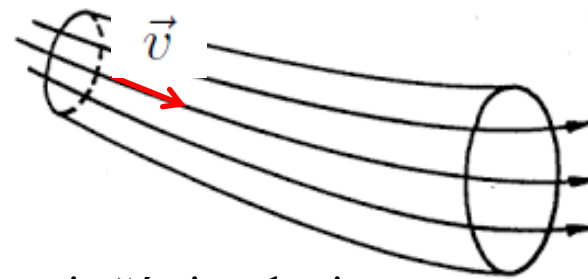


# Hydrodynamika

- ustálené proudění
- rychlost tekutiny se v žádném místě nemění  $\longrightarrow \vec{v}$  je statické vektorové pole
- proudnice – čáry k nimž je rychlost neustále tečnou



- při ustáleném proudění jsou proudnice skutečné trajektorie částic tekutiny
- Průtok  $dQ = \vec{v} d\vec{S}$

# Rovnice kontinuity

- hmotnost kapaliny, která proteče za čas  $\Delta t$

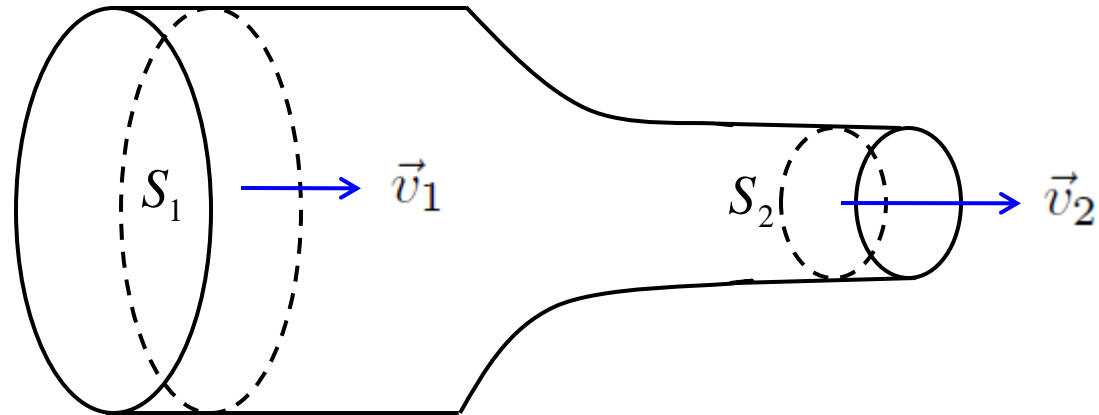
$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$$

- zákon zachování hmotnosti

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

**rovnice kontinuity**

$$Q = \text{konst}$$



# Bernoulliova rovnice

- ideální (nestlačitelná) kapalina
- kdyby kapalina stála

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g h$$

potenciální energie  $\frac{E_p}{V}$   
na jednotku objemu:

práce, kterou vykoná tlaková síla  
při přemístění jednotkového objemu do výšky  $h$ :

$$\frac{W}{V}$$

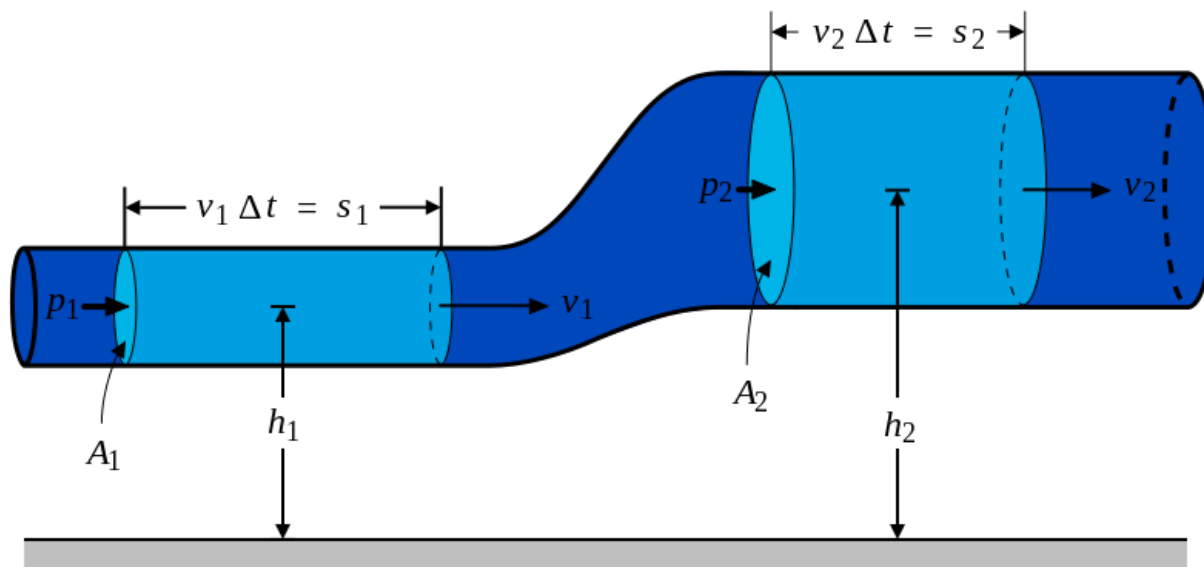
$$dW = p dV$$

- pokud voda teče rychlostí  $v$  je kinetická energie na jednotku objemu:

$$\frac{E_K}{V} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

- zákon zachování energie:  $\frac{E_p}{V} + \frac{E_K}{V} + p = \text{konst.}$

- **Bernoulliova rovnice:**  $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = \text{konst}$

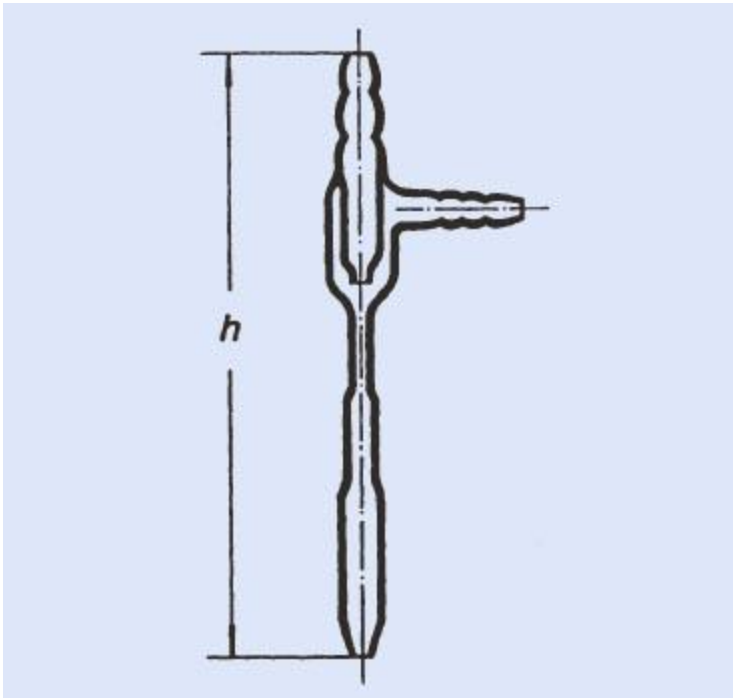


# Bernoulliova rovnice

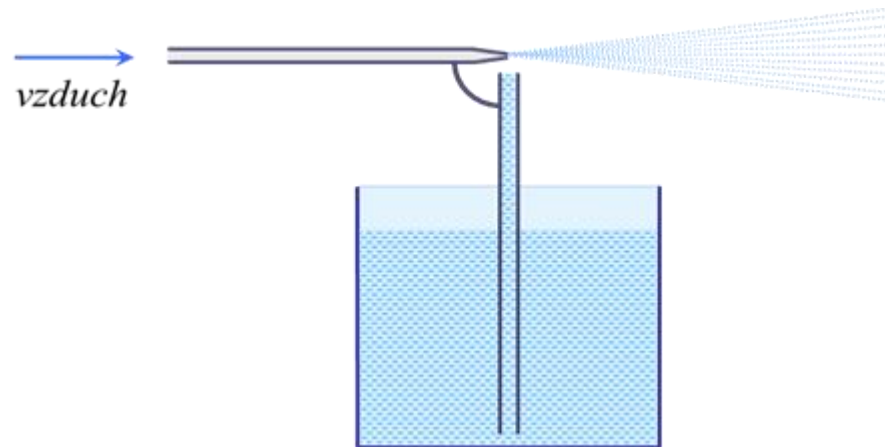
- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

- Vodní vývěva



- fixírka (stříkací pistole)



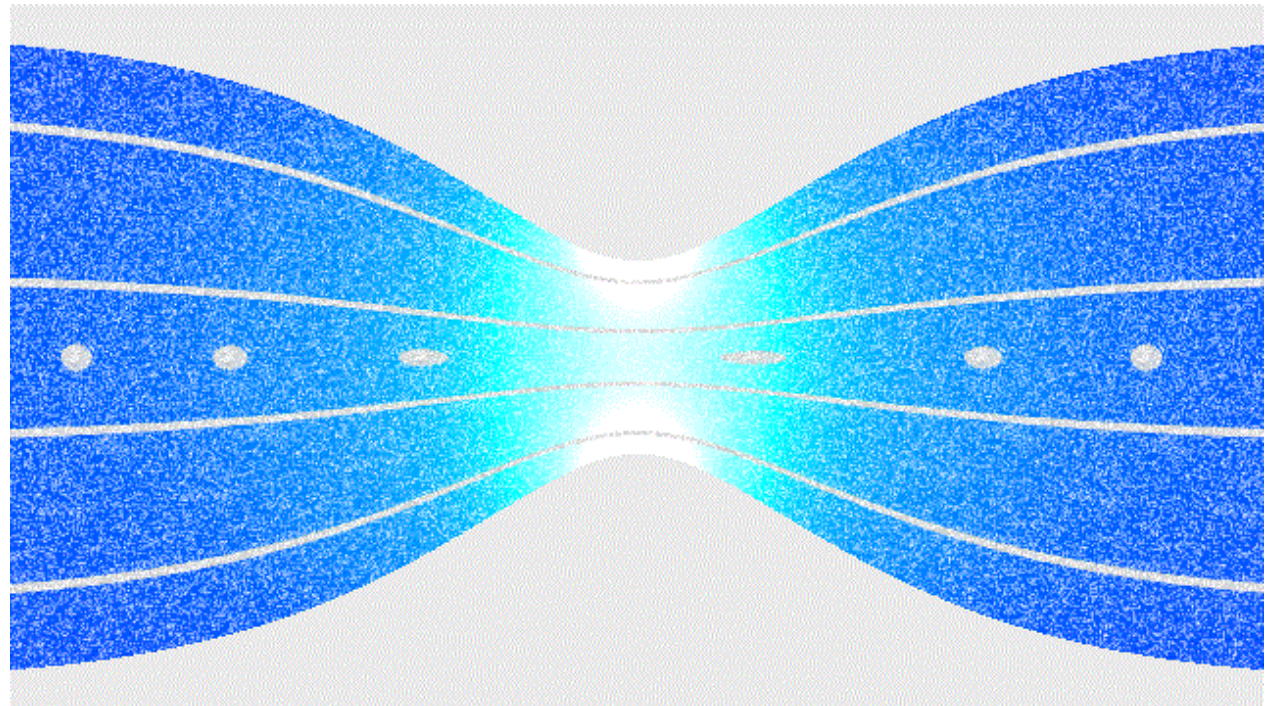
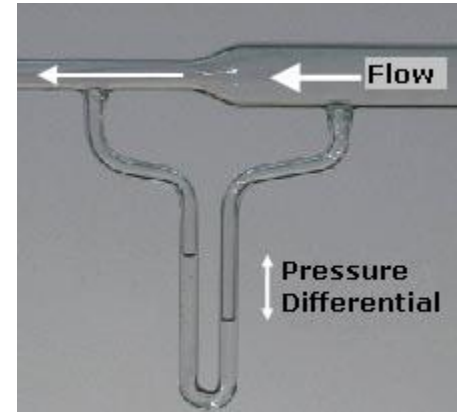
# Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )
- Venturiho efekt

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

dynamický tlak

statický tlak



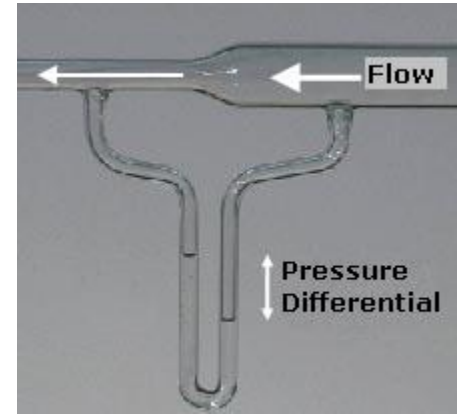
# Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )
- Venturiho efekt

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{konst}$$

dynamický tlak

statický tlak

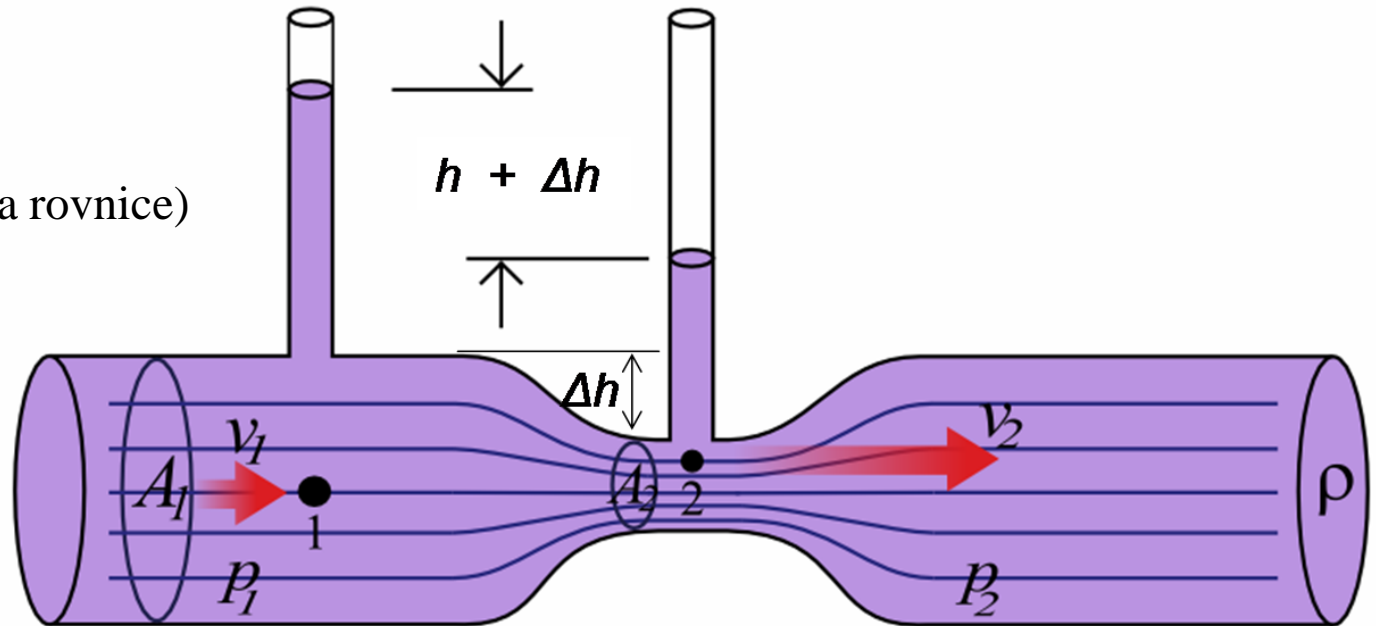


$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{rovnice kontinuity})$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$$



# Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )
- Venturiho efekt

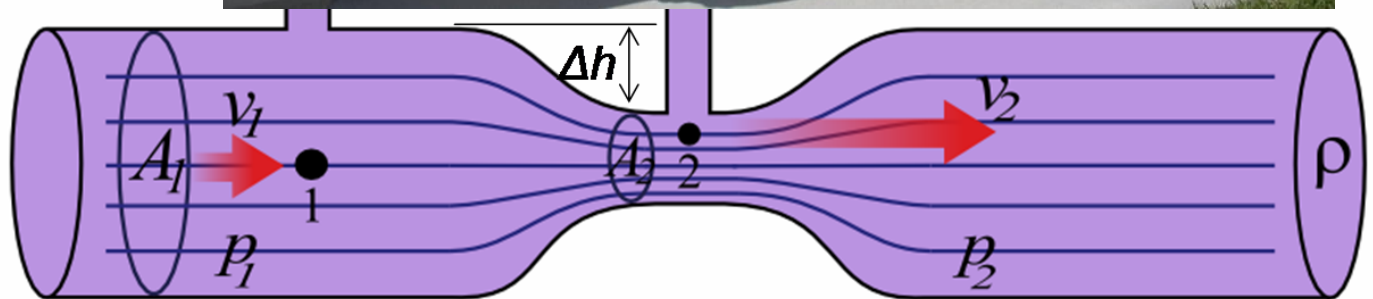
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{rovnice kontinuity})$$

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)



$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$$



# Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

dynamický tlak

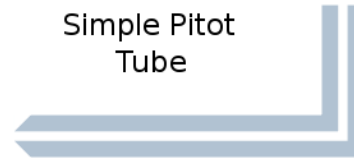
statický tlak

Pitotova trubice

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = p_{\text{tot}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p_{\text{tot}} - p)}{\rho}}$$

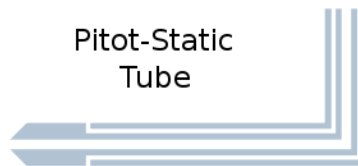
Simple Pitot Tube



Static Source



Pitot-Static Tube





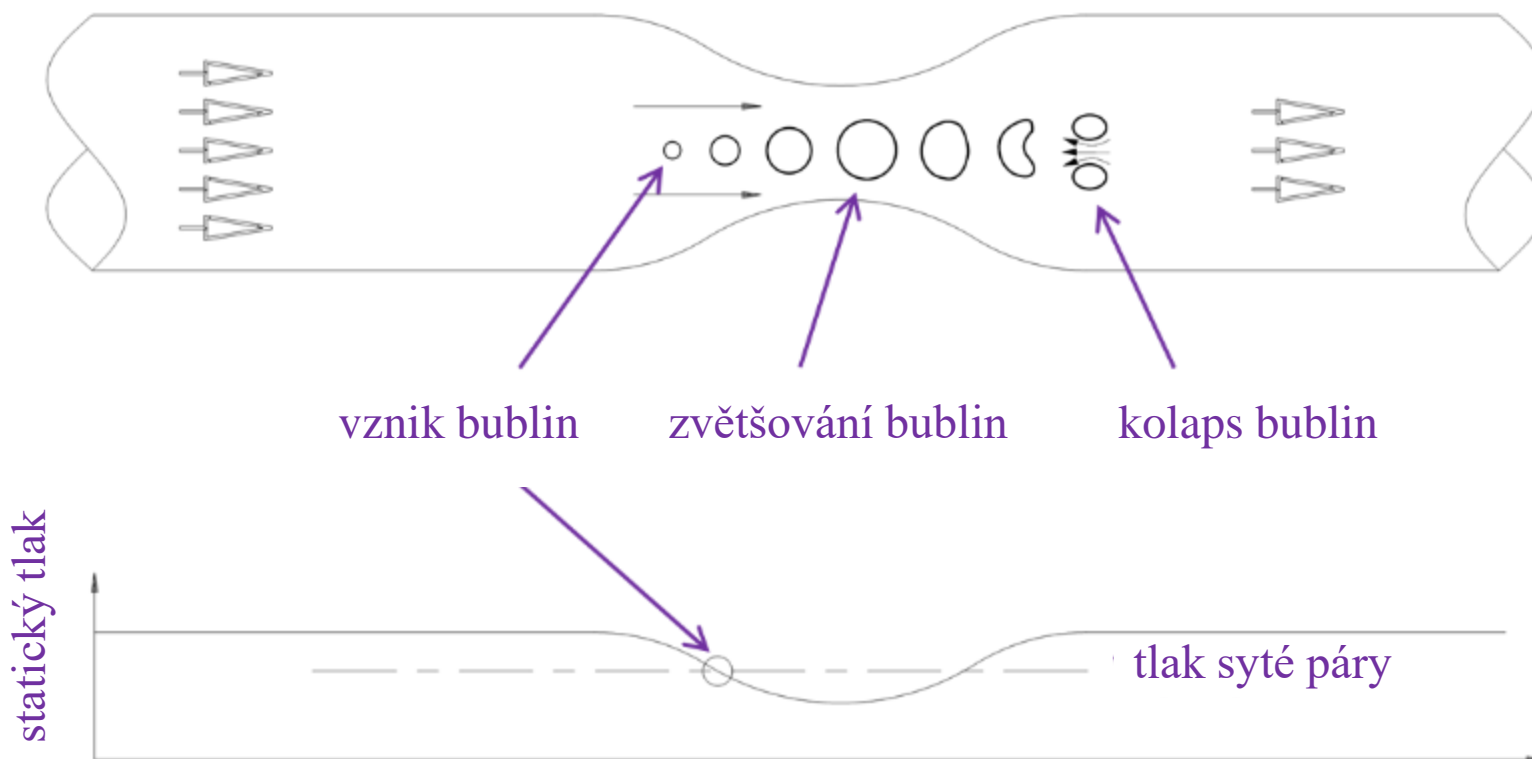
# Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{konst}$$

dynamický tlak

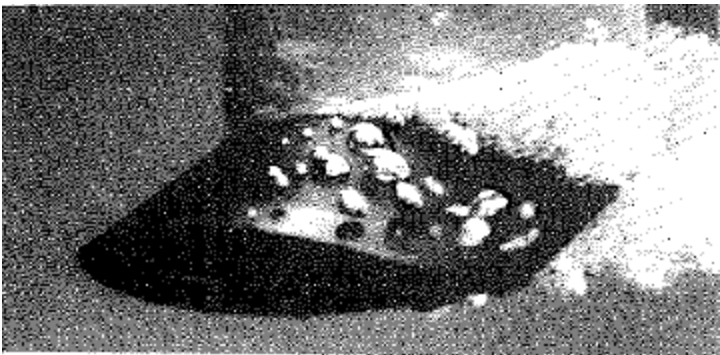
statický tlak



# Bernoulliova rovnice

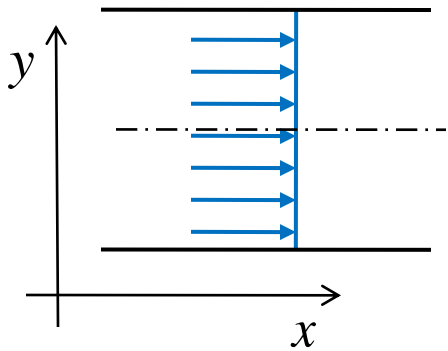
- pokud se nemění výška ( $E_p = 0$ )

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$



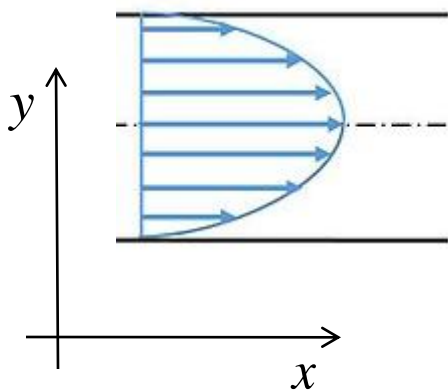
# Proudění reálné kapaliny

- proudění ideální kapaliny



- stejná rychlost ve všech místech průřezu

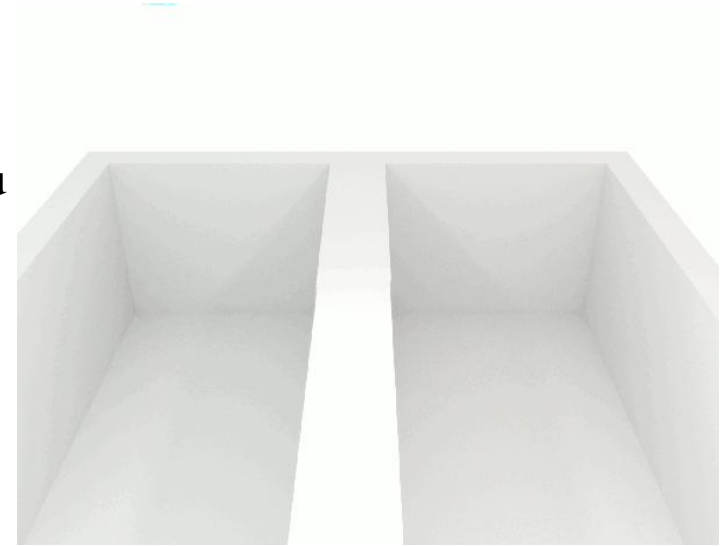
- laminární proudění reálné kapaliny



- rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření
- nejvyšší rychlost uprostřed potrubí, směrem ke krajům klesá k nule

- tečné napětí:  $\tau = \eta \frac{dv}{dy}$  (Newtonovské kapaliny)

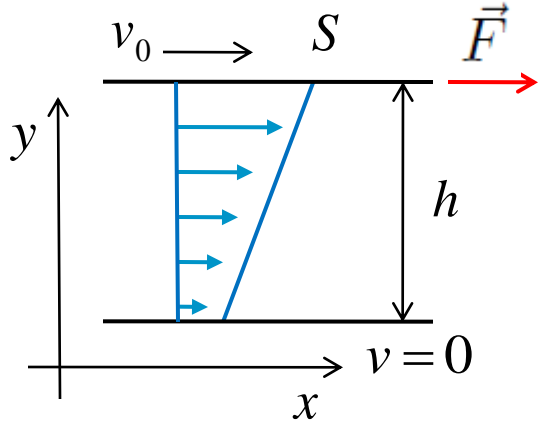
- dynamická viskozita:  $\eta = Ae^{B/T}$



$$\eta_1 < \eta_2$$

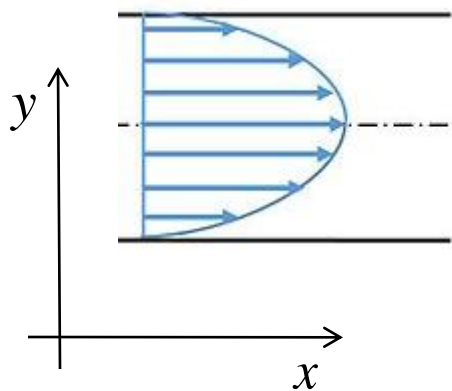
# Proudění reálné kapaliny

- měření dynamické viskozity



$$F = \eta \frac{v_0}{h} S$$

- laminární proudění reálné kapaliny

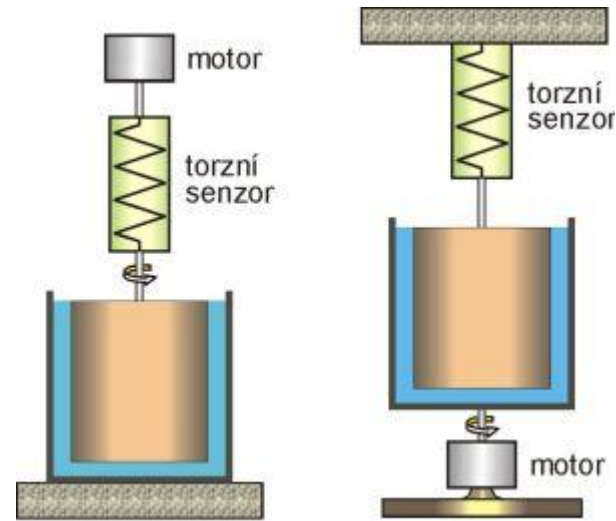


- rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření
- nejvyšší rychlost uprostřed potrubí, směrem ke krajům klesá k nule

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (\text{Newtonovské kapaliny})$$

- dynamická viskozita:  $\eta = Ae^{B/T}$

- rotační viskozimetry



$$\varphi = K\eta\omega$$

# Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla:  $F_p = \pi y^2 \Delta p$

- síla vnitřního tření:

$$F_t = \tau S = 2\pi y \Delta l \tau$$

$$F_p + F_t = 0$$

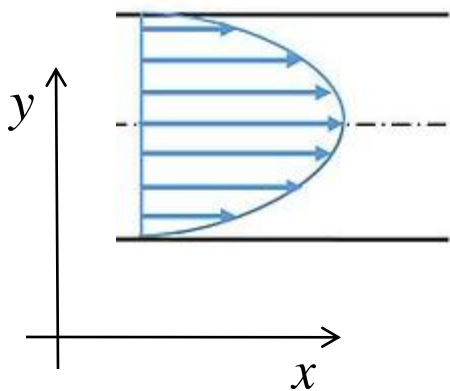
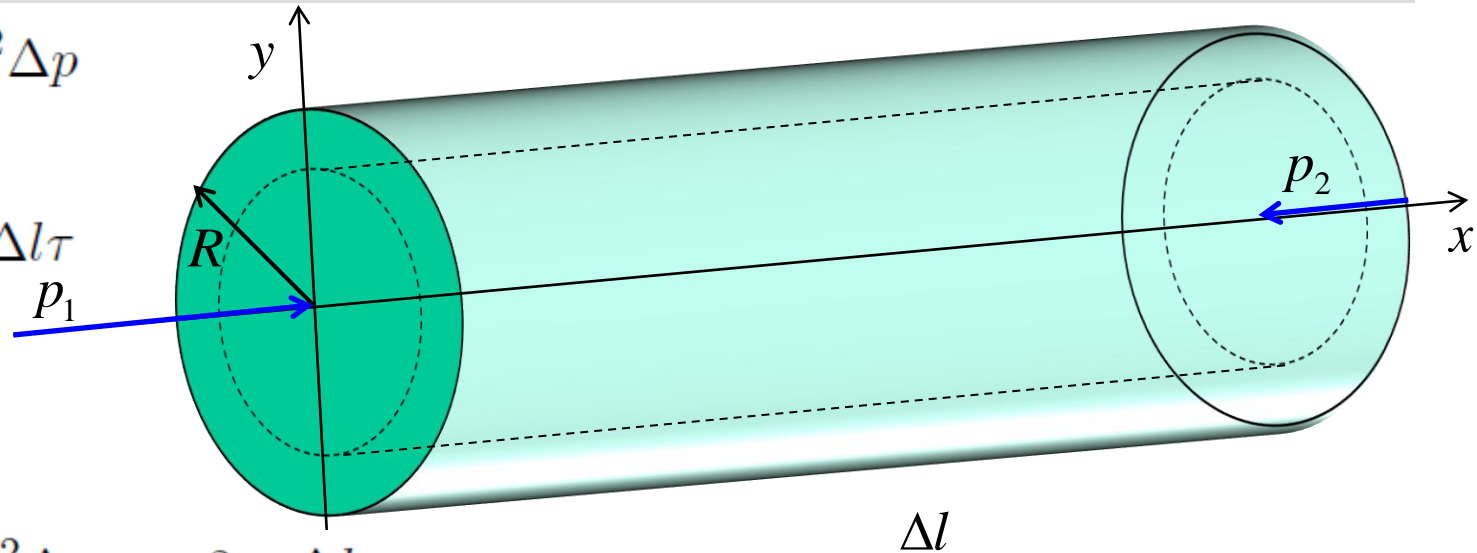
- laminární proudění:  $\pi y^2 \Delta p = -2\pi y \Delta l \tau$

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \longrightarrow dv = -\frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} y dy \quad v(R) = 0$$

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} y^2 + C \quad C = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} R^2$$

$$v = \frac{\Delta p}{4\Delta l \eta} (R^2 - y^2)$$

parabolický rychlostní profil



# Proudění reálné kapaliny

- dynamická viskozita při 20°C

- voda:  $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$

- etanol:  $\eta = 1.2 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$

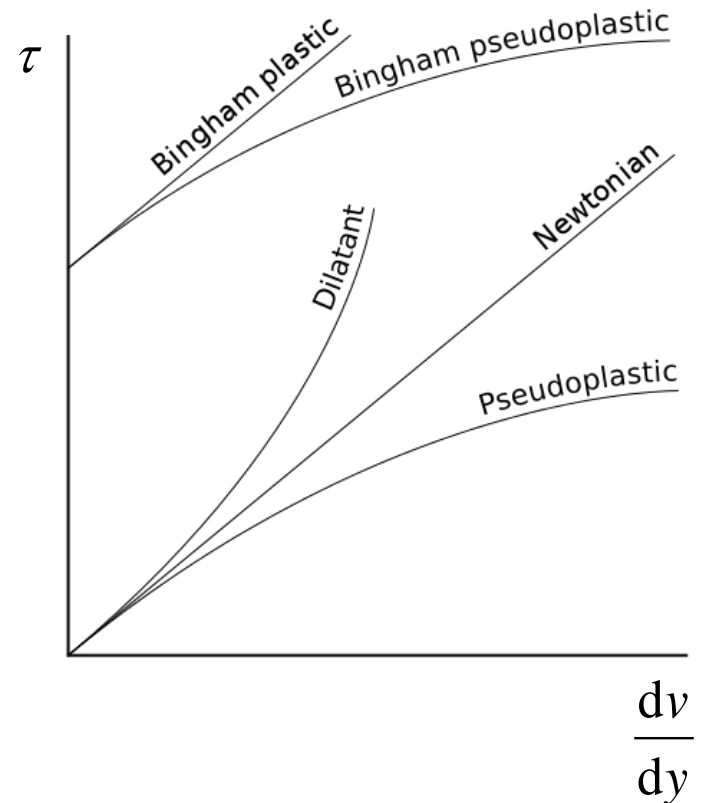
- glycerín:  $\eta = 1.48 \text{ Pa s}$

- med:  $\eta = 2 - 10 \text{ Pa s}$

- nenewtonovské kapaliny

- dilatantní:  $\eta$  narůstá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (kukuřičný škrob)

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (\text{Newtonovské kapaliny})$$

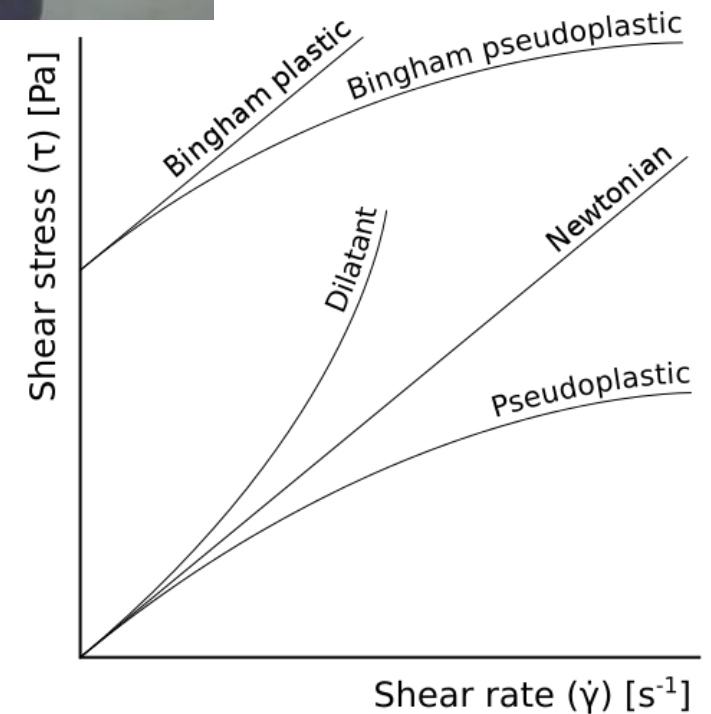


# Proudění reálné kapaliny

- dynamická viskozita při 20°C
- voda:  $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
- etanol:  $\eta = 1.2 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
- glycerín:  $\eta = 1.48 \text{ Pa s}$
- med:  $\eta = 2 - 10 \text{ Pa s}$

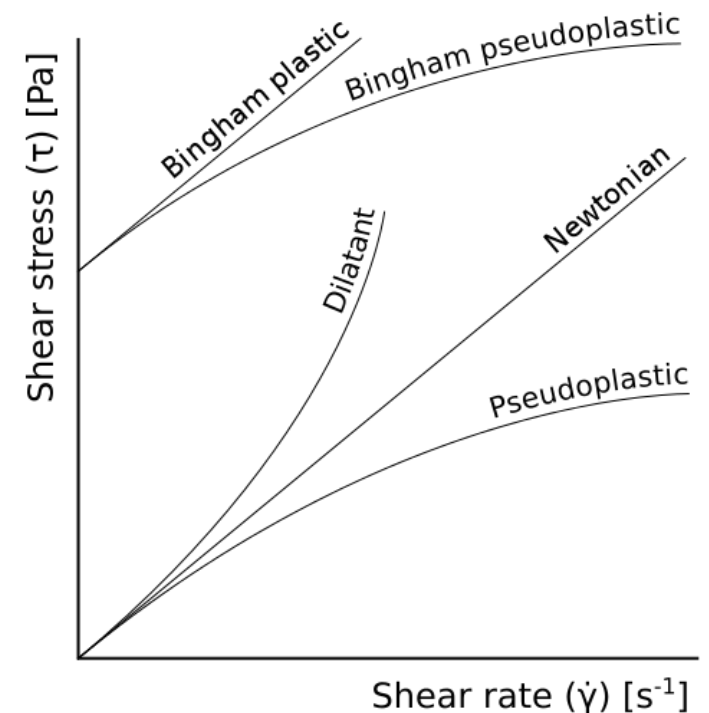


- dilatantní:  $\eta$  narůstá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (kukuřičný škrob)



# Proudění reálné kapaliny

- dynamická viskozita při 20°C
- voda:  $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
- etanol:  $\eta = 1.2 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
- glycerín:  $\eta = 1.48 \text{ Pa s}$
- med:  $\eta = 2 - 10 \text{ Pa s}$
  
- dilatantní:  $\eta$  narůstá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (kukuřičný škrob)
- pseudoplastické:  $\eta$  klesá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (krev, barva, kečup)
- Binghamské tekutiny: potřebují určitou prahovou hodnotu smykového napětí aby začaly téci (jíl, zubní pasta, majonéza)





# Reynoldsovo číslo

$\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$  ← střední kinetická energie jednotkového objemu kapaliny (dynamický tlak)

$\tau$  ← práce potřebná k překonání vnitřního tření v jednotkovém objemu kapaliny (smykové napětí)

• vnitřní tření pro Newtonovskou kapalinu:  $\tau = \eta \frac{dv}{dy} \approx \eta \frac{\bar{v}}{\frac{R}{2}} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2}{\tau} = \frac{\rho \bar{v} R}{4\eta}$

**Reynoldsovo číslo:**  $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$

hustota      rychlost  
                  ↓  
Re =  $\frac{\rho v L}{\eta}$  ← charakteristický rozměr  
                  ↑  
                  viskozita

# Reynoldsovo číslo

$\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2$  ← střední kinetická energie jednotkového objemu kapaliny

$\tau$  ← práce potřebná k překonání vnitřního tření v jednotkovém objemu kapaliny

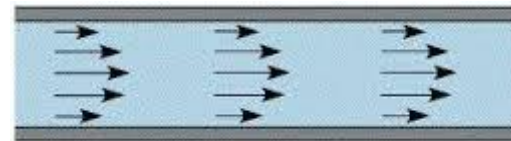
• vnitřní tření pro Newtonovskou kapalinu:  $\tau = \eta \frac{\bar{v}}{R} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2}{\tau} = \frac{\rho \bar{v} R}{4\eta}$

**Reynoldsovo číslo:**  $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$

• proudění ideální kapaliny:  $Re = \infty$

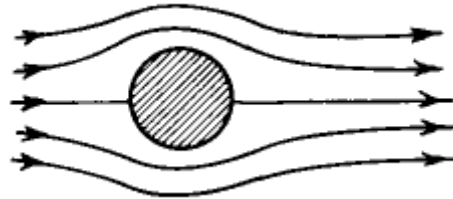
• laminární proudění reálné kapaliny:  $Re < Re_{krit}$

• turbulentní proudění reálné kapaliny:  $Re > Re_{krit}$

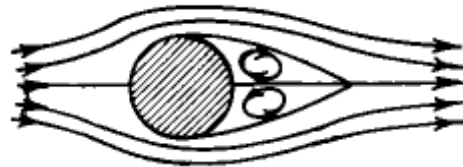


# Reynoldsovo číslo $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$

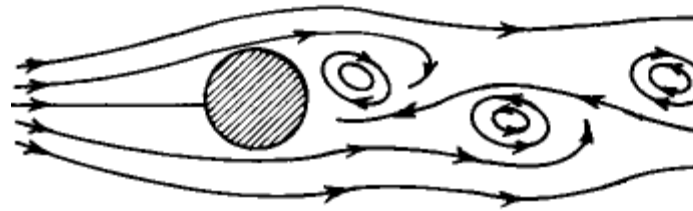
- lamilární proudění:  $Re \approx 0.01$



- vznik vírů:  $Re \approx 10$



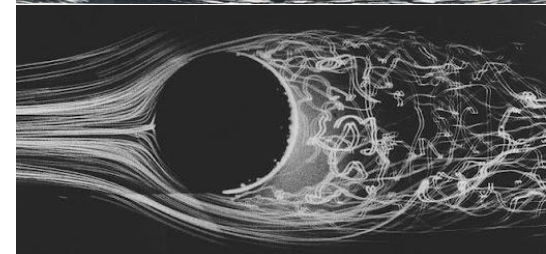
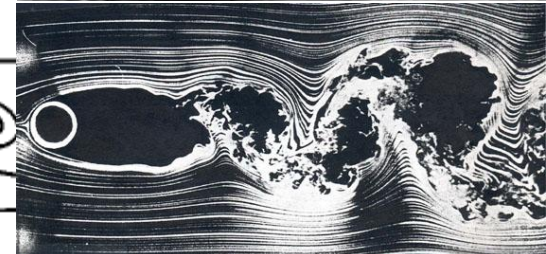
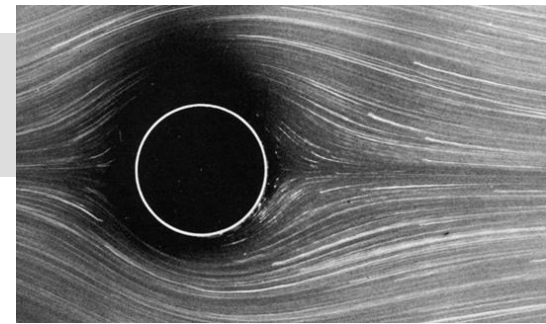
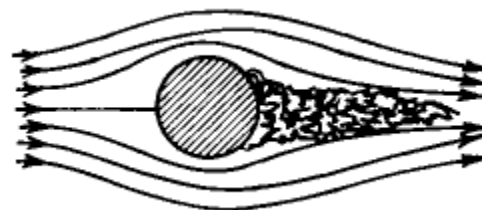
- Karmánova vírová cesta:  $Re \approx 100$



- periodické turbulentní proudění  $Re \approx 10^4$



- turbulentní hraniční vrstva:  $Re \approx 10^6$



# Magnusův jev

- rotujícího těleso letící v tekutém médiu vytváří kolem sebe vír a působí na něj reakční síla kolmá ke směru proudění okolního média

- **pro rotující váleček**

- Magnusova síla na jednotku délky  $\frac{F}{L} = \rho v G$

- “síla víru“  $G = 2\pi R^2 \omega$

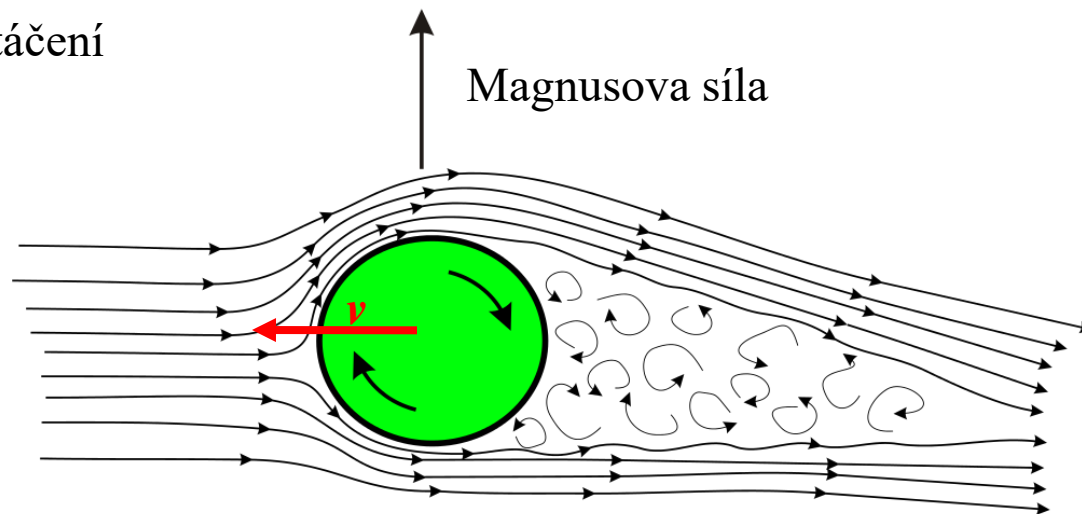
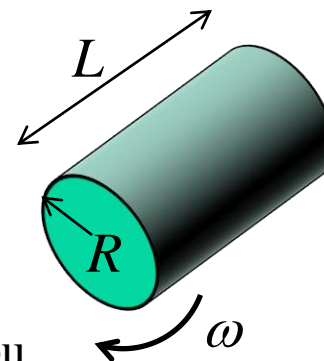
poloměr válce

úhlová rychlost otáčení

hustota média

rychlost pohybu

$$\frac{F}{L} = 2\pi R^2 \omega \rho v$$

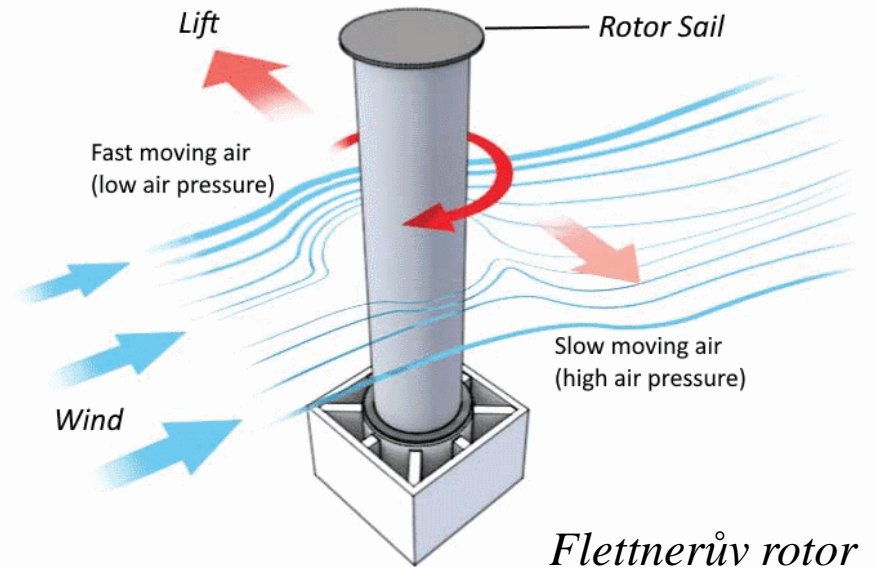


# Magnusův jev

- rotujícího tělesa letící v tekutém médiu vytváří kožolmá ke směru prodění okolního média

- pro rotující válec

- Magnusova síla na jednotku délky  $\frac{F}{L} = \rho v G$
  - “síla víru“  $G = 2\pi r^2 \omega$
- hustota média      rychlost

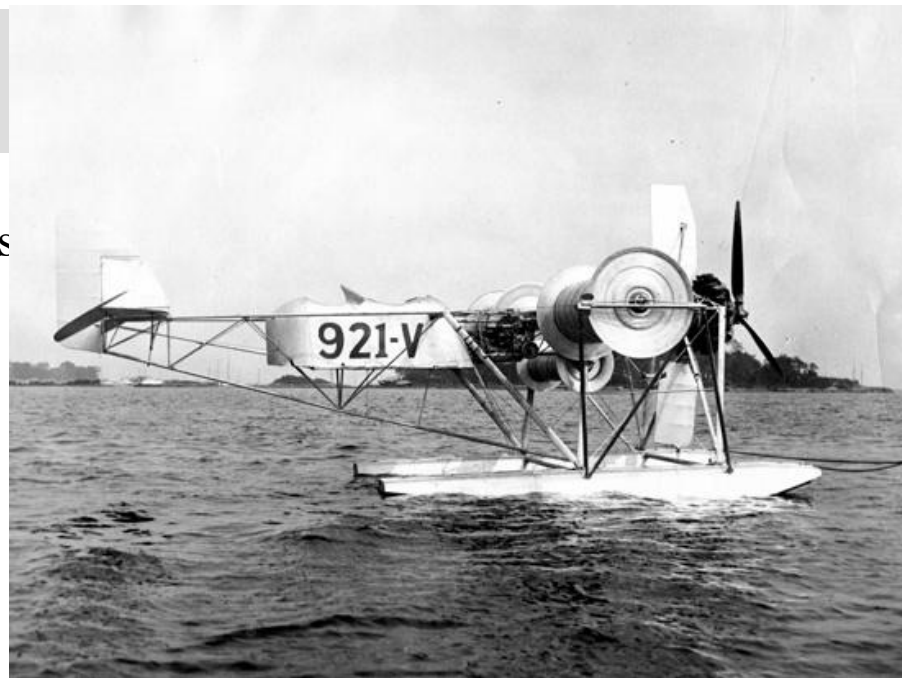


# Magnusův jev

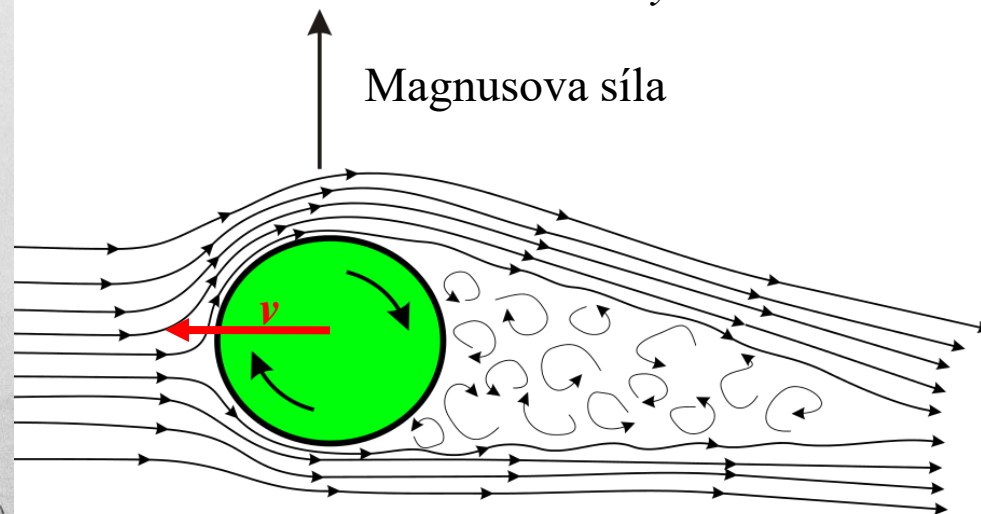
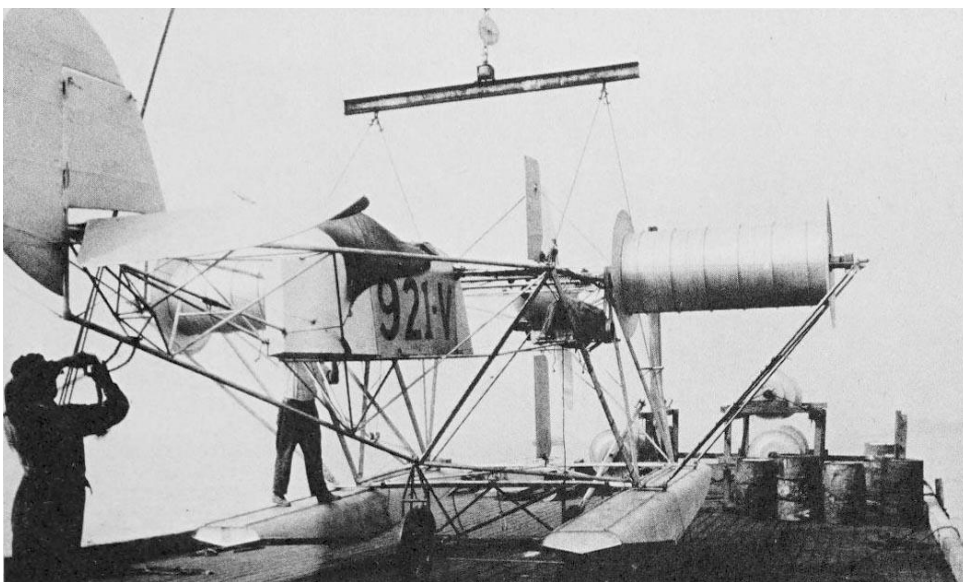
- rotujícího těleso letící v tekutém médiu vytváří kolem sebe vlnění kolmé ke směru proudění okolního média

- pro rotující válec

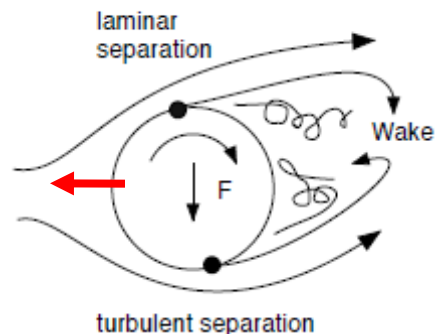
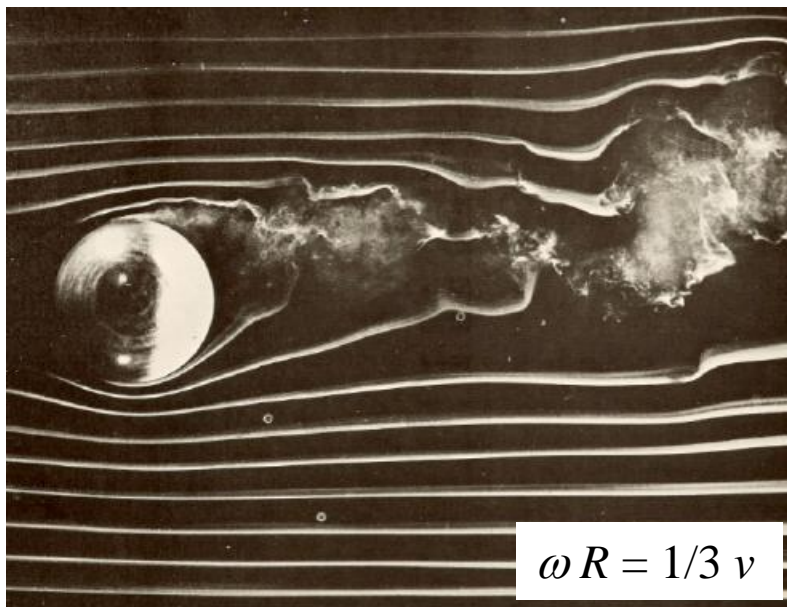
- Magnusova síla na jednotku délky  $\frac{F}{L} = \rho v G$
  - “síla víru“  $G = 2\pi r^2 \omega$
- hustota média      rychlost



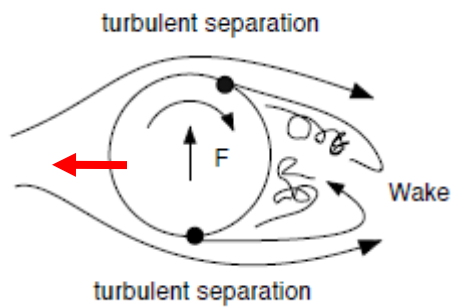
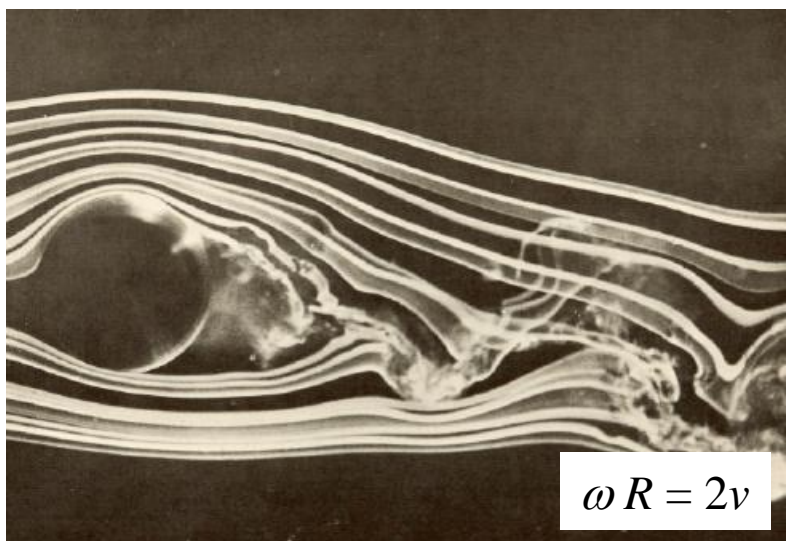
*Plymouth A-A 2004*



# Magnusův jev



Magnusova síla negativní  
(opačný směr)



Magnusova síla pozitivní

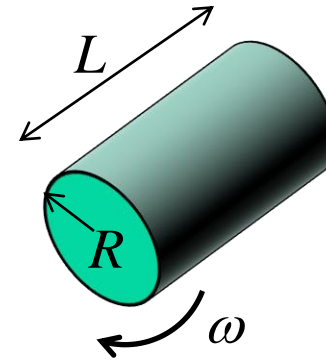
# Magnusův jev

- rotujícího těleso letící v tekutém médiu vytváří kolem sebe vír a působí na něj reakční síla kolmá ke směru proudění okolního média

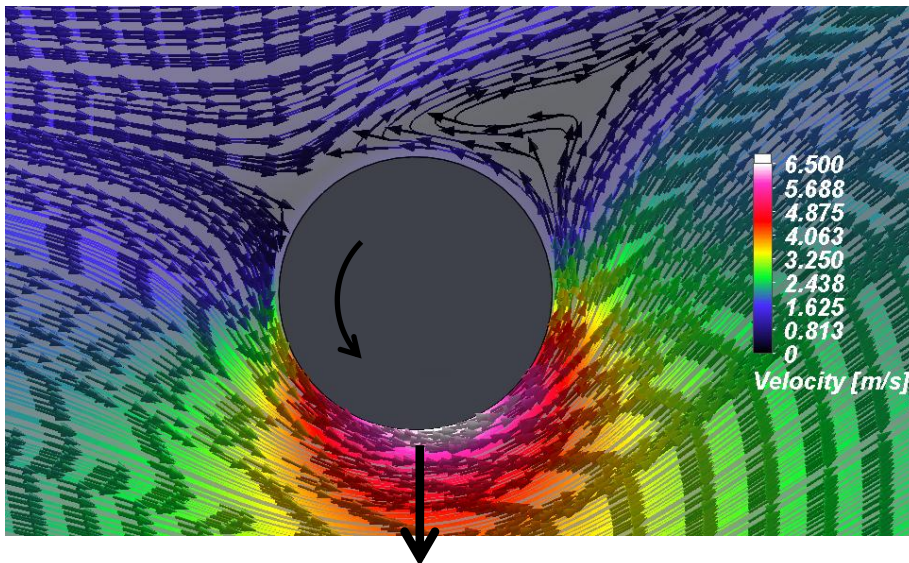
- **pro rotující válec**

- Magnusova síla na jednotku délky

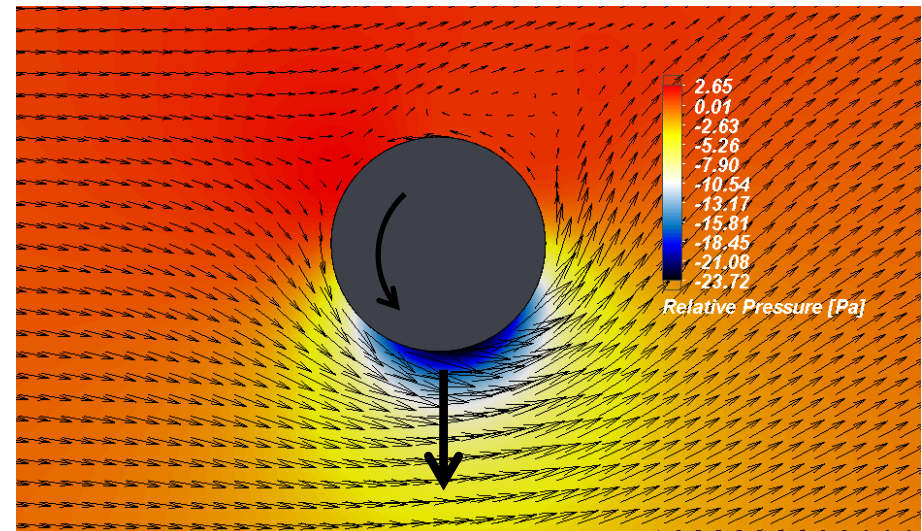
$$\frac{F}{L} = 2\pi R^2 \omega \rho v$$



*mapa rychlosti*



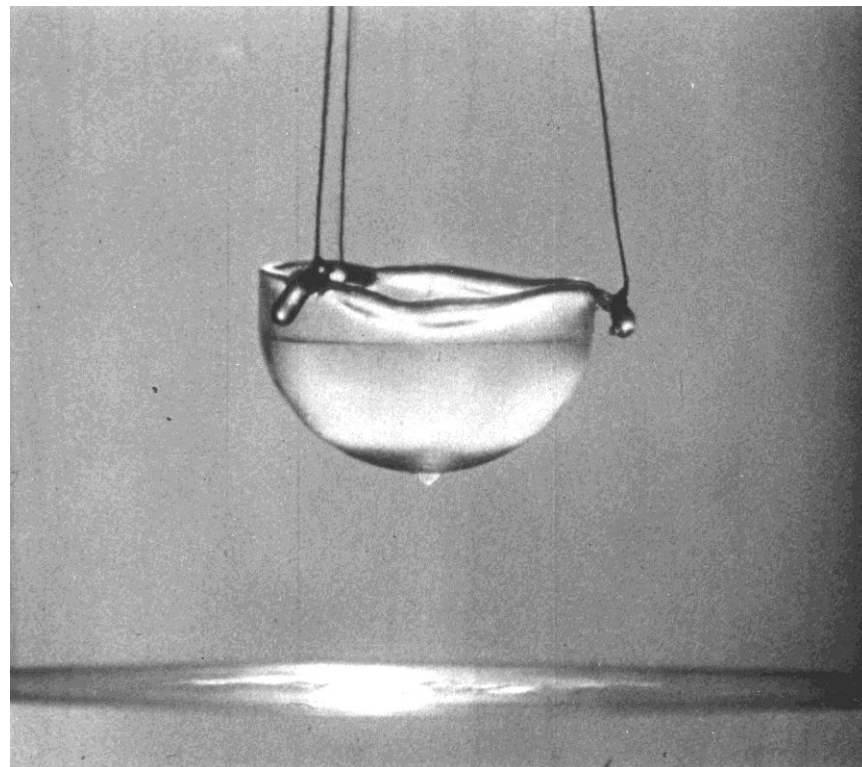
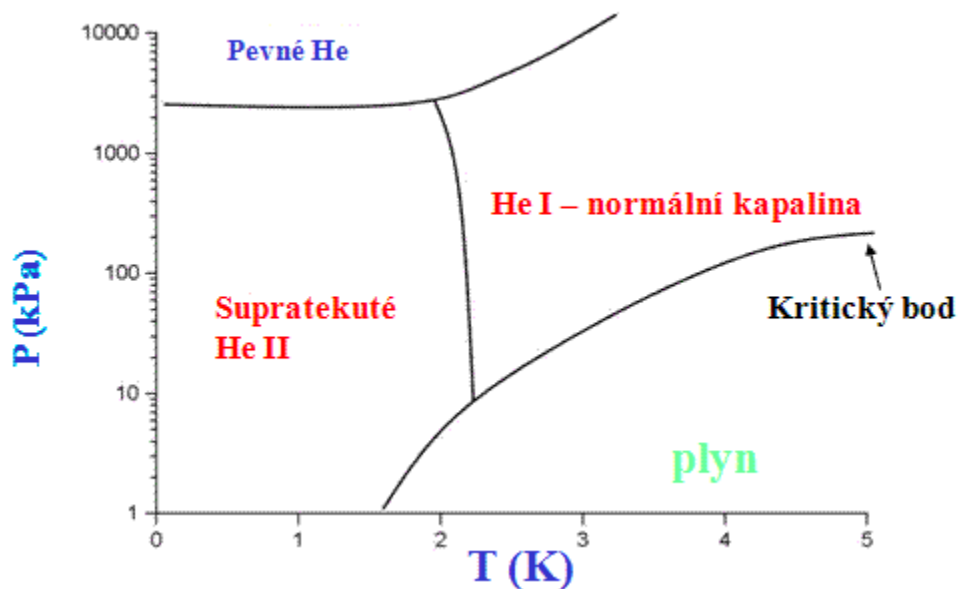
*mapa rozložení tlaku*





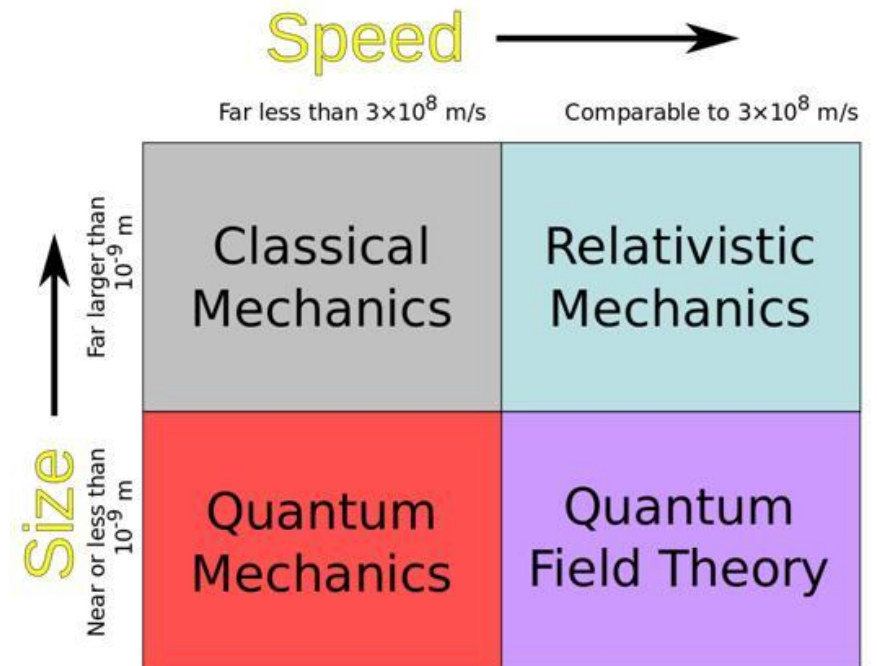
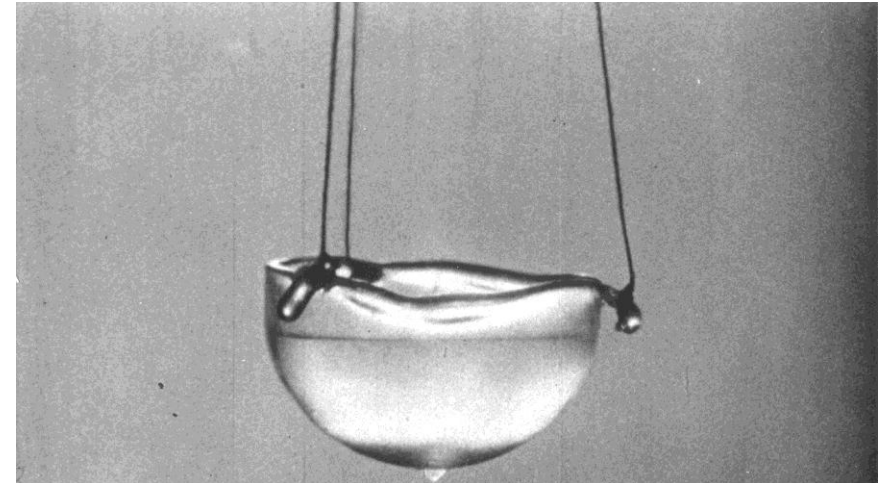
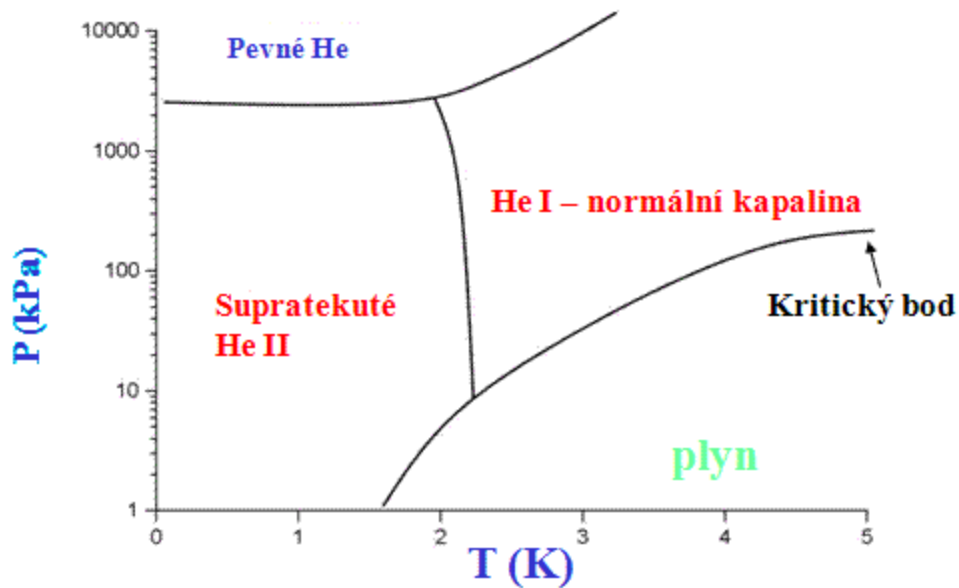
# Supratekutost

- He-I  $\eta = 2.45 \times 10^{-4}$  Pas
- He-II  $\eta = 0$  – supratekutá kapalina
- $^4\text{He}$  při teplotě nižší než 2.17 K
- $^4\text{He}$  je boson ( $2p + 2n$ )
- Bose – Einsteinův kondenzát  
(zředěný plyn bosonů při teplotě blízké 0 K)



# Supratekutost

- $^4\text{He}$  při teplotě nižší než 2.17 K
- $^4\text{He}$  je boson ( $2p + 2n$ )
- Bose – Einsteinův kondenzát  
(zředěný plyn bosonů při teplotě blízké 0 K)

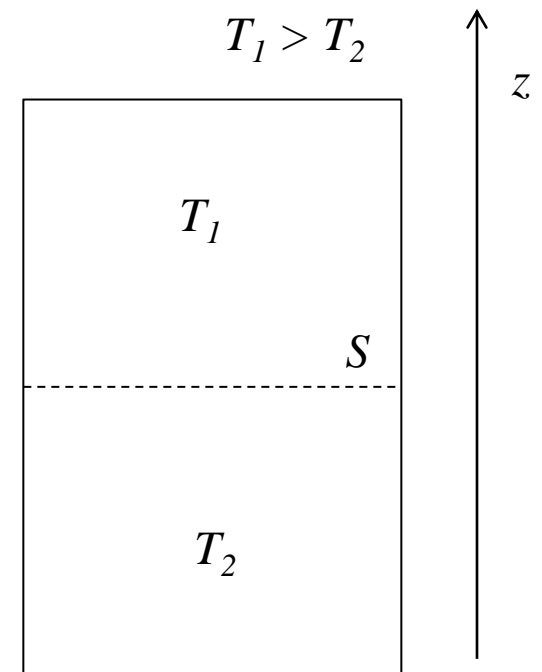


# Tepelná vodivost

- tepelný tok - teplo přenesené jednotkovou plochou za jednotku času  $J_Q \equiv \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$

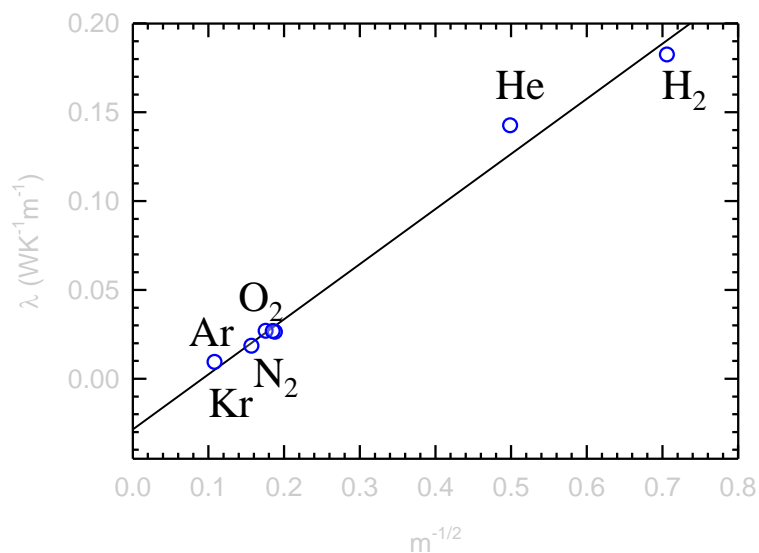
$$J_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad \leftarrow \text{gradient teploty}$$

součinitel tepelné vodivosti  $\lambda \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$



# Tepelná vodivost

součinitel tepelné vodivosti  $\lambda \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$

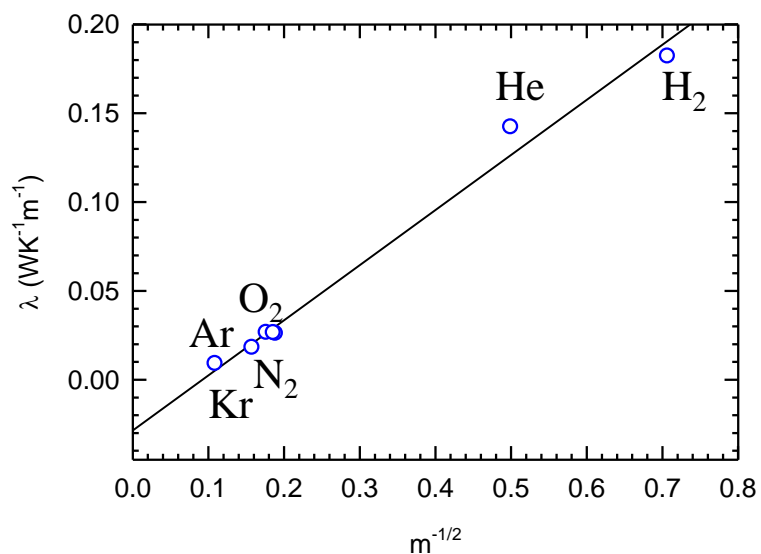


součinitel tepelné vodivosti při  $T = 300 \text{ K}$

$\lambda$ ( $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$ )	materiál
0.1819	$\text{H}_2$
0.142	He
0.0258	$\text{N}_2$
0.0264	$\text{O}_2$
0.0262	vzduch
0.0179	Ar
0.0088	Kr

# Tepelná vodivost

součinitel tepelné vodivosti  $\lambda \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$

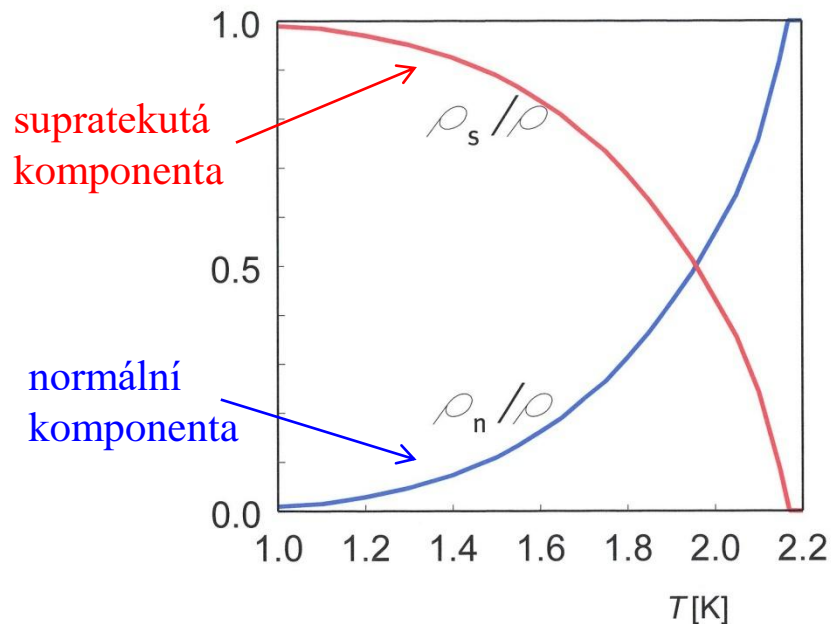
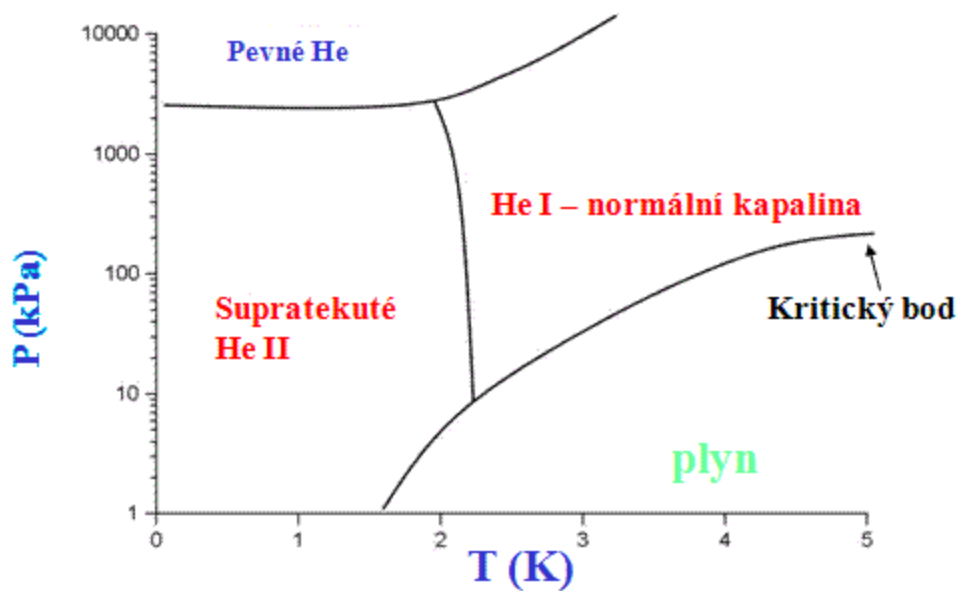


součinitel tepelné vodivosti při  $T = 300 \text{ K}$

$\lambda$ ( $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$ )	materiál
0.1819	H <sub>2</sub>
0.142	He
0.0258	N <sub>2</sub>
0.0264	O <sub>2</sub>
0.0262	vzduch
0.0179	Ar
0.0088	Kr
7.810	Mn
401	Cu

# Tepelná vodivost

- $^4\text{He}$  při teplotě nižší než 2.17 K
- $^4\text{He}$  je boson ( $2p + 2n$ )
- Bose – Einsteinův kondenzát  
(zředěný plyn bosonů při teplotě blízké 0 K)



0.01

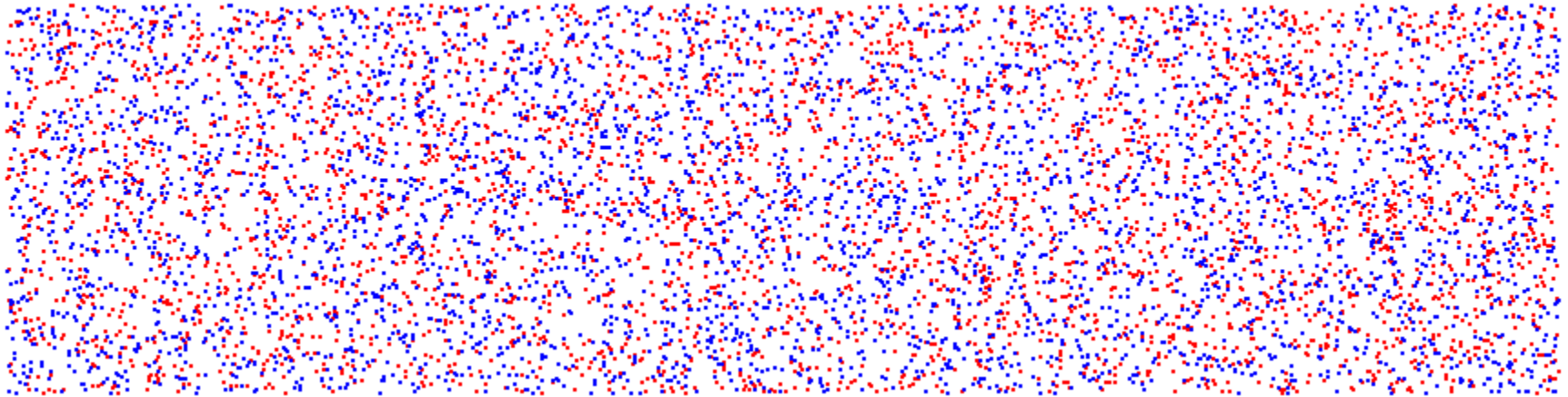
He-I (4 K)

$> 10^5$

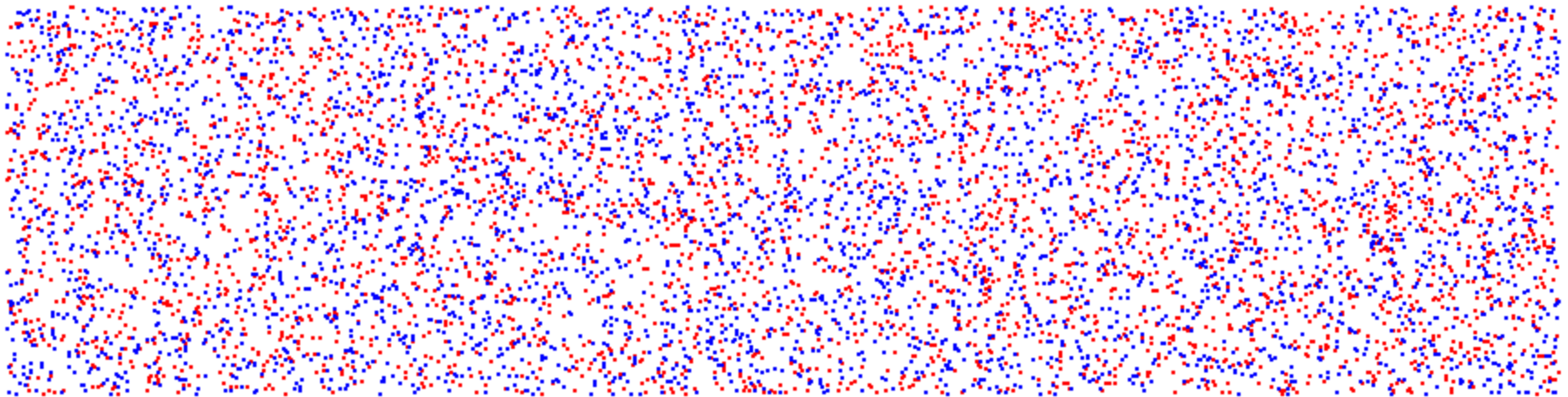
He-II (2 K)

# Tepelná vodivost – He-II

zvuk – vlna hustoty



druhý zvuk – vlna teploty



# Transportní jevy a Newtonův zákon viskozity

- tepelný tok - teplo přenesené jednotkovou plochou za jednotku času  $J_Q \equiv \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt}$

$$J_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \longleftarrow \text{gradient teploty}$$

↑  
součinitel tepelné vodivosti

- difúze – tok hmoty, počet částic které projdou jednotkovou plochou za jednotku času  $J_x = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt}$

$$J_x = -D_x \frac{\partial n}{\partial x} \longleftarrow \text{gradient koncentrace}$$

↑  
difúzní koeficient

1. Fickův zákon

- prodění reálné kapaliny – tok hybnosti  $\tau = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{dp}{dt}$

$$\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \longleftarrow \text{gradient rychlosti}$$

↑  
viskozita

Newtonův zákon viskozity