UFY007
8. Kvazistacionární obvod - přechodové jevy

Ohmův zákon pro kvazistacionární obvod

$$\mathrm{R.I(t)} + \frac{\mathrm{Q(t)}}{\mathrm{C}} = E(\mathrm{t}) - \mathrm{L}\frac{\mathrm{dI(t)}}{\mathrm{dt}} \qquad (*)$$

po derivaci podle času $\left\{\mathrm{I(t)} = \frac{\mathrm{dQ(t)}}{\mathrm{dt}}\right\}$ dostaneme diferenciální rovnice 2. stupně

pro proud I(t)

$$\mathrm{L}.\frac{\mathrm{d^2I(t)}}{\mathrm{dt^2}} + \mathrm{R}.\frac{\mathrm{dI(t)}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{I(t)}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}E(\mathrm{t}). \qquad (**)$$

Vynásobením rovnice (*) proudem I(t) získáme rovnoci pro okamžitý výkon

$$\mathrm{R.I^2(t)} + \mathrm{I(t)}.\frac{\mathrm{Q(t)}}{\mathrm{C}} = E(\mathrm{t}).\mathrm{I(t)} - \mathrm{L.I(t)}\frac{\mathrm{dI(t)}}{\mathrm{dt}}$$

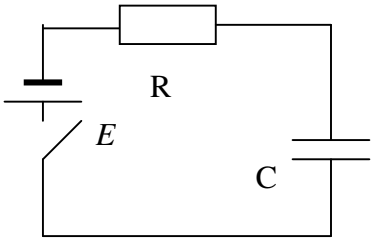
první člen na levé straně označuje Jouleův výkon, první člen na pravé straně je okažitý příkon dodávaný zdrojem elektromotorického napětí *E*(t). Po úpravě

$$\mathrm{R.I^2(t)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Q^2}}{\mathrm{C}}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L.I^2(t)}\right) = E(\mathrm{t}).\mathrm{I(t)} \qquad (***)$$

je zřejmé, že druhý člen na levé straně představuje časovou změnu energie elektrického pole uvnitř kondenzátoru a třetí člen časovou derivace magnetické energie vytvořenou proudem ve vodičích obvodu.

Obvod R,C

V obvodu je zapojen v sérii rezistor a kondenzátor, rovnice (**) pro L = 0 je



$$\mathrm{R}\frac{\mathrm{dI(t)}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{I(t)}}{\mathrm{C}} = 0. \qquad E \text{ je konstantní}$$

Řešením diferenciální rovnice je

$\mathrm{I(t)} = \mathrm{K}.\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{R.C}}}$, při t = 0 je Q(0) = 0

Z rovnice (*) pro t = 0 dostaneme

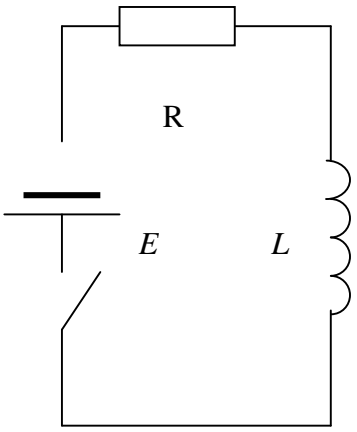
$\mathrm{R.I(0)} = E = \mathrm{R.K}$, řešení má tedy tvar

$\mathrm{I(t)} = \frac{E}{\mathrm{R}}.\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{R.C}}}$. Proud exponenciálně klesá od hodnoty *E*/R do nuly s časovou konstantou $\tau = \mathrm{R.C}$.

Pro napětí $\mathrm{U_C}$ na kondenzátoru z rovnice (*) plyne $\mathrm{R.I(t)} + \mathrm{U_C} = E$

a tedy $\mathrm{U_C} = E\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{R.C}}}\right)$. Pro $\mathrm{t} \to \infty$ $\mathrm{U_C} = E$, I = 0. Kondenzátor je nabit na elektromotorické napětí zdroje a proud obvodem neteče.

Obvod R,L



Z rovnice (*) dostaneme

$$R.I(t) = E(t) - L\frac{dI(t)}{dt}$$

nehomogenní diferenciální rovnici 1. stupně

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{1}{L}E\,.$$

Okrajové podmínky: pro $t \to \infty$ ustálený proud $I = \frac{E}{R}$,

pro t = 0 proud neteče I(0) = 0.

V obecném řešení určíme konstanty C a K

$$I(t) = K.e^{-\frac{R}{L}t} + C \qquad \text{je } C = \frac{E}{R} \text{ a } K = -\frac{E}{R}\,.$$

Proud tedy exponenciálně roste od nuly do hodnoty $I = \frac{E}{R}$

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Při rozepnutí obvodu vzniká v cívce napětí indukované prudkým poklesem proudu

$$U_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L.\frac{dI(t)}{dt},$$

které může překročit průrazné napětí izolace vinutí cívky. Dojde zpravidla ke vzniku oblouku mezi kontakty přerušovače a tím se zastaví nárůst napětí. Odpor výbojové dráhy je R´>>R,

vede k řešení $$I(t) = K.e^{-\frac{R'}{L}t} + \frac{E}{R'}\,.$$

V okamžiku rozepnutí přerušovače t = 0 je I(0) = *E*/R ,

$$\frac{E}{R} = K + \frac{E}{R'} \qquad \text{a tedy} \qquad K = \frac{E}{R} - \frac{E}{R'} \quad \frac{E}{R}, \text{ protože } R' >> R.$$

Dostáváme řešení pro proud

$$I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{R'}{L}t} + \frac{E}{R'},$$

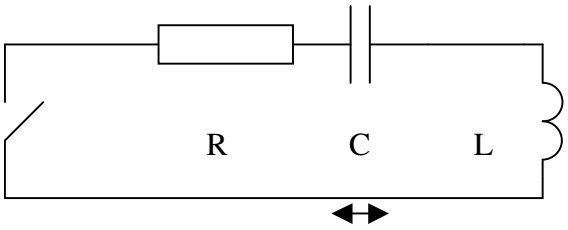
napětí na cívce při vypnutí proudu nabývá hodnoty

$$U_L(0) = -L.\left(\frac{dI(t)}{dt}\right)_{t=0} = -L.\left(\frac{R'}{L}\right)\frac{E}{R}.1 = \frac{R'}{R}.E$$

větší než napětí zdroje.

Obvod R, L, C

V obvodu bez připojeného zdroje elektromotorického napětí se nachází kondenzátor, který je nabit na napětí U_{C0}. Při sepnutí spínače začne obvodem protíkat proud a kondenzátor se bude vybíjet. $E = 0$



U_{C0}

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = 0$$

Homogenní diferenciální rovnice 2. řádu má řešení ve tvaru

$$I(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t},$$

kde λ_1 a λ_2 jsou kořeny charakteristické rovnice

$$L.\lambda^2 + R.\lambda + \frac{1}{C} = 0.$$

$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{D}$, diskriminant $D = R^2 - 4\frac{L}{C}$.

Aperiodické řešení dostaneme pro $D \geq 0$, tedy $R^2 \geq 4\frac{L}{C}$.

Označme činitel útlumu $\gamma = \frac{R}{2L}$ a rezonanční frekvenci $\omega_0^2 = \frac{1}{L.C}$ a nalezněme řešení pro periodický stav pro $D < 0$.

Úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} = \frac{1}{2L}\sqrt{-D} = j.\frac{1}{2L}\sqrt{D}$.

Kořeny charakteristické rovnice jsou tedy

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm j.\omega$$

a řešení, které představuje tlumené periodické kmity proudu, můžeme po úpravě zapsat ve tvaru

$$I(t) = \frac{U_{C0}}{\omega L}\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\sin\,\omega t.$$

Proud v obvodu je periodickou funkcí času s kruhovou frekvencí ω, s amplitudou klesající exponenciálně s časovou konstantou $\frac{2L}{R}$.