Kosmické rychlosti

gravitační zrychlení na povrchu Země $g = G\frac{M_Z}{R_Z^2}$

I. kosmická rychlost: $v_I = \sqrt{gR_Z} = 7.9\ \mathrm{km\ s}^{-1}$

rychlost potřebná k vynesení na oběžnou dráhu Země

II. kosmická rychlost: $v_{II} = \sqrt{2gR_Z} = 11.2\ \mathrm{km\ s}^{-1}$

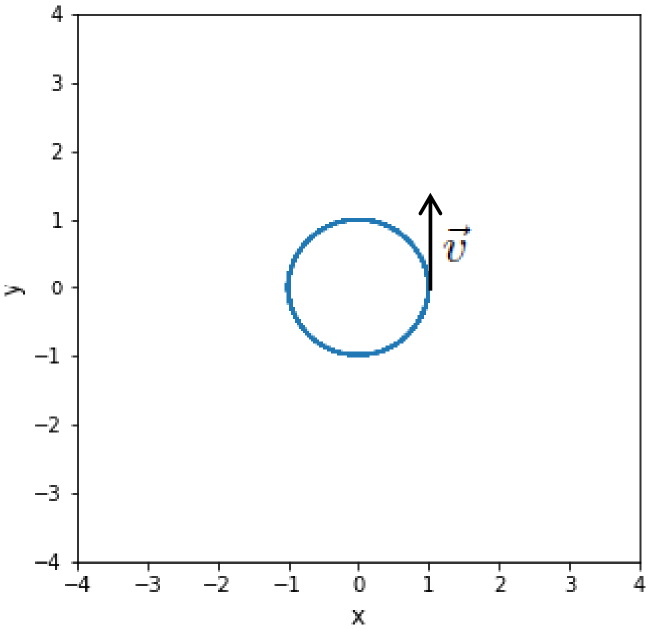
rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Země

III. kosmická rychlost: $v_{III} = \sqrt{2G\frac{M_S}{R_{ZS}}} = 42.1\ \mathrm{km\ s}^{-1}$

rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole Slunce, tj. k opuštění sluneční soustavy

Když využijeme oběžné rychlosti Země 29.7 km s^{-1} tak stačí 42.1-29.7 = 12.4 km s^{-1}

Gravitační pole



uzavřená orbita

kruhová orbita

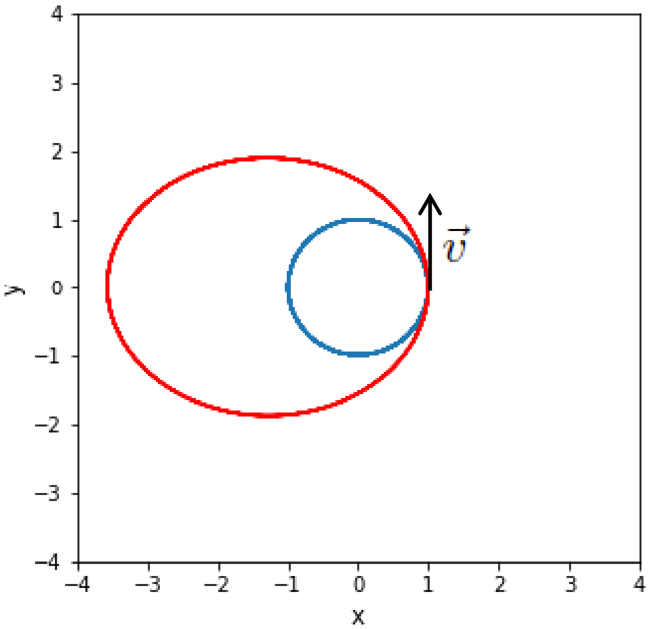
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

celková energie $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$

$$E < 0$$

$$E_k = -\frac{1}{2}E_p$$

Výpočet intenzity gravitačního pole



uzavřená orbita

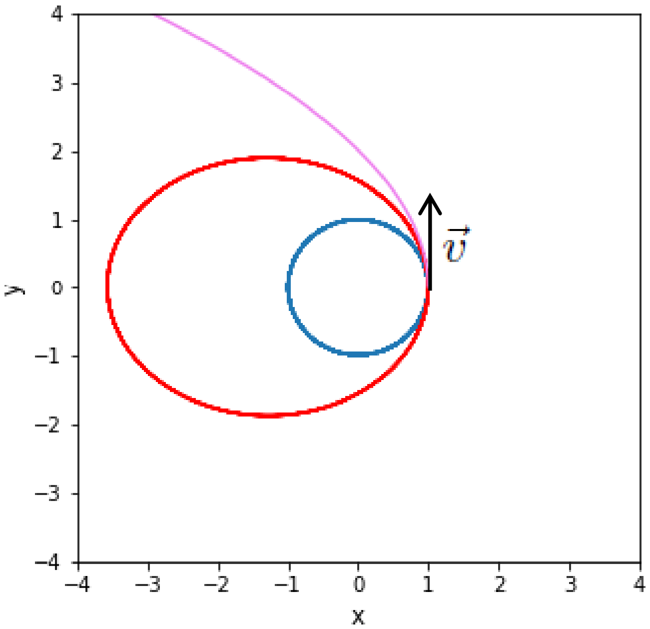
eliptická orbita

$$v \geq \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

celková energie $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$

$$E < 0$$

Výpočet intenzity gravitačního pole



otevřená orbita

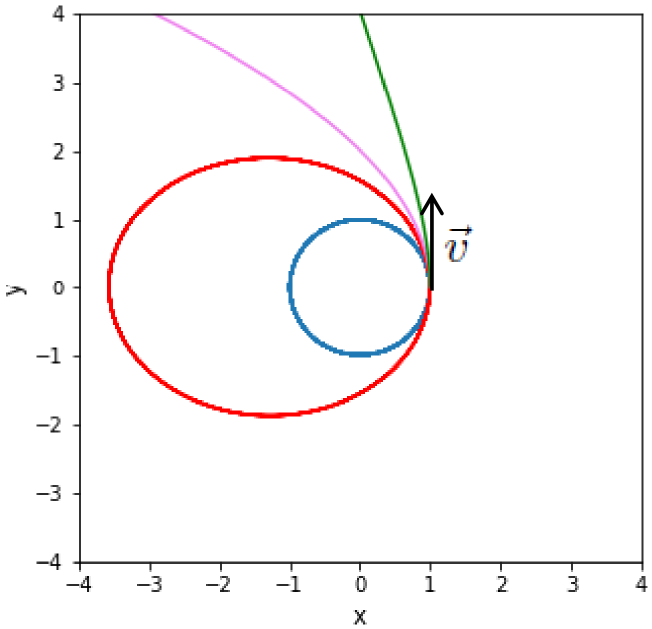
parabolická orbita

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$ (úniková rychlost)

celková energie $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$

$$E = 0$$

Výpočet intenzity gravitačního pole



otevřená orbita

hyperbolická orbita

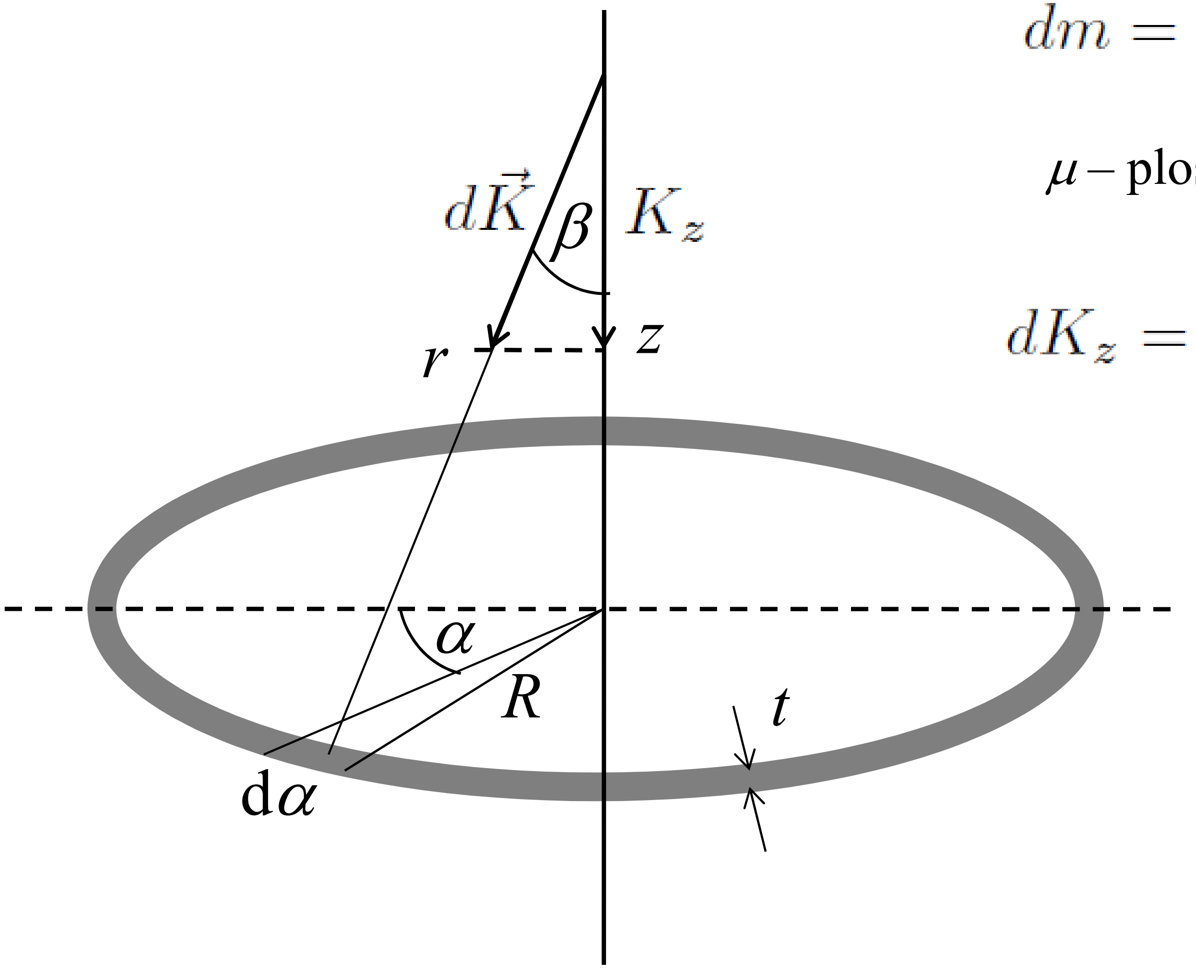
$$v > \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

celková energie $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$

$$E > 0$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- **gravitační pole v ose prstence**



$$dK_z = -\frac{G\,dm\,\cos\beta}{r^2}$$

$$dm = \mu R\,t\,d\alpha \quad \cos\beta = \frac{z}{r}$$

μ – plošná hustota

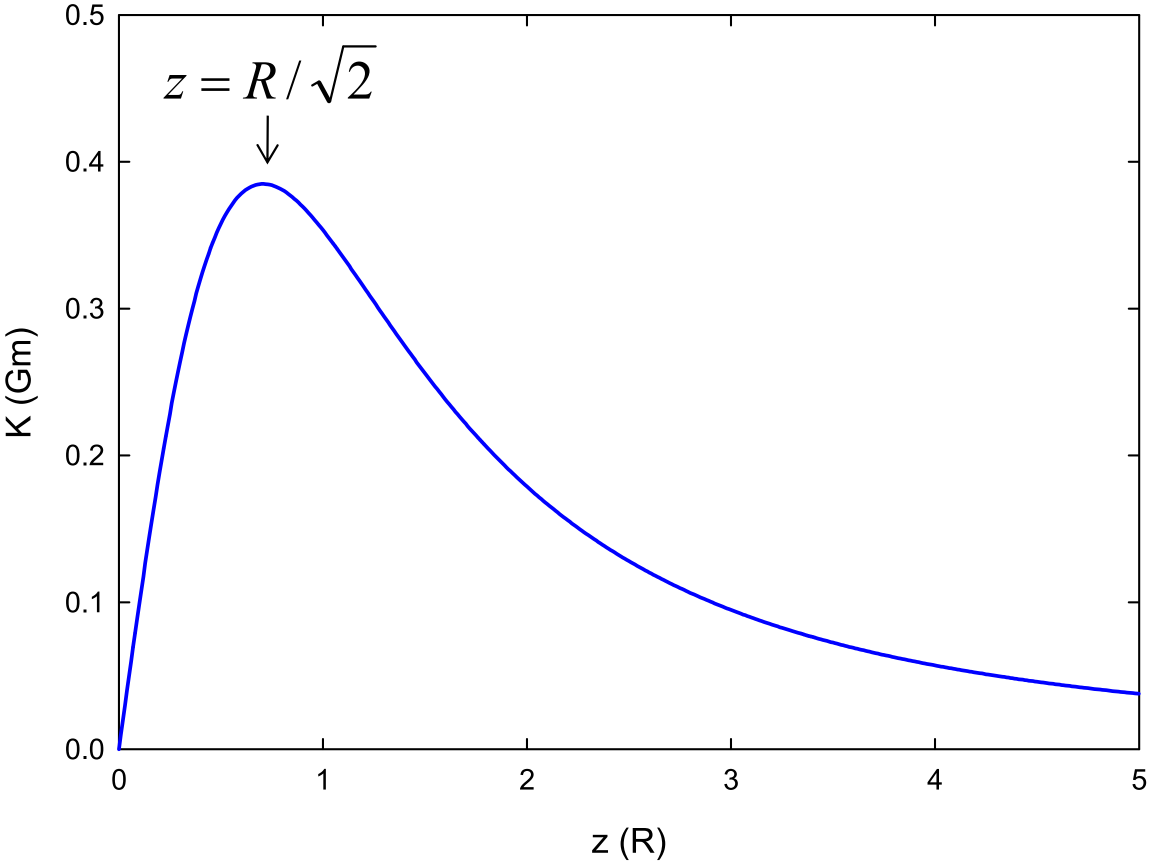
$$dK_z = -\frac{Gt\mu Rz\,d\alpha}{r^3} = -\frac{Gt\mu Rz\,d\alpha}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{K_z = -\frac{Gmz}{(z^2+R^2)^{3/2}}}$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- **gravitační pole v ose prstence**

velikost intenzity gravitačního pole



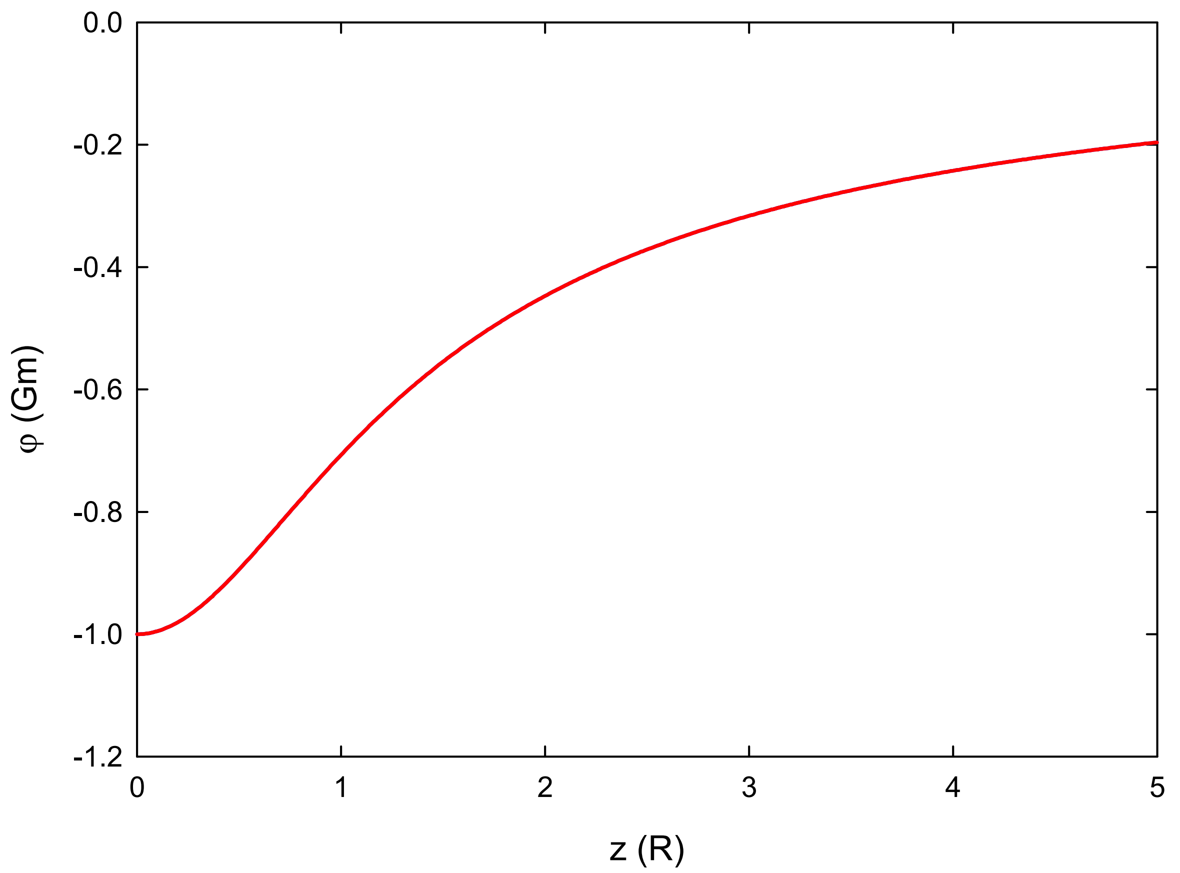
$$\boxed{K_z = -\frac{Gmz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}}$$

K je maximální v $z = R/\sqrt{2}$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- **gravitační pole v ose prstence**

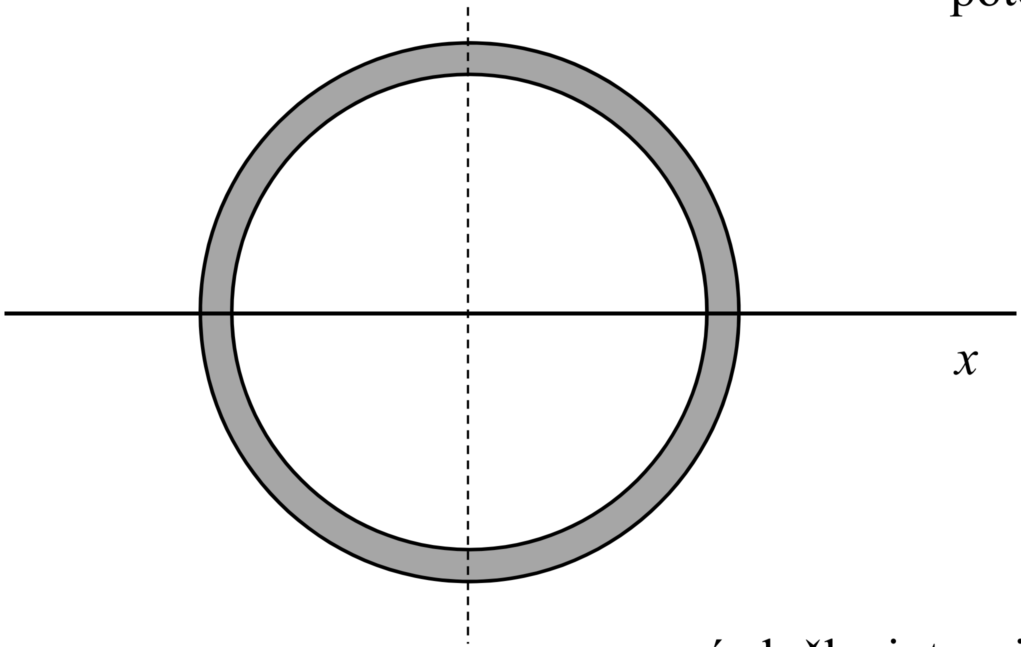
potenciál



$$\boxed{\varphi = -\frac{Gm}{\sqrt{z^2 + R^2}}}$$

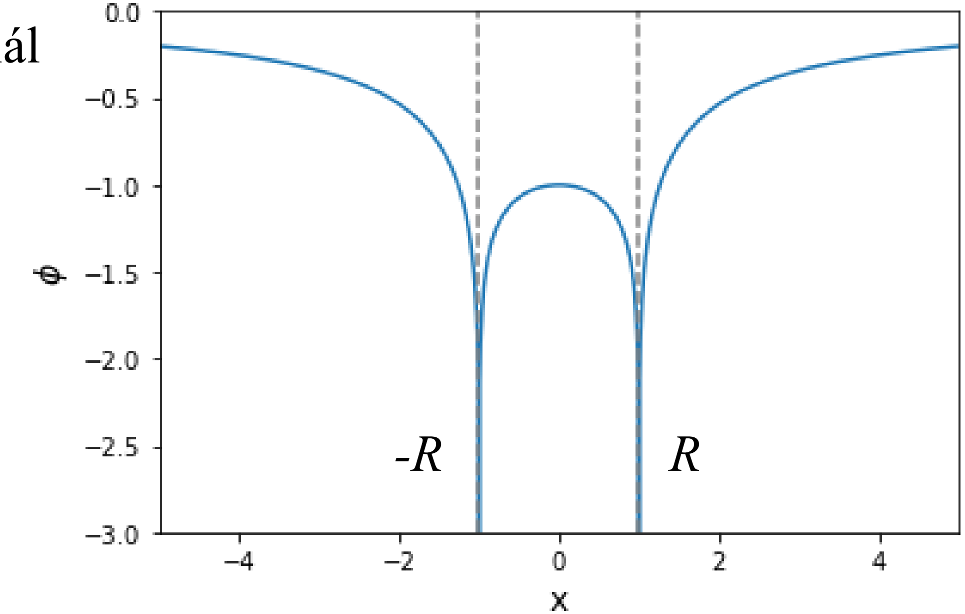
Gravitační pole v rovině prstence

- prstenec o poloměru R

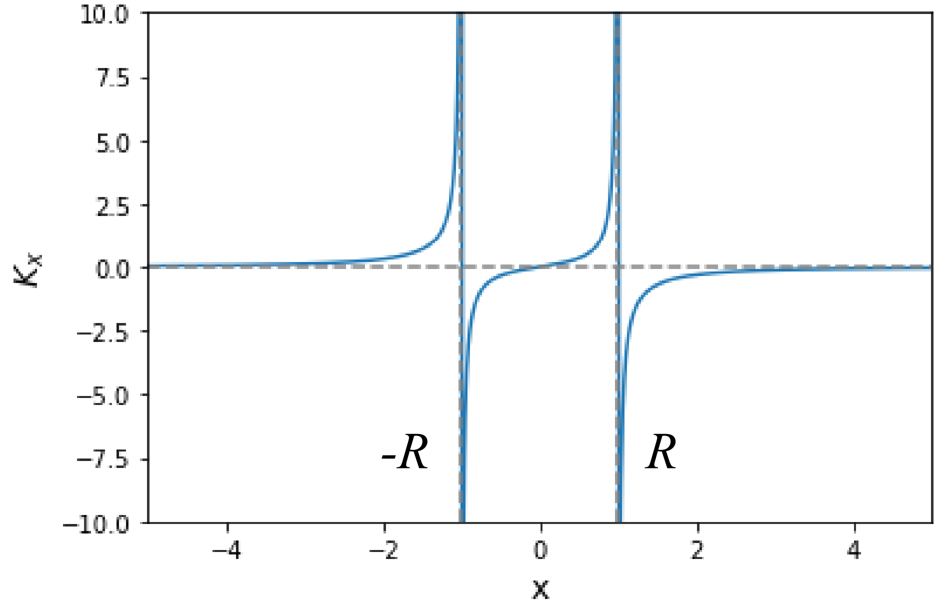


$G = 1, M = 1, R = 1$

potenciál



x-ová složka intenzity K_x

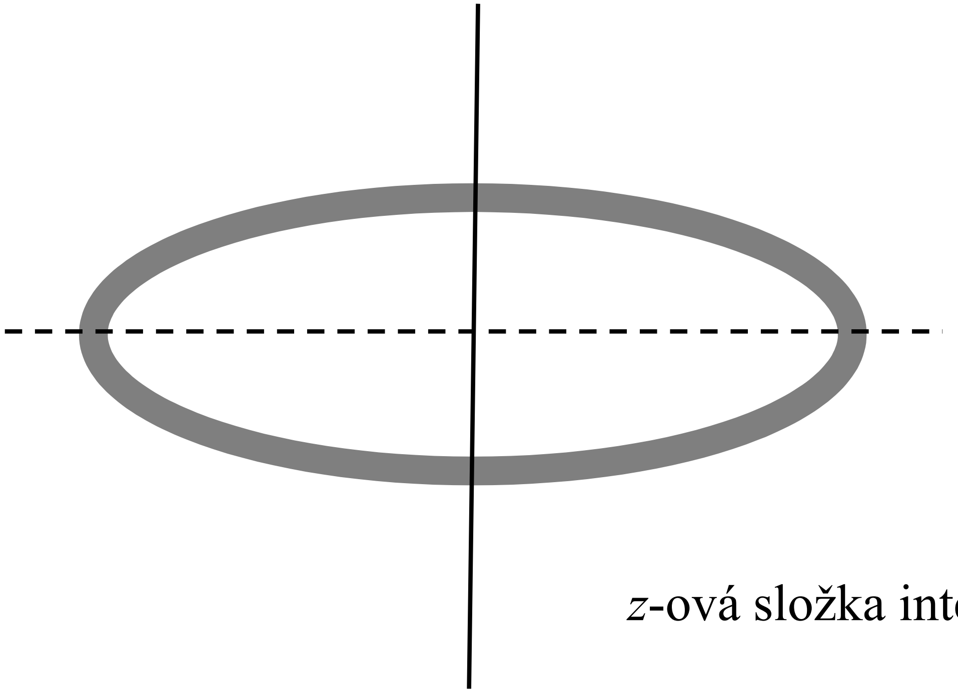


`prsten-v-rovine.py`

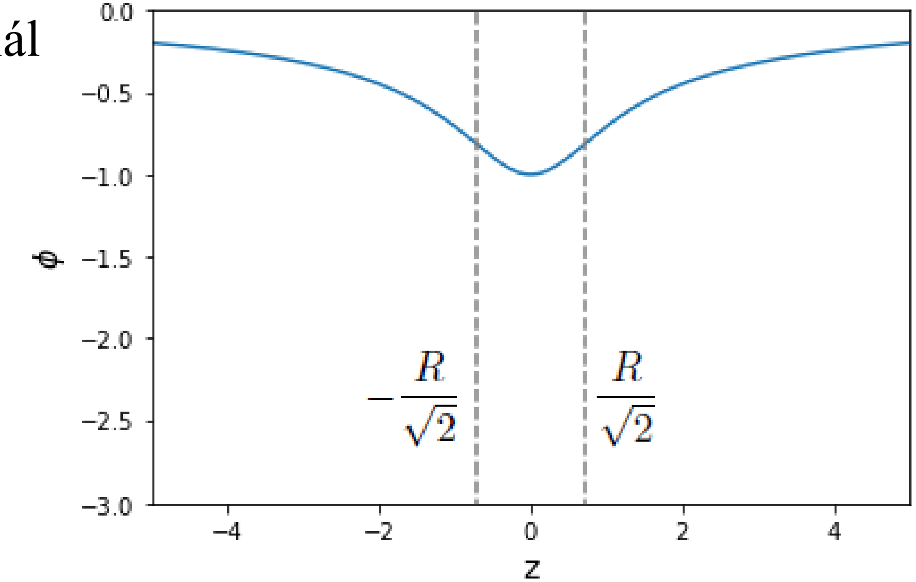
Gravitační pole kolmo k rovině prstence

$G = 1, M = 1, R = 1$

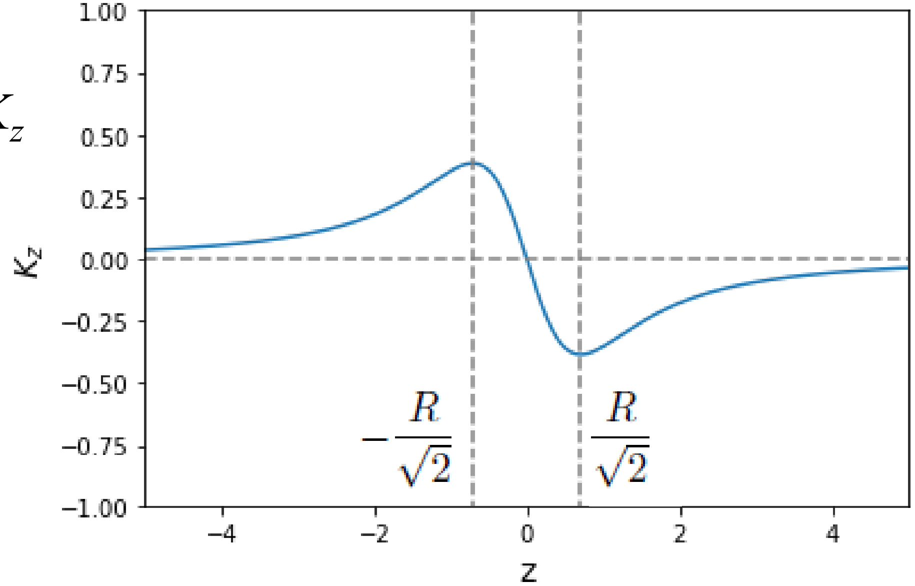
- prstenec o poloměru R



potenciál



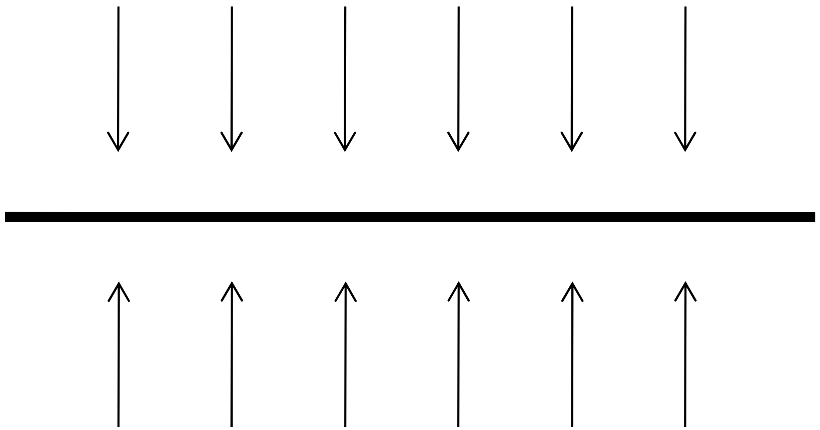
z-ová složka intenzity K_z



`prsten-kolmo.py`

Výpočet intenzity gravitačního pole

• **nekonečná rovina**



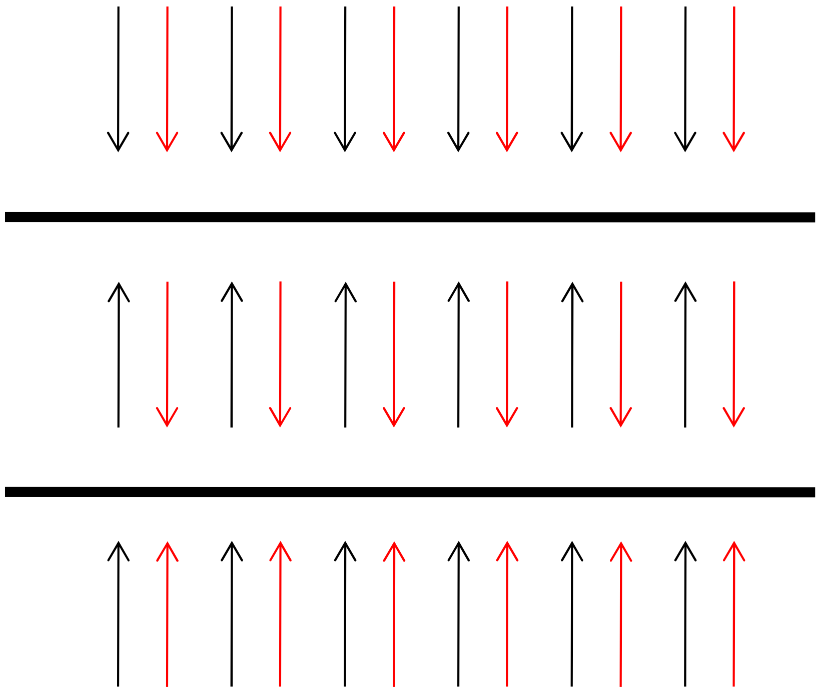
intenzita $$\boxed{K = 2\pi\mu G}$$

potenciál $$\boxed{\varphi = 2\pi\mu G z}$$

Výpočet intenzity gravitačního pole

- **dvě nekonečné roviny**

intenzita



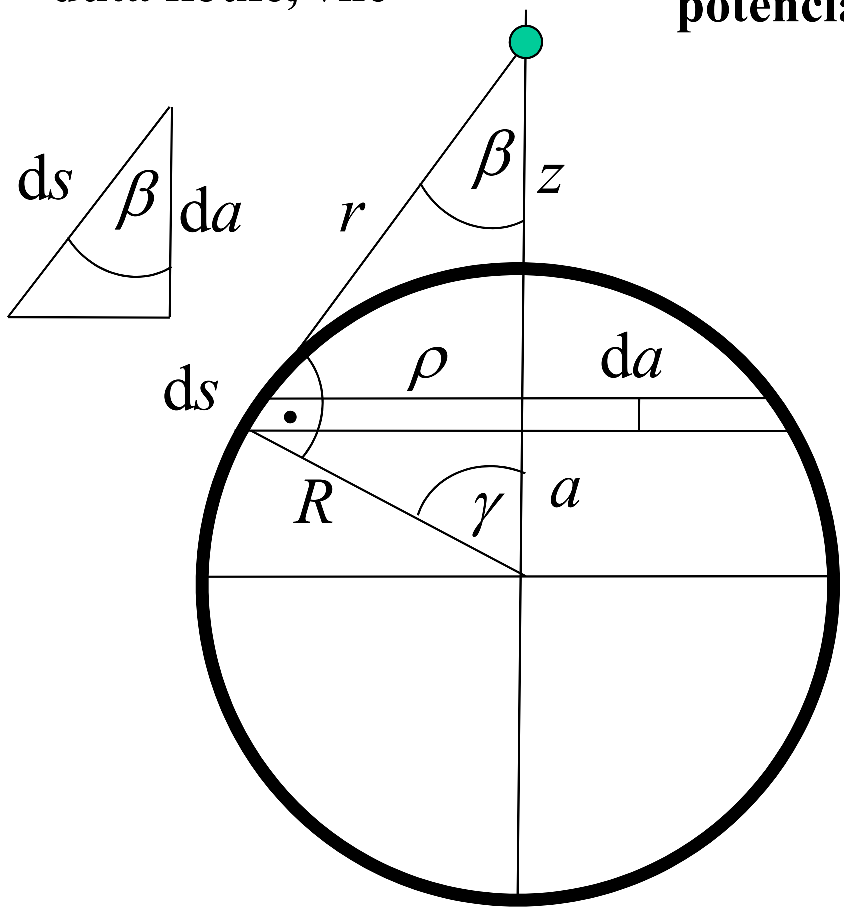
$$K = 4\pi\mu G$$

$$K = 0$$

$$K = 4\pi\mu G$$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

- **dutá koule, vně**

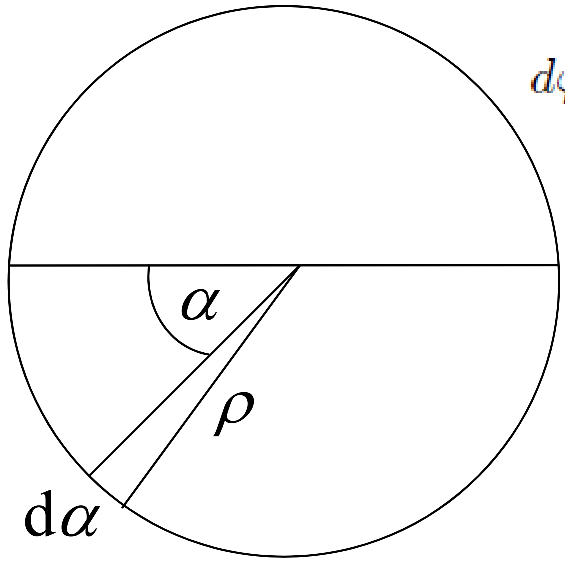


potenciál: $d\varphi = -\dfrac{G\,dm}{r}$

$$dm = \varrho\mu\, d\alpha\, ds$$

$$ds = \frac{da}{\sin\gamma} = R\frac{da}{\varrho}$$

$$dm = \mu R\, d\alpha\, da$$



$$d\varphi = -\frac{G\mu R}{r} d\alpha\, da = \frac{G\mu R}{z} d\alpha\, dr$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{z+R}^{z-R} \frac{G\mu R}{z} d\alpha\, dr$$

$$r^2 = (z-a)^2 + \varrho^2 = z^2 - 2za + R^2$$

$$r\, dr = -z\, da$$

potenciál vně koule: $\boxed{\varphi = -\dfrac{G\mu 4\pi R^2}{z} = -\dfrac{Gm}{z}}$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

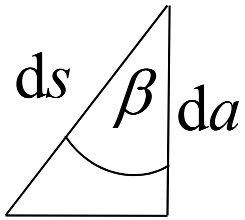
- **dutá koule, uvnitř**

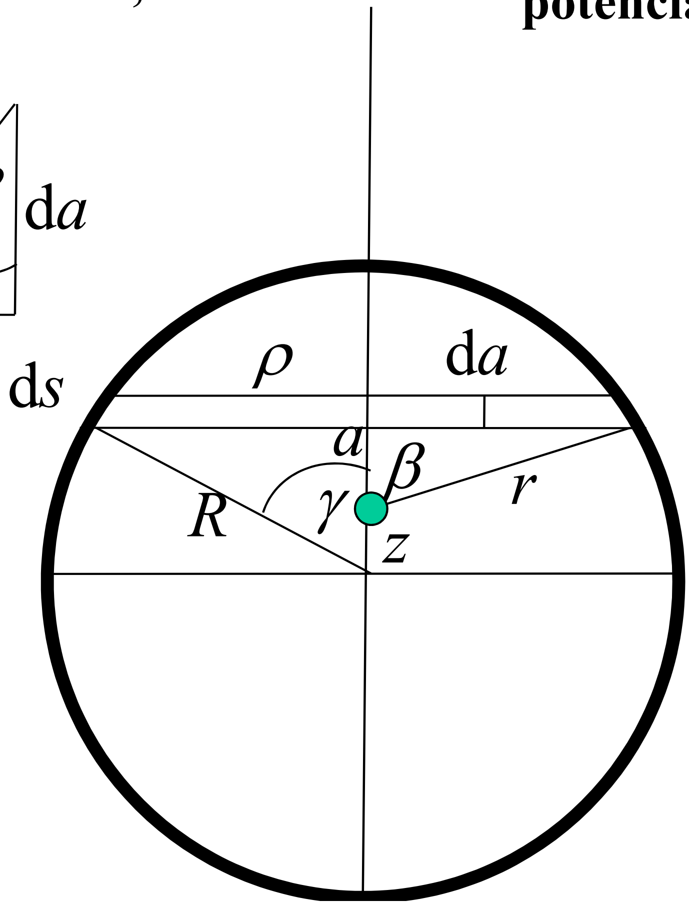
potenciál: $d\varphi = -\frac{G\,dm}{r}$

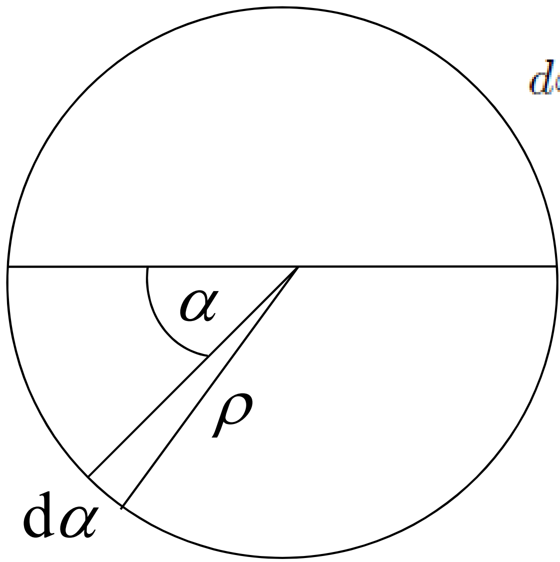
$$dm = \varrho\mu\, d\alpha\, ds$$

$$ds = \frac{da}{\sin\gamma} = R\frac{da}{\varrho}$$

$$dm = \mu R\, d\alpha\, da$$







$$d\varphi = -\frac{G\mu R}{r} d\alpha\, da = \frac{G\mu R}{z} d\alpha\, dr$$

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{z+R}^{R-z} \frac{G\mu R}{z} d\alpha\, dr$$

$$r^2 = (z-a)^2 + \varrho^2 = z^2 - 2za + R^2$$

$$r\, dr = -z\, da$$

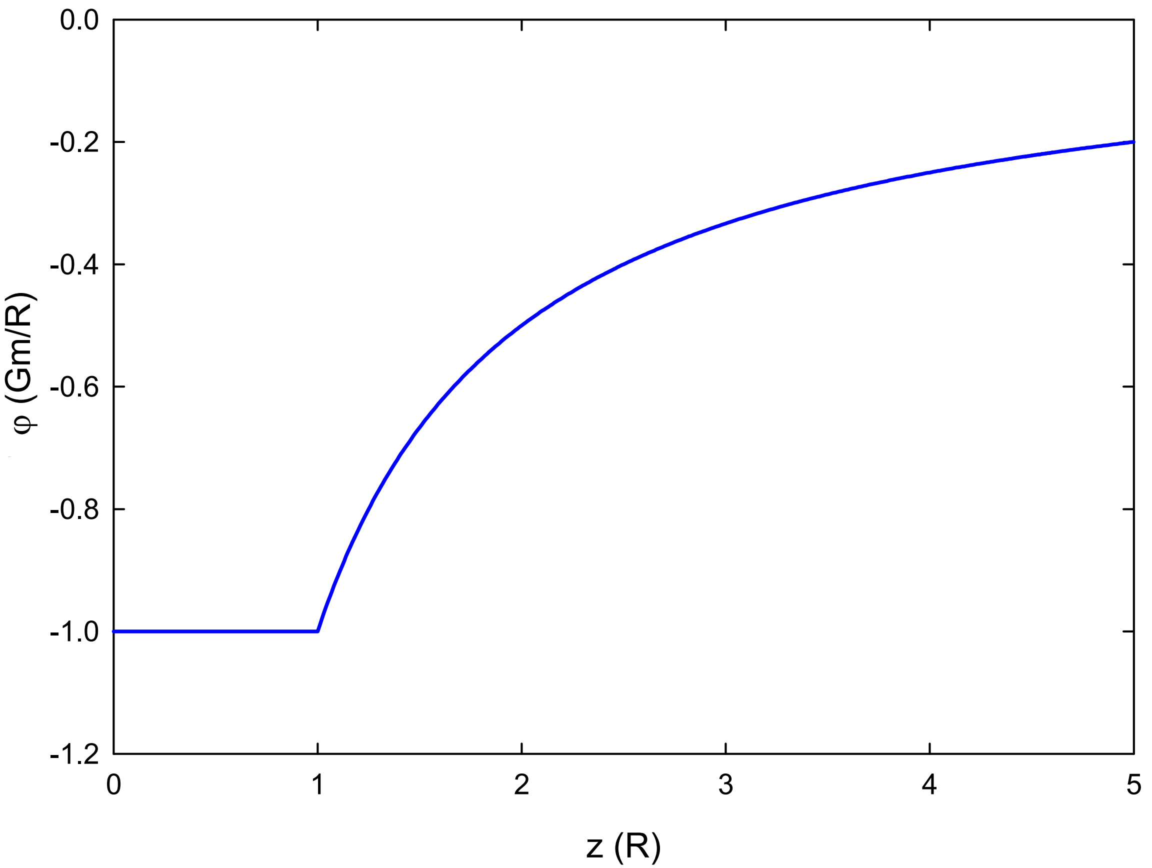
potenciál uvnitř koule $\boxed{\varphi = -G\mu 4\pi R = -\frac{Gm}{R} = \text{konst.}}$

Výpočet potenciálu gravitačního pole

- **dutá koule**

potenciál: uvnitř koule ($z < R$): $\varphi = -\dfrac{Gm}{R} = \text{konst.}$

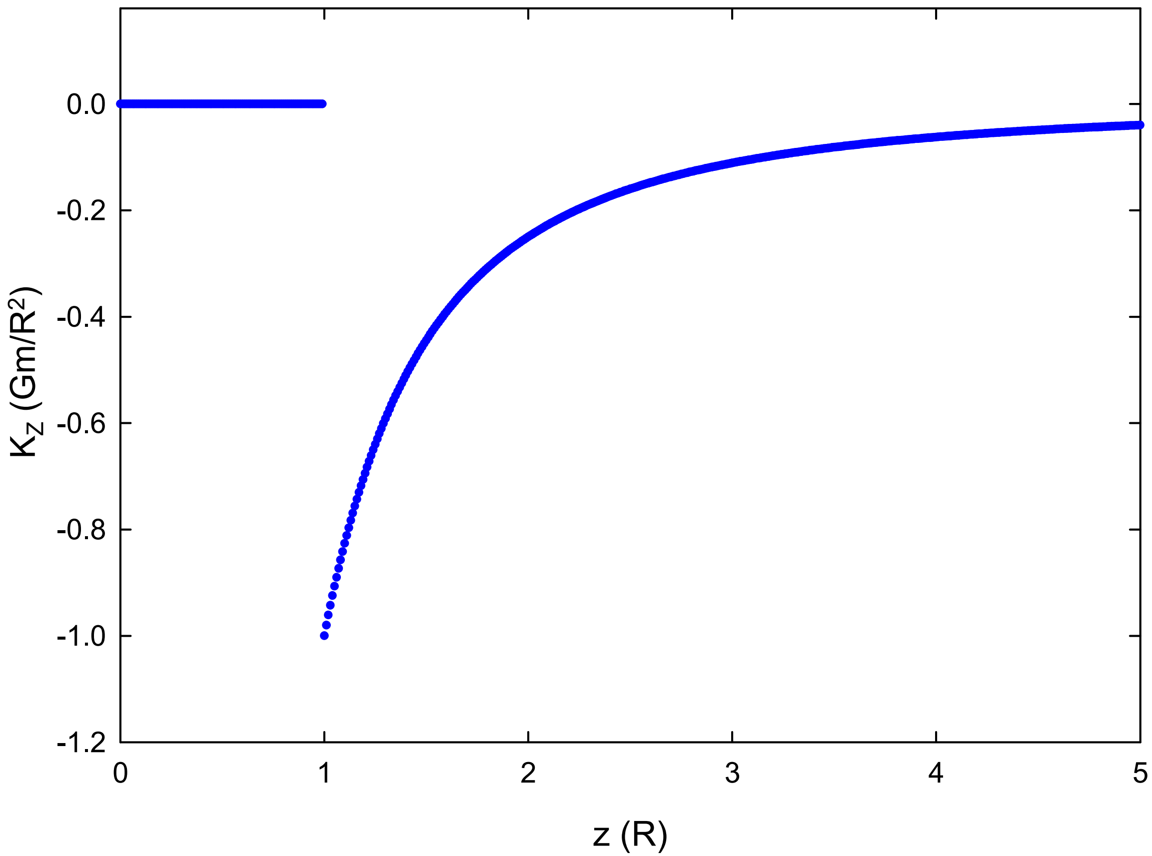
vně koule ($z \geq R$): $\varphi = -\dfrac{Gm}{z}$



Výpočet potenciálu gravitačního pole

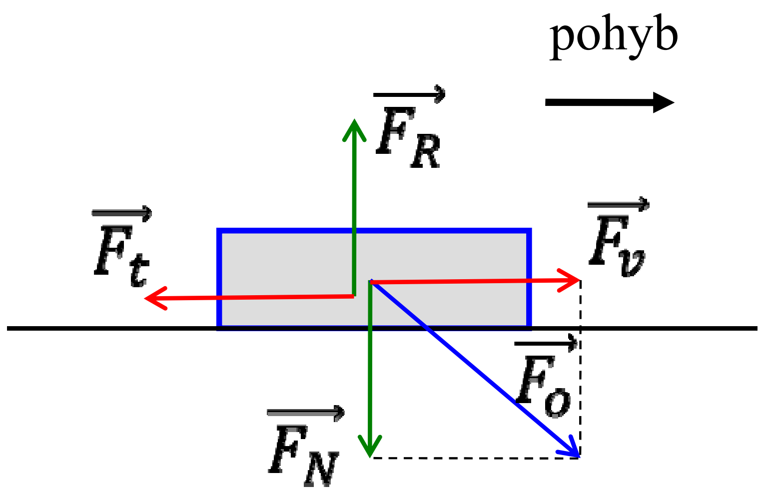
- **dutá koule** **intenzita:** uvnitř koule ($z < R$): $K_z = 0$

$$d\vec{K} = (0, 0, K_z)$$ vně koule ($z \geq R$): $$K_z = -\frac{Gm}{z^2}$$



Tření

• **smykové tření**



$$\vec{F}_{t,max} = -\mu F_N \frac{\vec{v}}{v}$$

μ – koeficient smykového tření

velikost třecí síly $F_t \leq \mu F_N$

$$\vec{F} = \vec{F_v} + \vec{F_N} + \vec{F_t} + \vec{F_R}$$

• pokud je F_v menší než kritická hodnota:

$$F_v < F_{v,krit} \Rightarrow F_t = F_v \leq F_{t,max}$$

(těleso se nepohybuje)

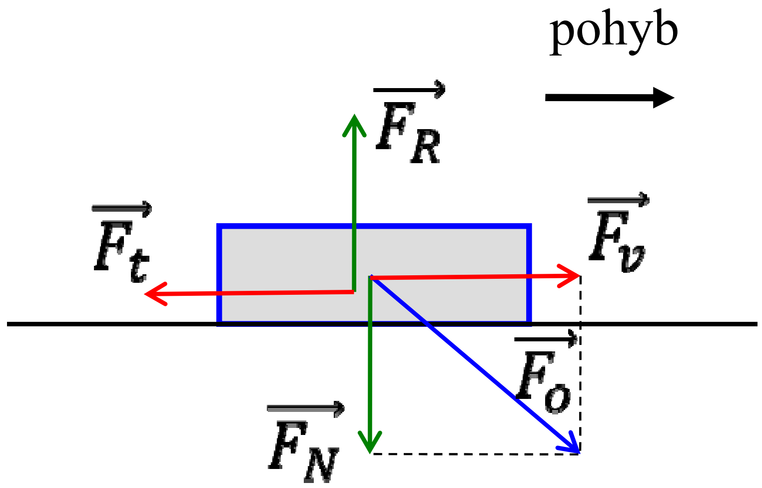
• pokud je F_v překročí kritickou hodnotu:

$$F_v > F_{v,krit} \Rightarrow F_t = F_{t,max} < F_v$$

(těleso se bude pohybovat)

Tření

- **smykové tření**



$$\vec{F}_{t,max} = -\mu F_N \frac{\vec{v}}{v}$$

μ – koeficient smykového tření

velikost třecí síly $F_t \leq \mu F_N$

$$\vec{F} = \vec{F_v} + \vec{F_N} + \vec{F_t} + \vec{F_R}$$

- pokud je F_v menší než kritická hodnota:

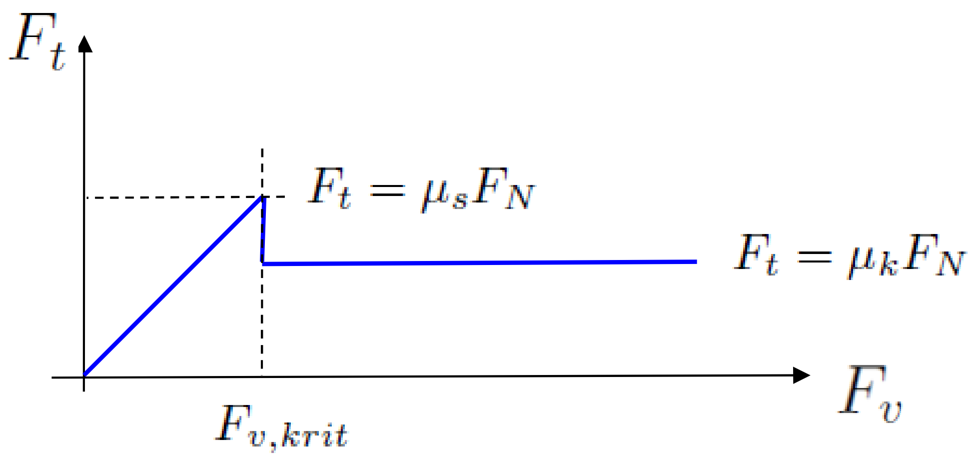
$$F_v < F_{v,krit} \Rightarrow F_t = F_v \leq F_{t,max}$$

(těleso se nepohybuje)

- pokud je F_v překročí kritickou hodnotu:

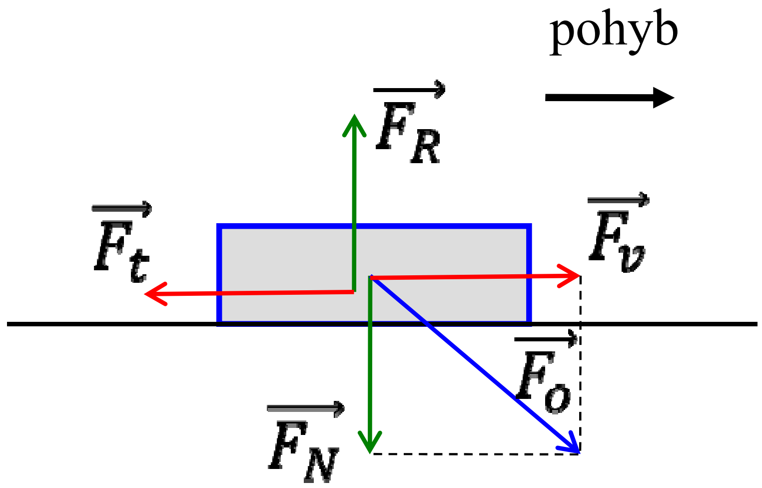
$$F_v > F_{v,krit} \Rightarrow F_t = F_{t,max} < F_v$$

(těleso se bude pohybovat)



Tření

- **smykové tření**



$$\vec{F}_{t,max} = -\mu F_N \frac{\vec{v}}{v}$$

μ – koeficient smykového tření

velikost třecí síly $F_t \leq \mu F_N$

$$\vec{F} = \vec{F_v} + \vec{F_N} + \vec{F_t} + \vec{F_R}$$

- pokud je F_v menší než kritická hodnota:

$$F_v < F_{v,krit} \Rightarrow F_t = F_v \leq F_{t,max}$$

(těleso se nepohybuje)

- pokud je F_v překročí kritickou hodnotu:

$$F_v > F_{v,krit} \Rightarrow F_t = F_{t,max} < F_v$$

(těleso se bude pohybovat)

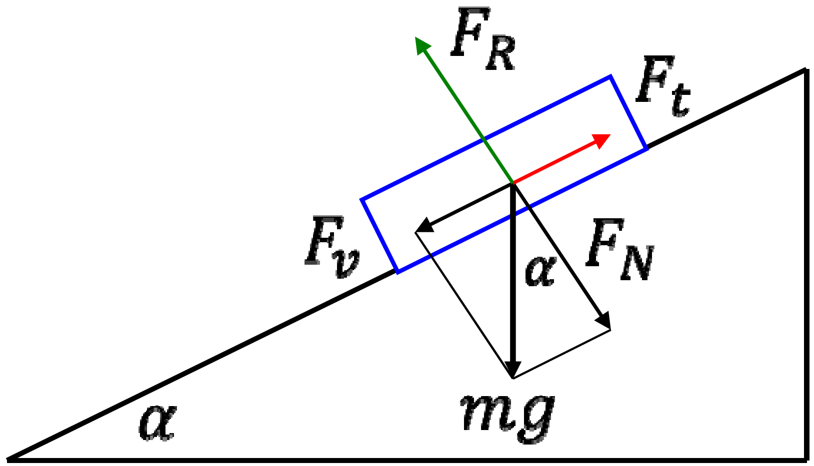
- μ_s – koeficient statického tření ($F_v < F_{v,krit}$)
- μ_k – koeficient kinematického tření ($F_v > F_{v,krit}$)

$$\mu_s \geq \mu_k$$

- typické hodnoty $\mu_s = 0.3 – 0.7$

Tření

• **určení statického koeficientu smykového tření**



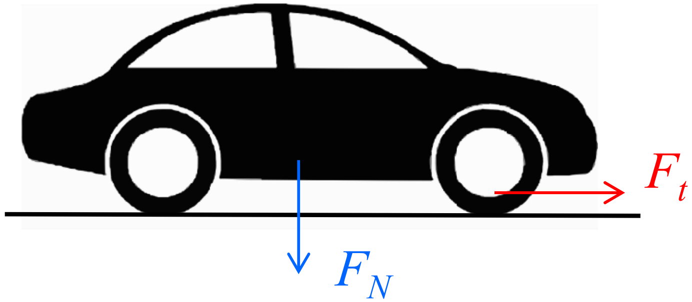
$$F_t = \mu_s F_N = \mu_s mg\cos\alpha$$

$$F_v = mg\sin\alpha$$

$$\boxed{\mu_s = \mathrm{tg}\alpha}$$

Tření

- pneumatika na suché vozovce $\mu_s \approx 0.7$



$$ma = \mu_s F_N = \mu_s mg$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \mu_s g$$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{\mu_s g}$$

zrychlení 0 – 100 km/h (0 – 28 m/s)

ideální případ: $\Delta t = 4$ s

Škoda Octavia 3

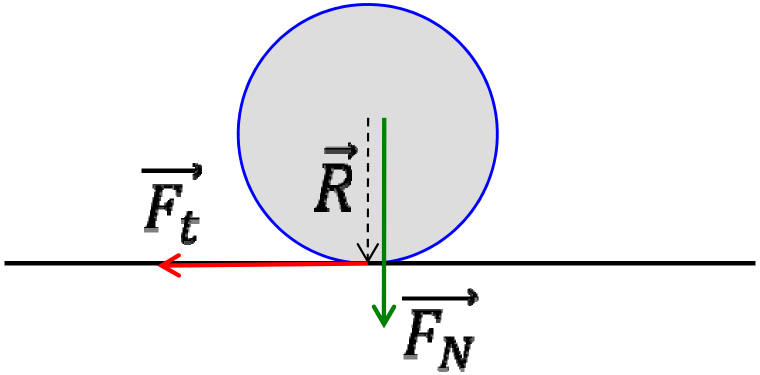
zrychlení 0 – 100 km/h: $\Delta t = 10$ s

Bugatti Veyron

zrychlení 0 – 100 km/h: $\Delta t = 2.2$ s

Tření

- **valivé tření**



$$F_t = \mu_V \frac{F_N}{R}$$

μ_V – koeficient valivého tření