Transformace souřadnic a derivace (komentář k Příkladu 5 ze cvičení 1)

Petr Hruška

9. říjen 2015

Příklad 5: Dokažte, že derivace vektoru je vektor.

1 Jednoduchá verze

Uvažujme obecný vektor $\mathbf{u}$. Jak víme z přednášky, vektory se transformují jako souřadnice, neboli:

$$\mathbf{u}' = A\mathbf{u} \tag{1}$$

$$u_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} u_j \tag{2}$$

Pokud zderivujeme rovnici (2) podle libovolného parametru, zvolme např. derivaci podle času, dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}u_i'}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t} u_j \tag{3}$$

V rovnici (3) jsme použili pouze pravidla pro derivaci součtu a součinu. Na první pohled vidíme, že pokud jsou derivace $\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t}$ nulové, pak se derivace vektoru $\mathbf{u}$ transformuje jako vektor.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t} = A \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_i'}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Zbývá tedy otázka, zda a za jakých podmínek jsou prvky a_{ij} matice A konstantní, tj. nezávisí na žádném parametru, a tím pádem i jejich derivace jsou nulové. Pro lineární transformaci souřadnic, jakou je např. otočení kartézské soustavy souřadnic o úhel α kolem osy z popsané maticí A

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

je podmínka konstantních prvků splněna a tím pádem i derivace obecného vektoru $\mathbf{u}$ je vektorem.

2 Podrobná verze

Nabízí se otázka, co se stane, pokud použijeme takové transformace, které závisejí na nějakém parametru, např. pokud úhel otočení α v rovnici (6) závisí lineárně na čase skrz úhlovou rychlost ω jako $\alpha(t) = \omega t$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

V tomto případě se naše nová soustava souřadnic (označme ji písmenem $\mathtt{K}'$) otáčí kolem osy z vůči původní soustavě souřadnic (označme ji písmenem $\mathtt{K}$) konstantní úhlovou rychlostí ω. Pro bázové vektory $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ soustavy $\mathtt{K}$ a $\{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^3$ soustavy $\mathtt{K}'$ platí následující vztahy:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\mathbf{e}_k \tag{8}$$

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{3} a_{jk}\mathbf{e}'_j \tag{9}$$

Všimněme si odlišného pořadí indexů. Zatímco v rovnici (7) násobíme vektory staré báze maticí A, v rovnici (8) násobíme vektory nové báze transponovanou maticí A^T [1]. Pro derivaci vektoru $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 u_k\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 u'_i\mathbf{e}'_i$ tudíž dostáváme:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}'_i + \sum_{i=1}^{3} u'_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}'_i}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

Nyní dosaďme vztah (8) a využijme toho, že původní báze $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ nezávisí na čase:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_k = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t}a_{ik}\mathbf{e}_k + \sum_{i,k=1}^{3} u'_i\frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_k \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t}a_{ik} + \sum_{i=1}^{3} u'_i\frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

Rovnice (11) a (12) vyjadřují totéž jako rovnice (3), jen jsme k nim došli poctivější cestou.

Vraťme se nyní k rovnici (10) a její první člen na pravé straně ponechme v nezměněném tvaru. Druhý člen vyjádřeme ve tvaru, v jakém je v rovnici (11) a dosaďme do něj z rovnice (9), tj.:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}u'_i}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}'_i + \sum_{i,j,k=1}^{3} u'_i\frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t}a_{jk}\mathbf{e}'_j \tag{13}$$

---

[1] Transponovanou matici A^T dostaneme prostou záměnou řádků za sloupce v matici A. Formálně zapsáno $A^T_{ij} = A_{ji}$. Matice A^T má tedy tvar

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

který odpovídá zpětnému otočení o úhel ωt, jde tedy o matici inverzní k matici A.

Pokud v posledním členu zaměňme indexy i a j, rovnici (13) lze formálně psát ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{pmatrix}_{\mathtt{K}} = \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \\ \dot{u}'_3 \end{pmatrix}_{\mathtt{K'}} + \begin{pmatrix} \sum_{j,k=1}^{3} u'_j \frac{\mathrm{d}a_{jk}}{\mathrm{d}t} a_{1k} \\ \sum_{j,k=1}^{3} u'_j \frac{\mathrm{d}a_{jk}}{\mathrm{d}t} a_{2k} \\ \sum_{j,k=1}^{3} u'_j \frac{\mathrm{d}a_{jk}}{\mathrm{d}t} a_{3k} \end{pmatrix}_{\mathtt{K'}} \tag{14}$$

Poznamenejme, že tečka nad složkami vektoru $\mathbf{u}$ označuje časovou derivaci a indexy $\mathtt{K}$ resp. $\mathtt{K'}$ značí, vůči které soustavě souřadnic uvažujeme složky vektoru. Tento formální tvar (14) názorně ukazuje, jak je to prakticky s derivací vektorů. Pokud prvky matice A jsou konstantní, derivaci vektoru $\mathbf{u}$ provedeme prostým zderivováním jeho složek v dané vztažné soustavě $\mathtt{K}$ resp. $\mathtt{K'}$.

Vraťme se nyní k časově závislé matici A popsané rovnicí (7). V rovnici (13) nám zbývá nějak vyjádřit člen $\sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t} a_{jk}$, označme jej jako Ω_{ij}. Ze znalosti násobení matic [2] a tvaru transponované matice vidíme, že tento prvek Ω_{ij} odpovídá matici Ω:

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} A^T \tag{15}$$

$$\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t} a_{jk} \tag{16}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Všimněme si, že výsledný tvar matice Ω daný rovnicí (17), který jsme dostali prostým vynásobením zderivované matice A s maticí A^T, má speciální tvar, kde na diagonále jsou nuly a prvky mimo diagonálu jsou tzv. *antisymetrické* (symetrické vůči diagonále, ale s opačným znaménkem). Pro prvky takové antisymetrické matice platí $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$ a obecně mají pouze 3 nezávislé složky namísto 9 (3 prvky na diagonále jsou nulové a 3 prvky pod diagonálou se liší od prvků na diagonálou pouze znaménkem). Matici Ω lze tím pádem přiřadit *pseudovektor* [3] úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = (0, 0, \omega)$, jehož význam je nám již znám [4]. Rovnice (13) a (14) pak přejdou do tvaru:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K'}} + \sum_{i,j=1}^{3} u'_i \Omega_{ij} \mathbf{e}'_j \tag{18}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K'}} + \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{u}'\right)_{\mathtt{K'}} \tag{19}$$

Rovnice (19) již představuje výsledný tvar pro transformaci mezi stojící a rotující vztažnou soustavou. Při přechodu mezi rovnicemi (18) a (19) jsme využili rovnosti $\sum_{i=1}^{3} u'_i \Omega_{ij} = \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{u}'\right)_j$, jejíž důkaz není obtížný a ponecháme jej na čtenáři.

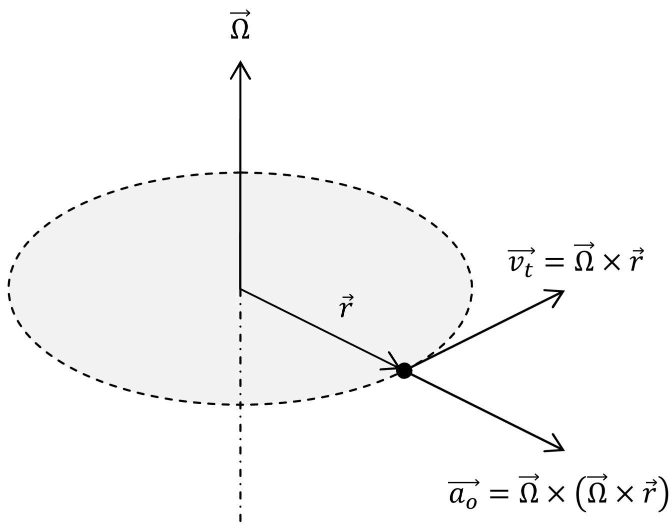
Podívejme se znovu na výsledek (19). Pokud bychom sledovali rychlost hmotného bodu jako změnu polohového vektoru $\mathbf{r}$, tak vidíme, že nestačí v případě otáčející se vztažné soustavy pouze zderivovat jeho složky, ale musíme rovněž přičíst vektorový součin s úhlovou rychlostí. Význam

---

[2] Prvky součinu matic $C = AB$ jsou definovány vztahem $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$.

[3] *Pseudovektor* říkáme proto, že takhle zavedený vektor $\vec{\Omega}$ se netransformuje jako vektor. Nicméně ve většině literatury je uváděn normálně jako *vektor* úhlové rychlosti.

[4] Připomeňme, že uvažujeme otáčení kolem osy z s úhlovou rychlostí ω.



Obrázek 1: K významu vektorového součinu $\vec{\Omega} \times \mathbf{r}$.

tohoto vektorového součinu je jasně patrný z obrázku 1, vyjadřuje tečnou rychlost $\mathbf{w}$. Rychlost hmotného bodu vůči inerciální vztažné soustavě $\mathtt{K}$ je tedy dle rovnice (19) dána jako součet rychlosti hmotného bodu vůči neinerciální vztažné soustavě $\mathtt{K}'$ (např. nulová rychlost, pokud je hmotný bod v soustavě $\mathtt{K}'$ v klidu nebo konstantní rychlost při pohybu hmotného bodu směrem od středu soustavy $\mathtt{K}'$) a tečné rychlosti $\mathbf{v}_t$, což je očekávaný výsledek. V případě zrychlení jako derivace takové rychlosti dostaneme poměrně komplikovaný výraz:

$$(\mathbf{v})_{\mathtt{K}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K}'} + \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{r}'\right)_{\mathtt{K}'} \tag{20}$$

$$(\mathbf{a})_{\mathtt{K}} = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathtt{K}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathtt{K}'} + 2\left(\vec{\Omega} \times \mathbf{v}'\right)_{\mathtt{K}'} + \left[\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{v}'\right)\right]_{\mathtt{K}'} \tag{21}$$

$$(\mathbf{a})_{\mathtt{K}} = (\mathbf{a}')_{\mathtt{K}'} + 2\left(\vec{\Omega} \times \mathbf{v}'\right)_{\mathtt{K}'} + \left(\vec{\Omega} \times \mathbf{v}_t\right)_{\mathtt{K}'} \tag{22}$$

Jak víme podle druhého Newtonova zákona síly, zrychlení hmotného je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Proto druhému a třetímu členu rovnice (23), které jsme dostali takříkajíc „navíc“ odpovídají síly [5] Coriolisova $2m\left(\vec{\Omega} \times \mathbf{v}'\right)$ a síla odstředivá $m\left(\vec{\Omega} \times \mathbf{v}_t\right)$.

[5] Těmto silám říkáme *kinematické* síly proto, že nemají původ ve vzájemném působení dvou těles (nevztahuje se na ně třetí Newtonův zákon akce a reakce) a tudíž jde o tzv. „nepravé“ síly, které jsou důsledkem transformace mezi inerciální (stojící) a neinerciální (otáčející se) vztažnou soustavou.

3 Poznámky na závěr

Pozorného čtenáře by mohla napadnout otázka, jak je to v případě Galileiho transformace mezi dvěma inerciálními vztažným soustavami pohybujících se vzájemně vůči sobě rychlostí $\mathbf{v}$. Uvažujme pohyb soustavy $\mathtt{K}'$ vůči soustavě $\mathtt{K}'$ rychlostí o velikost v ve směru osy x, přičemž v čase $t = 0$ platí $x' = x$, $y' = y$ a $z' = z$.

$$\begin{aligned} x' &= x - vt && (23) \\ y' &= y && (24) \\ z' &= z && (25) \\ t' &= t && (26) \end{aligned}$$

V tomto případě nejde o lineární transformaci ve smyslu, v jakém jsme o ní hovořili dříve a nelze ji napsat v tvaru 3×3 matice A. Místo toho můžeme Galileiho transformaci napsat pomocí matice 4×4, když jako „nultou" složku budeme uvažovat čas, čímž jsme zcela přirozeně přešli do 4-rozměrného prostoročasu.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{27}$$

Vidíme, že transformační matice popsaná rovnicí (27) nezávisí na čase, tudíž i při ní derivace vektoru je vektorem. Dodejme, že derivace podle rychlosti v nemá fyzikální význam, neboť na rozdíl od „univerzálního" parametru času jde pouze o konkrétní rychlost mezi dvěma zvolenými vztažnými soustavami.

S odkazem na Galileiho transformaci a zavedením 4-rozměrného prostoročasu se sluší zmínit transformaci Lorentzovu platnou ve speciální teorii relativity. Uvažujme stejné vztažné soustavy jako v případě Galileiho transformace a dále zaveďme tzv. Lorentzův faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{28}$$

Veškeré zdánlivě překvapivé závěry speciální teorie relativity, jako jsou např. dilatace času, kontrakce délek aj., již přímo vyplývají z tohoto tvaru Lorentzovy transformace.