Maxwellovy rovnice

NFUF103-9

2020/2021 M. Rotter

Zabývali jsme se dosud elektrostatickým polem, stacionárním elektrickým a magnetickým polem, posléze kvazistacionárním elektrickým a magnetickým polem. Na základě experimentálních faktů bylo možno formulovat čtyři diferenciální rovnice pro makroskopické veličiny. Rovnice platí pro pole mimo materiálové prostředí.

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Maxwellova-Faradayova rovnice

$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Gaussova věta

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i}$ Ampérův teorém

$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ nezřídlové pole, existence vektorového potenciálu

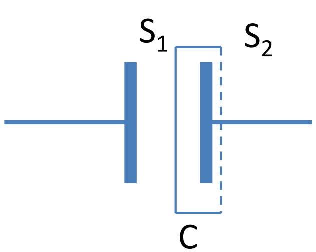
Ze 3. rovnice po aplikaci operátoru nabla dostaneme $\vec{\nabla}.\left(\mu_0 \vec{i}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = 0$ (platí identicky)

Potom z rovnice kontinuity plyne $\vec{\nabla}.\vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ → hustota náboje je neproměnná

Uvedené rovnice nemohou popsat situaci ani při vložení kondenzátoru do obvodu.

Při změně náboje na deskách kondenzátoru (nabíjení a vybíjení) vzniká časově proměnný proud $\frac{dQ}{dt} = I$

Vytváří se také časově proměnné elektrické pole $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$



Tok plochou válce opsaného kolem jedné desky kondenzátoru

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.\vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla}.\vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Nenulové elektrické pole prochází pouze plochou S_1 $\Phi_E = \int_{S_1} \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$

Proud odpovídá časové derivaci náboje $I = \frac{dQ}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Proud vytváří magnetickou indukci **B** $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i}$

Integrací přes plochu S_2 a s využitím Stokesova teorému $\int_{S_2} rot\vec{B}.\vec{n}dS = \oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{i}.\vec{n}dS = \mu_0 I$

C - okrajová křivka plochy S_2 jistě platí $\int_{S_1} \vec{i}.\vec{n}dS = 0$

Je zřejmé, že k proudu *I* je třeba přidat i výraz $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Z časové změny náboje vyvolané tokem elektrického pole plochou S_1

Dostaneme tedy $\oint_C \vec{B}.d\vec{r} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt}$ použijeme vztah $\varepsilon_0.\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

výraz $\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\vec{n}dS$ se nazývá **posuvný proud** $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ je hustota posuvného proudu

Pro popis nestacionárního děje tedy platí vztah $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ c je rychlost světla ve vakuu

Vztah pro posuvný proud lze odvodit i formálně z rovnice kontinuity a Gaussovy věty

$\vec{\nabla}.\vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ platí $0 = \vec{\nabla}.\vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla}.\left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Dostáváme stacionární hustotu proudu $\boxed{\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

James Clerc Maxwell (1831 – 1879) postupně formuloval vztah pro nestacionární proud publikovaný v traktátu „Treatise on Electricity and Magnetism" v roce 1873.

Zavedl celkový proud
$$\boxed{\vec{i}_c = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$
složený z volného proudu, Maxwellova posuvného proudu ve vakuu a polarizačního proudu $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Soustava Maxwellových rovnic pro nestacionární systémy ve vakuu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Po zavedení materiálových vztahů lze rozšířit i na **materiálové prostředí** $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\rho$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{i} + \frac{1}{c_M^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$c_M^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} = \frac{c^2}{\varepsilon_r \mu_r}$$
rychlost šíření elektromagnetické vlny v materiálovém prostředí

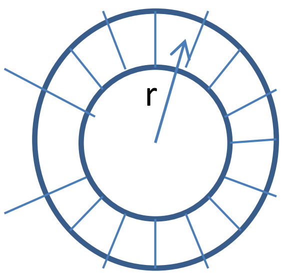
Energie magnetického pole v cívce

Z rovnice pro výkon v obvodu s rezistorem a cívkou dostáváme výraz pro energii

$$\Im.I(t) = R.I^2(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L.I^2(t)\right)$$

$$W_m = \frac{1}{2}L.I^2$$

Příklad:
toroid s jádrem z magneticky měkkého materiálu (se zanedbatelnou hysterezí)



$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad H = \frac{N.I}{2\pi r}$$

N – počet závitů, r – střední poloměr

celkový magnetický tok cívkou $\Psi = N.\Phi$

$$W_m = \frac{1}{2}L.I^2 = \frac{1}{2}\Psi.I \qquad \Psi = L.I$$

magnetický tok závitem

$$W_m = \frac{1}{2}\Phi NI(t) = \frac{1}{2}BSH\,2\pi r = \frac{1}{2}BH\,2\pi rS = \frac{1}{2}BHV$$

Hustota magnetické energie je $w_m = \frac{1}{2}\vec{B}.\vec{H}$ (obecný výraz)

Analogicky - hustota elektrické energie $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}$ (obecně odvozeno v elektrostatice)

Energie elektromagnetického pole

Pro elektrostatické pole a stacionární magnetické pole s lineárními vztahy

$\vec{D}(\vec{r},t)=\varepsilon_0\varepsilon_r(\vec{r})\vec{E}(\vec{r},t)$ $\qquad$ $\vec{B}(\vec{r},t)=\mu_0\mu_r(\vec{r})\vec{H}(\vec{r},t)$

Hustoty energií $\quad w_e(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r},t).\vec{D}(\vec{r},t)$ $\qquad$ $w_m(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r},t).\vec{H}(\vec{r},t)$

platí $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}.\vec{E}\right)=2\vec{D}.\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=2\frac{\partial}{\partial t}w_e$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}.\vec{H}\right)=2\vec{B}.\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=2\frac{\partial}{\partial t}w_m$

1. Maxwellovu rovnici vynásobíme skalárně $\vec{H}$

$$\vec{H}.\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\vec{H}.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}.\vec{B}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}w_m$$

3. Maxwellovu rovnici vynásobíme skalárně $\vec{E}$

$$\vec{E}.\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\vec{E}.\vec{i}+\vec{E}.\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{E}.\vec{i}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}.\vec{D}\right)=\vec{E}.\vec{i}+\frac{\partial}{\partial t}w_e$$

Hustota elektromagnetické energie je dána vztahem $\quad w_{em}=w_e+w_m$

Hustota výkonu pole $\quad \frac{\partial}{\partial t}w_{em}=\frac{\partial}{\partial t}w_e+\frac{\partial}{\partial t}w_m=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{E}.\vec{D}+\vec{B}.\vec{H}\right)\right]$

Hustota elektrického výkonu $\quad \nu(\vec{r},t)=\vec{i}(\vec{r},t).\vec{E}(\vec{r}.t)$ $\quad$ - $\quad$ časová změna hustoty práce elektrického pole působícího na nositele náboje w_A(**r**, t)

$$\frac{\partial}{\partial t} w_A = \nu = \vec{i}.\vec{E}$$ definice hustoty práce $$w_A = \int_{t_0}^{t} \vec{i}.\vec{E}dt'$$

platí identita $$\vec{E}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) - \vec{H}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\vec{\nabla}.\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$$

výraz $\boxed{\vec{S} = \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)}$ se nazývá **Pointigův vektor** John Henry Pointing (1852 – 1914)

Pointingův zákon (rozdíl rovnic)

$$\vec{E}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) - \vec{H}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t} w_e + \nu + \frac{\partial}{\partial t} w_m$$

$$-\vec{\nabla}.\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t} w_{em} + \frac{\partial}{\partial t} w_A$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} w_{em} + \vec{\nabla}.\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} w_A = 0}$$

Pointingův vektor – hustota toku energie – zdrojem je časová změna součtu hustoty energie elektromagnetického pole a hustoty elektrické práce

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial t}\left(w_{em} + w_A\right) = \vec{\nabla}.\vec{S}}$$

Provedeme integraci přes libovolný objem V $$-\frac{d}{dt}\int_V w_{em} dV' = \int_V \vec{\nabla}.\vec{S} dV' + \int_V \vec{i}.\vec{E} dV'$$

$$\boxed{-\frac{d}{dt} W_{em} = \oint_a \vec{S} da' + N}$$

Pointingova věta

$N = \int_V \vec{i}.\vec{E} dV'$ - elektrický výkon

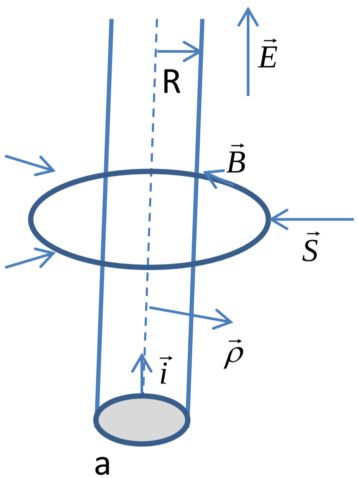
$\oint_a \vec{S}.da'$ - tok energie plochou *a* uzavírající objem *V*

Speciálně pro *N* = 0 $$-\frac{d}{dt} W_{em} = \oint_a \vec{S}.da'$$ - rovnice kontinuity pro energii elektromagnetického pole

Příklad: elektromagnetická energie v okolí dlouhého drátu

plocha průřezu *a*, měrná vodivost σ, hustota proudu $\vec{i}$

elektrické pole $\vec{E}$ je homogenní v celém prostoru, stejné jako uvnitř drátu



z Ohmova zákona $\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{i}$

z řešení Laplaceovy rovnice $\Delta\varphi = 0$

hustota ztrátového výkonu $\nu = \vec{E}.\vec{i} = \sigma E^2$

na délce *l* vodiče je ztracený výkon $N = \nu.l.a = \sigma.l.a.E^2$

$I = \vec{i}.\vec{a}$ je proud tekoucí drátem

Magnetická indukce – z Biotova – Savartova zákona

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{iR^2}{\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}a\frac{\left(\vec{i}\times\vec{\rho}\right)}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\sigma.a}{\rho^2}\left(\vec{E}\times\vec{\rho}\right) \qquad a = \pi R^2 \qquad i.\vec{e}_\phi = \vec{i}\times\vec{\rho} \qquad \vec{i} = \sigma\vec{E}$$

Poyntingův vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{\sigma a}{2\pi\rho^2}\left(\vec{E}\times\left(\vec{E}\times\vec{\rho}\right)\right) = \frac{\sigma a}{2\pi\rho^2}\left\{\vec{E}.\left(\vec{E}.\vec{\rho}\right) - \vec{\rho}.\left(\vec{E}.\vec{E}\right)\right\}$ $\quad \left(\vec{E}.\vec{\rho}\right) = 0$

$$\boxed{\vec{S} = -\frac{\sigma a}{2\pi\rho^2}E^2\vec{\rho}}$$

hustota toku výkonu elektromagnetické energie z vnějšku radiálně do drátu

Celkový tok na délce *l* $\quad \int_\Sigma \vec{S}.\vec{n}d\Sigma' = -\int_0^l\int_0^{2\pi}\frac{\sigma a}{2\pi R}E^2 R\,d\varphi\,dz = -\sigma l.aE^2$

Tok výkonu je roven absorbovanému výkonu *N*, který se přemění v Jouleovo teplo

Elektromagnetické vlnění

Maxwellovy rovnice ve vakuu, bez volných nábojů a vodivého proudu $\rho = 0$ $\vec{i} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

soustava lineárních homogenních diferenciálních rovnic

řešení budeme hledat v komplexním tvaru

$$\tilde{\vec{E}}_c = \vec{E}_0 e^{-j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{x}\right)}$$

$$\tilde{\vec{B}}_c = \vec{B}_0 e^{-j\left(\omega' t - \vec{k}'.\vec{x}\right)}$$

z 1. rovnice $j.\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) e^{-j.\left(\omega t - \vec{k}.\vec{x}\right)} = j\omega' \vec{B}_0 e^{-j\left(\omega' t - \vec{k}'.\vec{x}\right)}$

platí-li $\omega = \omega'$ $\vec{k} = \vec{k}'$ $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right)$ $\vec{k}$ – vlnový vektor

z 2. rovnice $\vec{k}.\vec{E}_0 = 0$

ze 3. rovnice $\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$

ze 4. rovnice $\vec{k}.\vec{B} = 0$

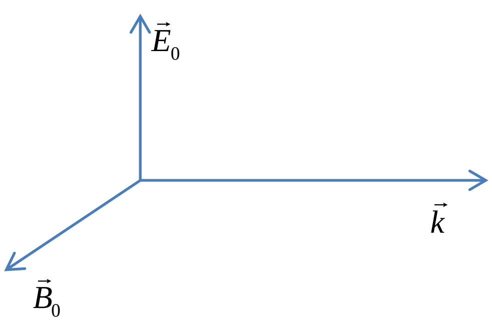
z 1. a 3. rovnice $\vec{k} \times \vec{B}_0 = \vec{k} \times \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right) = -\frac{1}{c^2} \omega \vec{E}_0$

$$-\frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}_0\right)\right) = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$$

$$-\vec{k}.\left(\vec{k}.\vec{E}_0\right) + \vec{E}_0\left(\vec{k}.\vec{k}\right) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0$$

poněvadž $\left(\vec{k}.\vec{E}_0\right) = 0$ $k^2 \vec{E}_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0$

$\rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$ platí vztah $\boxed{\omega^{\pm} = \pm \vec{c}.\vec{k}}$ vektory $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}$ tvoří pravotočivý systém



$$\tilde{\vec{k}} = \tilde{k}.\vec{e}_3$$

$$\tilde{\vec{E}}_c = \tilde{\eta}_c \vec{e}_1 e^{-\left(\omega t - \vec{k}.\vec{x}\right)}$$

$$\tilde{\vec{B}}_c = \frac{1}{c} \tilde{\eta}_c \vec{e}_2 e^{-\left(\omega t - \vec{k}.\vec{x}\right)}$$

Fyzické amplitudy

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\vec{E}}_c + \tilde{\vec{E}}_c^*\right) = \eta \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{x} - \alpha\right) \vec{e}_1$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\vec{B}}_c + \tilde{\vec{B}}_c^*\right) = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{c} \eta \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{x} - \alpha\right) \vec{e}_2$$

pro daný čas t nabývá amplituda *E* i *B* stejné hodnoty pro posunutí o Δx $\Delta\vec{x}.\vec{k} = 2\pi$

Vlnová délka je $\Delta x = \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ perioda vlny je $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Řešením Maxwellových rovnic ve vakuu je rovinná elektromagnetická vlna pohybující se fázovou rychlostí $v_f = c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

10^9 – giga (G)

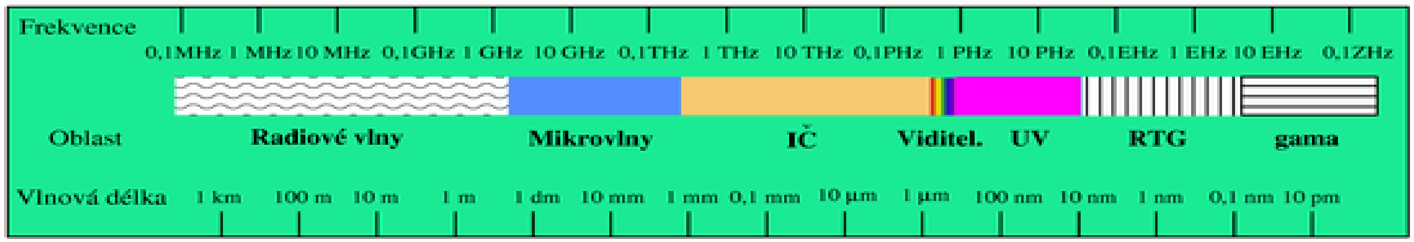
10^{12} – tera (T)

10^{15} – peta (P)

10^{18} – exa (E)

10^{21} – zetta (Z)

10^{24} – yotta (Y)

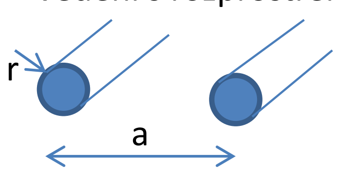


V roce 1887 prokázal Heinrich Hertz (1857 – 1894) existenci elektromagnetických vln.
Zdroj – netlumený rezonanční obvod, mikrovlnný rezonátor
jevy superpozice, interference, lomu, stojatého vlnění, lineární a kruhové polarizace

Charakteristická impedance prostředí $Z = \dfrac{E}{H} = \mu c_M = \dfrac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

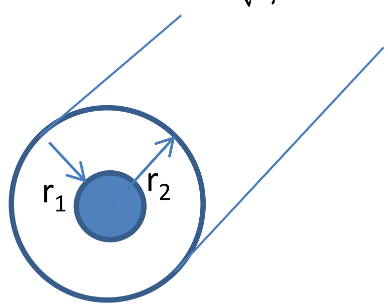
Impedance vakua $Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$

Vedení s rozprostřenými parametry



$Z = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \ln \dfrac{a}{r}$

Lecherovo vedení



$Z = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$

koaxiální vedení