Inerciální a neinerciální soustavy

• volný hmotný bod (nepůsobí na něj žádné síly)

• **inerciální soustava**: souřadnicová soustava vůči které je volný hmotný bod v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu

• pokud máme tři hmotné body, které lze s rozumnou přesností považovat za volné, můžeme s nimi spojit inerciální souřadnicovou soustavu

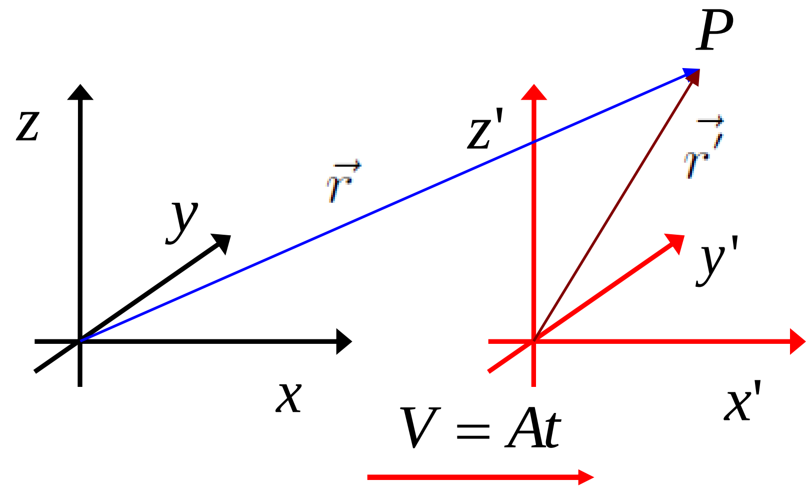
• Galileova soustava: střed ve Slunci, osy směřují ke stálicím

• souřadnicová soustava se středem ve Slunci a osou směřující do středu Země
- rychlost pohybu Země okolo Slunce v = 30 km/s, vzdálenost Země-Slunce: $r = 150 \times 10^6$ km
- dostředivé zrychlení: $a = \dfrac{v^2}{r} = 6 \times 10^{-3}\ \mathrm{ms}^{-2} = 6 \times 10^{-4} g$

• laboratorní souřadnicová soustava (pevně spojená se Zemí)
- rychlost otáčení na povrchu Země v = 0.46 km/s, poloměr Země: r = 6378 km
- dostředivé zrychlení: $a = \dfrac{v^2}{r} = 3.4 \times 10^{-2}\ \mathrm{ms}^{-2} = 3.4 \times 10^{-3} g$

Rovnoměrně zrychlená vztažná soustava

neinerciální soustavy



• v čase t = 0: $x' = x$

zdánlivá síla
setrvačná síla

2. Newtonův zákon

$$ma_x = F_x \qquad ma_x' = F_x - mA$$
$$ma_y = F_y \qquad ma_y' = F_y$$
$$ma_z = F_z \qquad ma_z' = F_z$$

poloha

$$x' = x - \frac{1}{2}At^2$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

rychlost

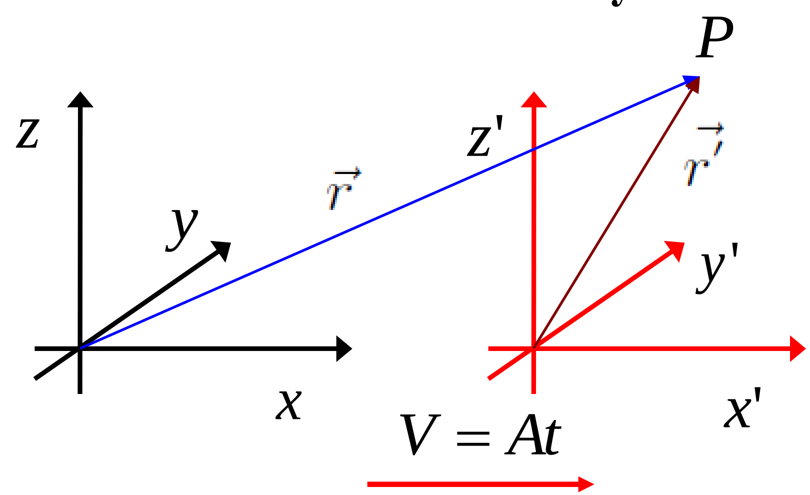
$$v_x' = v_x - At$$
$$v_y' = v_y$$
$$v_z' = v_z$$

zrychlení

$$a_x' = a_x - A$$
$$a_y' = a_y$$
$$a_z' = a_z$$

Rovnoměrně zrychlená vztažná soustava

neinerciální soustavy



silný princip ekvivalence:

Gravitaci není lokálně možné rozlišit od nepravých sil.

$$ma_x = F_x \qquad ma_x' = F_x - mA$$

$$ma_y = F_y \qquad ma_y' = F_y$$

$$ma_z = F_z \qquad ma_z' = F_z$$

poloha

$$x' = x - \frac{1}{2}At^2$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

rychlost

$$v_x' = v_x - At$$

$$v_y' = v_y$$

$$v_z' = v_z$$

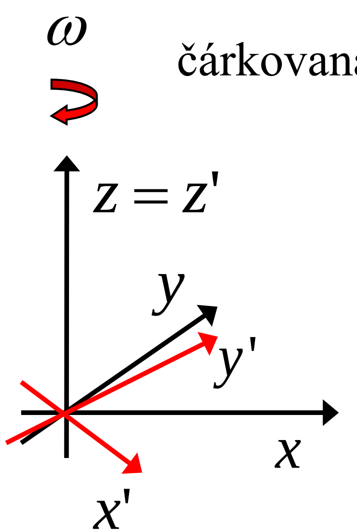
zrychlení

$$a_x' = a_x - A$$

$$a_y' = a_y$$

$$a_z' = a_z$$

Rovnoměrně rotující vztažná soustava



čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

- v čase $t = 0$ oba souřadné systémy splývají

poloha:

polární souřadnice:

$$r' = r$$

$$\varphi' = \varphi - \vartheta$$

kartézské souřadnice:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

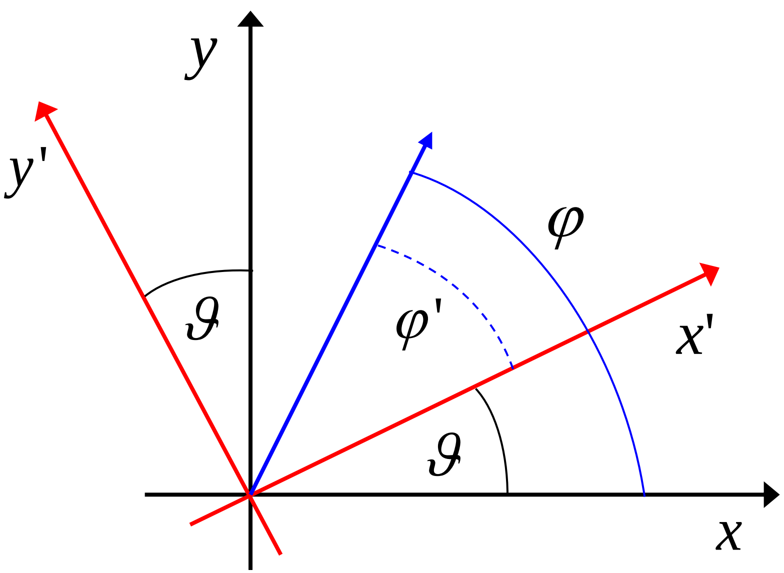
$$x' = r'\cos\varphi' = r\cos(\varphi - \vartheta)$$

$$y' = r'\sin\varphi' = r\sin(\varphi - \vartheta)$$

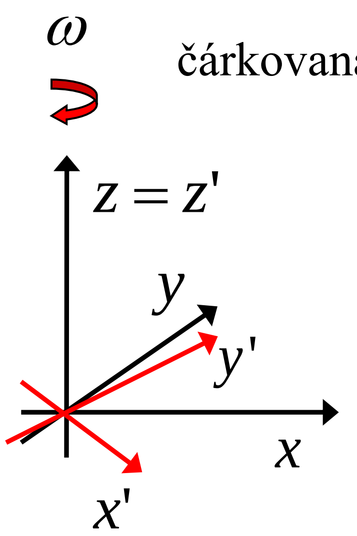
$$\downarrow$$

$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$

$$y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$$



Rovnoměrně rotující vztažná soustava



čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

- v čase t = 0 oba souřadné systémy splývají

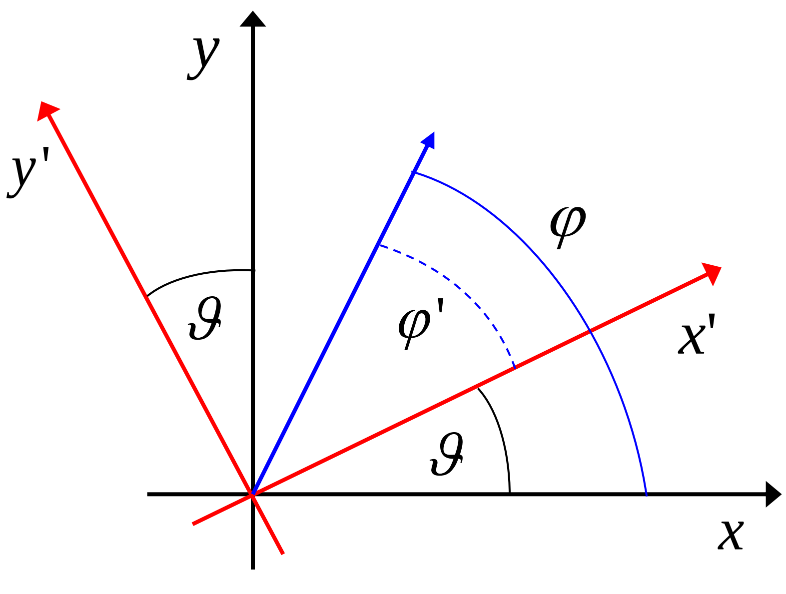
$$\vartheta(t) = \omega t$$

poloha:

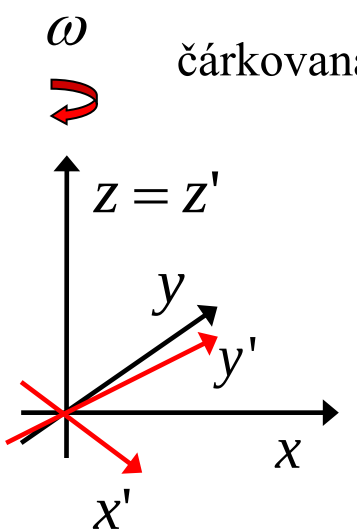
$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

$$z' = z$$



Rovnoměrně rotující vztažná soustava



čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

- v čase t = 0 oba souřadné systémy splývají

$$\vartheta(t) = \omega t$$

$$\omega' = -\omega$$

rychlost:

$$v_x' = \omega y' + \left(v_x \cos \omega t + v_y \sin \omega t\right)$$

$$v_y' = -\omega x' + \left(-v_x \sin \omega t + v_y \cos \omega t\right)$$

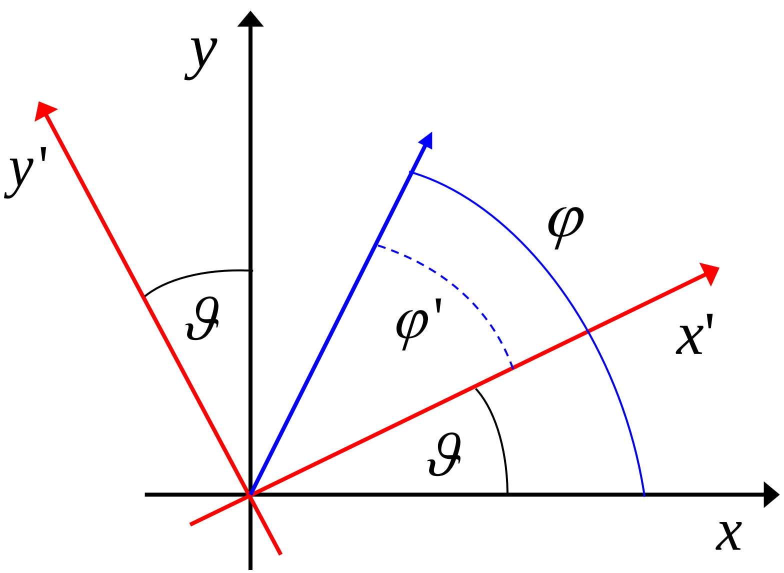
$$v_z' = v_z$$

zrychlení:

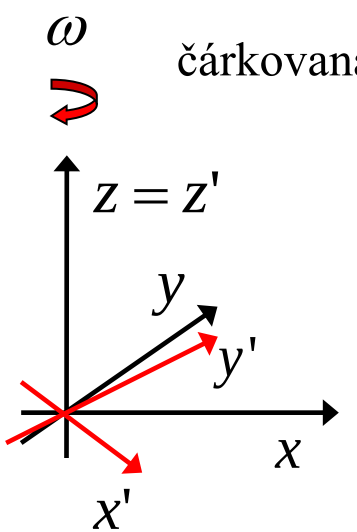
$$a_x' = \omega^2 x' + 2\omega v_y' + \left(a_x \cos \omega t + a_y \sin \omega t\right)$$

$$a_y' = \omega^2 y' - 2\omega v_x' + \left(-a_x \sin \omega t + a_y \cos \omega t\right)$$

$$a_z' = a_z$$



Rovnoměrně rotující vztažná soustava

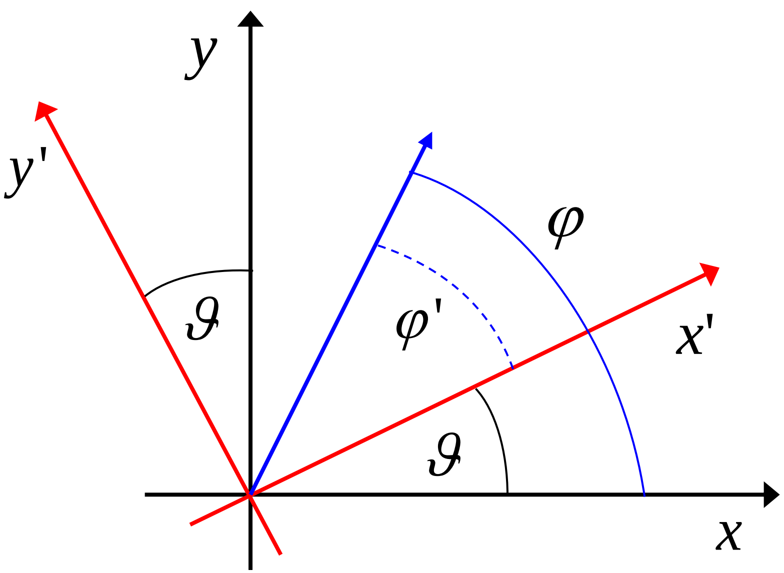


čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

• v čase $t = 0$ oba souřadné systémy splývají

$$\vartheta(t) = \omega t$$

$$\omega' = -\omega$$



Coriolisovo zrychlení

odstředivé zrychlení

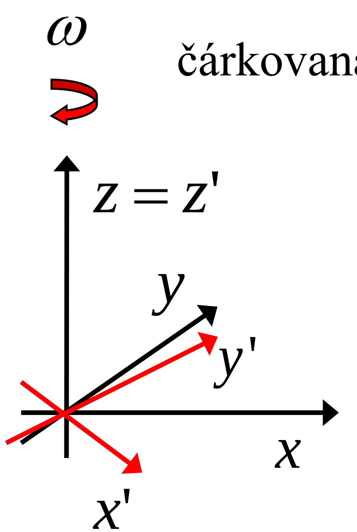
zrychlení:

$$a_x' = \omega^2 x' + 2\omega v_y' + \left(a_x \cos \omega t + a_y \sin \omega t\right)$$

$$a_y' = \omega^2 y' - 2\omega v_x' + \left(-a_x \sin \omega t + a_y \cos \omega t\right)$$

$$a_z' = a_z$$

Nerovnoměrně rotující vztažná soustava



čárkovaná vztažná soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω

- v čase $t = 0$ oba souřadné systémy splývají

$$\vartheta(t) = \omega t$$

rotace kolem obecné osy:

odstředivé zrychlení: $\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ **odstředivá síla:** $\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

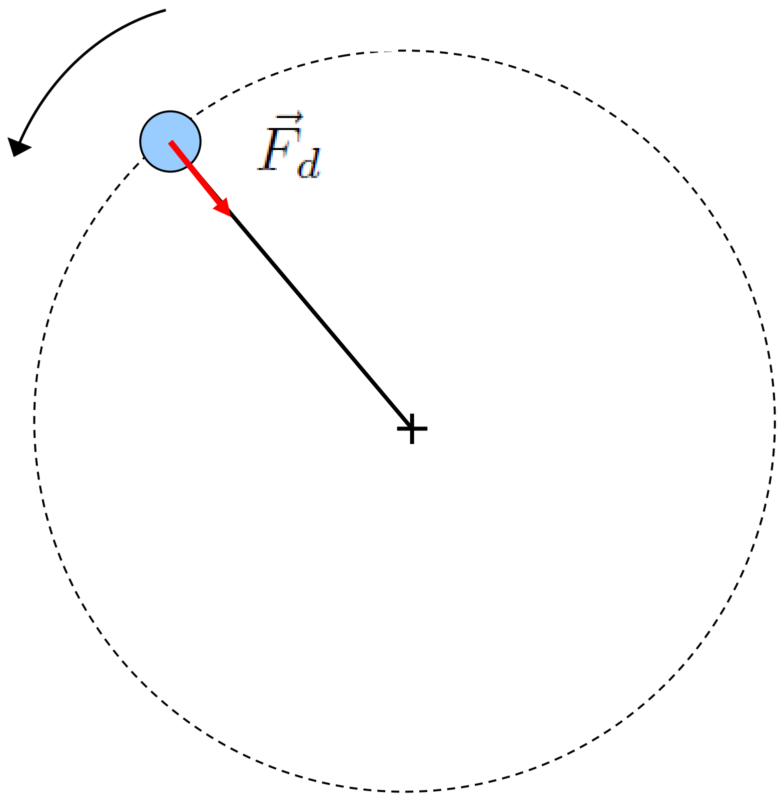
Coriolisovo zrychlení: $\vec{a}_C = -2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$ **Coriolisova síla:** $\vec{F}_C = -2\,m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

Odstředivá síla

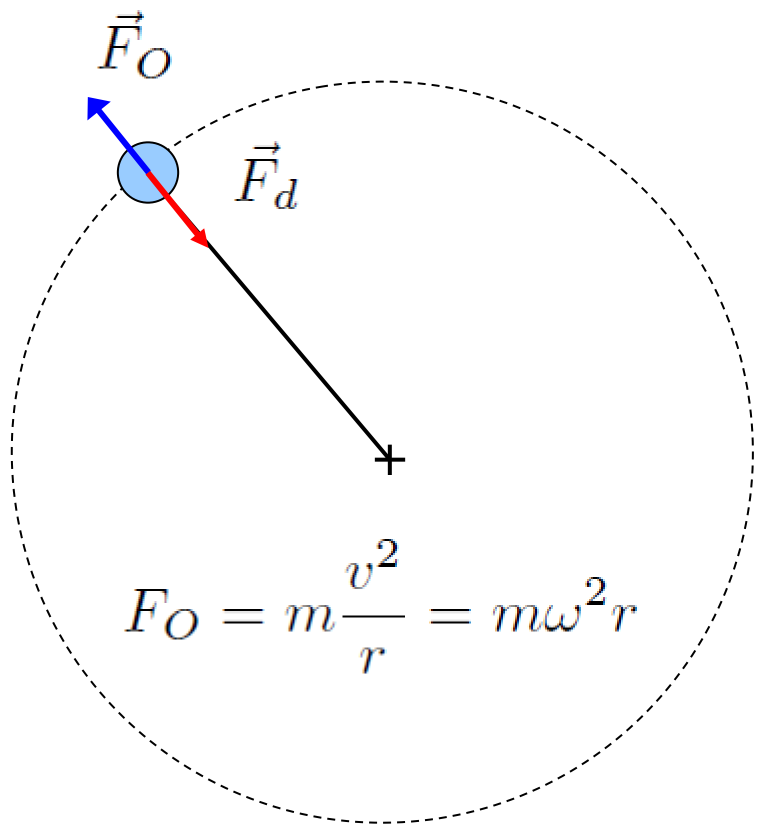
kulička na provázku

$$\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

pohled z inerciální soustavy



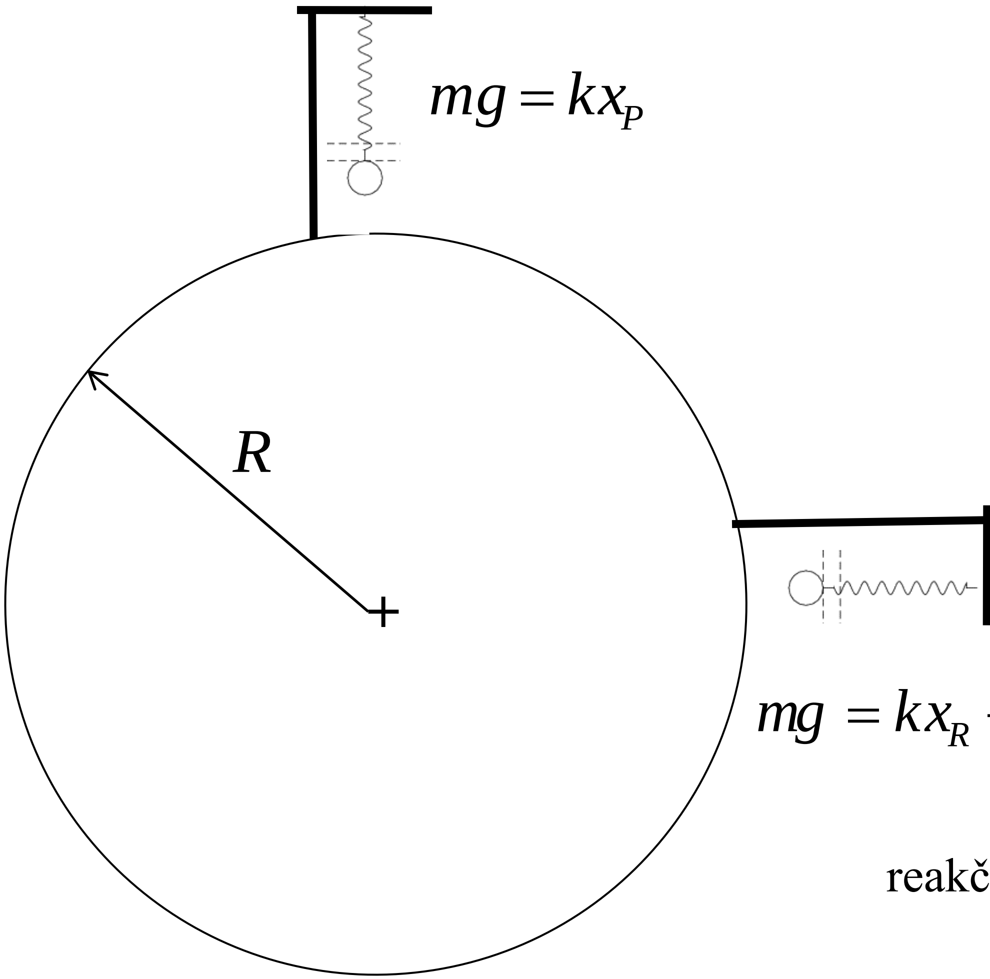
pohled z neinerciální rotující soustavy



$$F_O = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

Odstředivá síla

vážení na pólu a na rovníku



$$mg = kx_P$$

$$mg = kx_R + \underbrace{m\frac{V^2}{R}}_{\text{reakční síla kuličky na pružinu}}$$

v inerciální soustavě

$$\frac{x_P - x_R}{x_P} = \frac{V^2}{Rg} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

pro Zemi:

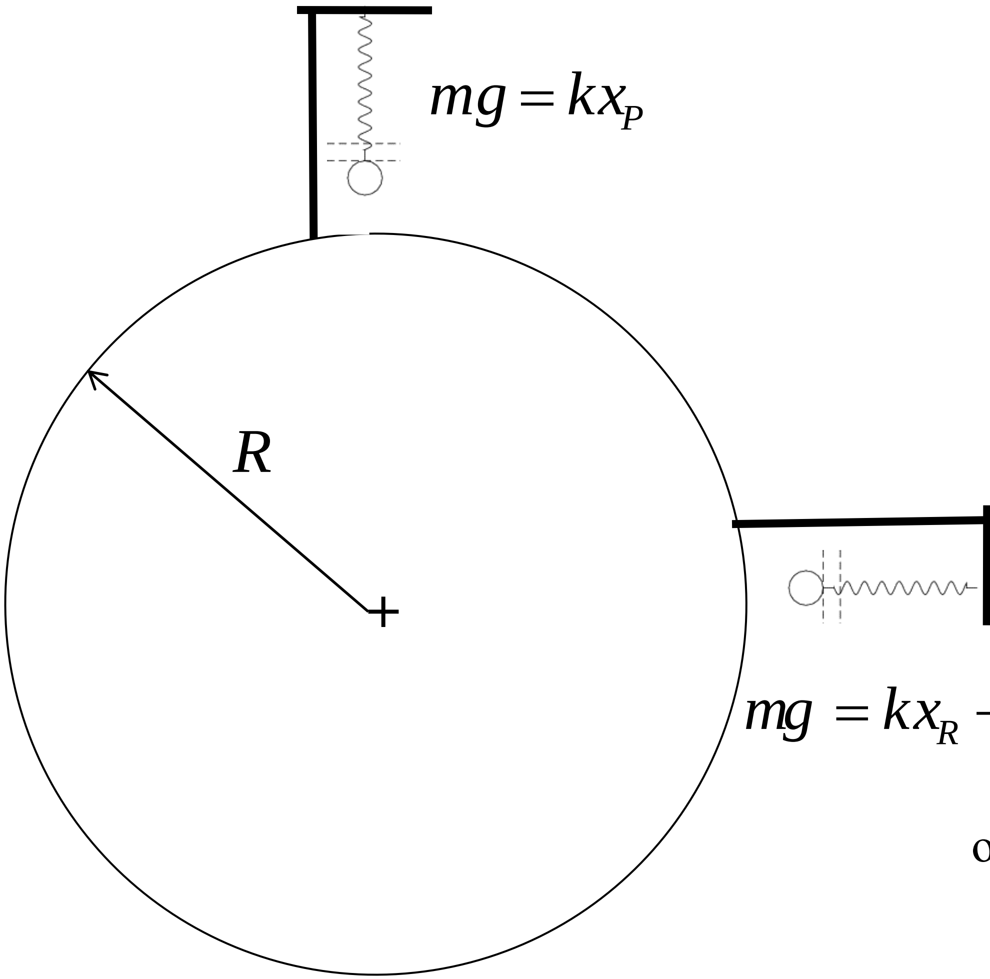
$$\omega = 7.3\times10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$R = 6378\ \mathrm{km}$$

$$\frac{x_P - x_R}{x_P} \approx 0.3\,\%$$

Odstředivá síla

vážení na pólu a na rovníku



$$mg = kx_P$$

$$mg = kx_R + \underbrace{m\omega^2 R}_{\text{odstředivá síla}}$$

v neinerciální soustavě

$$\frac{x_P - x_R}{x_P} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

pro Zemi:

$$\omega = 7.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$$

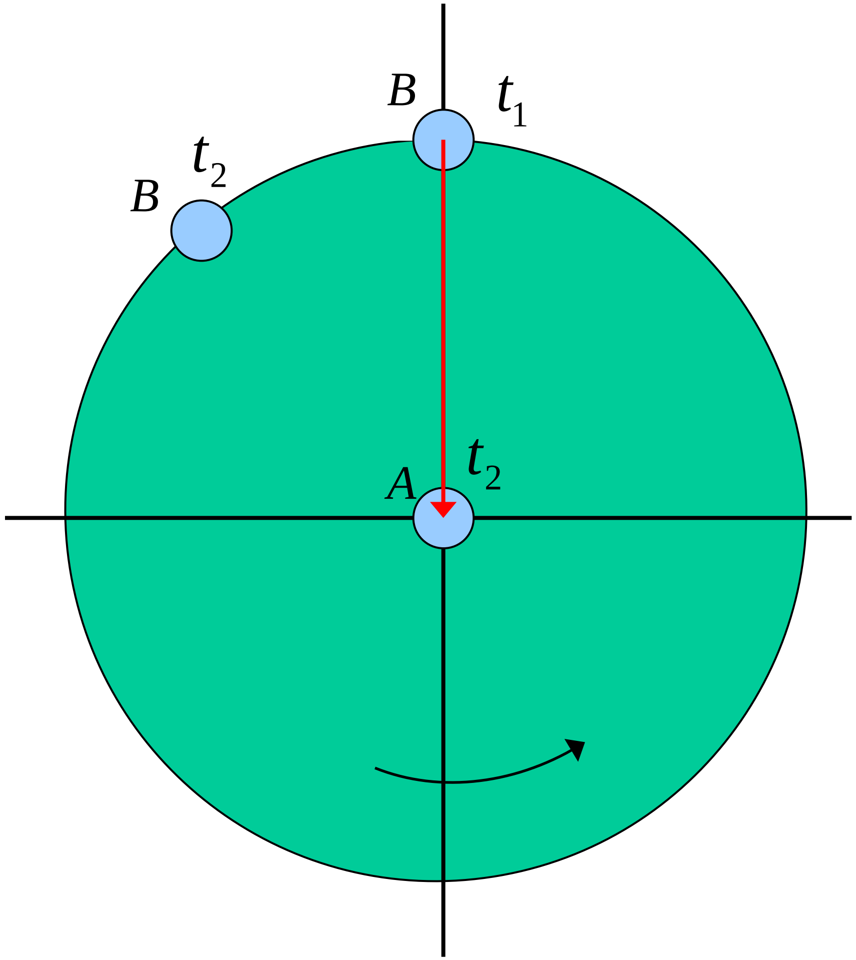
$$R = 6378\ \mathrm{km}$$

$$\frac{x_P - x_R}{x_P} \approx 0.3\,\%$$

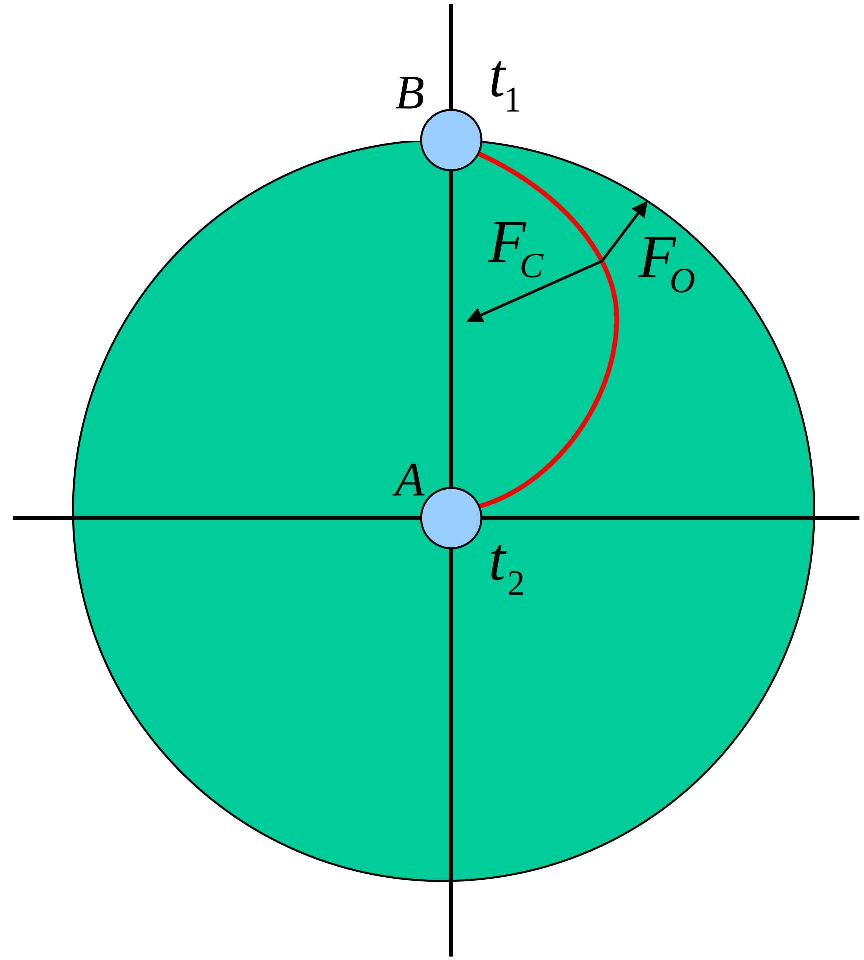
Rovnoměrně rotující vztažná soustava

Kolotoč

pohled z vnější inerciální soustavy



pohled z neinerciální soustavy spojené s kolotočem



Rovnoměrně rotující vztažná soustava

Kolotoč

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_O + \vec{F}_C$$

$$\ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega\dot{y}'$$

$$\ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega\dot{x}'$$

```
#pocatecni poloha
x[0]=0
y[0]=10
#pocatecni rychlost
vx[0]=0
vy[0]=-40
#pocatecni poloha v carkovane soustave
xp[0]=x[0]*np.cos(omega*t[0])+y[0]*np.sin(omega*t[0])
yp[0]=-x[0]*np.sin(omega*t[0])+y[0]*np.cos(omega*t[0])
#pocatecni rychlost v carkovane soustave
vxp[0]=yp[0]*omega+vx[0]*np.cos(omega*t[0])+vy[0]*np.sin(omega*t[0])
vyp[0]=-xp[0]*omega-vx[0]*np.sin(omega*t[0])+vy[0]*np.cos(omega*t[0])
imax=0
#numericke reseni pohzbove rovnice
for i in range(np.size(t)-1):
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
    xp[i+1]=xp[i]+vxp[i]*dt
    yp[i+1]=yp[i]+vyp[i]*dt
    vx[i+1]=vx[i]
    vy[i+1]=vy[i]
    vxp[i+1]=vxp[i]+(omega**2*xp[i]+2*omega*vyp[i])*dt
    vyp[i+1]=vyp[i]+(omega**2*yp[i]-2*omega*vxp[i])*dt
    if xp[i+1]<0 and imax==0:
        imax=i+1
```

Rovnoměrně rotující vztažná soustava

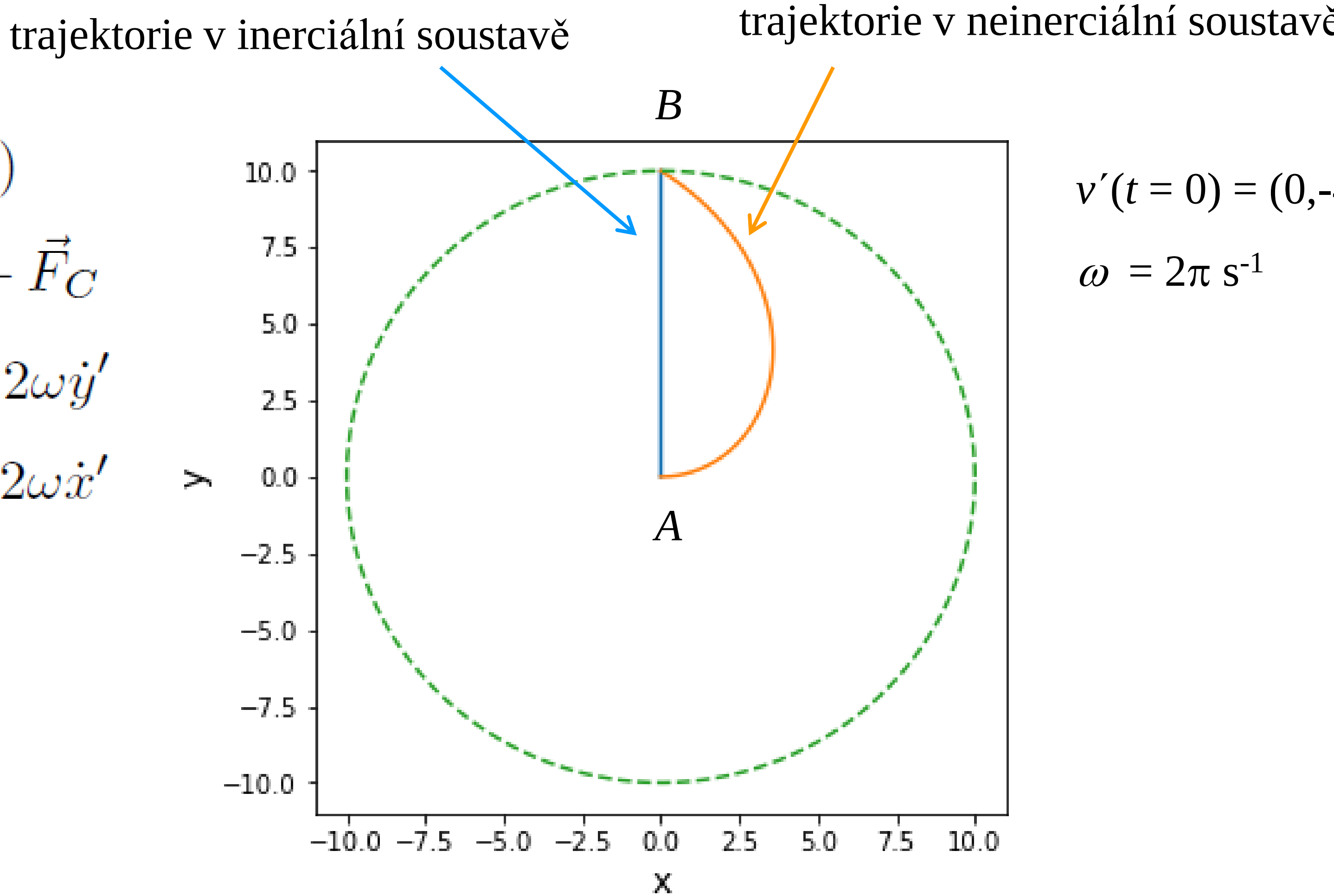
Kolotoč

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}_O + \vec{F}_C$$

$$\ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega\dot{y}'$$

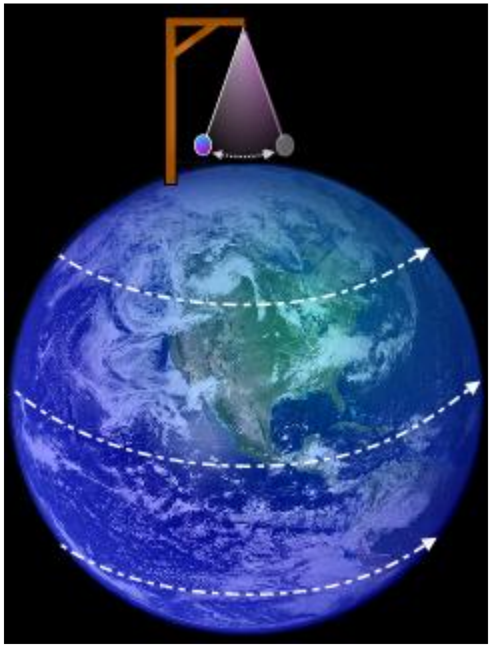
$$\ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega\dot{x}'$$



$v'(t = 0) = (0,-40)$ m/s

$\omega = 2\pi\ \mathrm{s}^{-1}$

Foucaltovo kyvadlo

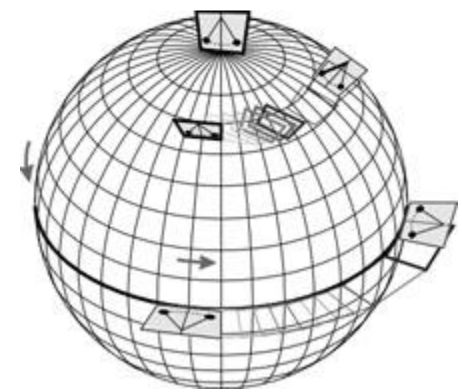


na pólu: $360^{o} / \text{den} = 0.25^{0} \min^{-1}$

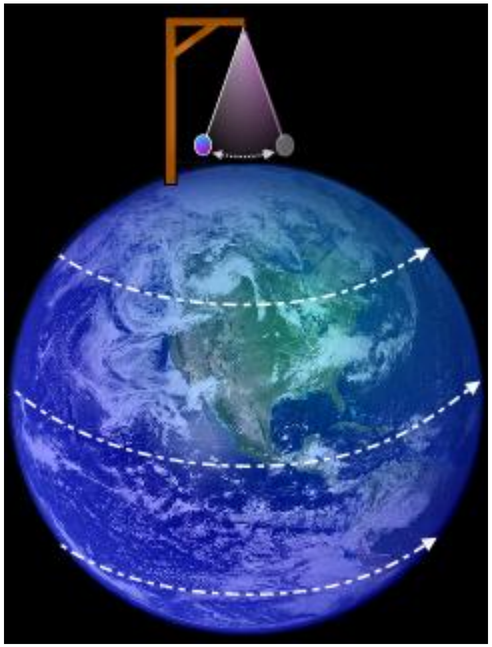
na rovnoběžce za zeměpisnou šířkou φ: $360^{o} \sin \varphi / \text{den}$

v Praze $\varphi = 50.08^{o}$ $\longrightarrow$ $0.19^{0} \min^{-1}$

posun za 1 h: 11.5^{o}



Foucaltovo kyvadlo

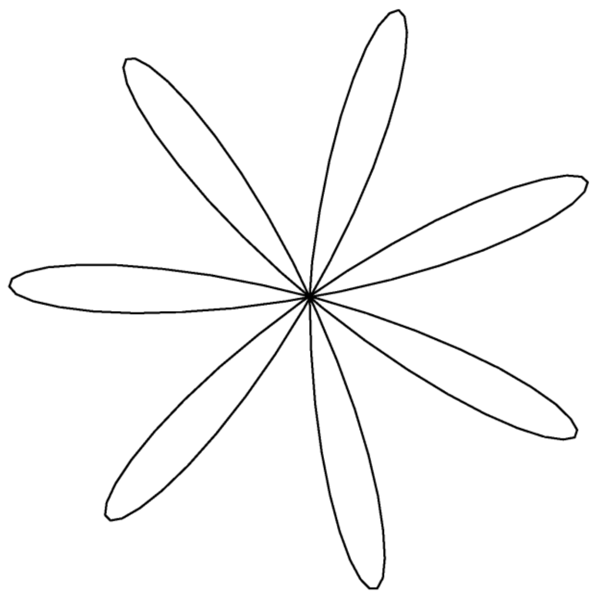


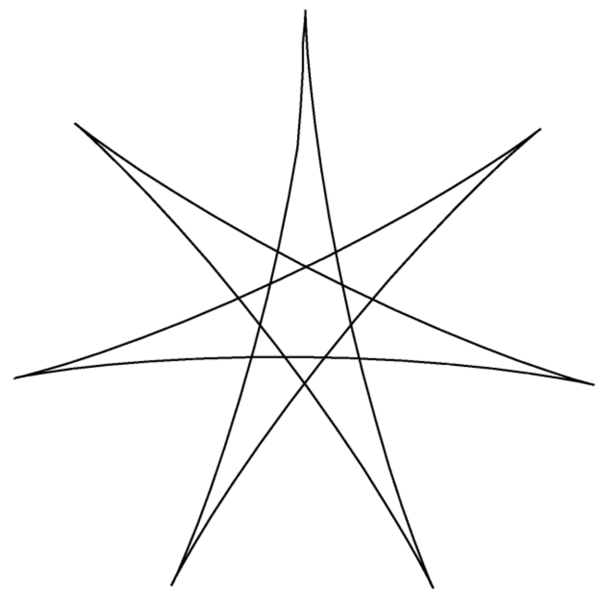
na pólu: $360^{o}/\mathrm{den} = 0.25^{0}\ \mathrm{min}^{-1}$

na rovnoběžce za zeměpisnou šířkou φ: $360^{o} \sin\varphi / \mathrm{den}$

v Praze $\varphi = 50.08^{o}$ $\longrightarrow$ $0.19^{0}\ \mathrm{min}^{-1}$

posun za 1 h: 11.5^{o}

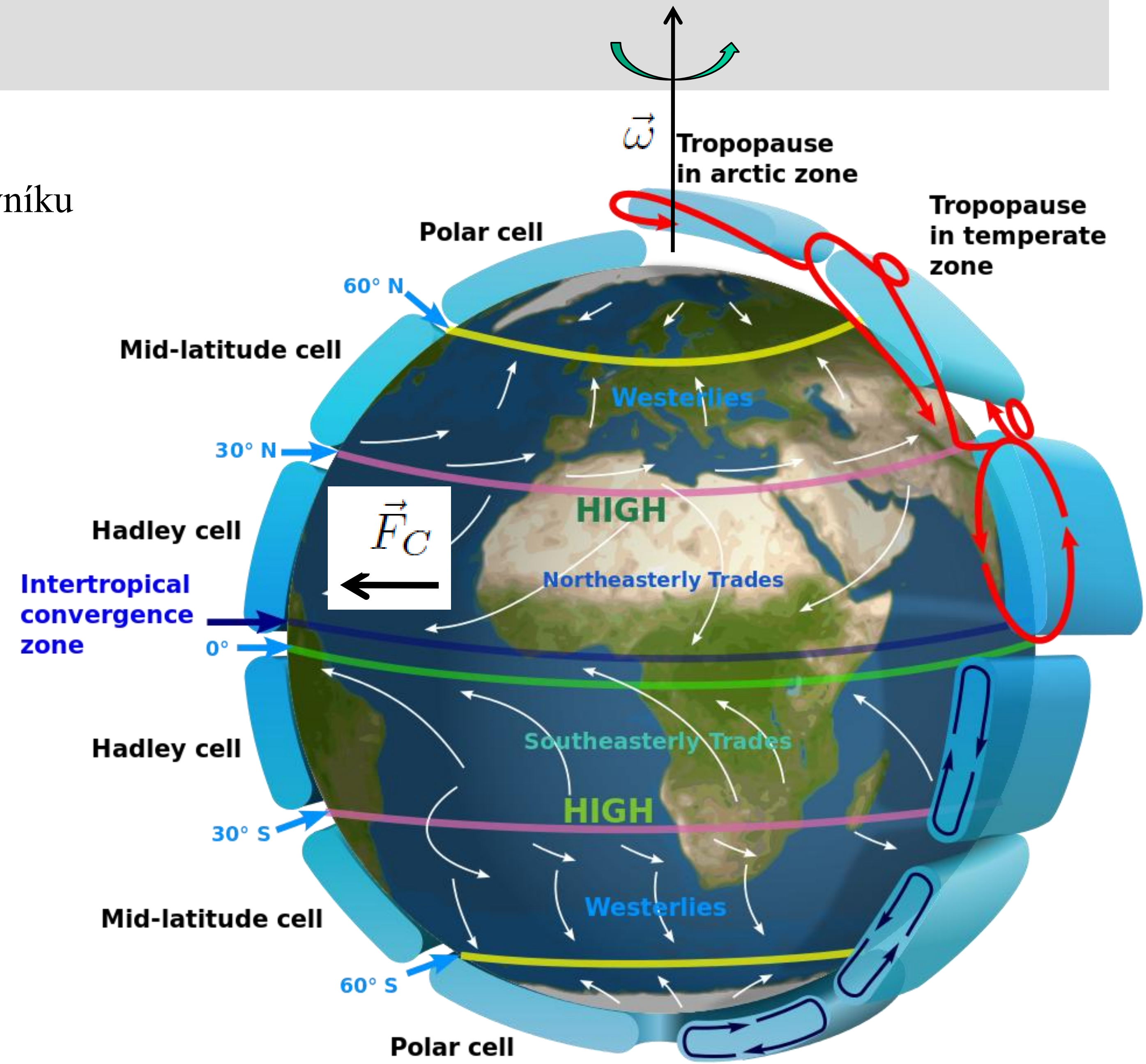




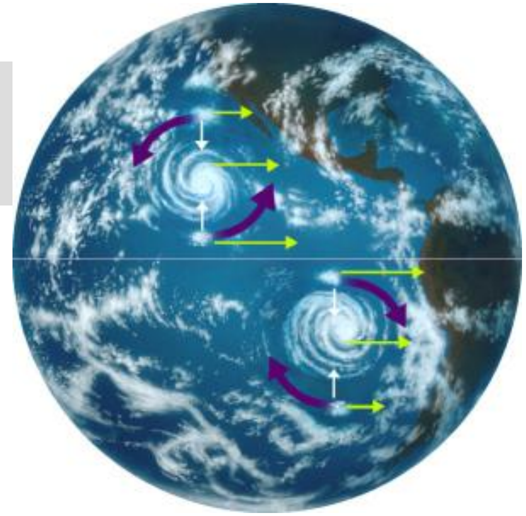
Coriolisova síla

• pasáty vanoucí směrem k rovníku

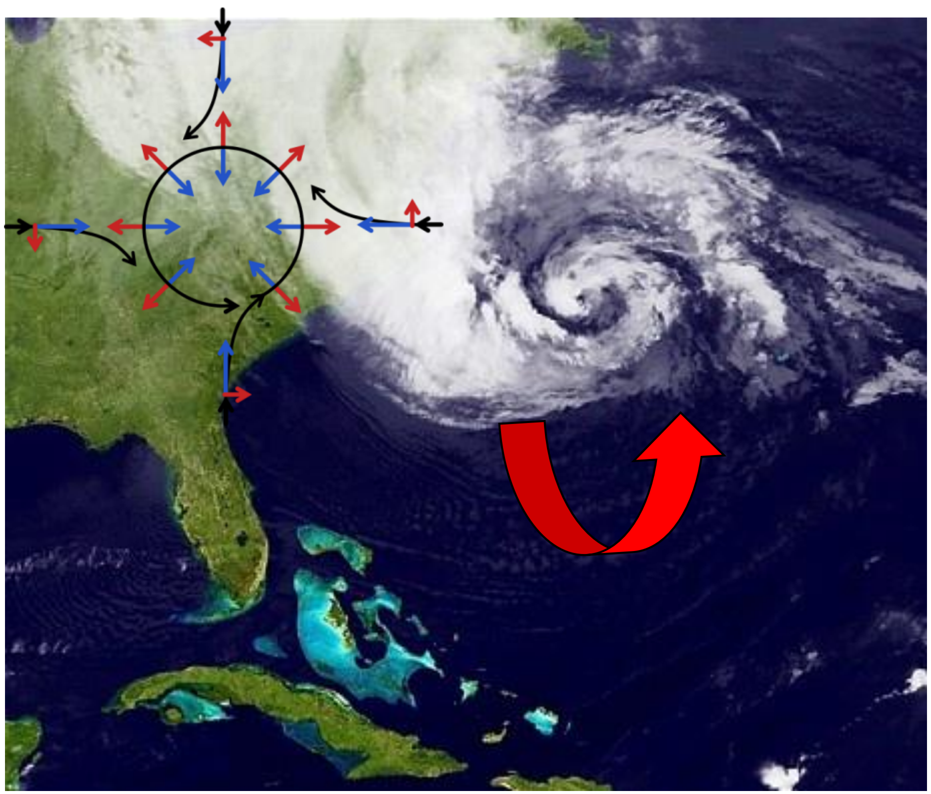
$$\vec{F}_C = -2\,m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$



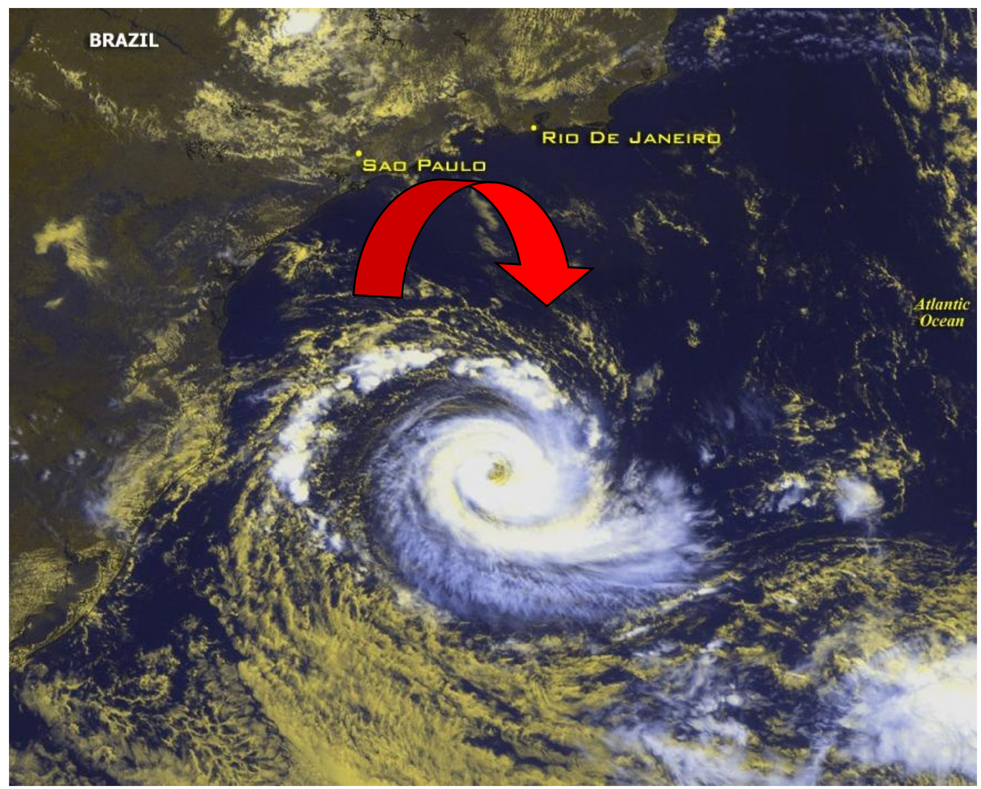
Coriolisova síla



hurikán Sandy v severním altantiku 25.10. 2012

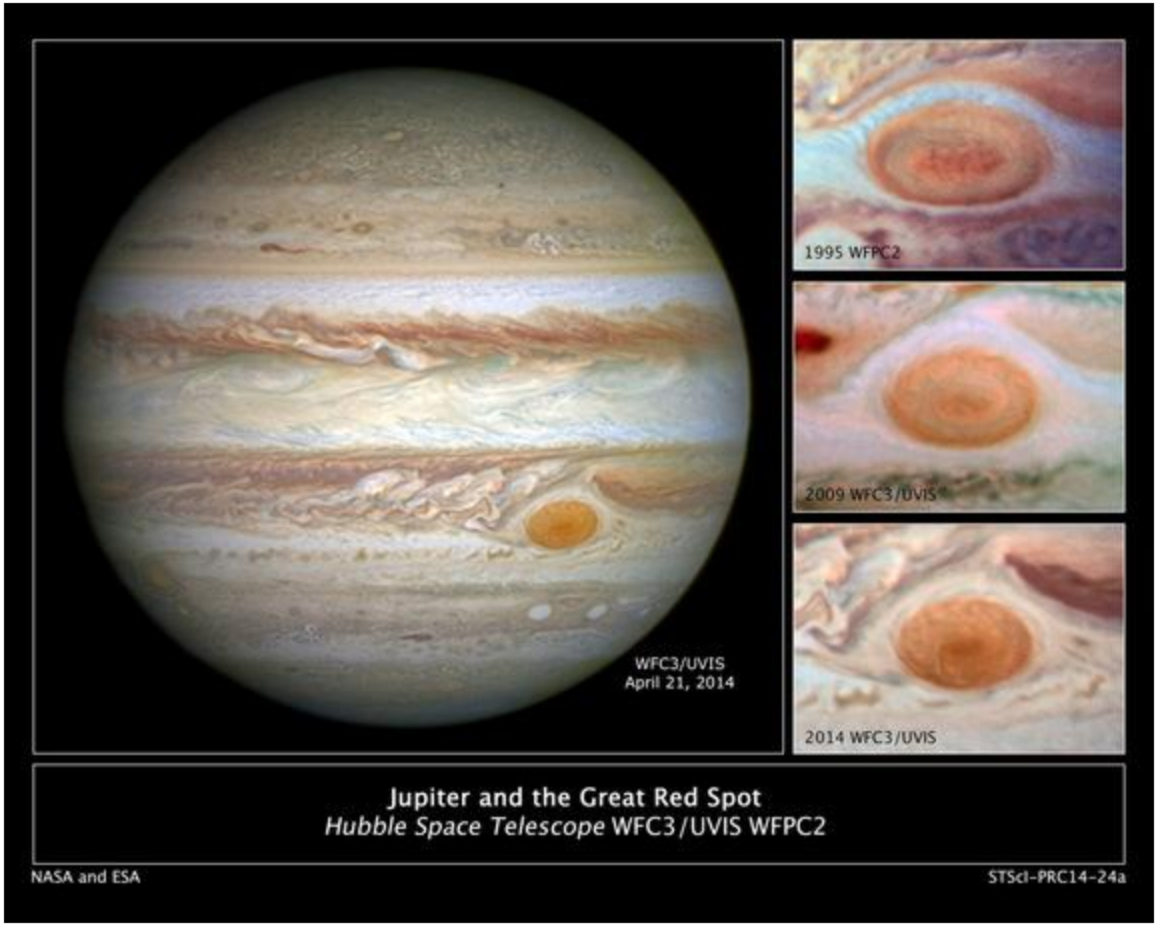


tropická bouře v jižním altantiku 26.3. 2004



Coriolisova síla

- **Jupiter**
- poloměr 71 400 km
- perioda rotace 9.8 h



Rossbyho číslo

Rossbyho číslo: $$R = \frac{V}{L\,f}$$

Coriolisova frekvence: $$f = 2\omega \sin\varphi$$

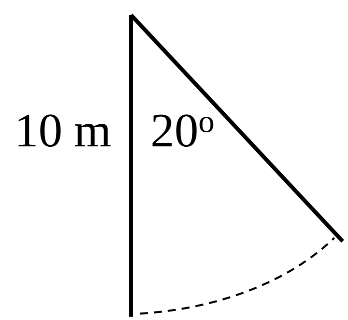
pro Zemi $\omega = 2\,\pi$ / den $= 7.3 \times 10^{-5}\ s^{-1}$

V Praze $\varphi = 50.08^{o}$ $\longrightarrow$ $f = 1.1 \times 10^{-4}\ s^{-1}$

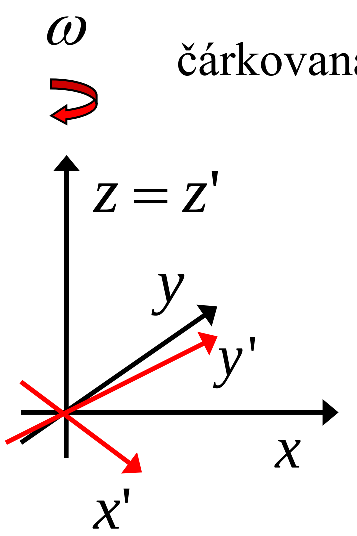
- $R >> 1$ dominuje odstředivá síla
- $R \approx 1$ vliv odstředivé a Coriolisovy síly srovnatelný
- $R << 1$ dominuje Coriolisova síla

příklady:

- **fotbal: $\boldsymbol{R \approx 2000}$**
  $V \approx 10$ m/s, $L \approx 50$ m, $f \approx 10^{-4}\ s^{-1}$
- **umyvadlo: $\boldsymbol{R \approx 100000}$**
  $V \approx 1$ m/s, $L \approx 10$ cm, $f \approx 10^{-4}\ s^{-1}$
- **cyklón: $\boldsymbol{R \approx 0.1}$**
  $V \approx 10$ m/s, $L \approx 1000$ km, $f \approx 10^{-4}\ s^{-1}$
- **Foucaltovo kyvadlo: $\boldsymbol{R \approx 1400}$**
  $V \approx 1$ m/s, $L \approx 7$ m, $f \approx 10^{-4}\ s^{-1}$
  délka závěsu ~ 10 m, úhel +/- 20^{o}



Nerovnoměrně rotující vztažná soustava



čárkovaná vztažná soustava se otáčí s rychlostí ω(*t*)

- v čase *t* = 0 oba souřadné systémy splývají

$$\vartheta(t) = \omega t$$

rotace kolem obecné osy:

odstředivé zrychlení: $\vec{a}_O = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ **odstředivá síla:** $\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Coriolisovo zrychlení: $\vec{a}_C = -2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ **Coriolisova síla:** $\vec{F}_C = -2\,m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$

Eulerovo zrychlení: $\vec{a}_E = -\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$ **Eulerova síla:** $\vec{F}_E = -m\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$