

Kvazistacionární magnetické pole

NFUF103-4

2020/2021 M. Rotter

Magnetická indukce

Pokusy Hanse Christiana Oersteda (1777 – 1861) s vodiči protékanými elektrickým proudem, střelka kompasu se natočí kolmo ke směru přiloženého drátu, kterým protéká proud.

Magnetické pole vzniká i bez přítomnosti proudu v okolí zmagnetovaných předmětů (bylo známo již ve staré Číně).

Při změně magnetického pole vzniká elektromotorické napětí na vodičích.

Na pohybující se elektrický náboj působí v inerciální galileovské soustavě kromě elektrické síly i síla magnetická (Lorentzova síla)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

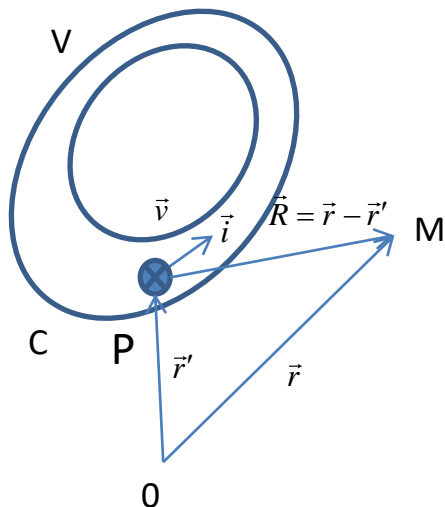
\vec{B} je jednotka magnetického pole (magnetická indukce) označená T (tesla) $\{B\} = \{E/v\} = \frac{V \cdot m^{-1}}{m \cdot s^{-1}} = \frac{V \cdot s}{m^2}$

Elementární práce magnetické síly $\delta W = \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$

Magnetická síla nemůže dodávat energii pohybující se nabitě částici, samotné magnetické pole nemůže částici uvést do pohybu (v urychlovačích částic slouží magnetické pole pouze k zakřivení jejich dráhy)

Magnetické pole Země $b \approx 0,5 \cdot 10^{-4}$ T, supravodivé solenoidy vytvářejí pole až 16 T, magnetická indukce pulzních magnetických polí dosahuje až ≈ 100 T

Analýzou Oerstedových pokusů (1814) dospěli Jean Baptiste Biot a Félix Savart a v konečné formulaci André Marie Ampère (1775 – 1836) ke vztahu popisujícímu vznik elementu magnetické indukce vyvolané pohybivým nábojem



element magnetické indukce $d\vec{B}(M)$ v bodě M dostatečně vzdáleném od vodiče – odvozeno z experimentu

V elementu dV objemu vodiče se nachází pohybivý náboj $\rho_m dV$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_m dV \left(\vec{v} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{i} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV \quad \text{Biotův – Savartův zákon}$$

Pro uzavřený obvod (prostor s $\vec{i} \neq 0$)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\vec{i} \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right) dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\vec{i}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV(\vec{r}')$$

Pro obvod vodiče s malým průřezem

$$I = \int_S \vec{i} d\vec{S} \quad \vec{i}(\vec{r}') dV = Id\vec{l} = Id\vec{r}'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

integrální Biotův – Savartův zákon

permeabilita vakua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

V soustavě SI platí

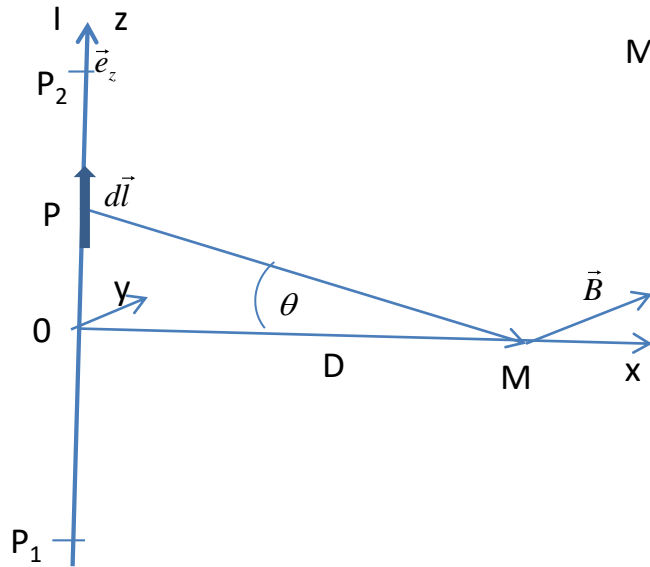
$$\epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$$

$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$

- rychlost světla ve vakuu

-fixovaná hodnota podle redefinice SI

Magnetická indukce přímého tenkého vodiče protékaného proudem I



Magnetická indukce B vytvořená proudem I mezi body P₁ a P₂

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_1}^{P_2} d\vec{l} \times \frac{P\vec{M}}{|P\vec{M}|^3}$$

Všechny příspěvky k \vec{B} leží ve směru \vec{e}_y

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_y \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dz}{|P\vec{M}|^2} \sin(\vec{e}_z, P\vec{M})$$

$$\sin(\vec{e}_z, P\vec{M}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$PM = \frac{D}{\cos \theta}$$

$$0P = D \cdot \text{tg} \theta = z$$

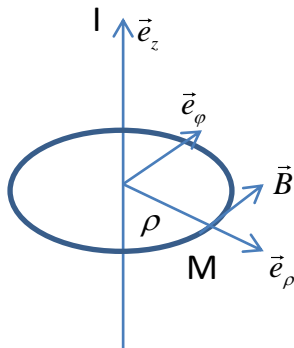
$$dz = \frac{dz}{d\theta} d\theta = D \left(\frac{d}{d\theta} \text{tg} \theta \right) d\theta = D \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\vec{B}(M) = \vec{e}_y \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_1}^{P_2} \frac{D}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{D^2} \cos \theta d\theta = \vec{e}_y \frac{\mu_0 I}{4\pi D} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi D} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

Pro nekonečně dlouhý vodič $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ $\theta_1 \rightarrow -\pi/2$

$$\vec{B}(M) \approx \vec{e}_y \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$$

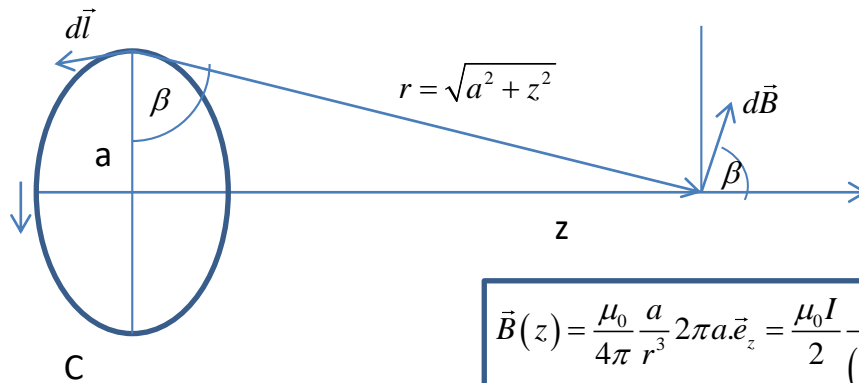


Ve válcových souřadnicích (ρ, φ, z) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{\rho} \vec{e}_\varphi$

Příklad: $I = 1 \text{ A}$, $\rho = 1 \text{ m} \rightarrow B = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$

směr pole: Ampérovo pravidlo pravé ruky – palec ve směru proudu, - prsty ve směru pole

Magnetické pole kruhového závitu



$$\cos \beta = \frac{a}{r}$$

uplatní se složka B ve směru osy z

$$B_z = B(r) \cos \beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cos \beta = \frac{\mu_0 I \cos \beta}{4\pi r^2} \oint_C dl$$

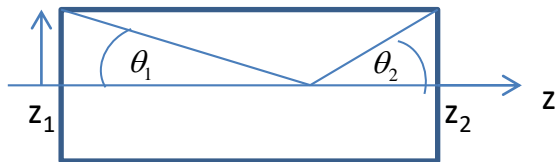
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a}{r^3} 2\pi a \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Uprostřed závitu $z = 0$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0}{2a} I \vec{e}_z$$

Příklad: $a = 5 \text{ cm}$, $I = 1 \text{ A} \rightarrow B \approx 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ T} \approx 1/2 b$
 b – horizontální složka magnetického pole Země

Magnetické pole na ose solenoidu



N_0 – počet závitů na jednotku délky

Integrace příspěvků jednotlivých závitů
 na délku dz připadá $N_0 dz$ závitů

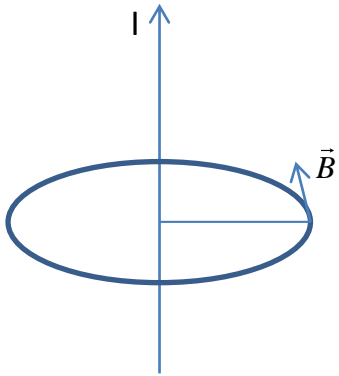
$$dB(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} N_0 dz$$

$$\vec{B}(z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0}{2} N_0 I \int_{z_1}^{z_2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \vec{e}_z \frac{\mu_0}{2} N_0 I \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]_{z_1}^{z_2}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} N_0 I (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \vec{e}_z$$

Pro nekonečný solenoid $\cos \theta_1 \rightarrow 1$, $\cos \theta_2 \rightarrow 1$

$$\vec{B} = \mu_0 N_0 I \vec{e}_z$$



Ampérův teorém

Magnetická indukce nekonečného přímého vodiče

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho} \vec{e}_\phi$$

Integrál cirkulace (křivkový integrál po uzavřené dráze) $\vec{B} \parallel d\vec{l}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B \cdot dl = B \oint_C dl = B \cdot 2\pi\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} 2\pi\rho = \mu_0 I$$

Platí pro libovolnou uzavřenou křivku C , nezávisí na poloměru. Libovolnou křivku lze složit z elementárních úseků kružnic a částí kolmých na \vec{e}_ϕ ro něž platí $\vec{e}_\phi \cdot d\vec{l} = 0$

a nepřispívají tedy k integrálu

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Ampérův teorém

Pro libovolnou plochu sklenutou nad křivkou C platí

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

s využitím Stokesova teorému dostaneme

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Musí obecně platit i pro integranty

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{i}$$

**Ampérův teorém
v lokálním tvaru**

Magnetický indukční tok

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad \text{rozměr} \quad [\Phi] = T \cdot m^2 = \frac{V \cdot s}{m^2} m^2 = V \cdot s = Wb \quad \text{weber – jednotka magnetického toku}$$

Elementární kvantum magnetického indukčního toku, uplatní se v Josephsonových jevech slabé supravodivosti

$$\Phi_0 = \frac{h}{2|e|} = 2,068 \cdot 10^{-15} Wb$$

Lokální tvar zákona zachování magnetického toku

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{i}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{div} \left\{ \vec{i}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} dV$$

$$\text{platí} \quad \text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} \quad \text{grad} \left(-\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \vec{i}(\vec{r}') \cdot \text{rot} \text{grad} \left(-\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \text{rot} \vec{i}(\vec{r}') \right\} dV \quad \text{rot} \vec{i}(\vec{r}') = 0 \quad \vec{i}(\vec{r}') \text{ nezávisí na proměnné } \vec{r}$$

oba členy v integrandu jsou nulové $\Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0$

z Gaussova – Ostrogradského teorému

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_V \text{div} \vec{B} \cdot dV = 0$$

Tok magnetického pole libovolnou uzavřenou plochou je nulový,

tok nezávisí na volbě plochy sklenuté nad křivkou C – magnetické pole má konzervativní tok

Vektorový potenciál

Magnetické pole **není konzervativní** $\text{rot}\vec{B} \neq 0$

magnetickou indukci \vec{B} nelze získat derivací skalárního potenciálu

Poněvadž $\text{div}\vec{B} = 0$ a platí identicky $\text{div}(\text{rot}\vec{a}) = 0$

- existuje vektorové pole \vec{A} nazvané **vektorový potenciál** takové, že platí

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

Tok magnetického pole plochou S , která je omezená křivkou C

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad \text{s využitím Stokesova teorému} \quad \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\Phi = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Tok nezávisí na ploše omezené křivkou C , v analogii s rozdílem potenciálu v elektrostatice, který nezávisí na dráze

Poznámka: v nepřítomnosti proudu v uvažované oblasti platí $\text{rot}\vec{B} = 0$ (Ampérův teorém)

- lze zavést skalární potenciál V° takový, že $\vec{B} = -\text{grad}V^\circ$

Vztah $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ určuje vektorový potenciál \vec{A} až na diferencovatelnou skalární funkci f

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}f \quad \vec{B}' = \text{rot}\vec{A}' = \text{rot}\vec{A} + \text{rot}(\text{grad}f) = \text{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

V magnetostatice se využívá Coulombova kalibrační podmínka (míra)

$$\text{div}\vec{A} = 0$$

Poissonovy rovnice v magnetostatice

Z Ampérova teorému $rot\vec{B} = \mu_0\vec{i}$ $\vec{B} = rot\vec{A}$ plyne $rot\vec{B} = rot(rot\vec{A}) = \mu_0\vec{i}$

Poněvadž platí obecně $rot(rot\vec{a}) = grad(div\vec{a}) - \Delta\vec{a}$ a $div\vec{A} = 0$ dostáváme

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{i}$$

Poissonovy rovnice (3 složky vektorů)

Tvar vektorového potenciálu získáme z analogie s elektrostatickým potenciálem

složka Poissonových r.

$$\Delta A_x = -\mu_0 i_x$$

Poissonova r. pro φ

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

analogie

$$\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 \quad \rho \rightarrow i_x$$

Elektrostatický potenciál

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

$$\rightarrow A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i_x}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

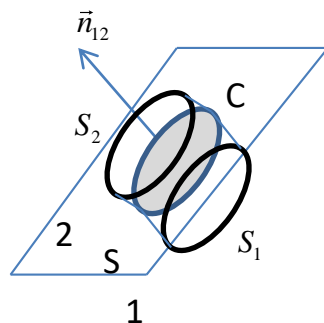
pro 1. složku

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Lze ukázat, že $\vec{B}(\vec{r}) = rot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V rot\left(\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{r_{12}}\right) dV(\vec{r}')$

- vede k formulaci Biotova – Savartova zákona (odvození po složkách)

Složky magnetické indukce na rozhraní

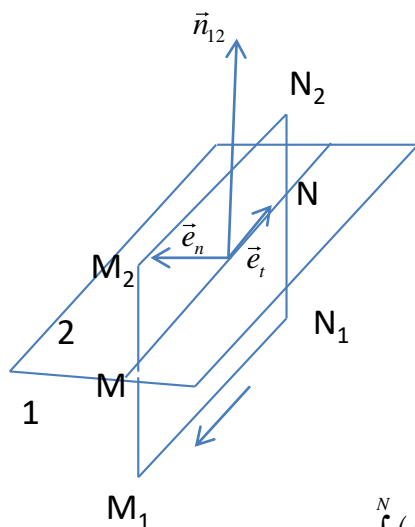


výšku válce snižujeme limitně k nule
tok pláštěm válce $\rightarrow 0$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 = \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS - \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{12} dS = 0 \quad \text{splyne-li podstava a víko } S_1 = S_2 = S$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Normálová složka magnetické indukce je na rozhraní spojitá



Z Ampérova teorému $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$\int_{M_2}^{N_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{N_2}^{N_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{N_1}^{M_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_M^N \vec{i}_s \cdot \vec{e}_n d\vec{l}$$

Výšku obdélníka snižujeme limitně k nule $M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M, N_2 \rightarrow N_1 \rightarrow N$,
- 2. a 4. integrál vymizí

$(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{n}_{12})$ - ortonormální báze jednotkových vektorů

$$\vec{e}_n = \vec{n}_{12} \times \vec{e}_t \quad \vec{e}_t = \vec{e}_n \times \vec{n}_{12} \quad d\vec{l} = \vec{e}_t \cdot dl$$

$$\int_M^N (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot (\vec{e}_n \times \vec{n}_{12}) dl = \int_M^N (\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)) \cdot \vec{e}_n \cdot dl = \mu_0 \int_M^N \vec{i}_s \cdot \vec{e}_n \cdot dl$$

platí obecně pro integrandy

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{i}_s$$

Tangenciální složka pole je nespojitá v přítomnosti povrchového proudu s hustotou \vec{i}_s

Rovnice elektrického a magnetického pole ve stacionárním režimu

Konzervativní charakter

intenzity elektrického pole

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

magnetického indukčního toku

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Spojitosť na rozhraní

tečných složek intenzity elektrického pole

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

normálových složek magnetické indukce

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Gaussova věta

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ampérův teorém

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{i}$$

Nespojitost na rozhraní

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{i}_s$$

skalární potenciál

$$\vec{E} = \text{grad} \varphi$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV(\vec{r}')$$

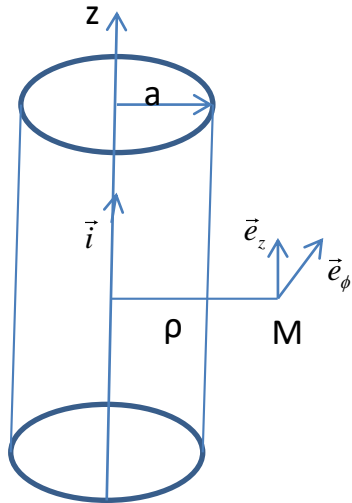
vektorový potenciál

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV(\vec{r}')$$

Příklady na řešení s využitím vektorového potenciálu

„tlustý vodič“



Pro nekonečný tenký vodič jsme odvodili výraz $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi$

Homogenní proud uvnitř vodiče $\vec{i} = i \vec{e}_z$ pro $\rho \leq a$
 $\vec{i} = 0$ pro $\rho > a$

$\vec{B}(M) = B(\rho) \cdot \vec{e}_\phi$ $A_\phi(M) = 0$ $\vec{A}(M) = A_z(\rho) \cdot \vec{e}_z$ (má směr \vec{i})

Z Ampérova teorému

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} B_\phi(\rho) \cdot \rho d\phi = 2\pi\rho B_\phi = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = \int_S i_z dS$$

pro $\rho \leq a$ $\int_S i_z dS = i \cdot \pi \cdot \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$

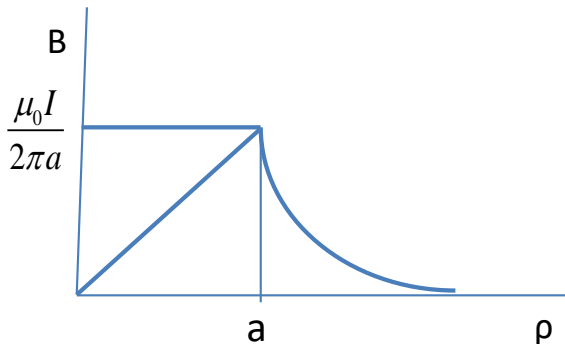
$$\vec{B}_{in} = \frac{i \pi \rho^2 \mu_0}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 i \rho}{2} \vec{e}_\phi$$

vnitřní pole

pro $\rho > a$ $\int_S i_z dS = i \pi a^2$

$$\vec{B}_{ex} = \frac{i \pi a^2 \mu_0}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 i a^2}{2\rho} \vec{e}_\phi$$

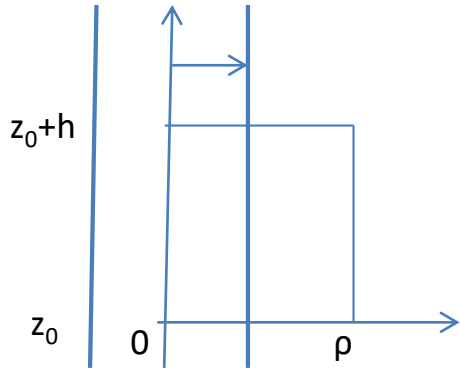
vnější pole



Pole je spojité pro $\rho = a$, vně vodiče je stejné jako pro tenký vodič

Odvození vektorového potenciálu

Použijeme vztah pro magnetický indukční tok $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{z_0}^{z_0+h} A_z(0) dz + \int_{z_0+h}^{z_0} A_z(\rho) dz = h \cdot [A_z(0) - A_z(\rho)]$$

horizontální úseky smyčky $\int \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$ $\vec{n} = \vec{e}_\phi$

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_0^\rho \int_{z_0}^{z_0+h} B_\phi(\rho) dz d\rho = h \cdot \int_0^\rho B_\phi(\rho) d\rho$$

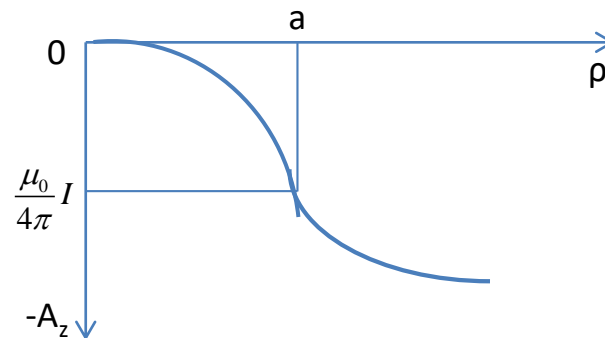
$$\text{pro } \rho \leq a \quad \int_0^\rho B_\phi d\rho = \int_0^\rho \frac{\mu_0 i \rho}{2} d\rho = \frac{\mu_0 i}{4} \rho^2$$

$$\text{pro } \rho > a \quad \int_0^\rho B_\phi d\rho = \int_0^a B_\phi^{in} d\rho + \int_a^\rho B_\phi^{ex} d\rho = \frac{\mu_0 i}{4} a^2 + \int_a^\rho \frac{\mu_0 i a^2}{2\rho} d\rho = \frac{\mu_0 i a^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{\rho}{a} \right)$$

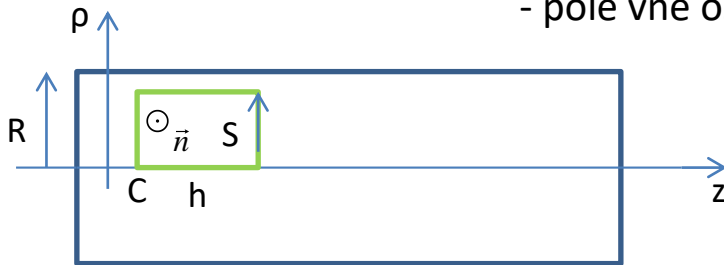
$$\text{pro } \rho \leq a \quad \vec{A}(\rho) = \left[A_z(0) - \frac{\mu_0 i \rho^2}{4} \right] \vec{e}_z$$

$$\text{pro } \rho > a \quad \vec{A}(\rho) = \left[A_z(0) - \frac{\mu_0 i a^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{\rho}{a} \right) \right] \vec{e}_z$$

volíme $A_z(0) = 0$



Nekonečně dlouhý solenoid - pole vně osy



Pole na ose solenoidu $\vec{B}(0) = \mu_0 N_0 I \vec{e}_z$
 $N_0 = \frac{N}{L}$ - počet závitů na jednotku délky solenoidu

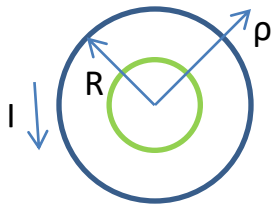
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = h [B_z(0) - B_z(\rho)] = \mu_0 \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS$$

pro $\rho < R$ $\int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = 0$ $B_z(0) = B_z(\rho) \rightarrow \vec{B}_{in} = \mu_0 N_0 I \vec{e}_z$ Pole uvnitř solenoidu mimo osu

pro $\rho > R$ $\int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = N_0 h I$ $B_z(0) - B_z(\rho) = h N_0 I \rightarrow \vec{B}_{ex} = 0$ Pole vně solenoidu je nulové

Výpočet vektorového potenciálu

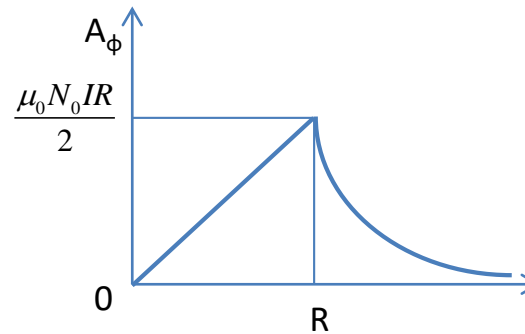
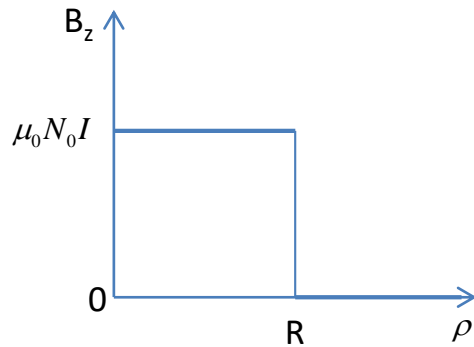
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 2\pi\rho A_\phi(\rho) \quad \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S B_z(\rho) dS \quad \vec{n} = \vec{e}_z$$

pro $\rho < R$ $\int_S B_z dS = \mu_0 N_0 I \pi \rho^2 \rightarrow \vec{A}_{in}(\rho) = \frac{\mu_0 N_0 I \pi \rho^2}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 N_0 I R}{2} \left(\frac{\rho}{R}\right) \vec{e}_\phi$ uvnitř

pro $\rho > R$ $\int_S B_z dS = \mu_0 N_0 I \pi R^2 \rightarrow \vec{A}_{ex}(\rho) = \frac{\mu_0 N_0 I \pi R^2}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 N_0 I R}{2} \left(\frac{R}{\rho}\right) \vec{e}_\phi$ vně solenoidu



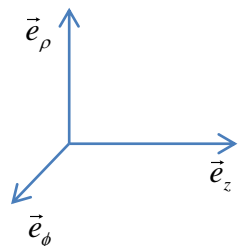
Magnetická indukce vně nekonečného solenoidu je nulová.
 Vektorový potenciál vně solenoidu má nenulovou hodnotu.

Bohmův – Aharonovův experiment (1950) prokázal účinek vektorového potenciálu na ohyb svazku elektronů v prostoru s nulovou magnetickou indukcí. Použili tenký monokrystal (whisker) železa místo tenkého solenoidu.

Poznámka: nespojitost magnetické indukce na povrchu solenoidu odpovídá vztahu pro nespojitost na rozhraní

$$\vec{B}_{ex} - \vec{B}_{in} = -\mu_0 N_0 I \vec{e}_z$$

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{i}_s$$

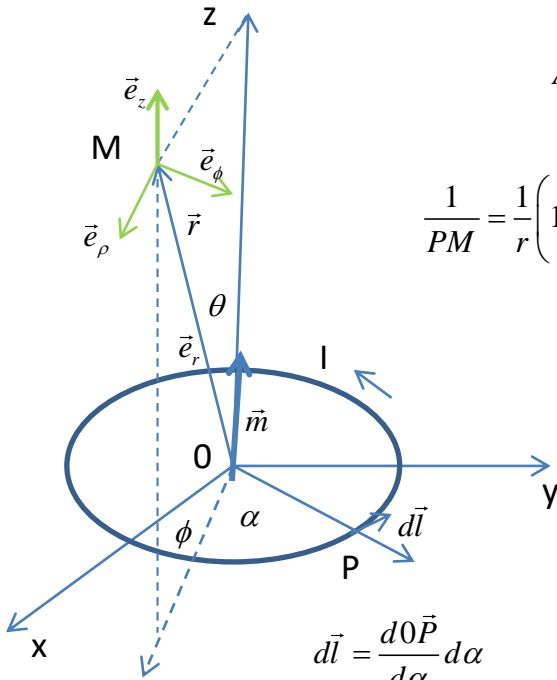


$$\vec{i}_s = N_0 I \vec{e}_\phi \quad \vec{n}_{12} = \vec{e}_\rho \quad \vec{e}_\rho \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\phi$$

Proudová smyčka jako magnetický dipól

Výpočet vektorového potenciálu je vhodnější než přímý výpočet magnetické indukce

Odvodili jsme již výraz pro magnetickou indukci na ose kruhové smyčky $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a}{r^3} 2\pi a \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l}}{PM} \quad PM = |\vec{PM}| = |\vec{OM} - \vec{OP}| = (r^2 + a^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP})^{1/2} \quad (\text{kosinová věta})$$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{r^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{r^3} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{OP}}{r^2}$$

použito: $r \ll a \quad \frac{r^2}{a^2} \rightarrow 0$

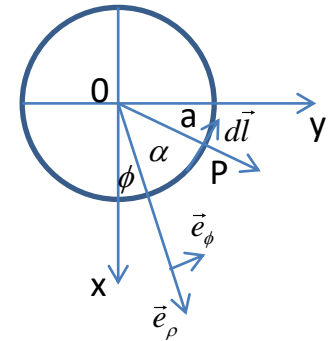
$(1-x)^n \approx 1-nx$ Taylorův rozvoj

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint_C d\vec{l} + \frac{1}{r^2} \oint_C (\vec{e}_r \cdot \vec{OP}) d\vec{l} \right]$$

$\oint_C d\vec{l} = 0$ pro uzavřenou smyčku

Vektorový potenciál v obecném bodě M v bázi $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$

$r\vec{e}_r$	$0\vec{P}$	$d\vec{l}$
ρ	$a \cos \alpha$	$-a \sin \alpha d\alpha$
0	$a \sin \alpha$	$a \cos \alpha d\alpha$
z	0	0



$$d\vec{l} = \frac{d0\vec{P}}{d\alpha} d\alpha$$

$$(\vec{e}_r \cdot \vec{OP}) = \frac{1}{r} \rho a \cos \alpha$$

$$d\vec{l} \cdot \vec{e}_\phi = a \cos \alpha d\alpha$$

Ze symetrie bude nenulovou pouze složka $A_\phi = \vec{A} \cdot \vec{e}_\phi$

Po dosazení:
$$A_\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \rho a \cos \alpha \cdot a \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I a^2 \rho}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha$$

Výpočet integrálu:
$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \pi + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad \rho = r \cdot \sin \theta$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\phi \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Definujeme magnetický moment proudové smyčky $\vec{m} = I \pi a^2 \vec{e}_z = I \cdot S \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{r})}{4\pi r^3}$$

Povšimněte si analogie s potenciálem elektrického dipólu
$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}$$

Ampérův magnetický moment $\vec{m} = I \cdot S \cdot \vec{n}$ má rozměr $\{m\} = A \cdot m^2$

Užívá se rovněž **Coulombův magnetický moment** $\vec{p}_m = \mu_0 \vec{m}$ s rozměrem $\{p_m\} = Wb \cdot m = V \cdot s \cdot m$

Magnetická indukce proudové smyčky

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right)$$

Platí obecně $\text{rot}(s \cdot \vec{v}) = s \cdot \text{rot} \vec{v} + (\text{grads} \times \vec{v})$ pro $s = \frac{1}{r^3}$ a $\vec{v} = \vec{m} \times \vec{r}$ $\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \text{rot}(\vec{m} \times \vec{r}) + \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\vec{m} \times \vec{r}) \quad \text{rot}(\vec{m} \times \vec{r}) = -(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{m} + \vec{m} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{m}) = -\vec{m} + 0 + 3\vec{m} - 0 = 2\vec{m}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} 2\vec{m} - \frac{3\vec{r}}{r^5} \times (\vec{m} \times \vec{r}) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [2\vec{m} + 3(\vec{m} \times \vec{e}_r) \times \vec{e}_r] \quad \text{platí: } (\vec{m} \times \vec{e}_r) \times \vec{e}_r = \vec{e}_r \cdot (\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m} \cdot (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r) = (\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{m}$$

Konečný výsledek:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{m}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right]$$

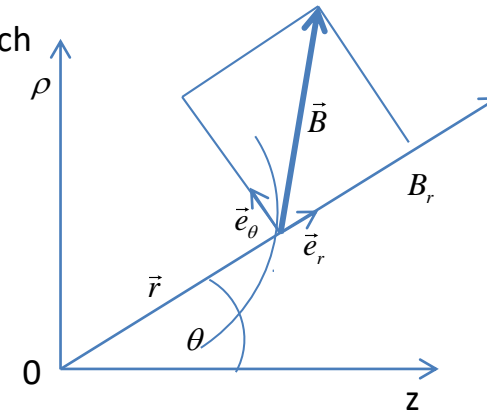
Analogický výraz s výrazem pro elektrické pole elektrického dipólu.
Vlastnosti obou polí jsou stejné.

Magnetickou indukcí dipólu lze zapsat v polárních souřadnicích

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$$

$$B_r = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m} \cdot \vec{e}_r] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} 2m \cdot \cos \theta$$

$$B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \cdot (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta) - \vec{m} \cdot \vec{e}_\theta] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} m \cdot \sin \theta$$



Parametrická rovnice siločar ze vztahu úměrnosti

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{r} = \frac{B_r}{B_\theta} d\theta = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \text{integrací } \int_{r_0}^r \quad \text{dostaneme} \quad \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) = 2 \ln |\sin \theta|$$

$$\text{Rovnice siločar} \quad r = r_0 \cdot \sin^2 \theta \quad r = r_0 \quad \text{pro} \quad \theta = \pi/2$$