

Elektrické pole

NFUF103-1

2020/2021 M. Rotter

Předmluva

Prezentace přednášky NFUF-103 vznikaly v letním semestru 2019/2020 pro distanční výuku v době pandemie nemoci COVID-19. elektrickém poli. Pandemie pokračovala i v dalším akademickém roce, tento soubor prezentací Odpovídá přednáškám v letním semestru roku 2020/2021. Distanční výuka nemůže plně nahradit prezenční přednášky. Pokusil jsem se standardní výklad rozšířit o komentáře, které obvykle přednášku prezentovanou na tabuli provázejí. Prosím posluchače, aby tyto prezentace sledovali pozorně, snažili se je pochopit i za pomoci konfrontace s jinými učebními texty. Prakticky všechna fakta obsažená v těchto prezentacích naleznete, v často rozšířené podobě, v učebnici B. Sedlák, I. Štoll: Elektřina a magnetismus , Academia Praha 2002 (3. vydání, předchozí vydání je volně k dispozici v elektronické podobě na stránkách Matfyzpres). Prezentovaná přednáška vychází z učebnice J. Ph. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger: Electromagnétisme, Masson Paris 1991. Přidrží se tradičního postupu výkladu klasické elektrodynamiky od jednoduššího k složitějšímu, od stacionárního elektrického a magnetického pole přes kvazistacionární jevy až k obecně nestacionárním projevům elektrodynamiky (Maxwellovy rovnice).

Praha, únor 2021

Elektrický náboj

Účinky elektrického náboje jsou známy již z antiky. Jantar, který je mineralizovanou pryskyřicí fosilních jehličnanů, se třením textilem nabíjí a přitahuje drobné nekovové předměty. Tyto jevy zaznamenal v 6. stol. př. n. l. Thales z Miletu. Z řeckého názvu jantaru „ήλεκτρον“ (élektron) je odvozen název celé této oblasti fyziky. Pověstné je tření ebonitové tyče liščím ohonem, dnes častěji trolitulové tyče textilem (získaný náboj byl označen jako záporný). Skleněná tyč třená amalgamovanou kůží poskytuje kladný náboj. Byly pozorovány přitažlivé síly mezi opačně nabitými tělesy a také výboje mezi nimi. Bylo možno rozlišit mezi tělesy, která vedla elektrický náboj – vodiči a izolátory.

Od 18. století se intenzivně zkoumaly vlastnosti statické elektřiny i elektrického proudu získaného pomocí galvanických článků. V roce 1897 dokázal J. J. Thomson, že elektrický proud je způsoben proudem nabitých částic – **elektronů**. Existenci elementárního náboje a jeho velikost prokázal v roce 1911 R. A. Millikan, když měřil rychlost pádu nabitých kapek oleje v gravitačním poli a ve vertikální elektrickém poli.

Intuitivní vlastnosti elektrického náboje:

- je vždy vázán na hmotu
- může mít kladné i záporné znaménko (záporný náboj elektronu je konvence)
- účinky nábojů se skládají
- náboj je konzervativní veličina
- je invariantní – nezávisí na referenčním galileovském systému

Fixovaná hodnota náboje elektronu $e = -1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ A}\cdot\text{s}$ je jednou z fundamentálních konstant, na nichž je založena revidovaná soustava základních fyzikálních jednotek **SI**.

$m_e = 9,109\,383\,7015(28) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ je klidová hmotnost elektronu. (CODATA 2018)

Elektrony a jádra – základní stavební kameny hmoty. Atomová jádra jsou složena z protonů a neutronů, mezi nimiž působí tzv. silná interakce.

Neutrony jsou elektricky neutrální, jejich hmotnost je $m_n = 1,674\,927\,498\,04(95) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Protony mají stejnou velikost náboje jako elektrony avšak s opačným znaménkem.

$m_p = 1,672\,621\,923\,69(51) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ je hmotnost protonu, $(m_p/m_e = 1836,152\,673\,43(11))$

Pro účely charakterizace rozdělení náboje zavádíme:
(jednotkou náboje je coulomb $C = A \cdot s$)

Objemové rozdělení s objemovou hustotou $\rho [C \cdot m^{-3}]$

element náboje $dQ = \rho dV$

celkový náboj v objemu V

$$Q = \int_V \rho dV$$

Plošné rozdělení s plošnou hustotou $\sigma [C \cdot m^{-2}]$, např. na povrchu kovového tělesa

element náboje $dQ = \sigma dS$

celkový náboj na ploše S

$$Q = \int_S \sigma dS$$

Lineární rozdělení s lineární hustotou $\eta [C \cdot m^{-1}]$, např. nabitý drát

element náboje $dQ = \eta dl$

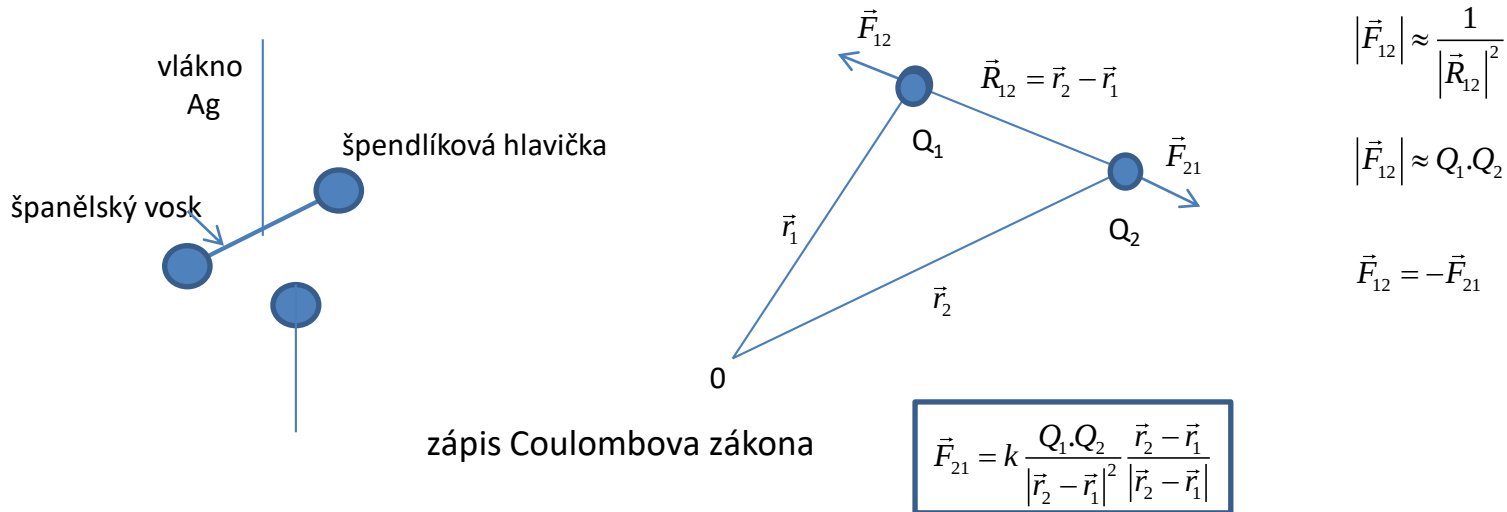
celkový náboj na křivce L

$$Q = \int_L \eta dl$$

Bodové rozdělení lze vyjádřit pomocí objemové hustoty a δ –funkce, průměr atomu je $d \approx 10^{-10} \text{ m}$, průměr atomového jádra $d \leq 10^{-14} \text{ m}$, určení rozměru elektronu omezují Heisenbergovy relace neurčitosti.

Coulombův zákon

V roce 1785 sestrojil vojenský inženýr Charles Augustin de Coulomb (1736 – 1806) torzní váhy pro měření malých sil a pomocí nich odvodil vztah pro sílu, kterou na sebe působí dvě nabitá tělesa. Určil, že síla je nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti nabitých těles, její velikost je úměrná součinu velikostí nábojů a že síly působící na náboje jsou stejné velké a opačného směru.



V soustavě jednotek SI

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\frac{\text{síla} \cdot \text{vzdálenost}^2}{\text{náboj}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Permitivita (dielektrická konstanta) vakua

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} (\text{Fm}^{-1})$$

Náboj 1 C působí na stejně velký náboj ve vzdálenosti 1 m silou $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \cdot 10^9 \text{ N}$

Intenzita elektrického pole

Umístíme testovací náboj q_t do polohy $\vec{r}_2$ $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{R}_{12}|^3} \vec{R}_{12} q_t$

zavedeme vektorovou funkci intenzity elektrického pole působeného v bodě $\vec{r}_2$ nábojem Q_1 na testovací náboj jednotkové velikosti $q_t = +1$ C

$$\vec{E}_2(Q_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}_{12}}{|\vec{R}_{12}|^3} Q_1$$

Rozměr intenzity elektrického pole je [N/C], respektive [V/m]

Intenzita elektrického pole je měřitelná v celém prostoru s výjimkou místa výskytu náboje Q_1 , v němž by divergovala.

Intenzita elektrického pole N nábojů $Q_i(\vec{r}_i)$ se skládá podle pravidel skládání vektorů.

$$\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i(\vec{r}_i)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_i)$$

Pro objemové rozložení náboje bude Q_i nahrazeno výrazem $\rho(\vec{r})dV$ a sumace prostorovým integrálem, analogicky pro plošné nebo lineární rozdělení náboje.

$$\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Intenzita není definovaná na nabitě ploše nebo nabitě křivce.

Rozložení vektoru intenzity pole lze popsat pomocí **siločar** – křivek konstruovaných tak, aby v každém jejich bodě měla intenzita $\vec{E}$ směr tečny ke křivce, stejný směr a smysl.

Siločáry pole bodového náboje mají radiální směr, k homogenně nabitě rovině mají směr normály.

Diferenciální vektorové operátory

Pomocí Coulombova zákona lze v každém bodě prostoru spočítat složky vektoru intenzity $\vec{E}(\vec{r})$ v kartézských pravoúhlých souřadnicích (E_x, E_y, E_z), obdobně pro válcové nebo kulové souřadnice. Vlastnosti elektrického pole v daném bodě lépe určí operátorové výrazy nezávislé na souřadném systému vytvořené pomocí **Hamiltonova vektorového operátoru (nabla)**

- v kartézských souřadnicích je nabla

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Operátorový výraz **gradient** převádí skalární pole na vektorové, vyznačuje v daném bodě směr a velikost vzrůstu skalární veličiny s .

$$\text{grad}s(\vec{r}) = \vec{\nabla}s(\vec{r}) = \vec{i} \frac{\partial s}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial s}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial s}{\partial z}$$

Operátorový výraz **divergence** převádí vektorové pole na skalární a určuje tok vektoru elementární plochou uzavírající daný bod.

$$\text{div}\vec{A}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Operátorový výraz **rotace** převádí vektorové pole na jiné vektorové pole, jeho velikost odpovídá elementární cirkulaci kolem daného bodu.

$$\text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Operátorový výraz **laplace** může být aplikován na skalár nebo na vektor.

$$\Delta s = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

Uvedme několik identit, které budeme v dalším výkladu potřebovat. Jejich odvozením a důkazy se budete zabývat ve cvičení a v příslušné teoretické přednášce. Důkazy některých z nich plynou přímo z vlastností skalárního nebo vektorového (nekomutativního) součinu vektorů.

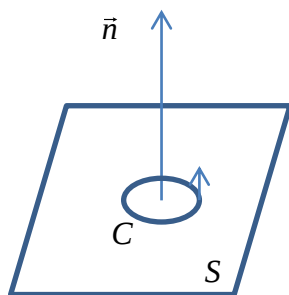
$$\text{divgrads} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} s = \Delta s$$

$$\text{rotgrads} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} s) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) s = 0$$

$$\text{divrot}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = 0$$

$$\text{rotrot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = \text{graddiv}\vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Tok vektoru intenzity elektrického pole



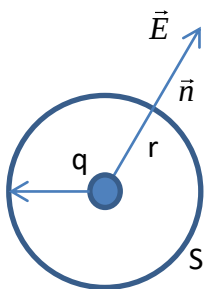
normála k ploše S – jednotkový vektor $\vec{n}$
orientace křivky C – pravidlo pravé ruky

Definice toku Φ vektoru orientovanou plochou

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Tok uzavřenou plochou kolem izolovaného náboje q,
- nejjednodušší příklad: koule s nábojem ve středu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{n}$$



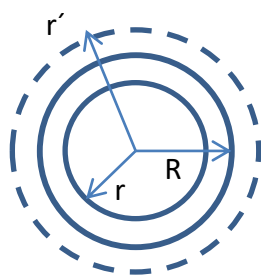
$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

Gaussova věta (z elektrostatiky)
platí pro libovolnou uzavřenou
plochu s nábojem uvnitř

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Gaussova věta platí pro libovolně umístěné náboje uvnitř uzavřené plochy, pro jejich libovolný počet. Dovoluje určit intenzitu pole ve speciálních geometriích bez nutnosti výpočtu příspěvku každého náboje. Ověřuje platnost Coulombova zákona $|\vec{E}| \approx \frac{1}{r^2}$

Příklady: homogenně nabitá koule s poloměrem R , s hustotou náboje ρ a celkovým nábojem Q

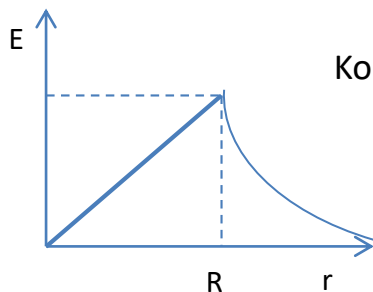


$$r' > R \quad \Phi = 4\pi r'^2 E(r') = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \rho$$

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{4\pi R^3 \rho}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r'^2} \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} \quad - \text{pole vně koule}$$

$$r \leq R \quad \Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} |\vec{r}| \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad - \text{pole uvnitř koule}$$

Na rozhraní nabitě koule $r = R$ má pole spojitou hodnotu $E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$



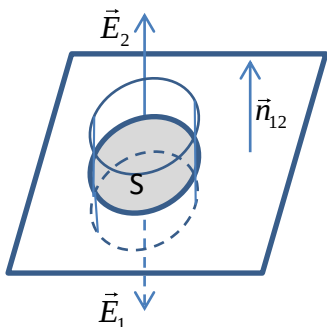
Koule s nábojem Q pouze na povrchu (kovová koule, vodivá kulová slupka)

$$r < R \quad \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{vnitřní pole } E_{in} = 0 \quad (\text{stínění, Faradayova klec})$$

$$r \geq R \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{nespojitosť} \quad \partial E(r=R) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Stejná závislost jako vně homogenně nabitě koule – odpovídá poli bodového náboje Q umístěného ve středu koule.

Příklad: nekonečná homogenně nabitá rovina s plošnou hustotou σ



ze symetrie je $\vec{E} \parallel \vec{n}_{12}$
- tok prochází pouze podstavami válce

$$\Phi = \int_S (\vec{E}_1 \cdot (-\vec{n}_{12}) + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12}) dS = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$\vec{n}_{12} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

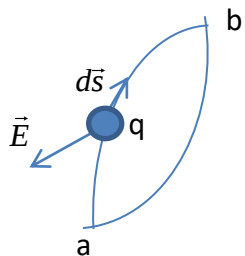
- nespojitost normálové složky pole při průchodu nabitou plochou

Elektrostatický potenciál

K popisu elektrického pole je často výhodnější použít skalární výrazy odvozené z práce konané k přenesení náboje.

Práce nutná k přenesení jednotkového náboje z bodu **a** do bodu **b** proti elektrickým silám pole $\vec{E}$

$$W = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



Pokud by výsledek integrace závisel na dráze – práce by se mohla získat pohybem po smyčce v poli nepohyblivých nábojů → rozpor

Práce závisí pouze na koncových bodech – elektrické pole je **konzervativní**

$$W = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^{a'} \vec{E} \cdot d\vec{s} - \int_{a'}^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{a'}^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

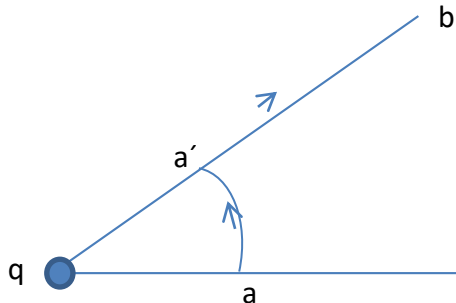
na oblouku a – a' je $\vec{E} \perp d\vec{s} \Rightarrow \int_a^{a'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ $|\vec{r}_a| = |\vec{r}_{a'}|$

→ pro jednotkový náboj $q = 1$ lze zapsat

$$W_{jedn} = \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)$$

skalární funkce – **elektrostatický potenciál**

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} + konst$$



Elektrostatický potenciál je určen až na konstantu. Úroveň nulového potenciálu klademe do nekonečna, případně do vodivé plochy spojené s nekonečnem, např. zemský povrch, uzemněné vodivé plochy.

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{P_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad P_0 \text{ klademe do nekonečna} \quad \varphi(P_0) = 0$$

pro bodový náboj q v počátku souřadného systému

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

aditivní vlastnost potenciálu pro N nábojů q_i

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

pro diferenciál platí $d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$ tedy

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

pro odpovídající složky diferenciálu

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad} \varphi}$$

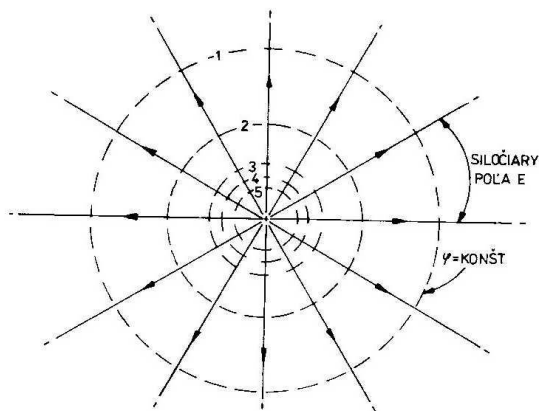
z vektorové identity $\text{rot} \vec{E} = \text{rot}(-\text{grad} \varphi) = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} \varphi) = 0$ nutná a postačující podmínka existence potenciálního pole

2 blízké body A a B leží na ploše konstantního potenciálu (ekvipotenciální plocha) $d\varphi = 0$
jejich vzdálenost označíme $d\vec{r}$ platí $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$

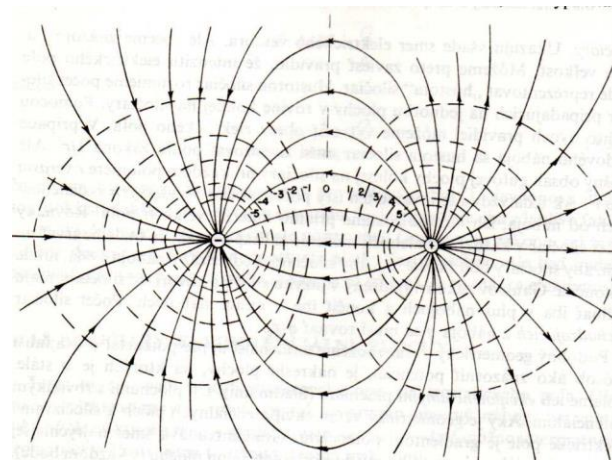
→ vektor elektrického pole E má směr normály k ekvipotenciální ploše

Využívá se ke konstrukci siločar z měření čar konstantního potenciálu v elektrolytické vaně.

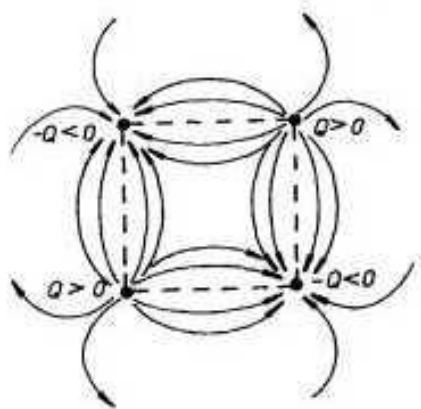
Některé příklady siločar a ekvipotenciálních čar



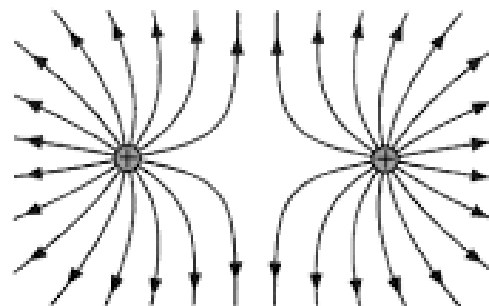
kladný bodový náboj



2 stejné nesouhlasné náboje



4 náboje - kvadrupól



2 stejné souhlasné náboje

Gaussův – Ostrogradského teorém

teorém vektorového počtu vycházející z definice divergence jako toku uzavřenou plochou kolem daného bodu

tok vektoru $\vec{F}$ uzavřenou plochou S $\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

těleso lze postupně dělit na části až k elementárnímu objemu dV , celkový tok bude součtem toků přes uzavřenou plochu S_i jednotlivých dílů

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n}_i dS_i$$

na cvičení si dokážete z konstrukce v kartézských souřadnicích, že $\text{div} \vec{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \oint_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n}_i dS_i$

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n}_i dS_i = \sum_{i=1}^N V_i \left[\frac{\oint_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n}_i dS_i}{V_i} \right]$$

limitním přechodem $V_i \rightarrow 0$ a $N \rightarrow \infty$
a $\sum_{i=1}^N V_i \rightarrow \int_V dV$ dostaneme

$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_V \text{div} \vec{F} dV$$

Gaussův – Ostrogradského teorém

převádí plošnou integraci na objemovou

vyjděme z Gaussovy věty z elektrostatiky

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

pro náboj rozložený v prostoru s objemovou hustotou ρ

$$q = \int_V \rho dV$$

tok vektoru $\mathbf{E}$

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

platí obecně i pro integranty v libovolném bodě prostoru, kde je pole definováno

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Gaussova věta v diferenciálním tvaru

poněvadž

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} s) = \Delta s$$

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Poissonova rovnice

Denis Poisson (1781-1840)

lineární diferenciální rovnice 2. řádu

jednoznačně řešitelná při zadání okrajových podmínek

v oblasti s nulovou hustotou náboje $\rho = 0$

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = 0$$

Laplaceova rovnice

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Stokesův teorém

převádí křivkový integrál na plošný integrál

cirkulace vektoru $\mathbf{F}$ po uzavřené křivce C

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

křivku C lze postupně dělit až k elementární smyčce kolem daného bodu

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i$$

na cvičení si dokážete geometrický význam výrazu pro normálovou složku rotace vektoru $\mathbf{F}$

$$(\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i}{S_i} \quad \Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N S_i \left[\frac{\oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{s}_i}{S_i} \right]$$

limitním přechodem $N \rightarrow \infty, S_i \rightarrow 0$

$$\Gamma = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S (\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

Stokesův teorém

Sir George Stokes (1819-1903)

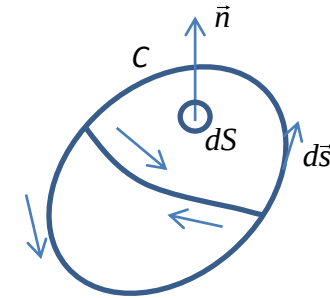
v poli $\mathbf{E}$ konzervativních sil

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

platí

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

konzervativní nevírové pole



Elektrický dipól

soustava dvou nábojů stejné velikosti a opačného znamení
mohou se k sobě přiblížit až na atomovou vzdálenost
- základní kámen nábojové struktury dielektrik

výpočet vektorové veličiny intenzity pole je velmi obtížný,
vhodnější je výpočet skalární veličiny potenciálu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[\frac{\vec{r} - \vec{b}/2}{|\vec{r} - \vec{b}/2|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{b}/2}{|\vec{r} + \vec{b}/2|^3} \right]$$

$$\vec{r}_+ + \vec{b} = \vec{r}_-$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r}_+|} - \frac{1}{|\vec{r}_-|} \right]$$

pro větší vzdálenost od dipólu či pro elementární dipól
lze pro $|\vec{b}| \ll |\vec{r}|$ položit $\vec{r}_+ \cdot \vec{r}_- \approx r^2$ $\vec{r}_- - \vec{r}_+ \approx b \cdot \cos \vartheta$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r}_-| - |\vec{r}_+|}{|\vec{r}_-| |\vec{r}_+|} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b \cos \vartheta}{r^2} \frac{r}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

dipólový moment $\vec{p} = Q \cdot \vec{b}$

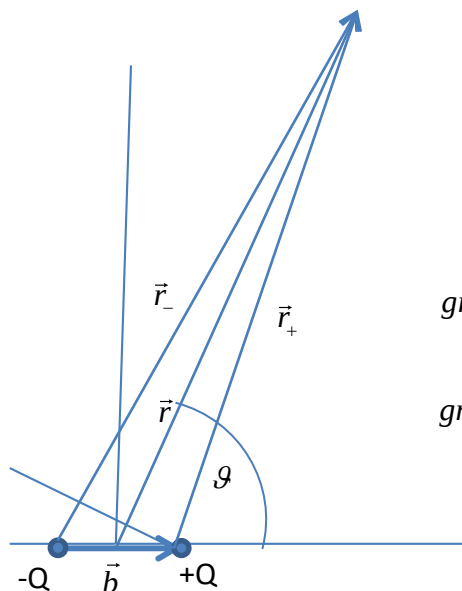
výpočet intenzity pole dipólu

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\text{grad} \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{p} \cdot \vec{r}) + \frac{1}{r^3} \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right]$$

$$\text{grad} \frac{1}{r^3} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) + \vec{j} \dots = \vec{i} \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \vec{j} \dots \quad \text{grad} \frac{1}{r^3} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

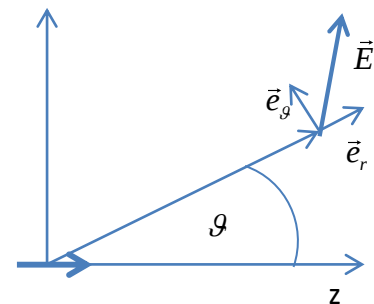
$$\text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} (p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} (\dots) + \dots = \vec{p}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$



elektrické pole dipólu je osově symetrické vůči směru dipólu
 intenzita pole vyjádřená v polárních souřadnicích

$$E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^3} \quad E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}$$



Elektrický dipól v elektrickém poli

síla působící na dipól $\vec{F}(\vec{r}) = Q[\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)] \approx Q \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} b_x + \frac{\partial E_y}{\partial y} b_y + \frac{\partial E_z}{\partial z} b_z \right] = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})$

$\vec{F} = 0$ v homogenním poli (nezávislém na souřadnici)

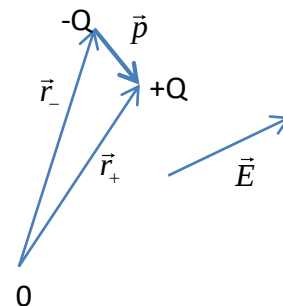
moment silové dvojice $\vec{M} \approx (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{F}_+ = \vec{b} \times \vec{F}_+ = \vec{b} \times Q \cdot \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$

pro blízké náboje a $\vec{E}_+ \approx \vec{E}_-$

energie dipólu v elektrickém poli (za stejných předpokladů)

$$E_p = Q(\varphi(\vec{r}_+) - \varphi(\vec{r}_-)) \approx -Q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{b} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Rovnovážná poloha dipólu odpovídá orientaci dipólu ve směru pole
 – minimum energie, nulový moment silové dvojice



Multipolární rozvoj

umožňuje spočítat potenciál od nejsymetričtějšího rozložení nábojů k obecnějším omezená část prostoru vyplněná náboji různých velikostí a polaritou

forma zápisu potenciálu souboru nábojů $q_i(\vec{r}_i)$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + r_i^2)^{1/2} \quad (\text{cosinová věta})$$

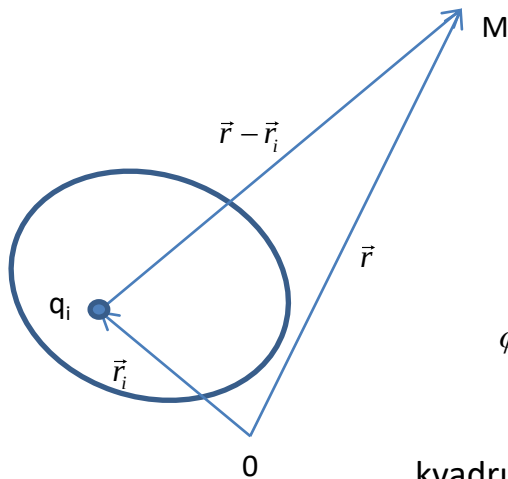
$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2} \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} - \frac{r_i^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} \right)^2 + \dots \right]$$

s využitím Taylorova rozvoje do malých 1. řádu

$$r_i \ll r$$

potenciál se rozepíše podle multipólů

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) + \dots$$



$$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \sum_{i=1}^N q_i$$

unipolární příspěvek

– veškerý náboj soustředěn v počátku

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \right) \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

dipolární příspěvek $\rightarrow q_i \vec{r}_i \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \Rightarrow \vec{p}_i \cdot \vec{e}_r$

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \right) \sum_{i=1}^N q_i \left[\frac{3}{2} (\vec{r}_i \cdot \vec{e}_r)^2 - \frac{r_i^2}{2} \right]$$

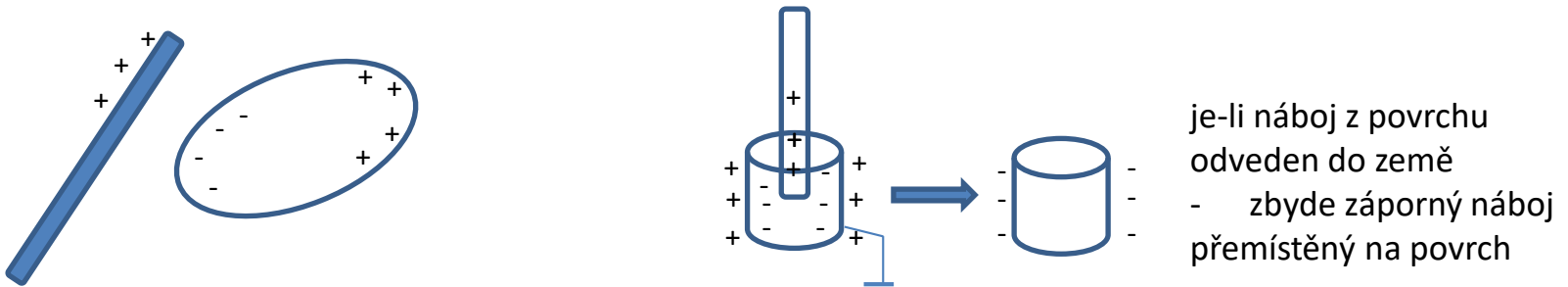
kvadrupolární příspěvek

$$\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{D}{4r^3} (3\cos^2 \vartheta - 1)$$

kvadrupólový moment $D = 2 \sum_{i=1}^N q_i r_i^2$

Vodiče v elektrickém poli

Jev elektrostatische indukce – přiblíží-li se náboj ke kovovému tělesu, nastává přerozdělení náboje vlivem sil mezi náboji



Přemísťování volného náboje v kovovém tělese je způsobeno coulombovskou silou mezi náboji. Kladným nábojem je označen nedostatek elektronů oproti stavu izolovaného tělesa. Přerozdělení náboje probíhá extrémně rychle.

Základní problém elektrostatiky

potenciál vodiče odpovídá náboji, který byl na něj přenesen
– vztah potenciálu a náboje na daném tělese musí být jednoznačný
uvnitř tělesa $-\text{grad}\varphi = \vec{E} = 0$

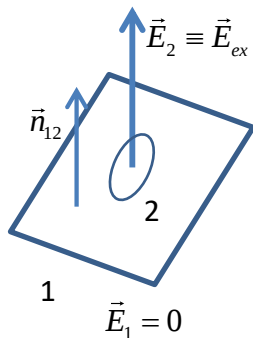
potenciál uvnitř tělesa je všude stejný, roven potenciálu na povrchu,
pokud by potenciál na povrchu tělesa nebyl všude stejný – vzniklo by pole $\vec{E} \neq 0$
a proud, který by potenciál vyrovnal

Vztah mezi náboji a potenciály na vodičích

elektrostatická rovnováha – náboj pouze na povrchu $Q = \oint_S \sigma dS$

rozložení náboje ovlivní přítomnost blízkých nabitých těles

v realitě – náboje v povrchové vrstvě konečné tloušťky, potenciálová bariéra brání volným nábojům opustit vodič → výstupní práce

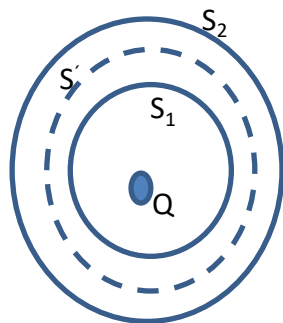


$$\vec{n}_{12} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

uvnitř vodivého tělesa $\vec{E}_1 = 0$ $\vec{E}_{ex} = \vec{E}_2 \parallel \vec{n}_{12} \equiv \vec{n}_{ex}$

$$\vec{E}_{ex} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{ex}$$

Coulombův teorém



bez náboje Q uvnitř dutiny v kovovém tělese:

$$\vec{E}_{in} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{n}_{ex1} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

po vložení náboje Q do dutiny – uvnitř vodiče je pole nulové

$$\oint_{S_1'} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{S_1} \sigma_1 dS = 0 \quad \text{musí být} \quad \oint_{S_1} \sigma_1 dS = -Q$$

na vnitřní ploše se naindukuje náboj -Q ke kompenzaci Q

Princip elektrostatického stínění

Je-li těleso uzemněno, $\varphi_{ex} = \varphi_2 = 0$ chová se navenek jako nenabitě i když je dovnitř vložen náboj

Izolovaný vodič v prostoru

Superpozice 2 rovnovážných rozdělení náboje na vodiči je opět rovnovážné rozdělení. Povrchové rozdělení náboje na izolovaném vodiči má všude stejné znamení, totéž znamení jako potenciál a celkový náboj.

$$\vec{E} \cdot \vec{n}_{ex} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\text{grad} \varphi \cdot \vec{n}_{ex} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{pro } \sigma > 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0 \quad \text{potenciál klesá od povrchu tělesa k nekonečnu, kde } \varphi = 0$$

také celkový náboj je kladný $Q = \oint_S \sigma dS$

Plošné hustoty náboje dvou rovnovážných stavů jsou navzájem úměrné. Lze zavést pojem **kapacity** jako charakteristiky samotného vodiče - určuje náboj, který lze umístit na vodič k dosažení daného potenciálu.

$Q = C \cdot \varphi$

Jednotkou kapacity je **farad F** $[F] = [C/V]$ vždy $C > 0$

$$Q = \oint_S \sigma dS \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\oint_S \sigma dS}{\oint_S \frac{\sigma dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

Alternativně ze znalosti průběhu intenzity pole

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}_{ex} \quad \oint_S \sigma dS = C \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \Gamma - \text{spojnice od vodiče do nekonečna}$$

$$\Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_{ex} dS}{\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

Příklad: kapacita vodivé koule

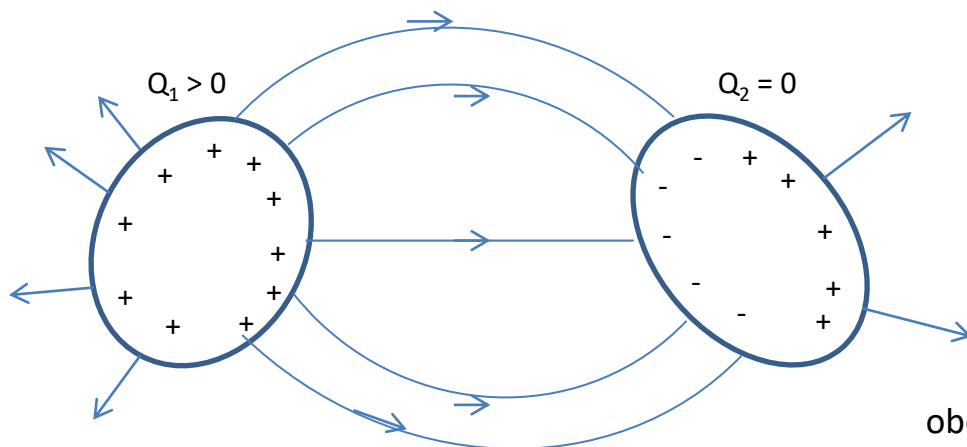
potenciál povrchu koule – stejný jako potenciál bodového náboje Q ve středu koule
 R – poloměr koule

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad C = \frac{Q}{\varphi} \quad \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$R = 1 \text{ cm} \quad C = 4 \cdot \pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \text{ F} = 1,1 \text{ pF}$$

$$\text{vodivá plocha Země } (R = 6378 \text{ km}) \quad C = 4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ F} = 709 \text{ }\mu\text{F}$$

Rovnováha soustavy dvou vodičů



$$1. \quad Q_1 \neq 0 \quad Q_2 = 0$$

$$\varphi_1^1 = B_{11}Q_1 \quad \varphi_2^1 = B_{21}Q_1$$

$$2. \quad Q_1 = 0 \quad Q_2 \neq 0$$

$$\varphi_1^2 = B_{12}Q_2 \quad \varphi_2^2 = B_{22}Q_2$$

obecná situace – superpozice 1. a 2.

$$\varphi_1 = \varphi_1^1 + \varphi_1^2 = B_{11}Q_1 + B_{12}Q_2$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^1 + \varphi_2^2 = B_{21}Q_1 + B_{22}Q_2$$

odtud odvodíme vztahy pro Q_1 a Q_2

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{\varphi_1 B_{22} - \varphi_2 B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21}} \quad \text{a pod.}$$

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2$$

$$Q_2 = C_{12}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2$$

$$C_{11} = \frac{B_{22}}{B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21}}$$

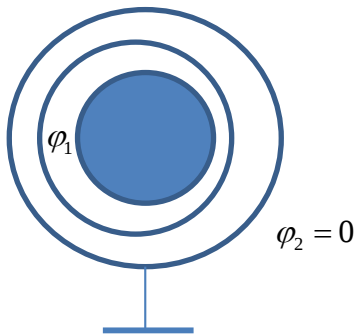
C_{11}, C_{22} – kapacitní koeficienty (kladné)

C_{12}, C_{21} – influenční koeficienty (záporné)

kondenzátor – tvořen dvěma vodiči s totální influencí (všechny siločáry z jednoho vodiče končí na druhém vodiči) $Q_1 = -Q_2$

například: koule v dutině větší vodivé koule

$$Q_1 + Q_2 = 0$$



pro uzemněný vnější vodič

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1 = Q$$

$$Q_2 = -Q_1 = C_{21}\varphi_1$$

kapacita kondenzátoru $C \equiv C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = \frac{Q}{\varphi_1}$

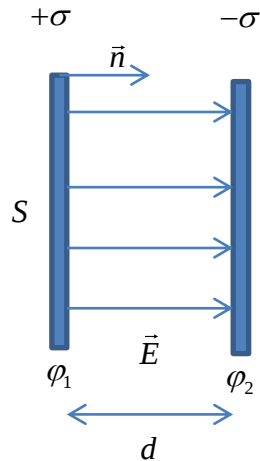
vnější plocha bez náboje

obecně:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

platí i pro neuzemněný vnější vodič s potenciálem $\varphi_2 \neq 0$

Deskový kondenzátor



platí $\vec{E} \cdot d\vec{r} = -d\varphi$ $\sigma = \frac{Q}{S}$ $\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ Coulombův teorém

$$-\int_1^2 d\varphi = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{r} \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2) = U = E \cdot d$$

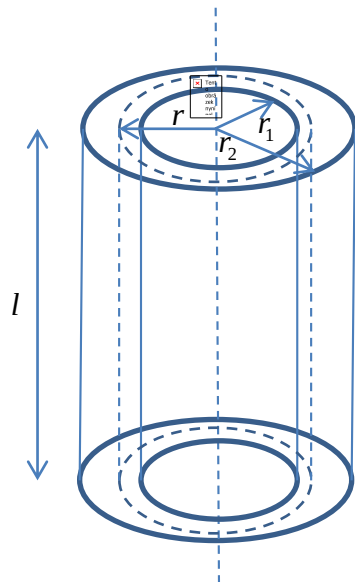
$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d = \frac{Q}{C}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

v přiblížení velké
plochy S a malé
vzdálenosti desek d

Příklad: $S = 4 \text{ cm}^2$, $d = 2 \text{ mm}$

$$C = \varepsilon_0 \frac{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \cdot 0,2 \text{ m} = 17,7 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 1,77 \text{ pF}$$



Válcový kondenzátor

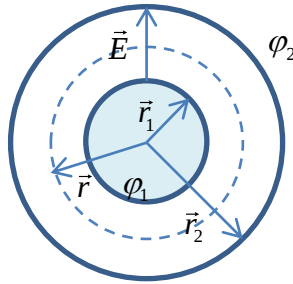
$$\Phi_l = E_r 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \vec{E}_r = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

kapacita délky l nekonečného válcového kondenzátoru

Sférický kondenzátor



tok intenzity pole povrchem koule s poloměrem r

$$\Phi = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

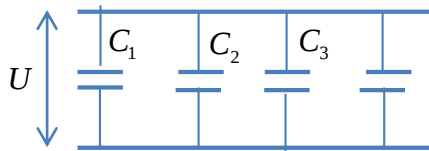
Řazení kondenzátorů

vedle sebe (paralelně)

za sebou (sériově)

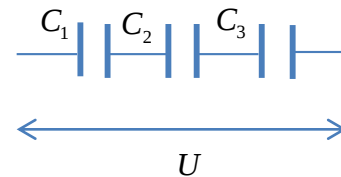
společné napětí, rozdělení náboje

sdílený náboj, rozdělené napětí



$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n C_i U = U \sum_{i=1}^n C_i$$

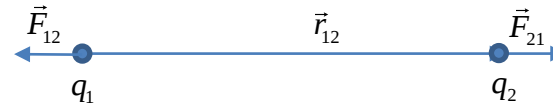


$$U = \sum_{i=1}^m U_i = \sum_{i=1}^m \frac{Q}{C_i}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{C_i}$$

Potenciální energie systému nábojů

Silové působení 2 nábojů



elementární práce $dA = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3} (-\vec{r}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} \cdot d\vec{r}_2)$ platí $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ $d\vec{r}_{12} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1$

$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3} r_{12} dr_{12}$ element potenciální energie $dE_p = -dA = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3} r_{12} \cdot dr_{12}$ $r_{12} = r_{21}$

Integrací pro $E_p = 0$ při $r_{12} \rightarrow \infty$ $E_p = \int_{\infty}^{r_{12}} dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \int_{\infty}^{r_{12}} \left(-\frac{dr_{12}}{r_{12}^2} \right) = q_2 \cdot \varphi_1(2) = q_1 \cdot \varphi_2(1)$ $\varphi_2(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}}$

Zapisuje se $E_p = \frac{1}{2} (q_1 \cdot \varphi_2(1) + q_2 \cdot \varphi_1(2))$ lze rozšířit na N nábojů $E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \cdot \varphi(i)$ kde $\varphi(i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{r_{ij}}$

Při spojitém rozdělení náboje $E_p = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \varphi dV$

Není třeba vynechávat potenciál náboje v místě náboje – integrant - $dV \sim \epsilon^3$ $\varphi \sim \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \rho \cdot \varphi dV \sim \epsilon^2 \rightarrow 0$
pro $\epsilon \rightarrow 0$

Pro plošné rozložení náboje $E_p = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \varphi dS$

Na vodiči je všude konstantní potenciál φ

$$E_p = \frac{1}{2} \varphi \int_S \sigma dS = \frac{1}{2} Q \varphi = \frac{1}{2} (C \varphi) \varphi = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Potenciální energie celého prostoru $E_p = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \varphi dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\varphi \cdot \text{div} \vec{E}) dV$ z Gaussovy věty

$$\varphi \cdot \text{div} \vec{E} = \varphi \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \rightarrow \varphi \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \cdot E_x) - E_x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\varphi \cdot E_x) + E_x^2$$

pro všechny složky $E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V [\text{div}(\varphi \cdot \vec{E}) + |\vec{E}|^2] dV$ $\int_V \text{div}(\varphi \cdot \vec{E}) dV = \oint_S \varphi \cdot \vec{E} \cdot \vec{n} dS$ - z Gaussova teorému

rozšíříme-li objem integrace do nekonečna $R \rightarrow \infty$ $\varphi \approx 1/R$ $E \approx 1/R^2 \Rightarrow \varphi \cdot E \approx 1/R^3$ $S \approx R^2$

$$\int_S \varphi \cdot \vec{E} \cdot \vec{n} dS \approx 1/R \rightarrow 0 \quad \text{pro } R \rightarrow \infty$$

$$E_p = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

pro integraci přes celý prostor

Hustota elektrostatické energie

$$\epsilon_p = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Elektrostatická energie kondenzátoru

$$E_p = \frac{1}{2} \varphi_1 \int_{S_1} \sigma dS + \frac{1}{2} \varphi_2 \int_{S_2} \sigma dS = \frac{1}{2} (\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2) \quad \text{pro kondenzátor platí} \quad -Q_1 = Q_2 \quad U = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$E_p = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

energie, kterou může kondenzátor dodat vnějšímu obvodu při připojení k jeho elektrodám

kondenzátor s konstantním nábojem $Q = \text{konst.}$

při pohybu elektrod koná práci na úkor vnitřní energie



$$F_x = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_Q$$

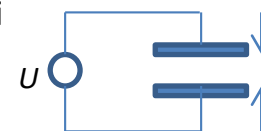
kapacita kondenzátoru je funkcí vzdálenosti desek x

$$E_{p,Q} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$$

$$F_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2 x}{2 \varepsilon_0 S} \right) = - \frac{Q^2}{2 \varepsilon_0 S}$$

desky nabitého kondenzátoru se přitahují

kondenzátor s konstantním napětím $U = \text{konst.}$ – připojený k vnějšímu zdroji



energie je dodávána vnějším zdrojem $dW_{ex} = U \cdot dQ$

$dW_{ex} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \cdot dQ_i + F \cdot dx$ změna vnitřní energie kondenzátoru + virtuální práce

$$F \cdot dx = 2dE_p - dE_p = +dE_p \quad \Rightarrow \quad F_x = + \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \right)_U \quad F_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C(x) \cdot U^2 \right) = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon_0 S}{x} \right) = - \frac{\varepsilon_0 S}{2x^2} U^2$$

desky kondenzátoru se přitahují

princip elektrostatičkého voltmetru, Thomsonovy elektrostatičké váhy, Pohlavy vážky

Millikanův pokus (1911)

Robert Andrews Millikan (1868 – 1953)

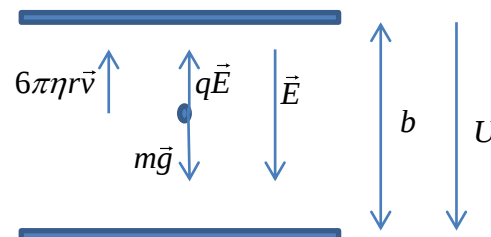
Nobelova cena za fyziku v roce 1923

silové působení na nabitě těleso padající v tíhovém poli

kapička oleje ze spreje nabitá od iontů vzduchu

ionizovaných zdrojem záření α

pád v gravitačním poli a ve svislém elektrickém poli



rychlost pádu bez pole: $U = 0$ $v_0 = \frac{mg}{6\pi\eta r}$

hmotnost kapky $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

rychlejší klesání $U_1 \leq 0$ $v_1 = \frac{qE + mg}{6\pi\eta r}$

síla viskózního tření ve vzduchu $F_v = -6\pi\eta r \vec{v}$

stoupání $U_2 \geq 0$ $v_2 = \frac{qE - mg}{6\pi\eta r}$
nebo pomalejší klesání

pro $U = 0$ lze vyjádřit poloměr kapky $v_0 = \frac{2r^2 \rho g}{9\eta}$

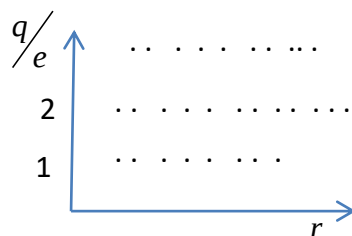
$$\Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta v_0}{\rho g}}$$

pro $v_0 + v_2 = \frac{qE}{6\pi\eta r}$ získáme náboj kapky

$$q = 6\pi\eta b r \frac{v_0 + v_2}{U}$$

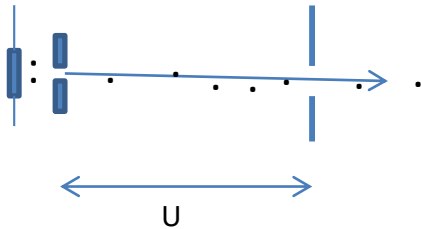
podobně pro v_1 a v_2

výsledky měření
v diskrétních skupinách



důkaz existence nejmenšího
(elementárního) náboje $e = -1,602 \dots 10^{-19} \text{ C}$

elektrony v podélném elektrickém poli



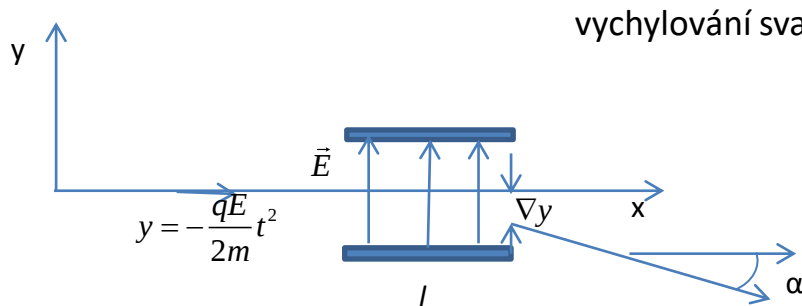
elektronové dělo, lineární urychlovač
zdroj elektronů – žhavená katoda

přírůstek energie $dE_p = q \cdot U = \frac{1}{2} m v^2$

jednotka energie $1 \text{ eV} = 1,602 \dots 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,602 \dots 10^{-19} \text{ J (W} \cdot \text{s)}$

Ize urychlovat i jiné nabitě částice – protony, ionty

elektrony v příčném elektrickém poli



vychylování svazku urychlených elektronů

analogie vodorovného vrhu
v tíhovém poli

$$x = v_0 \cdot t \quad m \ddot{y} = -qE \quad y = -\frac{qE}{2m} t^2$$

po průletu vychylovacími deskami délky l

$$l = v_0 \cdot \tau \quad \tau = \frac{l}{v_0} \quad \nabla y = \frac{qE}{m} \frac{l^2}{v_0^2} \quad \alpha = \left. \frac{d(\nabla y)}{dx} \right|_{x=l} = \frac{qE}{m} \frac{l}{v_0^2}$$

princip funkce obrazovky osciloskopu
(i do vysokých frekvencí)