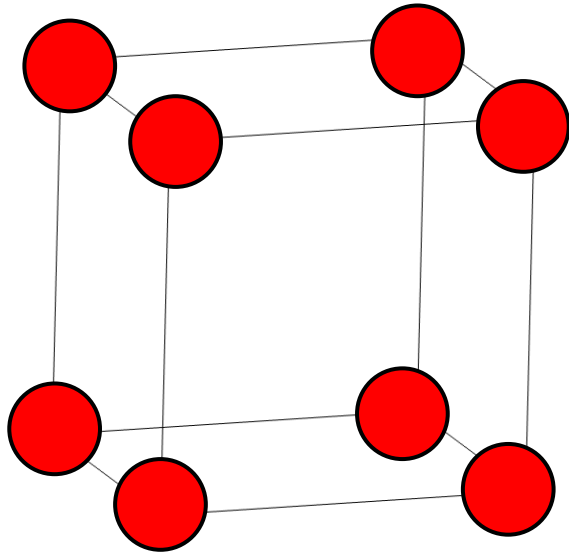
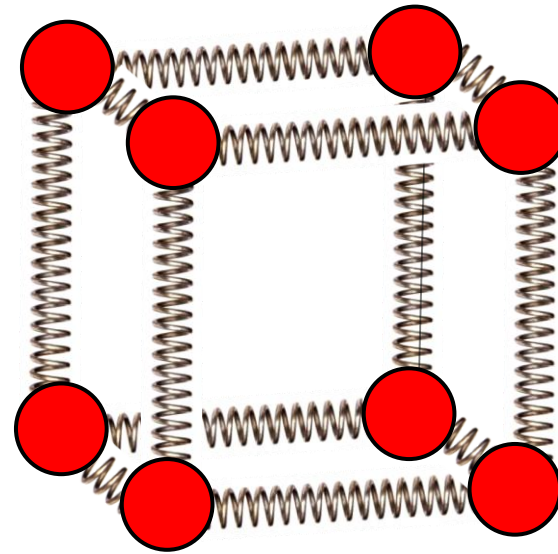


Mechanika kontinua - napětí

tuhé těleso



reálné těleso



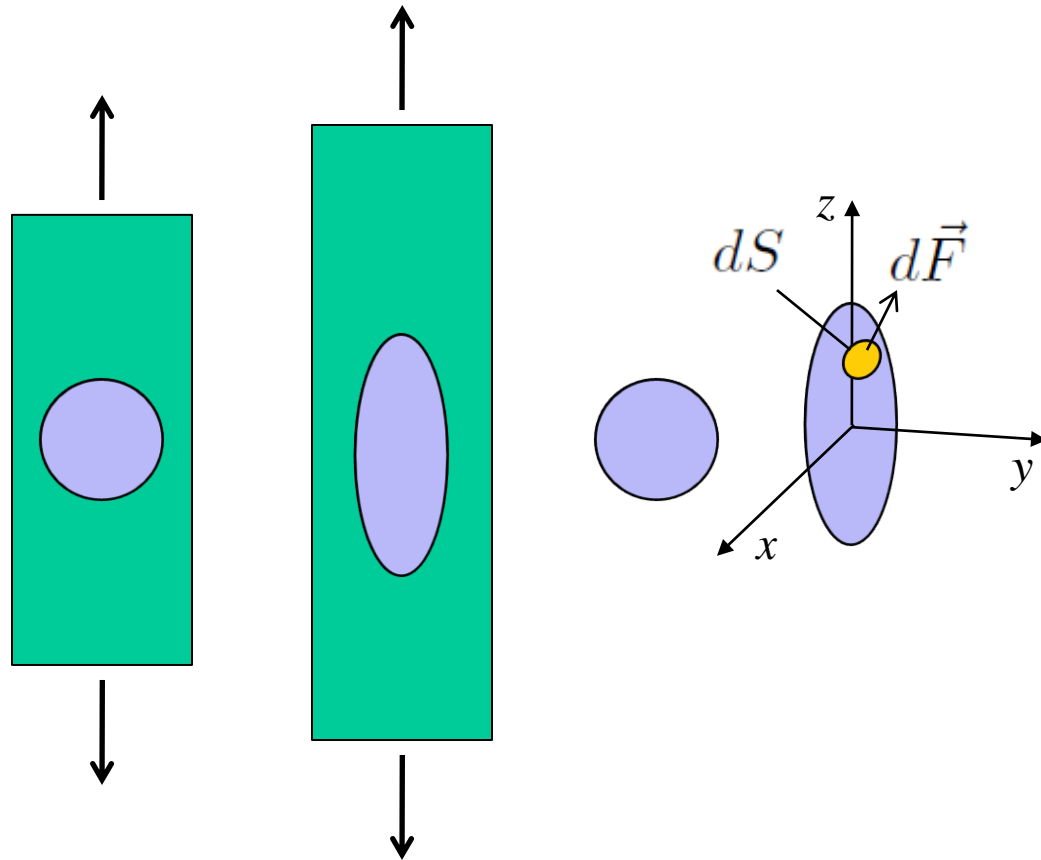
Mechanika kontinua - napětí

- spojité prostředí – **kontinuum**
- **objemové síly** – působí současně na všechny částice kontinua (např. tíhová síla)
- **plošné síly** – působí na povrch studované části kontinua a způsobují jeho deformaci

$$\text{• napětí } \vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

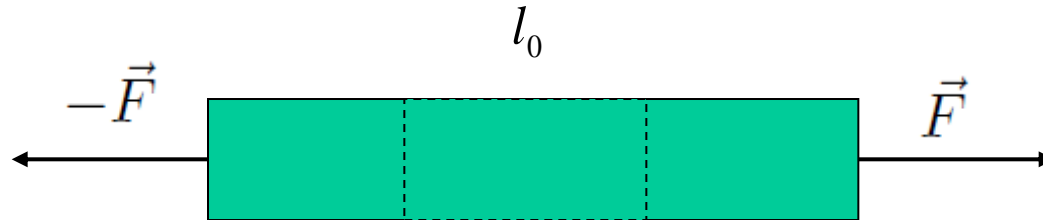
• jednotky Pascal [Pa] = Nm⁻²

síla působící na malý plošný element dělená jeho plochou



Mechanika kontinua – deformace tahem

- čistý tah



- Hookův zákon

$$\sigma = E\varepsilon$$

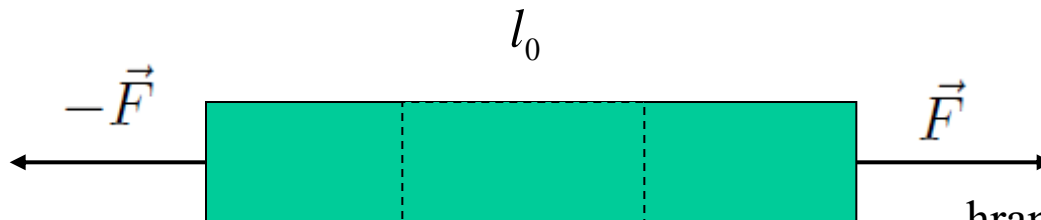
napětí deformace

- E – modul pružnosti (relativní změna délky)

	E (GPa)
ocel	200-220
měď	117
hořčík	45
beton	30
guma	0.01-0.1

Mechanika kontinua – deformace tahem

- čistý tah



hranová dislokace

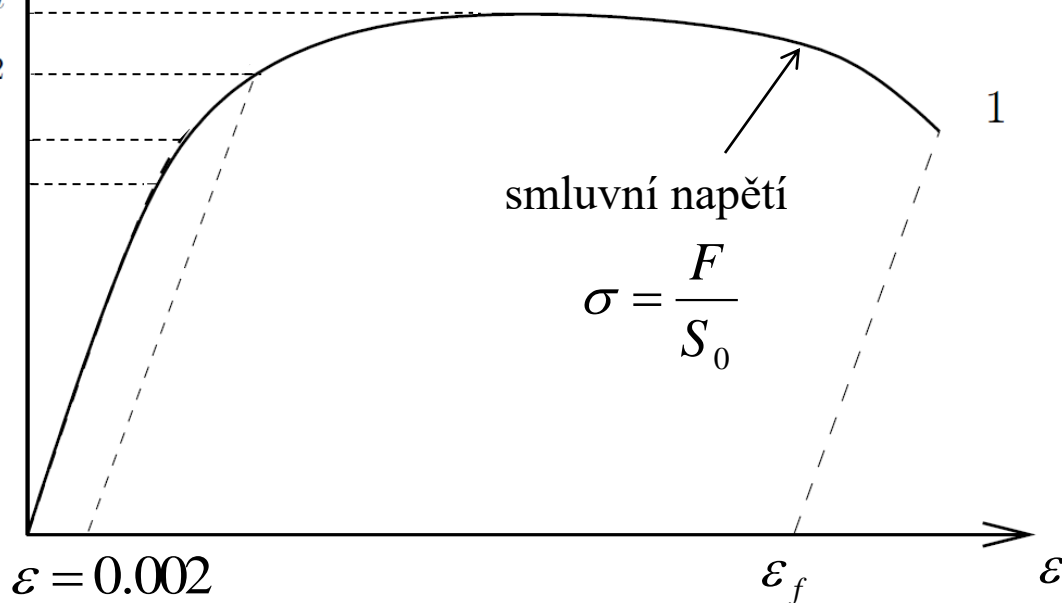
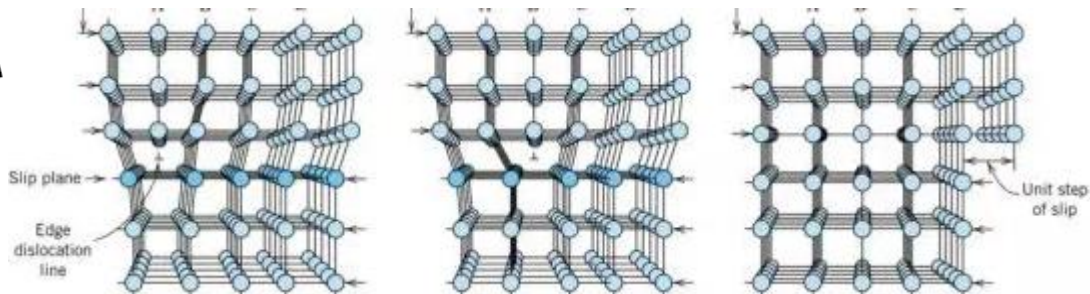
- Hookův zákon

$$\sigma = E\varepsilon$$

napětí σ deformace ε
 (relativní změna délky)

- E – modul pružnosti

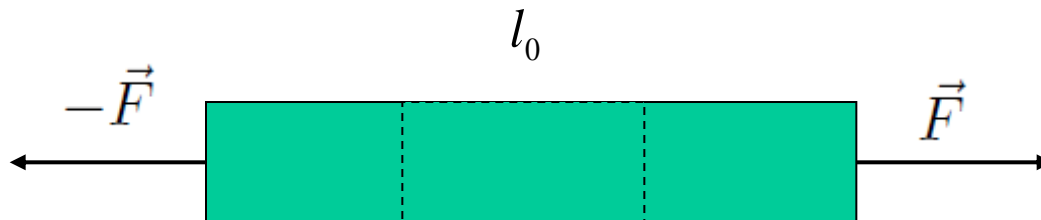
mez pevnosti $\rightarrow \sigma_m$
 $R_p0.2 \rightarrow \sigma_{0.2}$
 mez kluzu $\rightarrow \sigma_E$
 mez úměrnosti $\rightarrow \sigma_u$



	E (GPa)
ocel	200-220
měď	117
hořčík	45
beton	30
guma	0.01-0.1

Mechanika kontinua – deformace tahem

- čistý tah



- Hookův zákon

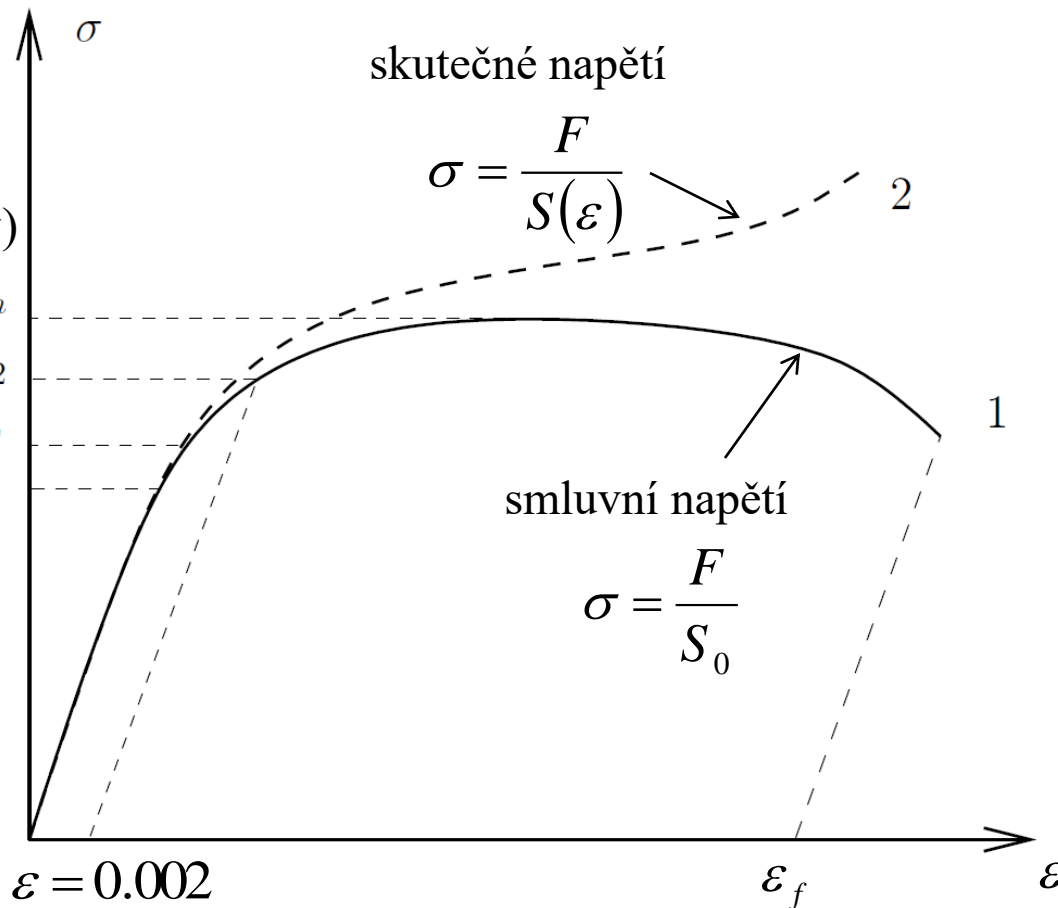
$$\sigma = E \varepsilon$$

napětí σ deformace ε
 (relativní změna délky)

- E – modul pružnosti

mez pevnosti $\rightarrow \sigma_m$
 $R_p0.2 \rightarrow \sigma_{0.2}$
 mez kluzu $\rightarrow \sigma_E$
 mez úměrnosti $\rightarrow \sigma_u$

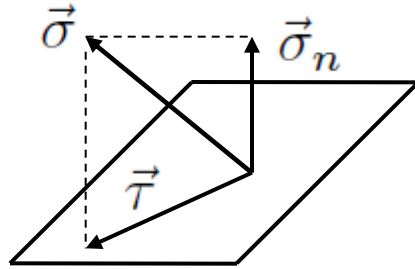
	E (GPa)
ocel	200-220
měď	117
hořčík	45
beton	30
guma	0.01-0.1



Mechanika kontinua - napětí

- napětí

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$



- normálové napětí

$$\vec{\sigma}_n = \frac{d\vec{F}_n}{dS} \quad (\text{kolmo na plochu})$$

- tečné (smykové) napětí

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dS} \quad (\text{v rovině plochy})$$

- znaménková konvence

- tažné napětí $\sigma > 0$



- kompresní napětí $\sigma < 0$



Mechanika kontinua - napětí

- tenzor napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

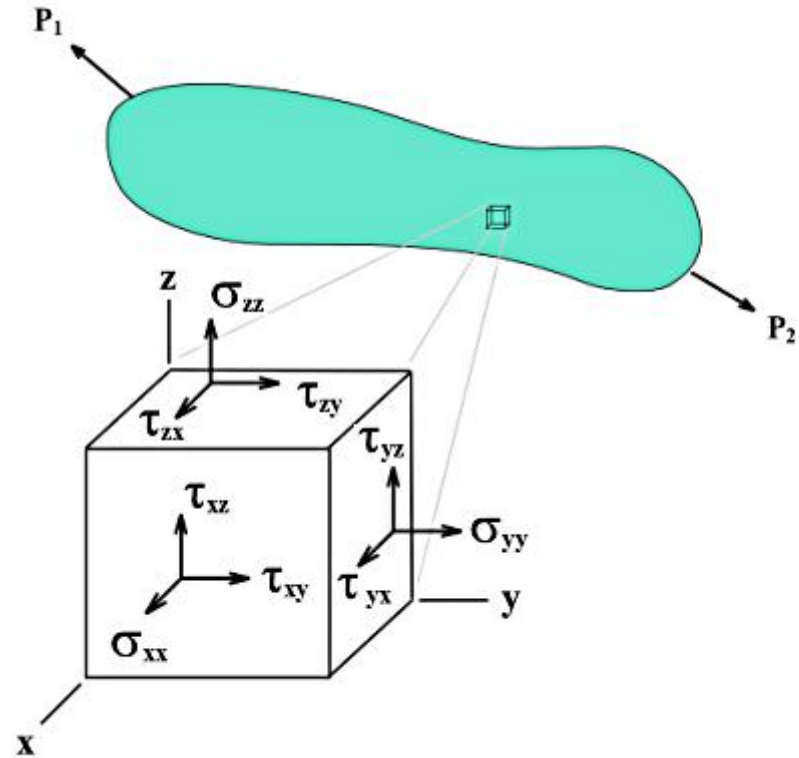
$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

- čistě tahové složky (tlakové) složky:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$$

- smykové složky:

$$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$$



Mechanika kontinua - napětí

- tenzor napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

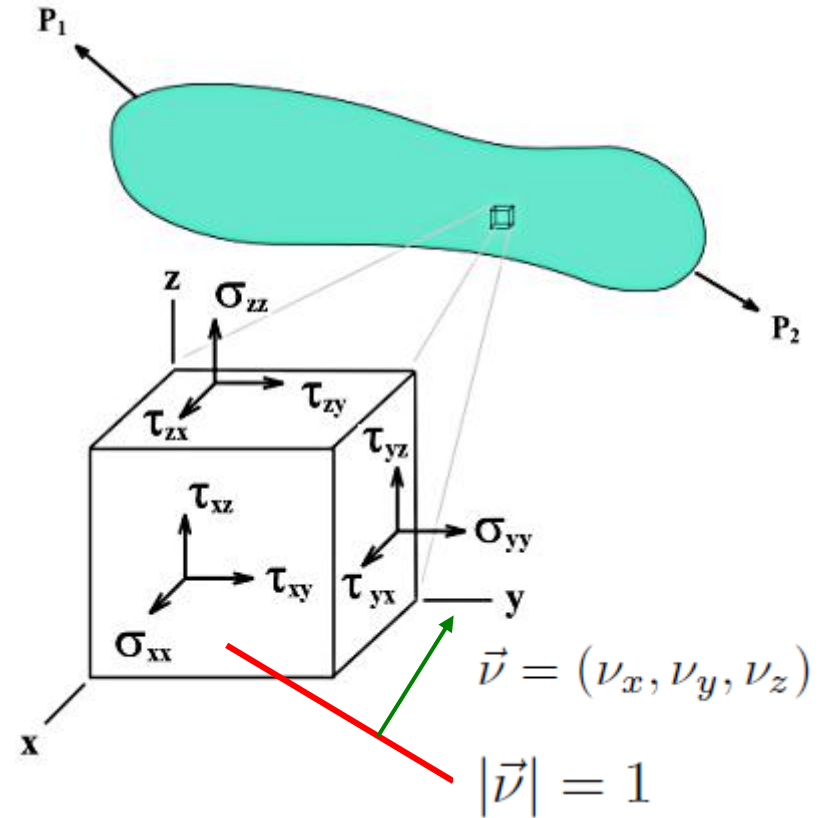
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

- napětí v obecné rovině:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \vec{\nu}$$



Mechanika kontinua - napětí

- tenzor napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

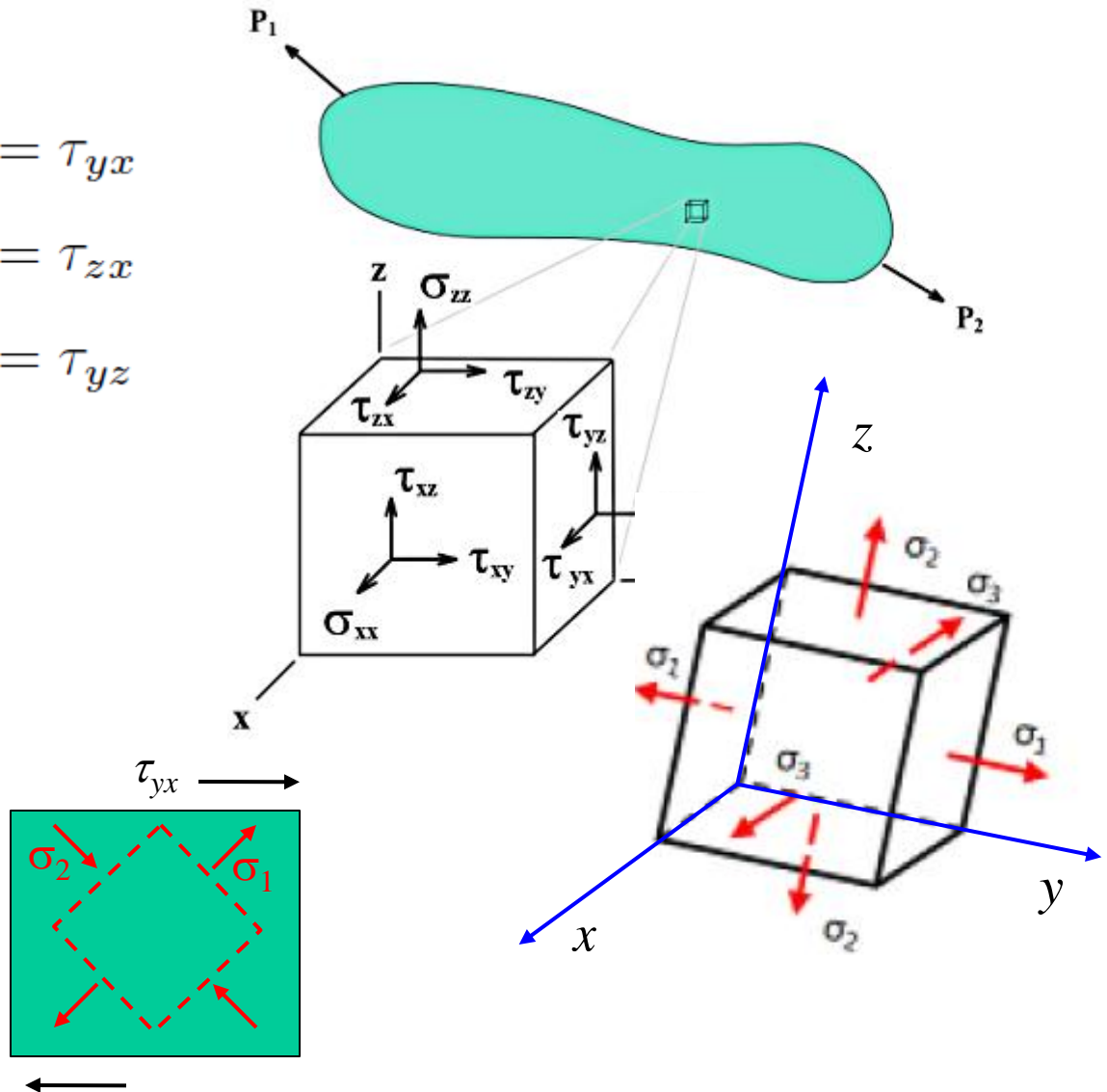
$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

- hlavní roviny

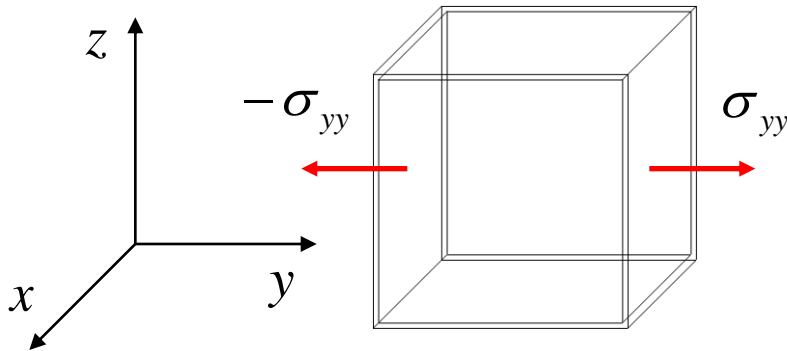
$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - hlavní napětí



Mechanika kontinua - napětí

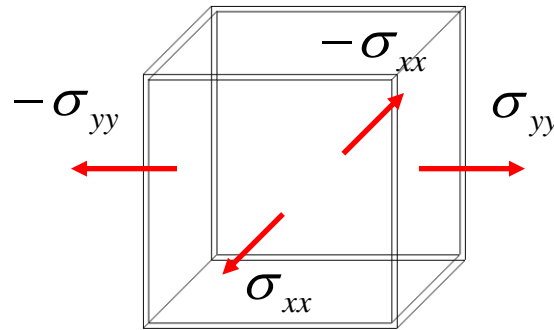
• jednoosá napjatost



tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$

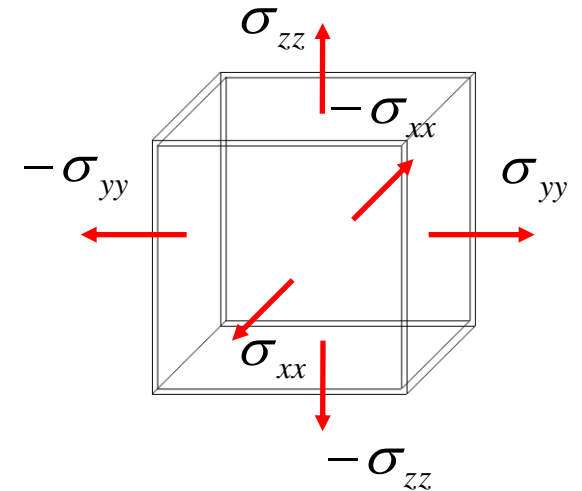
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• dvojosá napjatost



$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• trojosá napjatost

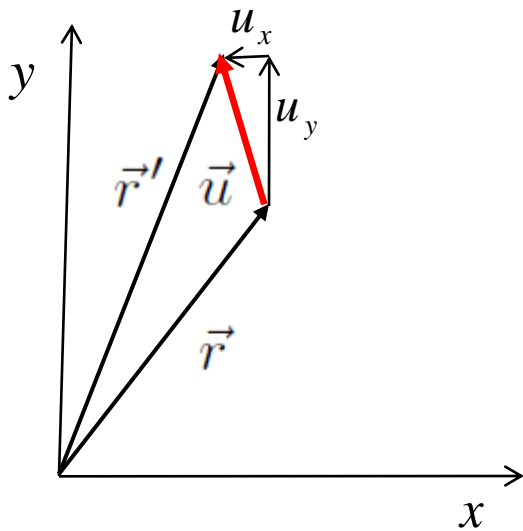


$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Mechanika kontinua - deformace

- deformace vede k posunutí částic kontinua

- posunutí $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$



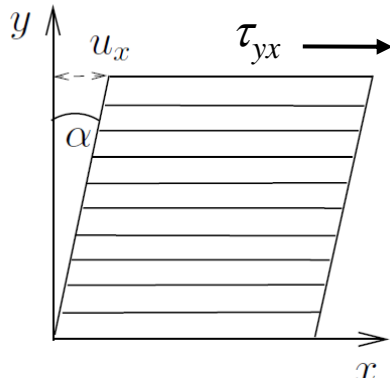
- **deformace způsobené normálovými napětími**

- deformace ve směru osy x : $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$
- deformace ve směru osy y : $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$
- deformace ve směru osy z : $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$

Mechanika kontinua - deformace

- deformace smykovými napětími

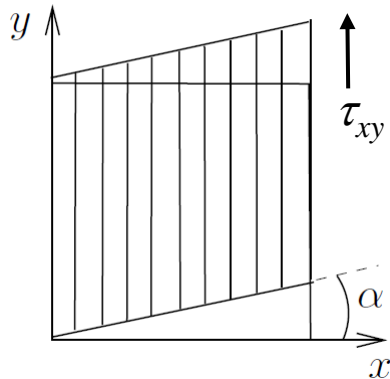
- deformace ve směru osy x : $\varepsilon_{yx} = \frac{u_x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$



posunutí ve směru osy x

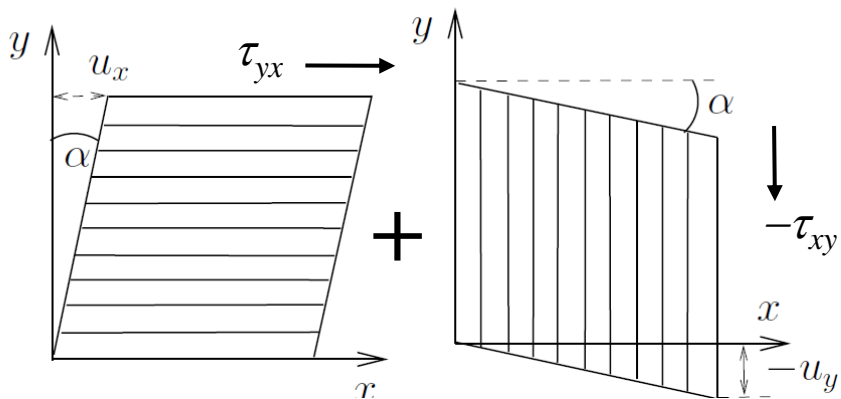
plocha, v které se posunutí děje, je kolmá na osu y

- deformace ve směru osy y : $\varepsilon_{xy} = \frac{u_y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$



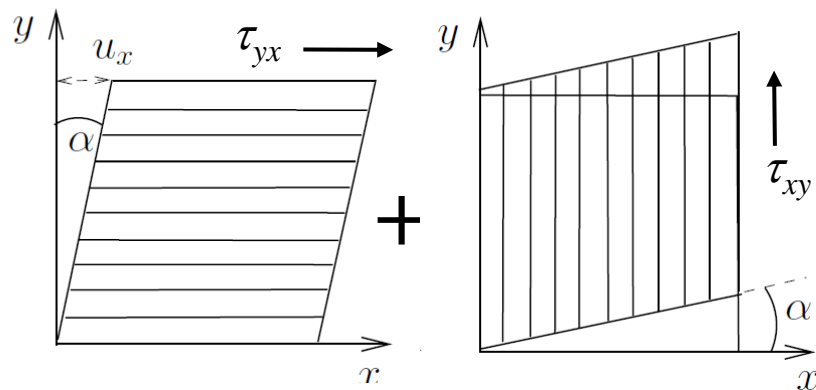
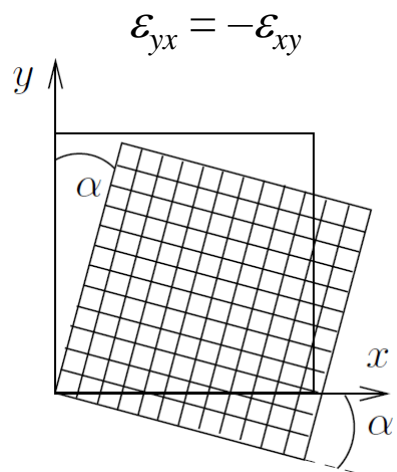
Mechanika kontinua - deformace

- **deformace smykovými napětími**



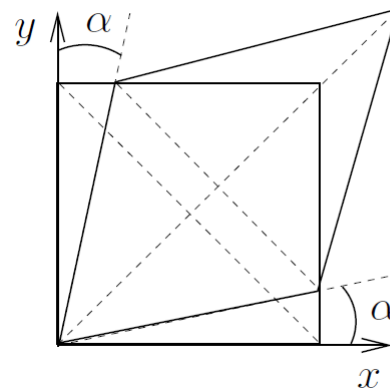
- ϵ_{yx} a $-\epsilon_{xy}$ dohromady

- rotace, ale žádná deformace



- ϵ_{yx} a ϵ_{xy} dohromady

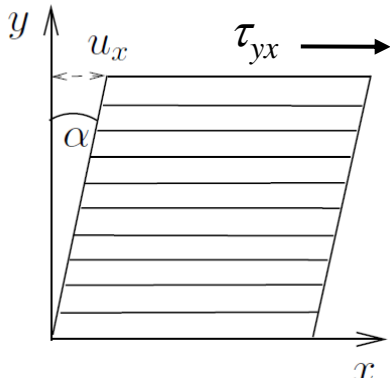
- **prostý smyk**



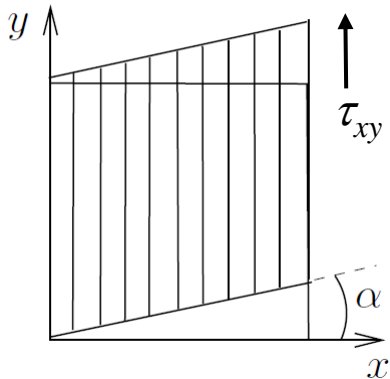
Mechanika kontinua - deformace

- deformace smykovými napětími

- deformace ve směru osy x : $\varepsilon_{yx} = \frac{u_x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$



- deformace ve směru osy y : $\varepsilon_{xy} = \frac{u_y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$



- malé deformace

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$$

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \alpha_{yx}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \alpha_{xy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \Rightarrow \alpha_{xy} = \alpha_{yx}$$

- úhel smyku

$$\varepsilon_{xy} \equiv \alpha_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Mechanika kontinua - deformace

- tenzor malých deformací:
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} \end{aligned}$$

- posunutí bodu s polohovým vektorem \vec{r} při deformaci: $\vec{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \vec{r}$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mechanika kontinua - deformace

- tenzor malých deformací

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} \end{aligned} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ε_{xx} – relativní změna délky elementu, který byl před deformací rovnoběžný s osou x

ε_{yy} – relativní změna délky elementu, který byl před deformací rovnoběžný s osou y

ε_{zz} – relativní změna délky elementu, který byl před deformací rovnoběžný s osou z

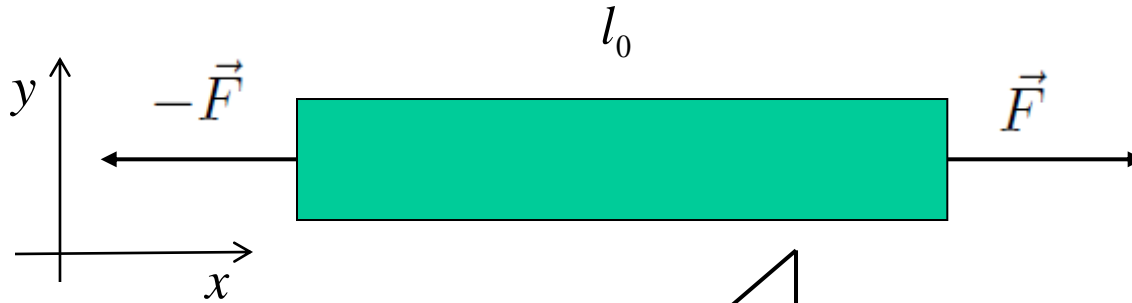
ε_{xy} – je rovna polovině úhlu o který se deformací změní pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s osou x a y

ε_{xz} – je rovna polovině úhlu o který se deformací změní pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s osou x a z

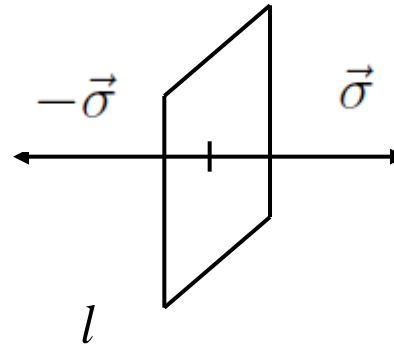
ε_{yz} – je rovna polovině úhlu o který se deformací změní pravý úhel mezi elementy původně rovnoběžnými s osou y a z

Mechanika kontinua – Hookův zákon

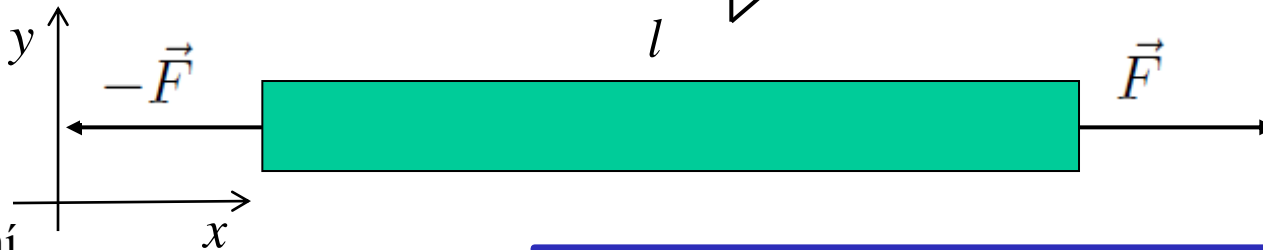
- čistý tah



- napětí $\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$ [$\text{Nm}^{-2} = \text{Pa}$]



- prodloužení



- deformace $\varepsilon_{xx} = \frac{l - l_0}{l_0}$

Hookův zákon

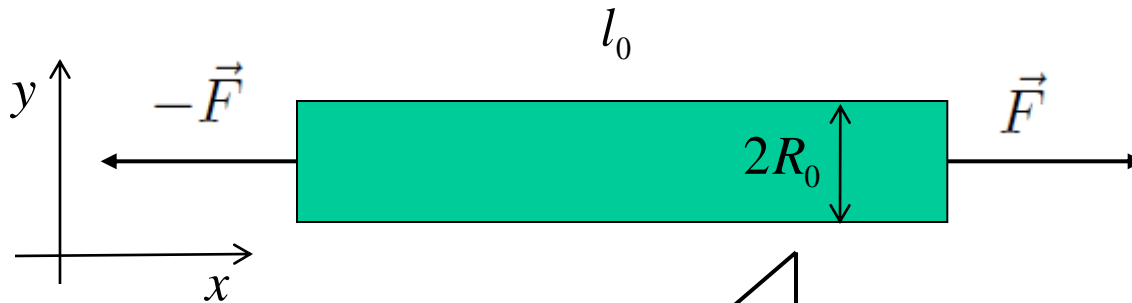
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{k_l} \sigma_{xx}$$

Youngův modul pružnosti

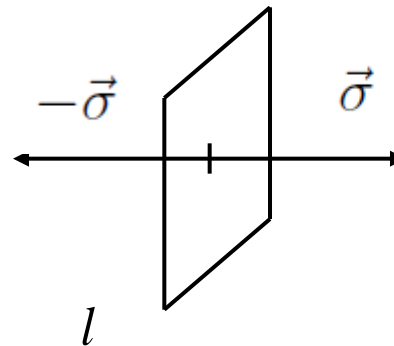
$$k_l \equiv E$$

Mechanika kontinua – Hookův zákon

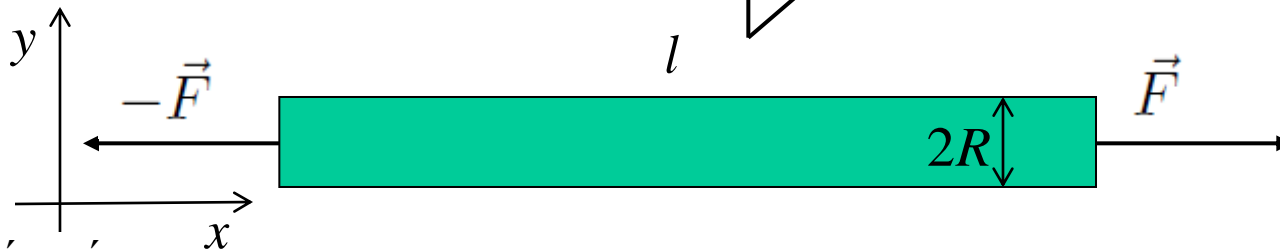
- čistý tah



- napětí $\sigma_{xx} = \frac{F}{S} \text{ [Nm}^{-2} = \text{Pa]}$



- příčné zkrácení



- deformace

$$\varepsilon_{yy} = \frac{R - R_0}{R_0}$$

Hookův zákon

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{1}{k_t} \sigma_{xx} = -\frac{k_l}{k_t} \varepsilon_{xx} = -\nu \varepsilon_{xx}$$

Poissonův poměr

$$\nu = \frac{k_l}{k_t} = \frac{E}{k_t}$$

Mechanika kontinua – Poissonův poměr

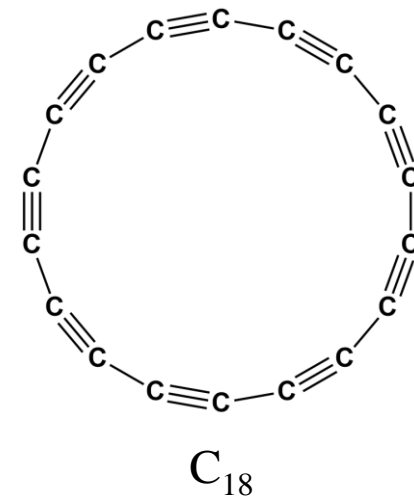
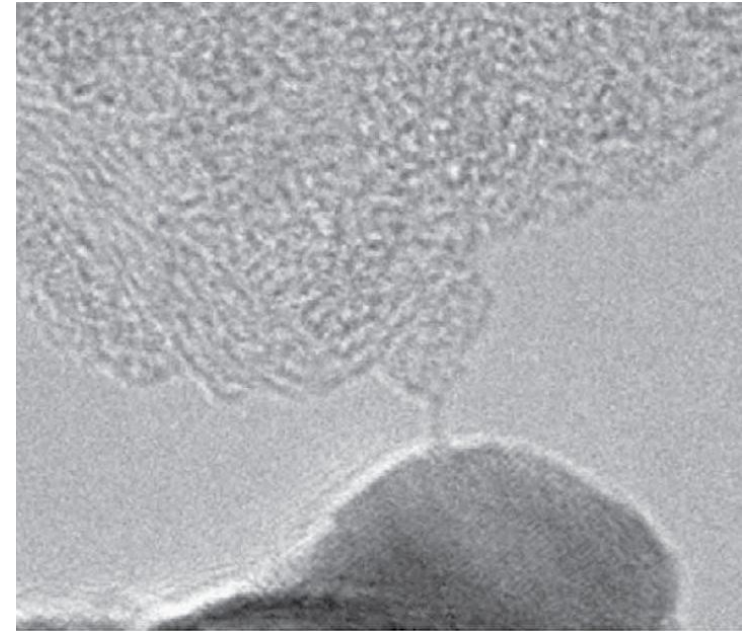
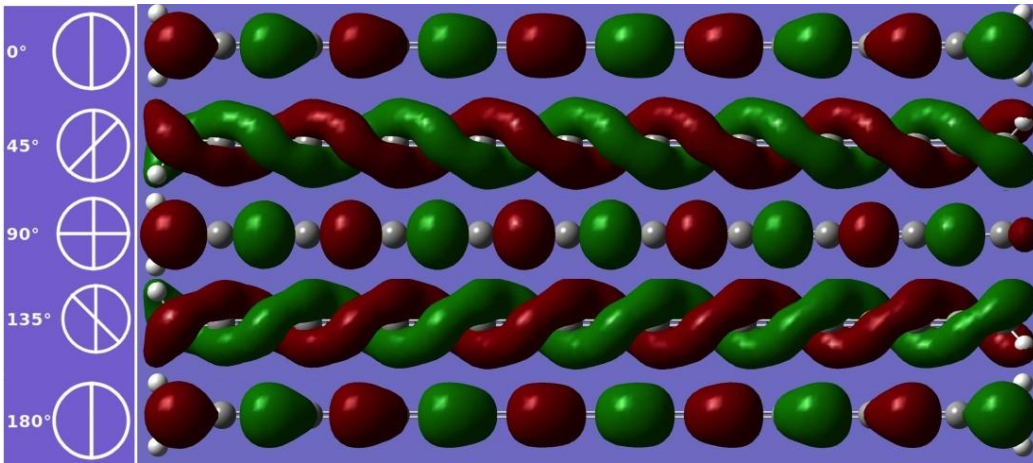
- Poissonův poměr $\nu = \frac{k_l}{k_t}$
- v izotropních materiálech $-1 \leq \nu \leq 0.5$

	Youngův modul pružnosti	Poissonův poměr	hustota	rychlost zvuku
	E (GPa)	ν	ρ (kg m⁻³)	v_s (m s⁻¹)
diamant	1050-1210	0.2	3500	≈ 12000
iridium	528	0.26	22650	4825
ocel	200-220	0.3	7874	4910
měď	117	0.37	8920	3570
hořčík	45	0.29	1738	4602
beton	30	0.2	2300-2400	3500-3600
korek	0.032	≈ 0.0	150-200	400-460
guma	0.01-0.1	0.5	960-1300	90-320

$$v_s \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

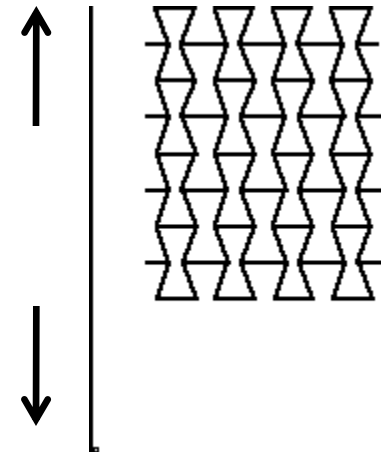
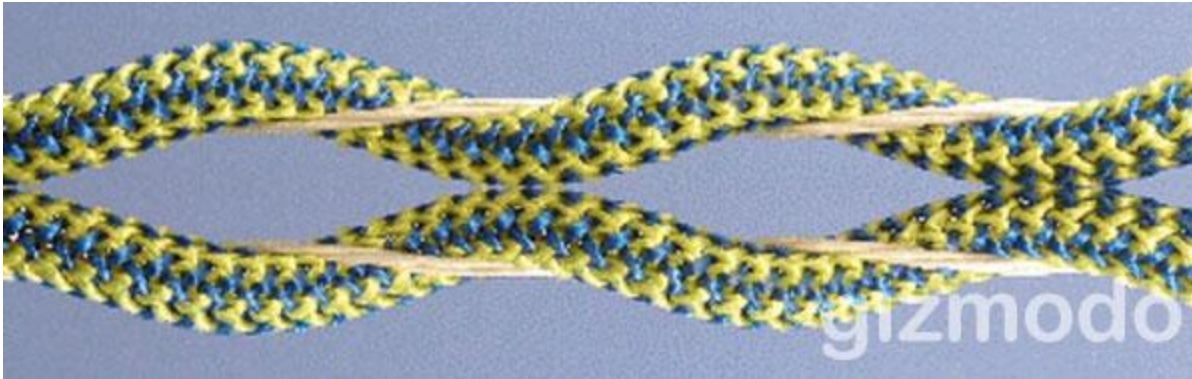
Mechanika kontinua – Poissonův poměr

- Poissonův poměr $\nu = \frac{k_l}{k_t}$
- v izotropních materiálech $-1 \leq \nu \leq 0.5$
- **Karbyn** $(-C\equiv C-)_n$, $E = 32100$ GPa



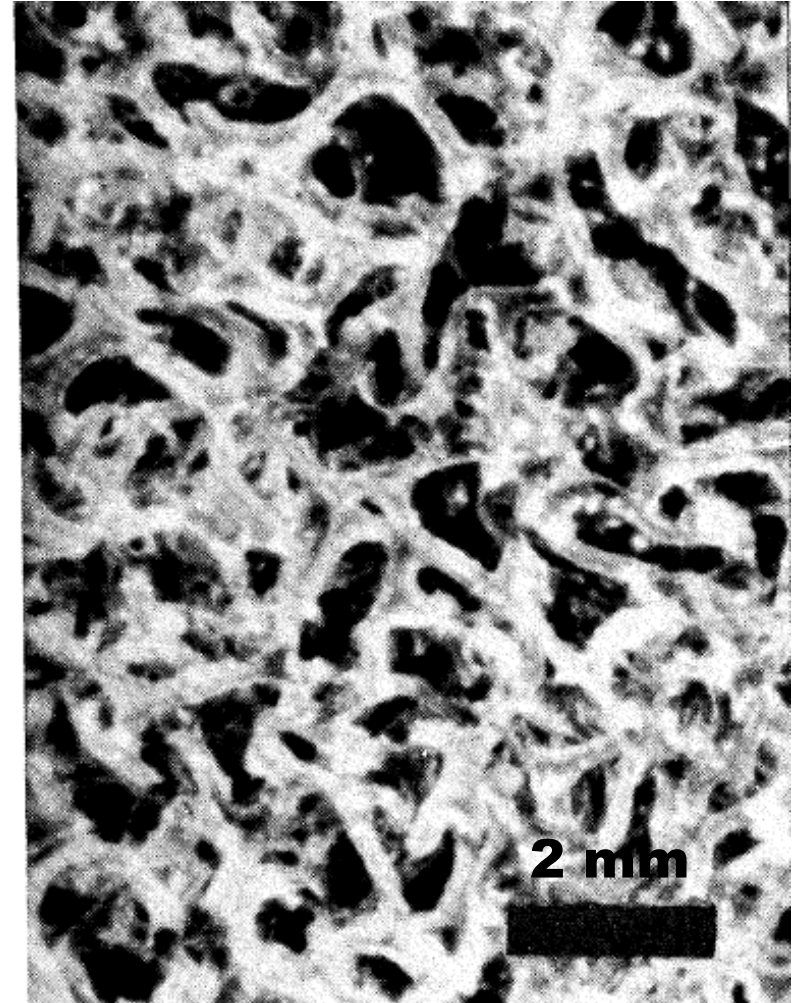
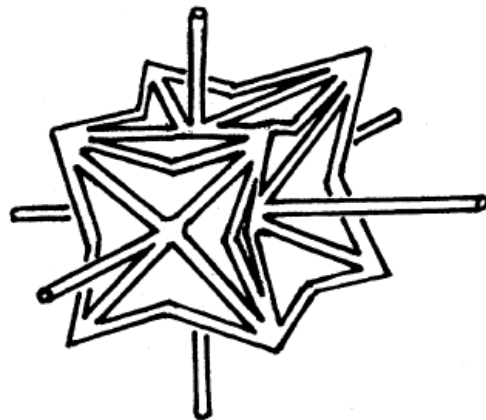
Mechanika kontinua – Poissonův poměr

- Poissonův poměr $\nu = \frac{k_l}{k_t}$
- v izotropních materiálech $-1 \leq \nu \leq 0.5$
- auxetické materiály – materiály s negativním Poissonovým poměrem



Mechanika kontinua – Poissonův poměr

- Poissonův poměr $\nu = \frac{k_l}{k_t}$
- v izotropních materiálech $-1 \leq \nu \leq 0.5$
- auxetické materiály – materiály s negativním Poissonovým poměrem



polyesterová pěna, $\nu = -0.6$

Zobecněný Hookův zákon

- každá složka tenzoru napětí je lineární kombinací všech složek tenzoru deformace

např. $\sigma_{xx} = C_{xxxx}\varepsilon_{xx} + C_{xxyy}\varepsilon_{yy} + C_{xxzz}\varepsilon_{zz} + C_{xxxy}\varepsilon_{xy} + C_{xxyz}\varepsilon_{yz} + C_{xxxz}\varepsilon_{xz}$ (6 rovnic)

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

tenzor napětí $\sigma_{i,j}$

tenzor deformace $\varepsilon_{k,l}$

elastické koeficienty $C_{i,j,k,l}$

- elastické koeficienty $3^4 = 81$ (tenzor 4. řádu)
- tenzory napětí a deformace jsou symetrické \rightarrow 36 nezávislých elastických koeficientů

Zobecněný Hookův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$$

tenzor napětí $\sigma_{i,j}$

elastické koeficienty $C_{i,j,k,l}$

tenzor defomace $\varepsilon_{k,l}$

- izotropní prostředí \rightarrow 2 nezávislé elastické koeficienty
 - Youngův modul pružnosti E (modul pružnosti v tahu)
 - Poissonův poměr ν

zobecněný Hookův zákon pro izotropní prostředí

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{E}]$$

stopa matice $\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_i \sigma_{ii}$

\mathbf{E} jednotková matice