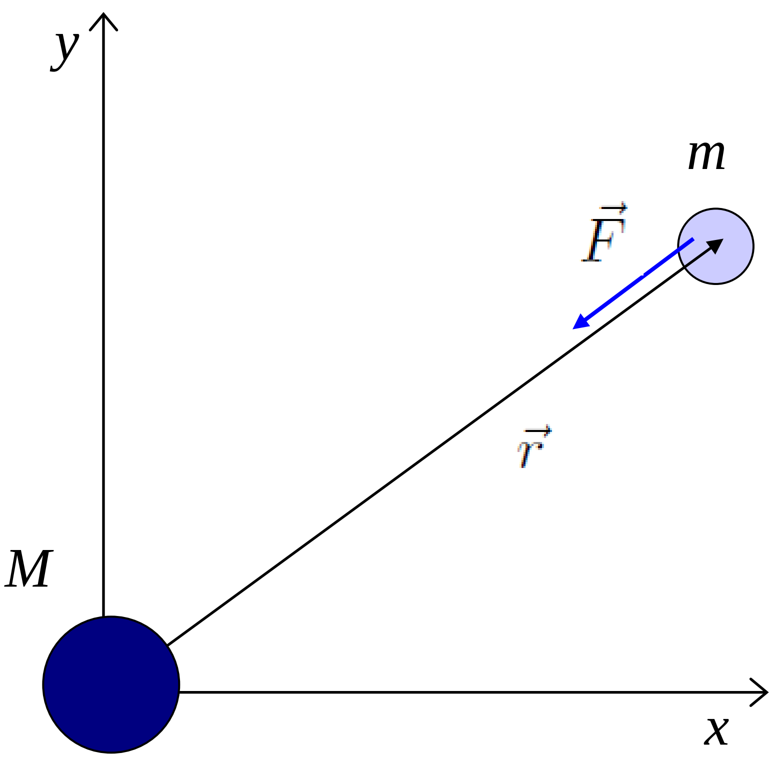
Gravitační pole

gravitační zákon

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



těleso o hmotnosti *M* vytváří gravitační pole

intenzita gravitačního pole hmotného bodu

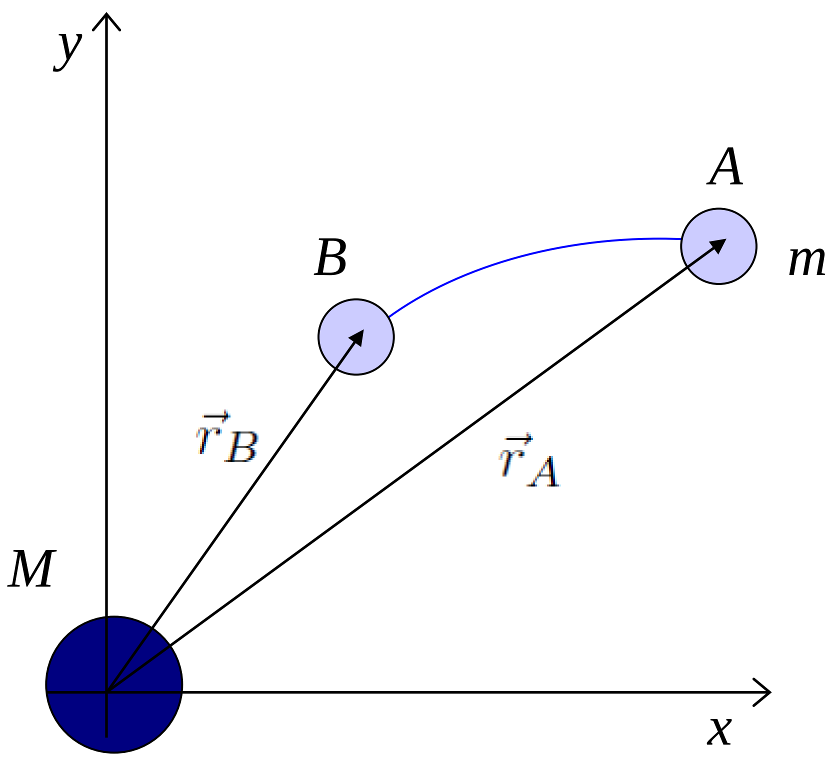
$$\boxed{\vec{K} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad [\mathrm{Nkg}^{-1}]}$$

Síla která by v daném místě působila na těleso o jednotkové hmotnosti

Gravitační pole

gravitační zákon

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



těleso o hmotnosti *M* vytváří gravitační pole

intenzita gravitačního pole hmotného bodu

$$\boxed{\vec{K} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad [\mathrm{Nkg}^{-1}]}$$

Síla která by v daném místě působila na těleso o jednotkové hmotnosti

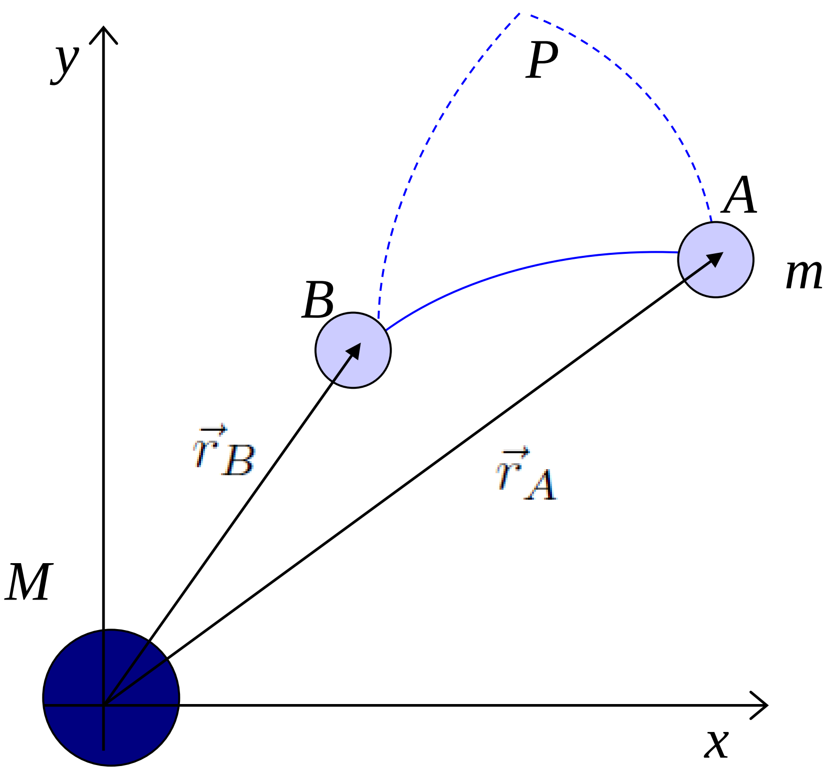
Při přemístění tělesa o hmotnosti *m* z bodu A do bodu B vykoná gravitační pole práci

$$W_{AB} = m\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{K}\, d\vec{r} = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

Gravitační pole

gravitační zákon

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



těleso o hmotnosti *M* vytváří gravitační pole

Při přemístění tělesa o hmotnosti *m* z bodu A do bodu B vykoná gravitační pole práci

$$W_{AB} = m\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{K}\, d\vec{r} = \Delta E_k$$

Konzervativní pole – práce je určena jen počáteční a koncovou polohou a nezávisí na trajektorii

$$W_{AB} = \Delta E_k = -\Delta E_p = -E_p(B) + E_p(A)$$

$$W_{AB} = W_{AP} + W_{PB} = -W_{PA} + W_{PB}$$

$$W_{PA} = -E_P(A) + E_P(P)$$

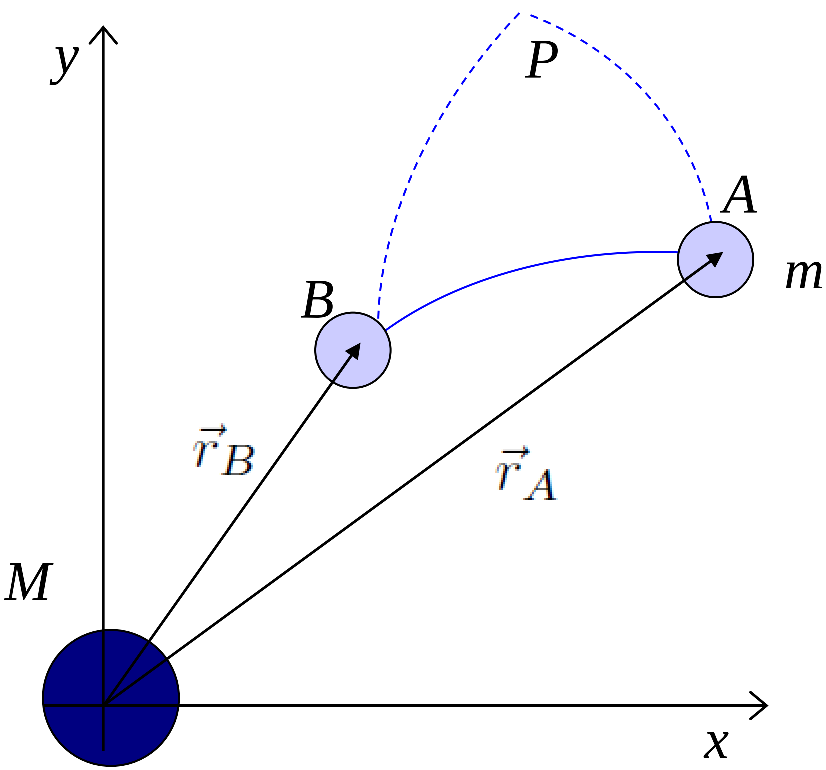
$$W_{PB} = -E_P(B) + E_P(P)$$

nulová hladina potenciální energie v P: $E_P(P) = 0$

Gravitační pole

gravitační zákon

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



těleso o hmotnosti *M* vytváří gravitační pole

Při přemístění tělesa o hmotnosti *m* z bodu A do bodu B vykoná gravitační pole práci

$$W_{AB} = m\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{K}\, d\vec{r} = \Delta E_k$$

Konzervativní pole – práce je určena jen počáteční a koncovou polohou a nezávisí na trajektorii

potenciální energie: $E_P(A) = -W_{PA}$

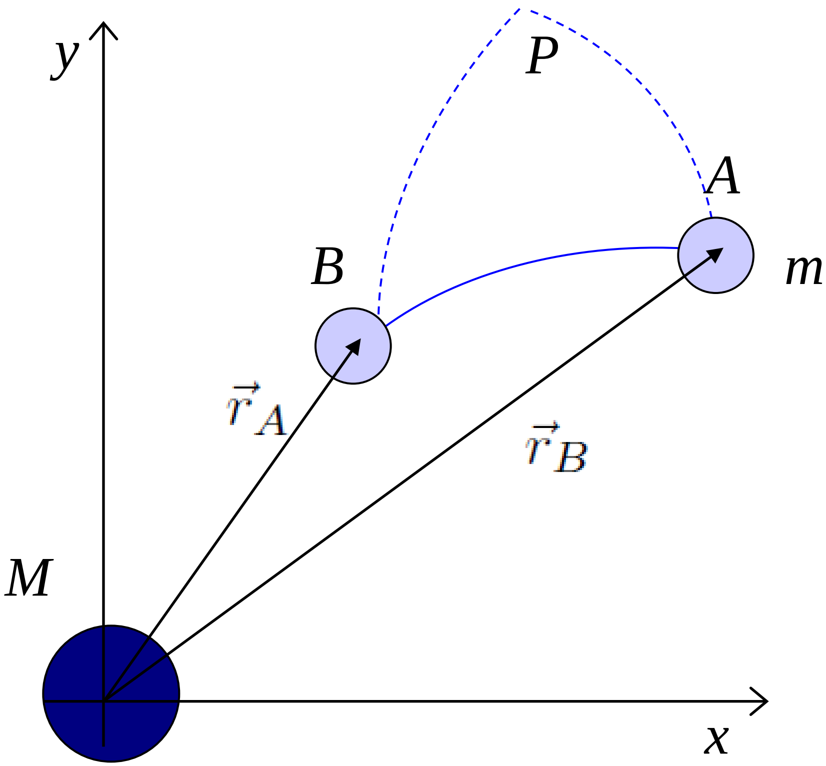
záporně vzatá práce, kterou musí pole vykonat při přenesení tělesa z bodu P do bodu A

podobně pro B $E_P(B) = -W_{PB}$

Gravitační pole

gravitační zákon

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



těleso o hmotnosti *M* vytváří gravitační pole

Při přemístění tělesa o hmotnosti *m* z bodu A do bodu B vykoná gravitační pole práci

$$W_{AB} = m\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{K}\, d\vec{r} = \Delta E_k$$

Konzervativní pole – práce je určena jen počáteční a koncovou polohou a nezávisí na trajektorii

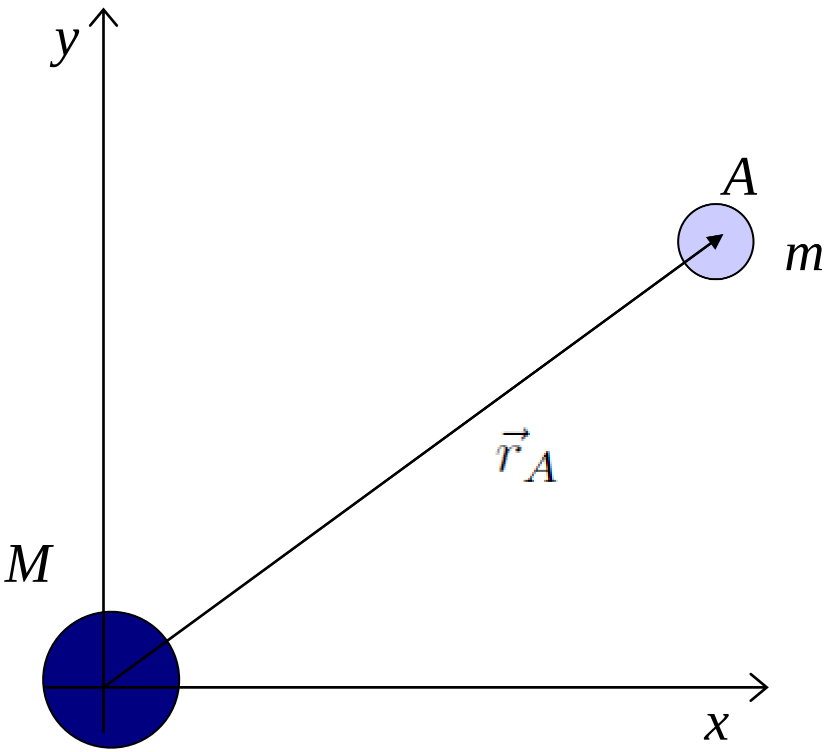
potenciál $$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{m} \quad [\mathrm{Jkg}^{-1}]$$

$-\varphi(A)$ práce, kterou musí pole vykonat při přenesení tělesa jednotkové hmotnosti z bodu P o nulovém potenciálu do bodu A

Gravitační pole

potenciální energie $E_p(r_A) = -W_{PA} = -\int_{\infty}^{r_A} -G\frac{mM}{r^2}\,dr = -\left[G\frac{mM}{r}\right]_{\infty}^{r_A} = -G\frac{mM}{r_A}$

$$E_p(\infty) = 0$$



potenciální energie

$$\boxed{E_p(r) = -G\frac{mM}{r}}$$

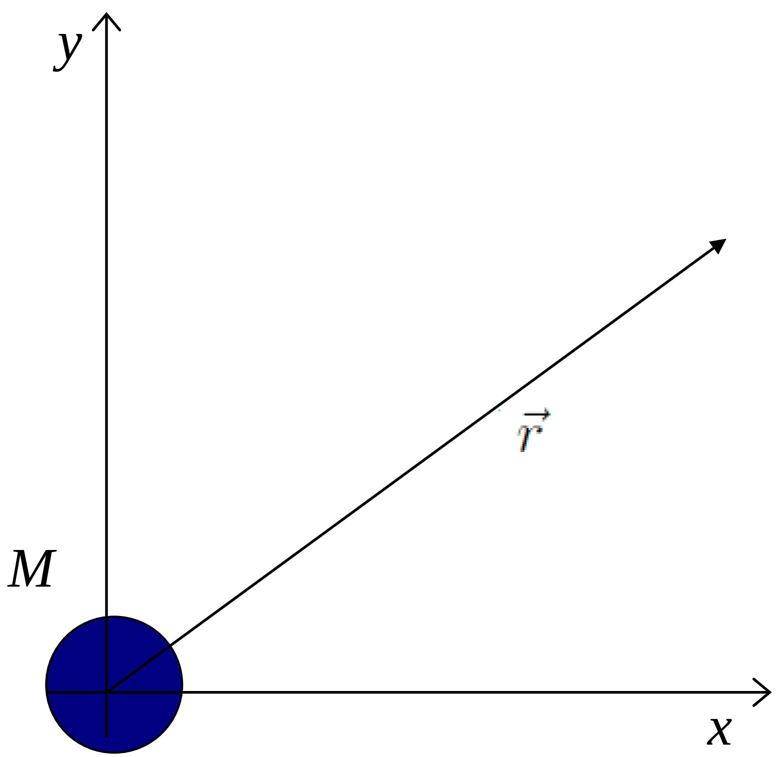
potenciál

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -G\frac{M}{r}}$$

Gravitační pole hmotného bodu

gravitační zákon

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



těleso o hmotnosti *M* vytváří gravitační pole

intenzita gravitačního pole hmotného bodu:

$$\vec{K} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad [\mathrm{Nkg}^{-1}]$$

potenciál gravitačního pole hmotného bodu:

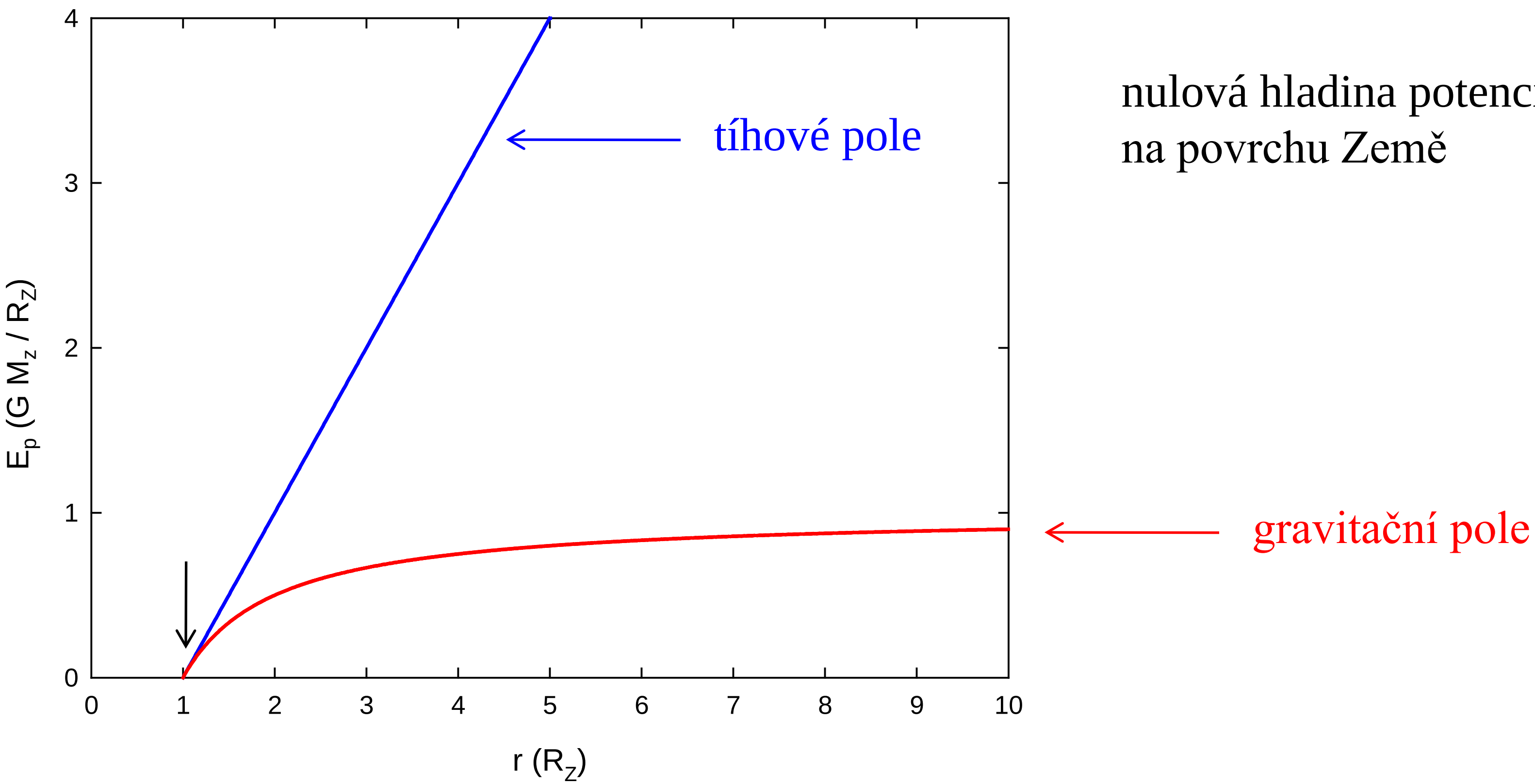
$$\varphi(r) = -G\frac{M}{r} \quad [\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}]$$

$$\varphi(r = \infty) = 0$$

Gravitační pole

Potenciální energie v tíhovém poli: $mg(r - R_Z)$

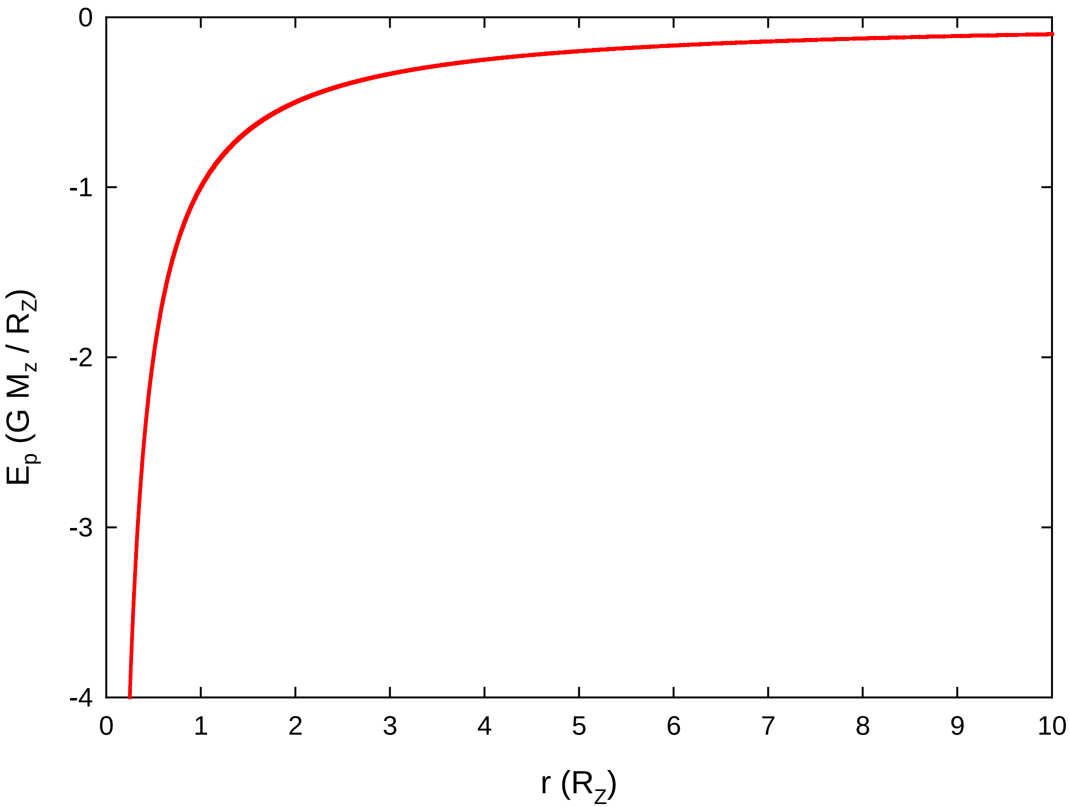
Potenciální energie v gravitačním poli: $-GM_Z m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_Z} \right) = mg(r - R_Z) \frac{R_Z}{r}$



nulová hladina potenciální energie na povrchu Země

Gravitační pole

Potenciální energie v gravitačním poli: $-G\frac{M_Z m}{r}$

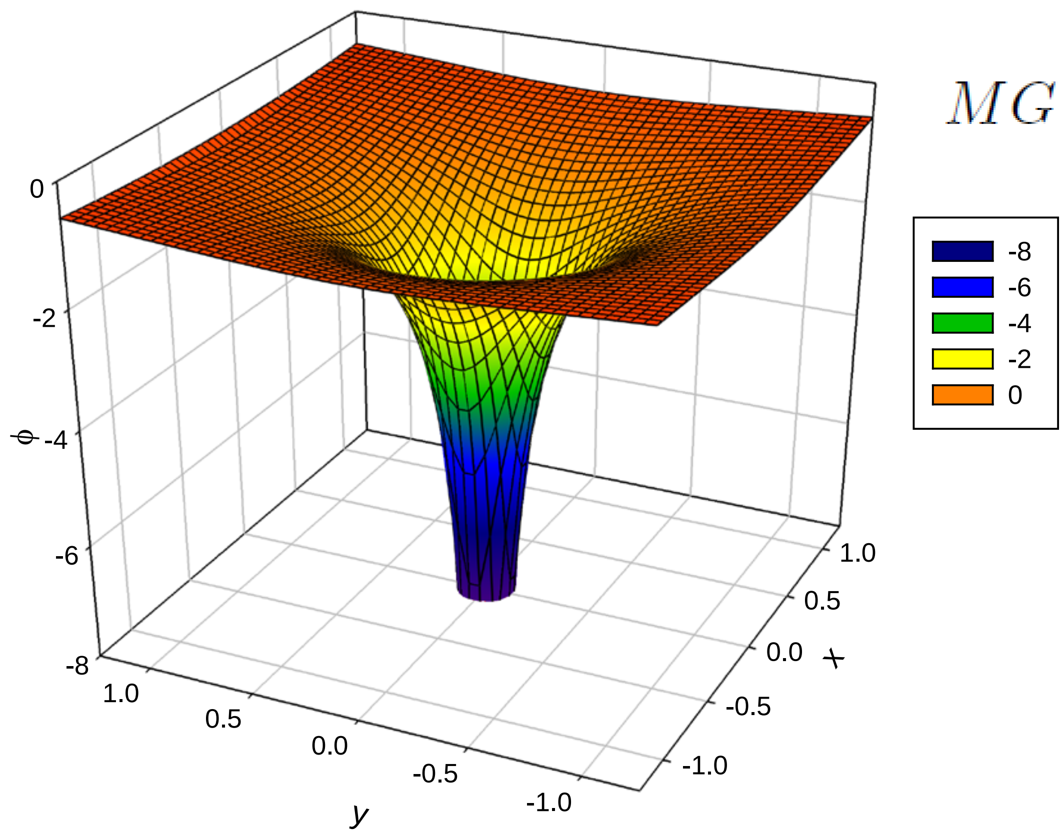


nulová hladina potenciální energie
v nekonečnu

Gravitační pole hmotného bodu

potenciál gravitačního pole: $\varphi(r) = -G\dfrac{M}{r}$

$MG = 1$

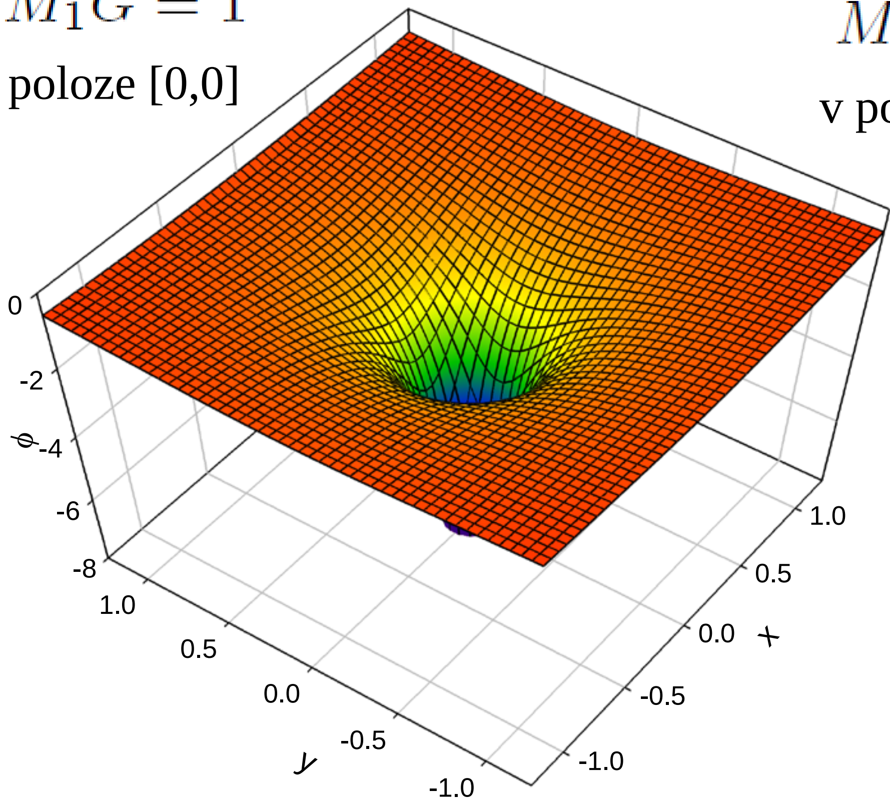


Gravitační pole – princip superpozice

potenciál: $\varphi(r) = -G\dfrac{M_1}{r - r_1}$ $\qquad\qquad$ $\varphi(r) = -G\dfrac{M_2}{r - r_2}$

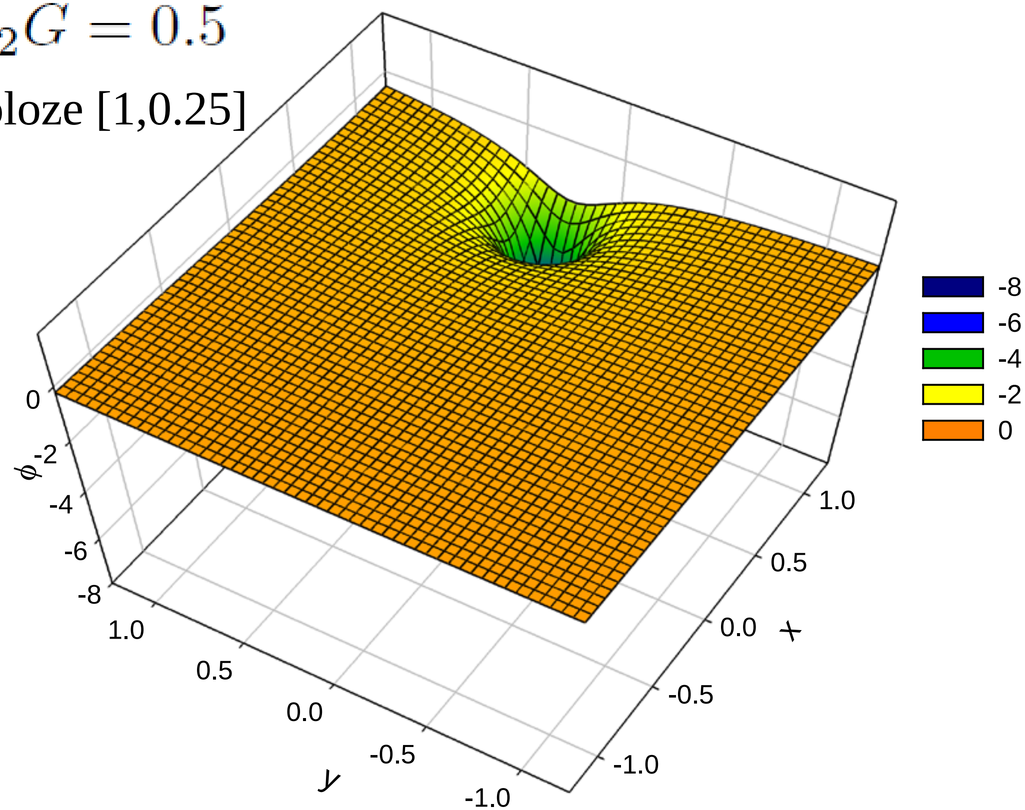
$M_1 G = 1$

v poloze [0,0]



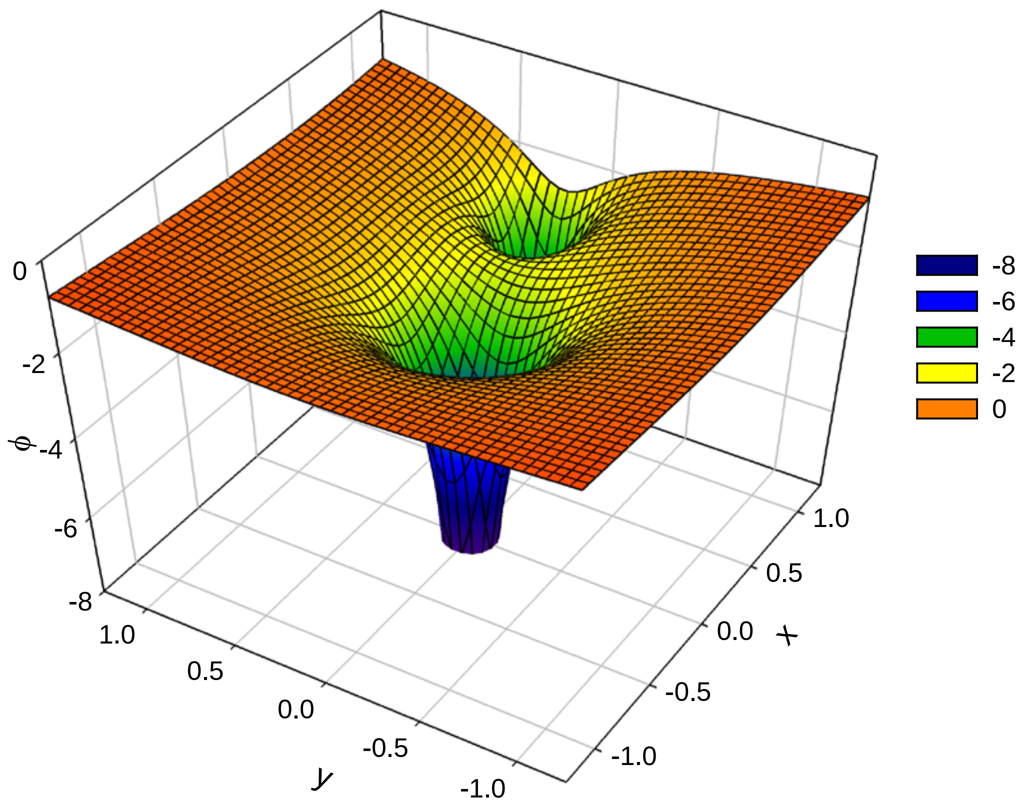
$M_2 G = 0.5$

v poloze [1,0.25]



Gravitační pole – princip superpozice

potenciál: $$\varphi(r) = -G\frac{M_1}{r - r_1} - G\frac{M_2}{r - r_2}$$



Souvislost potenciálu a intenzity pole

těleso o hmotnosti *m*:

potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

potenciální energie : $E_p(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$

intenzita: $\vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}(x, y, z)$

síla: $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{K}(\vec{r})$

při posunutí o Δx se vykoná práce: $\Delta W = -\Delta E_p = F_x \Delta x \longrightarrow F_x = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

$$K_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

podobně:

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad K_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad K_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Souvislost potenciálu a intenzity pole

potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$

intenzita: $\vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}(x, y, z)$

těleso o hmotnosti *m*:

potenciální energie : $E_p(\vec{r}) = m\varphi(\vec{r})$

síla: $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{K}(\vec{r})$

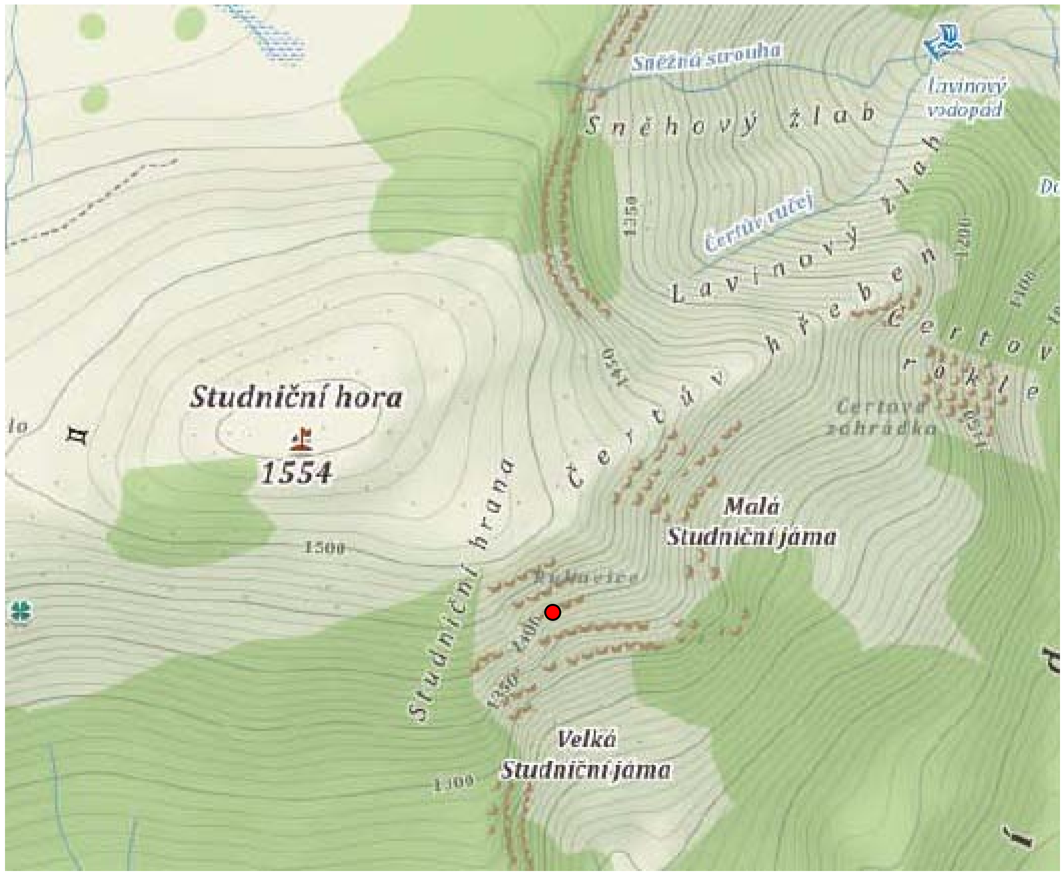
$$\boxed{\vec{K} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\nabla \varphi}$$

$$\boxed{\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) = -\nabla E_p}$$

gradient

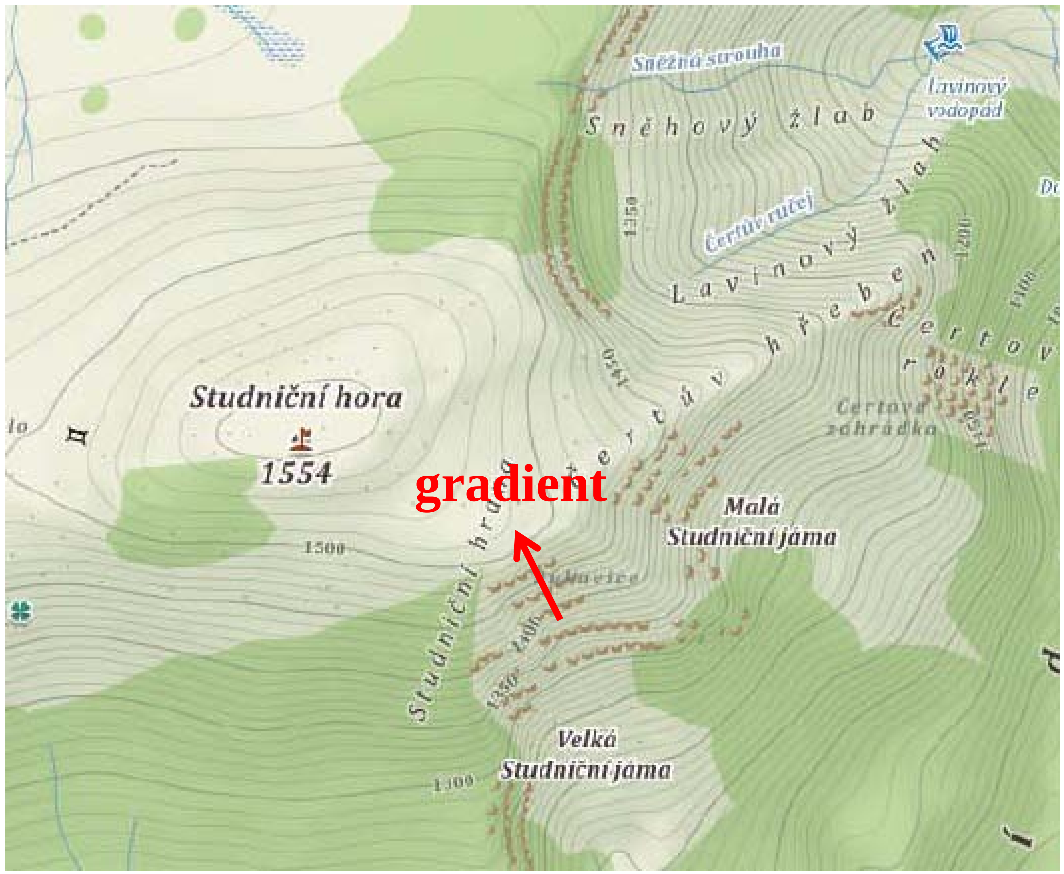
Souvislost potenciálu a intenzity pole

$$\vec{K} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -\nabla \varphi \qquad \vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) = -\nabla E_p$$



Souvislost potenciálu a intenzity pole

$$\vec{K} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -\nabla \varphi \qquad \vec{F} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right) = -\nabla E_p$$



Souvislost potenciálu a intenzity pole

Př. gravitační pole:

$$\varphi = -G\frac{M}{r} = -G\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\nabla\varphi = \left(G\frac{Mx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, G\frac{My}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, G\frac{Mz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = G\frac{M\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{K} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Kosmické rychlosti

gravitační zrychlení na povrchu Země $g = G\frac{M_Z}{R_Z^2}$

I. kosmická rychlost: $v_I = \sqrt{gR_Z} = 7.9 \text{ km s}^{-1}$

rychlost potřebná k vynesení na oběžnou dráhu Země

II. kosmická rychlost: $v_{II} = \sqrt{2gR_Z} = 11.2 \text{ km s}^{-1}$

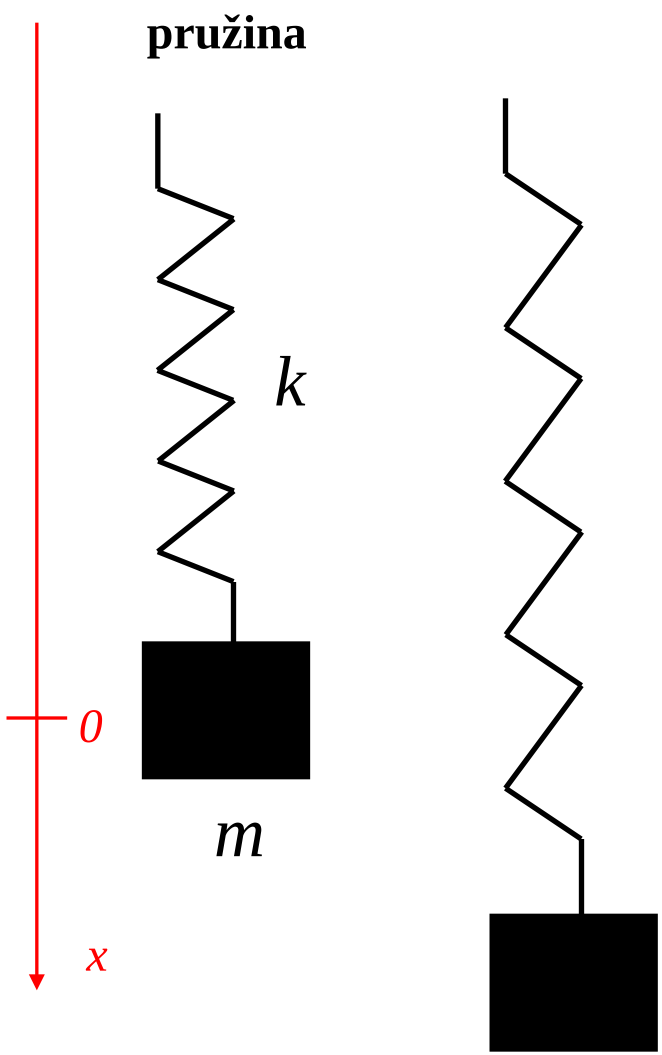
rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Země

III. kosmická rychlost: $v_{III} = \sqrt{2G\frac{M_S}{R_{ZS}}} = 42.1 \text{ km s}^{-1}$

rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Slunce, tj. k opuštění sluneční soustavy

Když využijeme oběžné rychlosti Země 29.7 km s^{-1} tak stačí 42.1-29.7 = 12.4 km s^{-1}

Harmonický oscilátor – pružina



$$F_x = -kx$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(0) = A$$
$$\dot{x}(0) = 0$$ **počáteční podmínky**

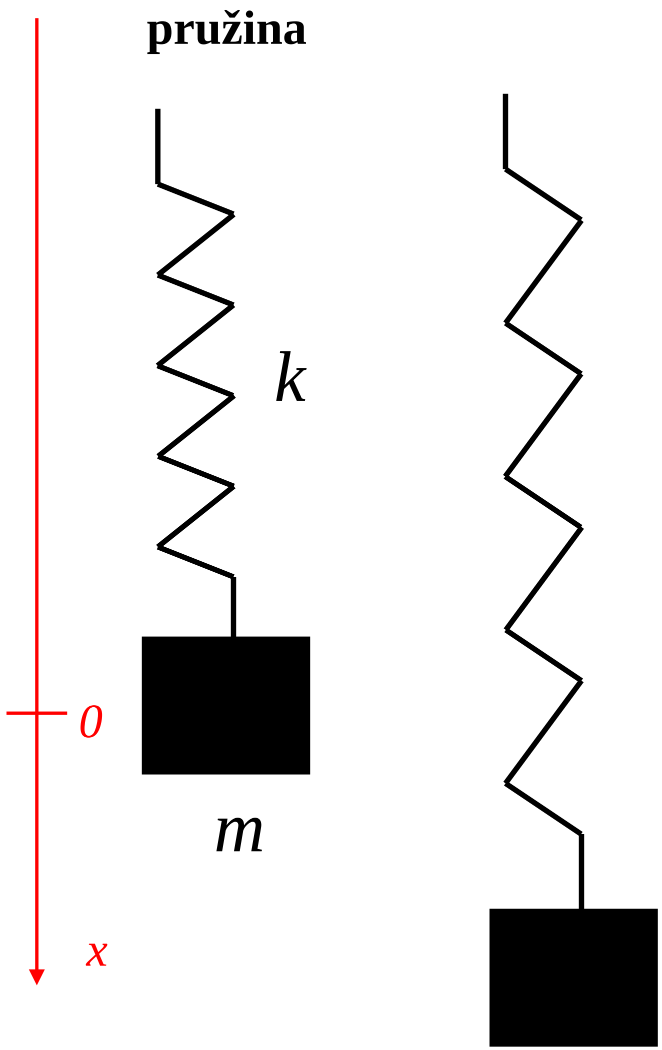
řešení

$$x(t) = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t \qquad \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

z počátečních podmínek dostáváme $C_1 = 0 \quad C_2 = A$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Harmonický oscilátor – pružina



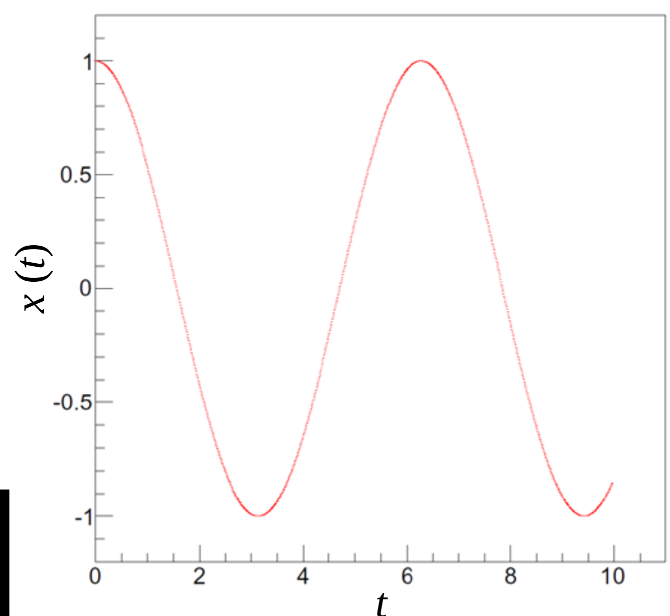
$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{v_x(t) = -A\omega\sin(\omega t)}$$

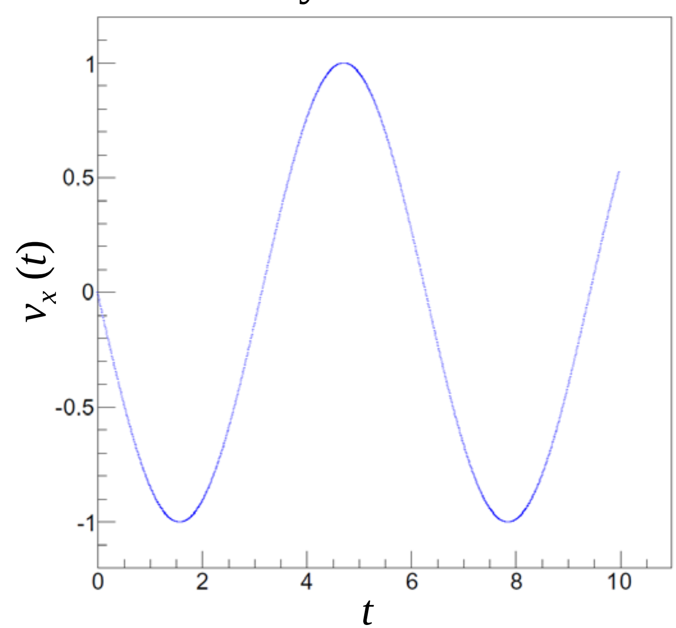
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Př. $k = 1$, $m = 1$

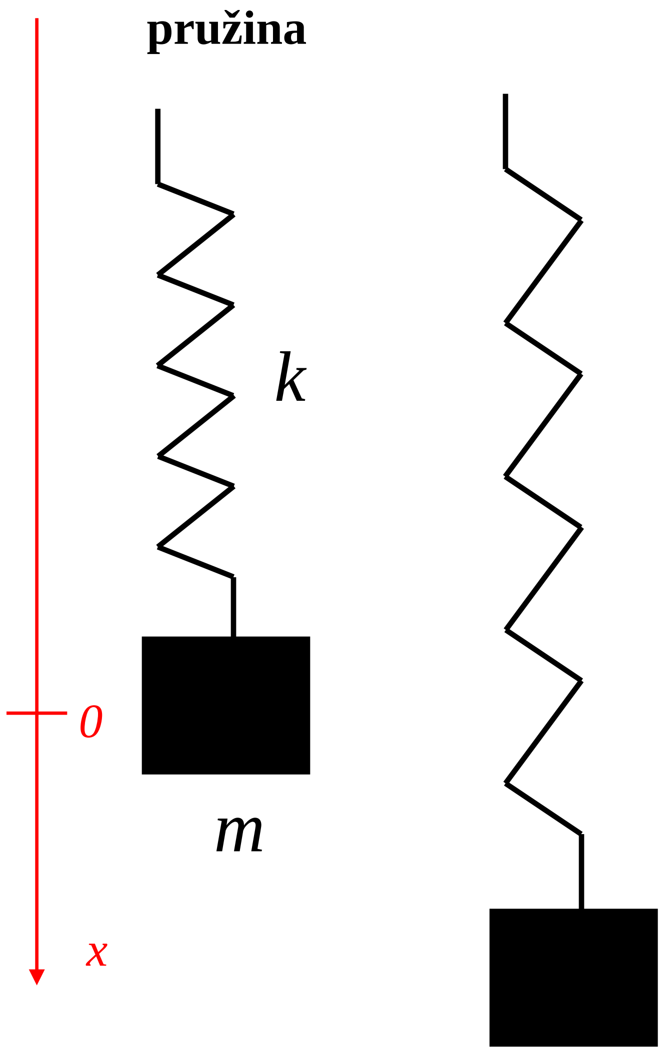
poloha



rychlost



Harmonický oscilátor – pružina



$$F_x = -kx$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

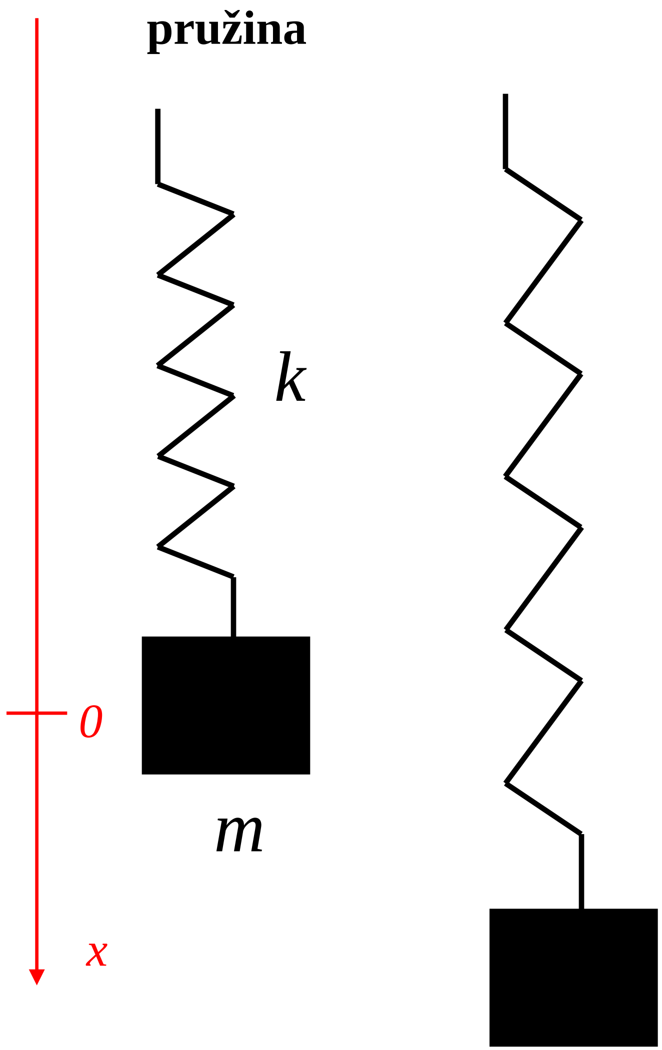
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(0) = A$$
$$\dot{x}(0) = 0$$ **počáteční podmínky**

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

perioda kmitů: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Harmonický oscilátor – pružina



$$F_x = -kx$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

pohybová rovnice

obecné řešení:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

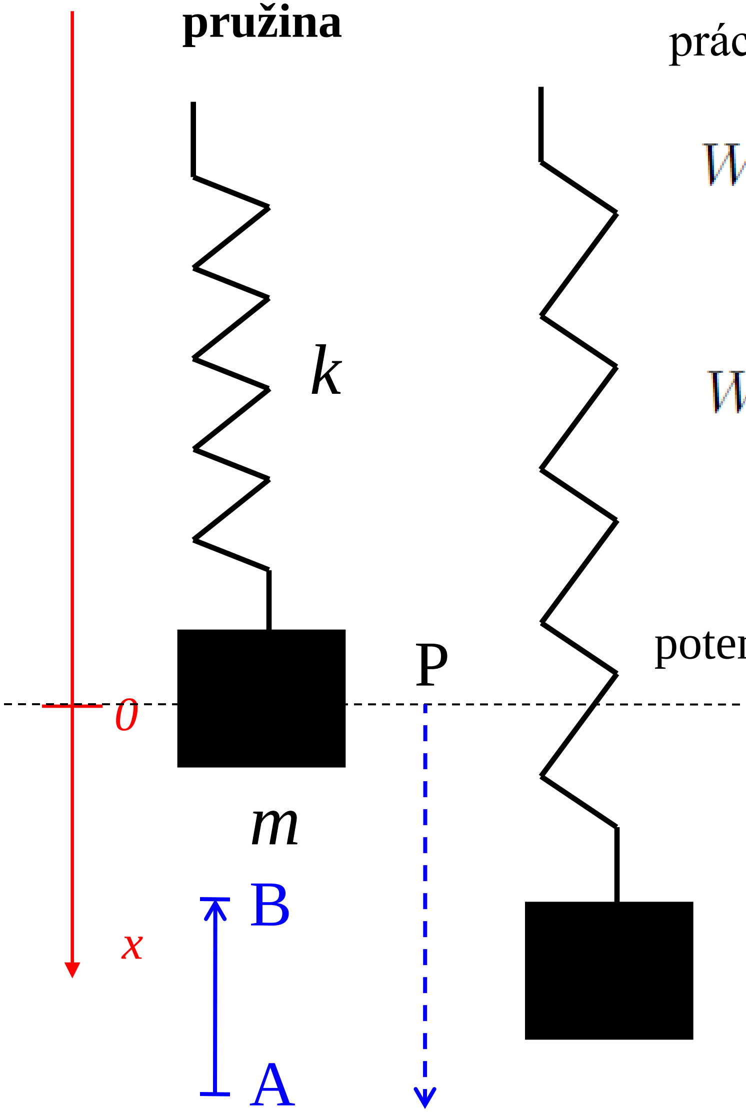
úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

fázový posuv

$$x(t) = C_1\sin(\omega t) + C_2\cos(\omega t)$$

Harmonický oscilátor – pružina

pružina



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z A do B:

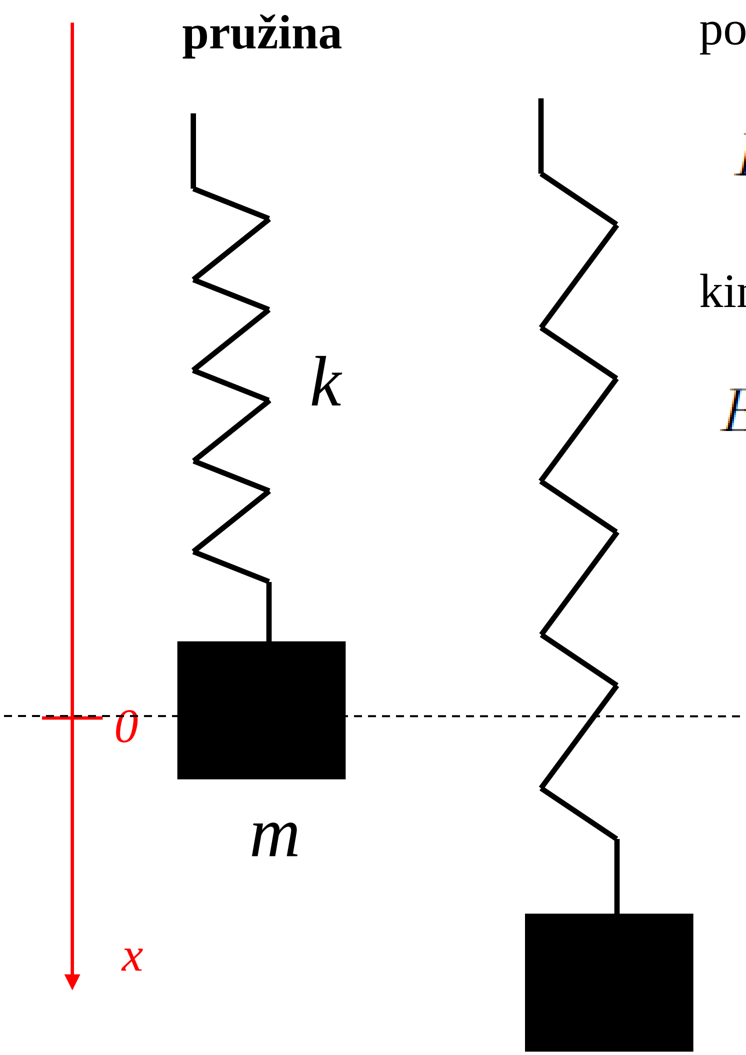
$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$W_{PA} = \int_{x_A}^{x_P} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k(x_A^2 - x_P^2)$$

potenciální energie v bodu A: $E_p(A) = -W_{PA} = \frac{1}{2}kx_A^2$

potenciální energie pružiny: $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Harmonický oscilátor – pružina



potenciální energie:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

celková energie pružiny: $E = E_p + E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$

Harmonický oscilátor – pole pružných sil

Jednorozměrný případ:

potenciál: $\varphi(x) = \frac{1}{2}kx^2$

(nulová hladina potenciálu v rovnovážné poloze $x = 0$)

intenzita: $K(x) = -kx$

V prostoru:

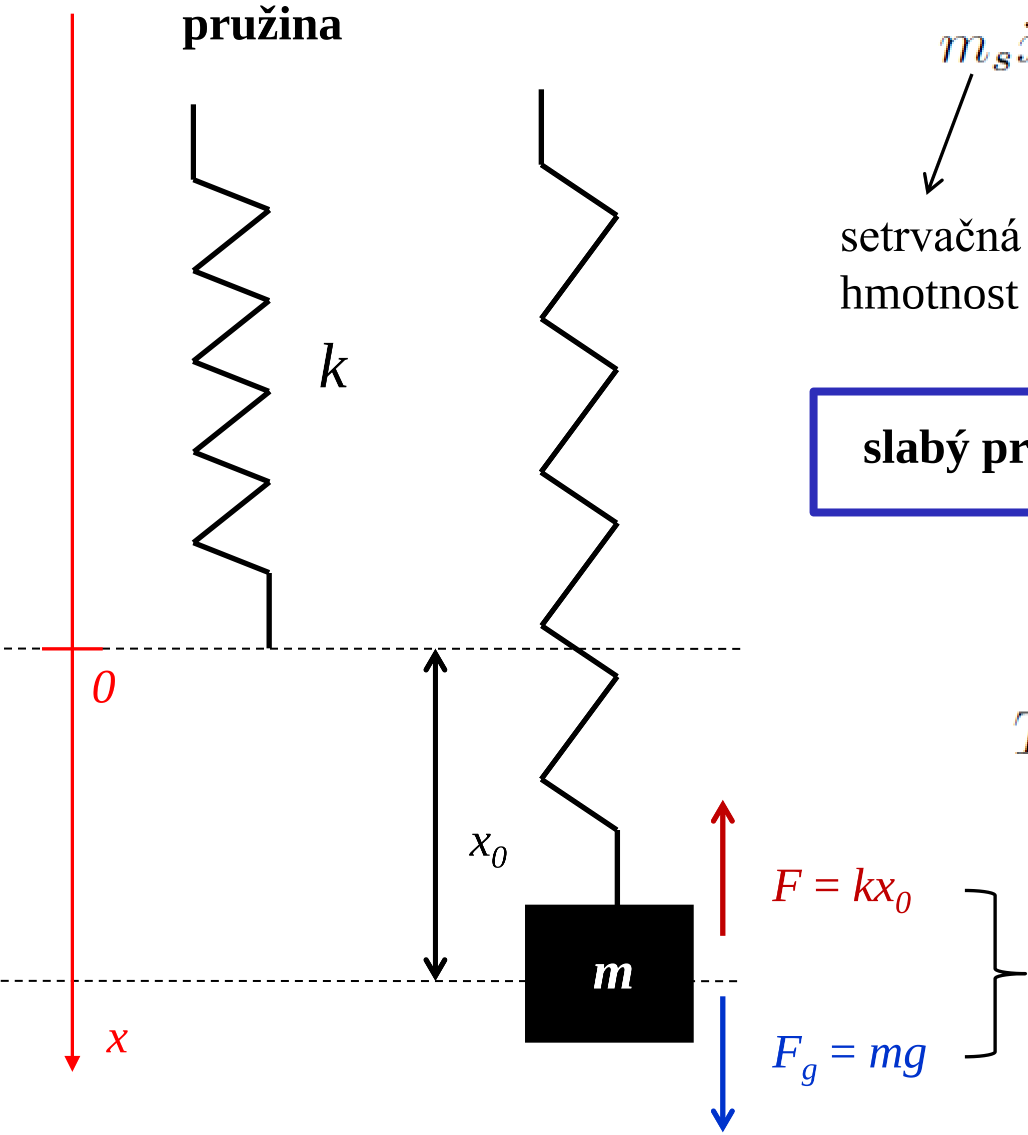
potenciál: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2$

(nulová hladina potenciálu v rovnovážné poloze $r = 0$)

intenzita: $\vec{K}(\vec{r}) = -k\vec{r}$

(pole centrální síly)

Setrvačná a gravitační hmotnost



$$m_s \ddot{x} = -m_g g = -G\frac{m_g M_Z}{R_Z^2}$$

setrvačná hmotnost

gravitační hmotnost

slabý princip ekvivalence: $m_s \equiv m_g$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_s}{k}}$$

setrvačná hmotnost

$$x_0 = m_g \frac{g}{k}$$

gravitační hmotnost