro D ≥ 0 jde o aperiodický stav $\quad R^2 \geq 4\dfrac{L}{C} \qquad$ koeficienty λ_1 a λ_2 jsou reálné (proud dosáhne maxima a klesá)

Pro D < 0 dostáváme periodické řešení $\qquad$ zavedeme činitel útlumu $\quad \gamma = \dfrac{R}{2L}$ $\quad$ a $\quad \omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{4L}{C} - R^2} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{-D} = i.\dfrac{1}{2L}\sqrt{D} \qquad$ řešení $\quad \boxed{\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i.\omega} \qquad$ *(i.i = -1)*

$\omega \approx \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \qquad$ rezonanční (kruhová) frekvence – Thomsonův vzorec

$I(t) = Ke^{-\gamma t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = -\dfrac{U_{C0}}{\omega L}e^{-\gamma t}\sin\omega t \qquad$ tlumený děj s periodou $\quad \tau = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

Periodická přeměna elektrické energie v magnetickou se ztrátou Jouleovým teplem ≈ γ