Fakultativní doplňky

NFUF103-10

2020/2021 M. Rotter

Silové působení mezi vodičem protékaným proudem a rovnoběžně se pohybujícím nábojem

(Jay Orear: Physics kap. 17, §5)

A – z experimentu odvozený Biotův – Savartův zákon určuje magnetickou indukci **B**, kterou
Ve vzdálenosti y vytváří proud I protékající přímým vodičem

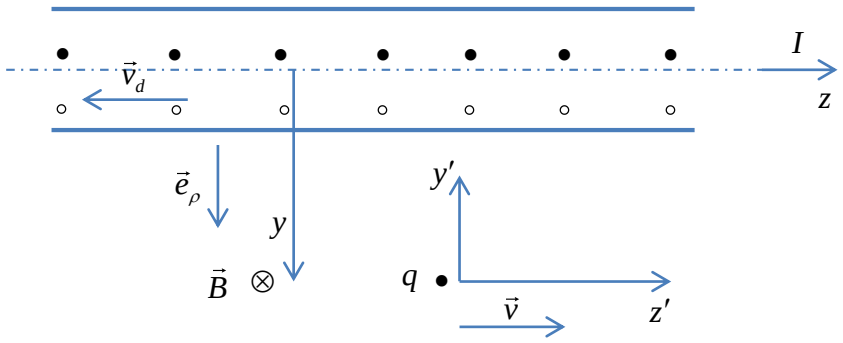
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{y}\vec{e}_\varphi$$

Na náboj q pohybující se rychlostí **v** ve vzdálenosti y podél vodiče ve směru proudu působí Lorentzova síla

$$\vec{F} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Náboj je přitahován k vodiči silou (ve válcových souřadnicích s osou z v ose vodiče ve směru proudu I)

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{qvI}{y}\vec{e}_\rho$$



B – podle zákonů speciální teorie relativity jeví se pozorovateli v čárkované soustavě spojené s nábojem q, která se pohybuje rychlostí **v**, vzdálenosti nábojů ve vodiči zkrácené podle Lorentzovy transformace faktorem $\sqrt{1-v^2/c^2}$ Lineární hustoty nábojů ve vodiči jeví se z tohoto důvodu zvětšené

$$\lambda'_+ = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\lambda_+ \qquad \lambda'_- = \frac{1}{\sqrt{1-v'^2_-/c^2}}(\lambda_-)_0$$

Vodič protékaný proudem I je nábojově neutrální $\lambda_+ = -\lambda_-$

V klidové soustavě souřadné vodiče jeví se však lineární hustota elektronů λ_- pohybujících se driftovou rychlostí $\vec{v}_d$ jako $\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1-v_d^2/c^2}}(\lambda_-)_0$

Rychlost v'_- je výsledkem relativistického skládání rychlostí $\vec{v}$ a $\vec{v}_d$ $v'_- = \frac{v_d + v}{1+v_d v/c^2}$

Pro zjednodušení zápisů se zavádí obvyklé bezrozměrné veličiny $\beta = v/c$ a $\beta_d = v_d/c$

dostaneme $\lambda'_- = \frac{\sqrt{1-\beta_d^2}}{\sqrt{1-\left[\frac{\beta_d+\beta}{1+\beta_d\beta}\right]^2}}\lambda_- = \frac{(1+\beta_d\beta)\sqrt{1-\beta_d^2}}{\sqrt{(1-\beta^2).(1-\beta_d^2)}}\lambda_- = \frac{1+\beta_d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda_-$

Z hlediska pozorovatele v čárkované soustavě souřadné se vodič jeví jako nabitý nábojem $\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_-$

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda_+ + \frac{1+\beta_d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda_-$$

Poněvadž $\lambda_+ = -\lambda_-$ dostaneme $$\lambda' = \frac{\beta_d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{v_d v}{c^2}\lambda_-$$

Vyjádříme-li proud ve vodiči pomocí lineární hustoty elektronů a jejich driftové rychlosti $I = -\lambda_-.v_d$

Je náboj vodiče z hlediska pozorovatele v soustavě souřadné spojené s pohybujícím se nábojem q záporný a je dán vztahem $$\lambda' = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{vI}{c^2}$$

C – záporný náboj λ' vytváří kolem vodiče elektrické pole $\vec{E}'$, které má radiální směr, jeho velikost závisí na vzdálenosti y a působí přitažlivou silou na náboj q. Hodnotu pole určíme z Gaussova teorému

$$\oint_S \vec{E}'.\vec{n}dS = E'.S = E'.2\pi yl = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda'.l}{\varepsilon_0} \qquad \text{a tedy} \qquad E' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

Na náboj q působí v čárkované soustavě síla $$F' = q.E' = \frac{q.v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 y}\left(-\frac{1}{c^2}\right)$$

Pozorovatel v klidové soustavě spojené s vodičem vidí však sílu F transformovanou podle teorie relativity

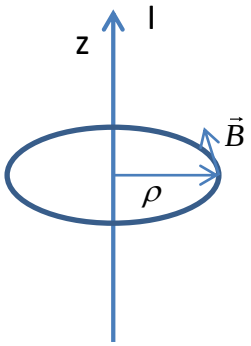
$$F = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, F' = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{qvI}{y}$$

Poněvadž $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ dostali jsme výraz totožný s výrazem odvozeným z Biotova – Savartova zákona. Q.E.D.

Aplikací Coulombova zákona a Gaussova teorému s využitím Lorentzovy transformace bez jakýchkoli dalších přiblížení jsme získali sílu, kterou působí vodič protékaný proudem na náboj q pohybující se podél vodiče rychlostí v. Relativistická Lorentzova transformace i pro rychlosti nepatrné ve srovnání s rychlostí světla vyjádřila přesně magnetické účinky proudu. Toto odvození neznamená, že Biotův - Savartův zákon je pouhou relativistickou korekcí Gaussova teorému, existuje i odvození v opačném smyslu.

Odvození Biotova – Savartova zákona z výrazu pro vektorový potenciál

Ampérův teorém zobecňuje vlastnosti magnetické indukce vyvolané proudem v přímém vodiči



$$\oint_c \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$$

S využitím Stokesova teorému lze formulovat Ampérův teorém v lokálním tvaru

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{i}$$

Vlastnost pole magnetické indukce (nezřídlovost) zachycuje vztah

$$div\vec{B} = 0$$

Tomuto vztahu vyhovuje zavedení vektorového potenciálu **A**

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

Vektorový potenciál je dán až na diferncovatelnou funkci f $\vec{A}' = \vec{A} + gradf$

Zavádí se doplňující kalibrační Coulombova podmínka (míra) $div\vec{A} = 0$

Po dosazení do Ampérova teorému $rot\vec{B} = \mu_0 \vec{i}$

$rot\vec{B} = rotrot\vec{A} = \mu_0 \vec{i}$ $\quad rotrot\vec{A} = graddiv\vec{A} - \Delta\vec{A}$

dostaneme $\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{i}$ Poissonovy rovnice (pro 3 složky vektoru)

Porovnáme tvar Poissonovy rovnice pro elektrostatický potenciál $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
s Poissonovou rovnicí pro jednu složku vektorového potenciálu

$\Delta A_x = -\mu_0 i_x$ $\quad \rho \to i_x$ $\quad \frac{1}{\varepsilon_0} \to \mu_0$

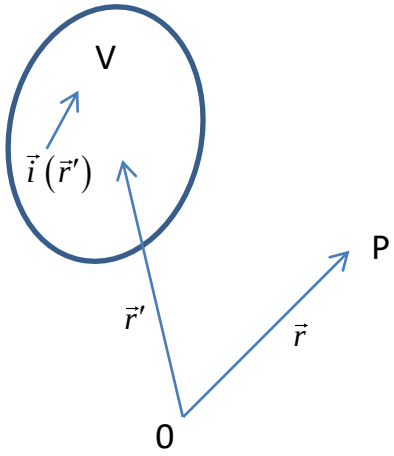
Rovnice jsou si podobné – podobná musí být i jejich řešení

Pro elektrostatický potenciál v prostorovém rozložení náboje jsme odvodili $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$

Z analogie pro složku vektorového potenciálu $A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{i_x(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$

Analogicky pro ostatní složky vektoru

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV$$



Provedeme operaci rotace $rot\vec{A} = \vec{B}$ pro složku B_x

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left\{ i_z(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) - i_y(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right\} dV(\vec{r}')$$

označíme $r_{12} = \left\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right\}^{1/2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -\frac{(y-y')}{r_{12}^3} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -\frac{(z-z')}{r_{12}^3}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V -\frac{1}{r_{12}^3}\left\{i_z.(y-y') - i_y.(z-z')\right\}dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{1}{r_{12}^3}\left\{\vec{i}\times\vec{r}_{12}\right\}_x dV$$

analogicky pro další složky vektoru $\vec{B}(\vec{r})$

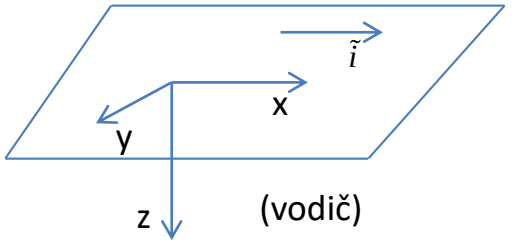
$$\vec{B}(\vec{r})\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{i}(\vec{r}')\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}dV$$

což je tvar Biotova – Savartova zákona Q.E.D.

Povrchový Kelvinův jev (skin – efekt)

Povrchovým jevem se označuje pokles amplitudy střídavého proudu od povrchu do vnitřku vodiče.
Na vodič nepůsobí žádné vnější pole, jev je způsoben autoindukcí procházejícího proudu.
Uvažujme rovinné rozhraní mezi poloprostory vodiče a vakua. Proud teče ve směru osy x, $\vec{i} = i_x \vec{e}_x$
osa z směřuje kolmo dovnitř vodiče. Vodič představuje lineární, izotropní nemagnetické a nepohyblivé prostředí.

$$\rho = 0 \qquad div\vec{E} = 0 \qquad \vec{i} = \sigma\vec{E} \qquad \left|\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| \le |\vec{i}|$$



Ze dvou Maxwellových rovnic $rot\vec{B} = \mu_0 \vec{i} = \mu_0 \sigma \vec{E}$ $\qquad rot\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

aplikací operace rotace na 2. rovnici dostaneme

$$rotrot\vec{E} = graddiv\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = rot\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{B}\right) = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 i_x}{\partial z^2} = \frac{\mu_0 \sigma^2}{\sigma}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Hustota proudu závisí na souřadnici z a na čase t $\vec{i} = i_x(z,t)\vec{e}_x$

dostaneme $\boxed{\frac{\partial^2 i_x}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial i_x}{\partial t} = 0}$

Řešení diferenciální rovnice budeme hledat v harmonickém tvaru $i_x(z,t) = i_m(z)\cos\left[\omega t - \phi(z)\right]$

Použijeme vyjádření v komplexních veličinách (imaginární jednotku označíme j)

$$\tilde{i}_x = i_m(z)\exp j\left(\omega t - \phi(z)\right) = \tilde{i}_m(z)e^{j\omega t} \qquad \tilde{i}_m(z) = i_m(z)e^{-j\phi(z)}$$

Provedeme derivace $\frac{\partial^2 \tilde{i}_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \tilde{i}_m}{\partial z^2}\exp(j\omega t)$ $\frac{\partial \tilde{i}_x}{\partial t} = j\omega \tilde{i}_m \exp(j\omega t)$

Komplexní vyjádření umožňuje separovat časovou závislost hustoty proudu a vyjádřit její okamžitou Hodnotu.

Pro komplexní amplitudu hustoty proudu dostaneme $\frac{\partial^2 \tilde{i}_m}{\partial z^2} - j\omega\mu_0\sigma\tilde{i}_m = 0$

Řešení hledáme ve tvaru $\tilde{i}_m = \tilde{A}\exp(\tilde{r}.z)$

dostaneme $\tilde{r}^2 - j\omega\mu_0\sigma = 0$ odtud $\boxed{\tilde{r} = \pm\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}}$ platí $\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$

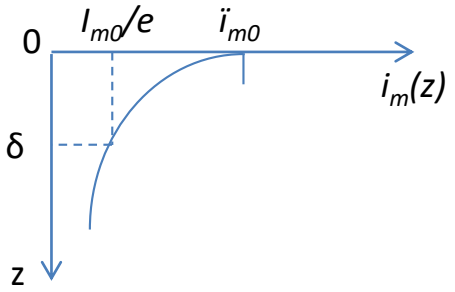
$\tilde{r} = \pm(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \pm(1+j)\frac{1}{\delta}$ veličina $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\sigma}}}$ se nazývá hloubka vniku (skinu)

Řešení pro komplexní amplitudu je $\tilde{i}_m = A_1\exp\left(\frac{z}{\delta} + j\frac{z}{\delta}\right) + A_2\exp\left(-\frac{z}{\delta} - j\frac{z}{\delta}\right)$

Řešení musí být konečné i pro $z \to \infty$, musí být $A_1 = 0$. Z okrajové podmínky pro z = 0 plyne $A_2 = i_{m0}$

$$\boxed{\vec{i} = i_{m0}\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{e}_x}$$

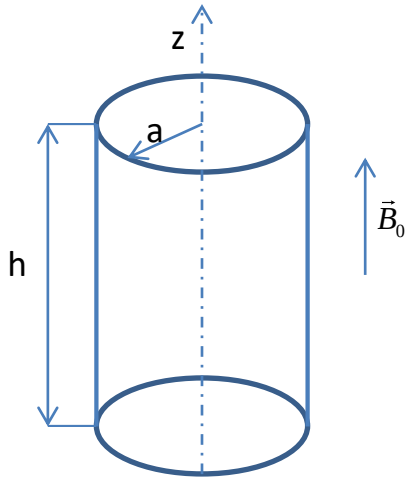
Amplituda hustoty proudu klesá exponenciálně s hloubkou, fáze se mění lineárně



V mědi ($\sigma = 5{,}9.10^7$ s/m) je hloubka vniku pro střídavý proud 50 Hz asi δ = 9,3 mm, pro 10 MHz je δ ≈ 21 μm a proud teče prakticky jen po povrchu.

Vířivé (Foucaultovy) proudy

Statické magnetické pole $\mathbf{B_0}$ proniká do objemu nemagnetického vodiče téměř beze změny.
Časově proměnné magnetické pole vyvolá díky elektromagnetické indukci ve vodiči
Indukované elektrické pole $\mathbf{E_1}$. $rot\vec{E}_1 + \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = 0$ které dám vzniknout indukovanému proudu $\vec{i}_1 = \sigma \vec{E}_1$



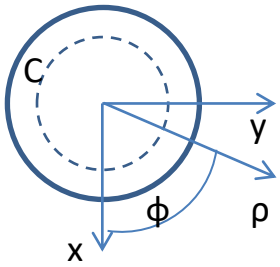
Do válcového vodiče, jehož osa je shodná s osou *z* proniká homogenně magnetické pole $\vec{B}_0 = B_0(t)\vec{e}_z$

Indukovaná hustota proudu leží v rovině kolmé na osu *z*

$$\vec{i}_1 = \sigma E_1(\rho, t)\vec{e}_\phi$$

Indukované proudy opisují soustředné kružnice.
Jednu z nich o poloměru ρ použijeme jako dráhu cirkulace v Maxwellově – Faradayově rovnici. Vzniká elektromotorické napětí e $e = \oint_C \vec{E}_1 d\vec{r} = -\int_S \frac{d\vec{B}_0}{dt}.\vec{n}dS$ protože $\vec{n} = \vec{e}_z$

$\vec{E}_1.2\pi\rho = -\frac{dB_0}{dt}\pi\rho^2$ odtud $\vec{E}_1 = -\frac{1}{2}\rho\frac{d\vec{B}_0}{dt}$ $\rightarrow \vec{i}_1 = \frac{\sigma}{2}\rho\frac{dB_0}{dt}\vec{e}_z$



Indukované (vířivé) proudy tvoří kružnice a jejich hustota proudu je úměrná jejich poloměru, největší je při okraji válcového vodiče.
Smysl proudů je takový, že pole $\vec{B}_1$, které vytvářejí, kompenzuje, podle Lenzova pravidla, změnu pole $\vec{B}_0$.

Při harmonické časové změně pole $\vec{B}_0 = B_{m0}\cos(\omega t)\vec{e}_z$

$$\vec{i}_1 = \frac{\sigma\omega}{2}\rho B_{0m}\sin(\omega t).\vec{e}_\phi$$

Hustota vířivých proudů roste s frekvencí střídavého magnetického pole. Indukované proudy a tedy i jimi vyvolané magnetické pole je fázově posunuté o (–π/2) oproti budícímu poli.
Vířivé proudy mají za následek disipaci energie ve vodiči ve formě Jouleova tepelného příkonu.
Element příkonu absorbovaný v elementu objemu je $\frac{\delta P}{dV} = \frac{i_1^2}{\sigma}$

Integrací přes celý objem vodiče dostaneme příkon absorbovaný nositeli náboje ve vodiči

$$P = \frac{1}{\sigma}\int_V i_1^2 dV = \frac{\sigma\omega^2}{4}B_{0m}^2.h.\sin^2(\omega t)\int_0^a \rho^2 2\pi\rho d\rho$$ objem vodiče je $V = \pi a^2 h$

$$P = \frac{\pi}{8}\sigma\omega^2 B_{0m}^2 a^4 h\sin^2(\omega t) = \frac{1}{8}\sigma\omega^2 B_{0m}^2 a^2 V\sin^2(\omega t)$$

Časová střední hodnota Jouleova příkonu na jednotku objemu je

$$\left\langle\frac{P}{V}\right\rangle = \frac{1}{8}\sigma\omega^2 B_{0m}^2 a^2\left\langle\sin^2(\omega t)\right\rangle = \frac{1}{16}\sigma\omega^2 B_{0m}^2 a^2$$ poněvadž $\left\langle\sin^2(\omega t)\right\rangle = \frac{1}{2}$

Měrný tepelný příkon je tím větší, čím je vodič masivnější (velký poloměr a), čím lépe vede elektrický proud (větší σ) a čím je větší frekvence ω střídavého magnetického pole.
Pro přesnější výpočet, zejména při vyšších frekvencích, je třeba uvážit i vliv pole $\vec{B}_1$ vyvolaného indukovanou hustotou proudu $\vec{i}_1$ a následně vliv pole $\vec{B}_2$ a tak dále. Vede to na výrazy s Besselovými funkcemi. Nahradíme-li masivní válec svazkem drátů s poloměrem b = a/n, klesne měrný příkon n^2-krát.

$$\left\langle\frac{P'}{V}\right\rangle = \frac{1}{16}\sigma\omega^2 B_{0m}^2 b^2 = \frac{1}{n^2}\left\langle\frac{P}{V}\right\rangle$$

Vířivé proudy se využívají k tlumení kmitavých pohybů, nebo jsou zdrojem ohřevu (tavení kovů, mikrovlnná trouba).