

Gravitační pole homogenních těles

Petr Hruška

10. listopadu 2025

Hmotný bod

Vycházíme z Newtonova gravitačního zákona pro dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 s polohami danými vektory $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$. Gravitační síla $\vec{F}_{12}$, kterou působí 1. bod na 2. je dána jako:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Přeznačme si hmotnost 1. bodu jako M a jeho polohu jako $\vec{r}'$. Potom intenzita $\vec{K}(\vec{r})$ a potenciál gravitačního pole $\varphi(\vec{r})$ v bodě s polohovým vektorem $\vec{r}$ mají tvar:

$$\begin{aligned}\vec{K}(\vec{r}) &= -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ \varphi(\vec{r}) &= -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Obě veličiny jsou svázány vztahem, kde intenzita gravitačního pole je rovna zápornému gradientu potenciálu.

$$\begin{aligned}\vec{K}(\vec{r}) &= -\nabla \varphi(\vec{r}) \\ \vec{K}(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

Chceme-li vypočítat gravitační pole obecného tělesa, musíme spojitě sečíst gravitační pole jednotlivých hmotných bodů, z nichž se těleso skládá. Matematicky se jedná o výpočet objemového integrálu, který získáme zavedením funkce hustoty $dm = \varrho dV$.

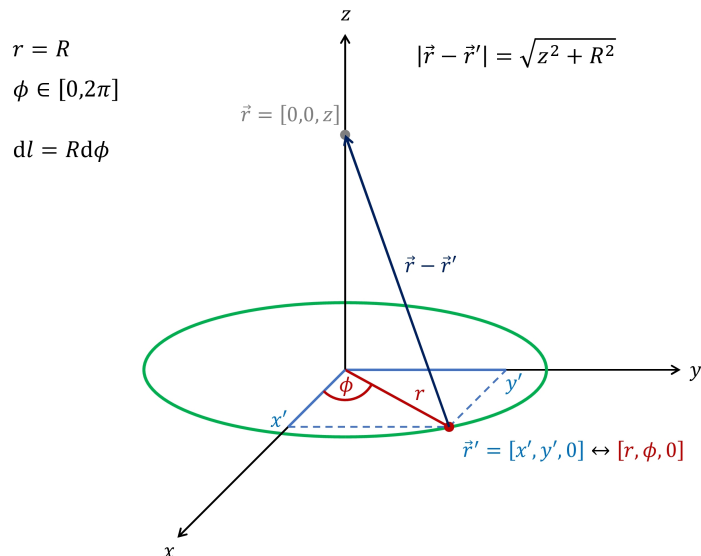
$$\vec{K}(\vec{r}) = - \int_V G \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \varrho dV' \quad (0.1)$$

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_V G \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \varrho dV' \quad (0.2)$$

Integrace obecně pobíhá přes čárkované souřadnice $\vec{r}' = (x', y', z')$. Pro nehomogenní tělesa je hustota ϱ funkcí těchto čárkovaných souřadnic. V dalších výpočtech budeme nicméně uvažovat tělesa homogenní, jejichž hustota ϱ je konstantní.

1 Prstenec, disk a rovina

1.1 Gravitační pole homogenního prstence na jeho ose



Obrázek 1.1: Homogenní prstenec

Výpočet z definice

Pro integraci rovnice (0.2) je vhodné použít polární souřadnice r a ϕ . Vzdálenost bodů prstence od počátku je konstantní, tedy $r = R$, zatímco úhel ϕ nabývá hodnot od 0 do 2π . Elementární hmotnost dm si můžeme vyjádřit pomocí délkové hustoty μ a délky elementárního oblouku $Rd\phi$. Vektor $\vec{r}$ určuje polohu bodu na ose prstence, v němž vyhodnocujeme intenzitu a potenciál gravitačního pole, vektor $\vec{r}'$ určuje polohy bodů kulové slupky. Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$ a jeho velikost $|\vec{r} - \vec{r}'|$ mají podle obrázku 1.1 následující tvar.

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= (R \cos \phi, R \sin \phi, z), \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{z^2 + R^2}.\end{aligned}$$

Potenciál gravitačního pole prstence získáme výpočtem jednorozměrného integrálu.

$$\varphi(z) = - \int_0^{2\pi} G \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \mu R d\phi \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= - \frac{G\mu R}{\sqrt{z^2 + R^2}} [\phi]_0^{2\pi} \\ \varphi(z) &= - \frac{2\pi G\mu R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\end{aligned} \quad (1.2)$$

Délkovou hustotu μ si vyjádříme jako poměr hmotnosti prstence a jeho délky $\mu = M/(2\pi R)$. Potom potenciál gravitačního pole prstence je:

$$\varphi(z) = -\frac{GM}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad (1.3)$$

Složky intenzity gravitačního pole prstence, rovnice (0.1), získáme výpočtem jednorozměrného integrálu. V důsledku symetrie úlohy je x -ová a y -ová složka vektoru intenzity nulová a celková intenzita je dána pouze její z -ovou složkou.

$$K_x(z) = -\int_0^{2\pi} G \frac{R \cos \phi}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \mu R d\phi \quad (1.4)$$

$$K_x(z) = -\frac{G\mu R^2}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} [\cos \phi]_0^{2\pi}$$

$$K_x(z) = 0$$

$$K_y(z) = -\int_0^{2\pi} G \frac{R \sin \phi}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \mu R d\phi \quad (1.5)$$

$$K_y(z) = -\frac{G\mu R^2}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} [\sin \phi]_0^{2\pi}$$

$$K_y(z) = 0$$

$$K_z(z) = -\int_0^{2\pi} G \frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \mu R d\phi \quad (1.6)$$

$$K_z(z) = -\frac{G\mu Rz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} [\phi]_0^{2\pi}$$

$$K_z(z) = -\frac{2\pi G\mu Rz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \quad (1.7)$$

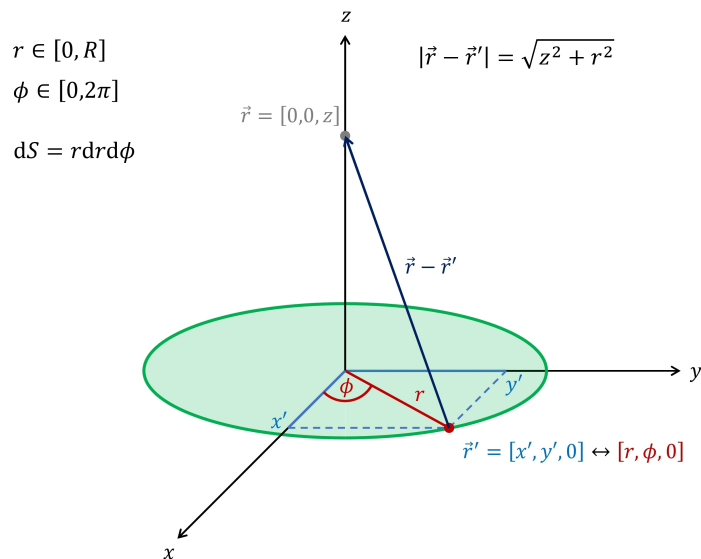
Stejný výsledek získáme ze záporně vzaté derivace potenciálu (1.2) podle souřadnice z .

$$\begin{aligned} K_z(z) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{2\pi G\mu R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \\ K_z(z) &= 2\pi G\mu R \frac{\partial}{\partial z} (z^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} \\ K_z(z) &= -2\pi G\mu R \cdot \frac{1}{2} (z^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z \\ K_z(z) &= -\frac{2\pi G\mu Rz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dosažením délkové hustoty $\mu = M/(2\pi R)$ dostáváme intenzitu gravitačního pole prstence jako:

$$K_z(z) = -\frac{GMz}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \quad (1.9)$$

1.2 Gravitační pole homogenního disku na jeho ose



Obrázek 1.2: Homogenní disk

Výpočet z definice

Pro výpočet integrálu (0.2) použijeme opět polární souřadnice r a ϕ . Tentokrát vzdálenost bodů disku od počátku se mění v rozsahu od 0 do R , zatímco úhel ϕ stále nabývá hodnot od 0 do 2π . Elementární hmotnost dm si můžeme vyjádřit pomocí plošné hustoty σ a plošného elementu v polárních souřadnicích jako $r dr d\phi$. Vektor $\vec{r} - \vec{r}'$ a jeho velikost $|\vec{r} - \vec{r}'|$ mají podle obrázku 1.2 následující tvar.

$$\vec{r} - \vec{r}' = (r \cos \phi, r \sin \phi, z),$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r^2}.$$

Potenciál gravitačního pole disku získáme výpočtem dvojrozměrného integrálu.

$$\varphi(z) = - \int_0^R \int_0^{2\pi} G \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \sigma r dr d\phi \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -G\sigma \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \\ \varphi(z) &= -G\sigma [\phi]_0^{2\pi} \left[\sqrt{z^2 + r^2} \right]_0^R \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\varphi(z) = -2\pi G\sigma \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \quad (1.12)$$

Výsledek integrace (1.11) si v detailu rozepíšeme následovně.

$$\begin{aligned} \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} &= \left| \begin{array}{l} t = r^2 + z^2 \\ dt = 2r dr \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt \\ &= t^{1/2} \\ &= \sqrt{r^2 + z^2} \end{aligned}$$

Plošnou hustotu σ si vyjádříme jako poměr hmotnosti disku a jeho plochy $\mu = M/(\pi R^2)$. Potom potenciál gravitačního pole disku je:

$$\varphi(z) = -\frac{GM}{R} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2} - \frac{z}{R} \right) \quad (1.13)$$

Složky intenzity gravitačního pole disku, rovnice (0.1), získáme výpočtem dvourozměrného integrálu. Opět v důsledku symetrie úlohy, resp. integrace funkcí $\cos \phi$ a $\sin \phi$ přes interval od 0 do 2π , je x -ová a y -ová složka vektoru intenzity nulová a celková intenzita je dána pouze její z -ovou složkou.

$$K_x(z) = - \int_0^R \int_0^{2\pi} G \frac{r \cos \phi}{\sqrt{(z^2 + r^2)^3}} \sigma r dr d\phi = 0$$

$$K_y(z) = - \int_0^R \int_0^{2\pi} G \frac{r \sin \phi}{\sqrt{(z^2 + r^2)^3}} \sigma r dr d\phi = 0$$

$$K_z(z) = - \int_0^R \int_0^{2\pi} G \frac{z}{\sqrt{(z^2 + r^2)^3}} \sigma r dr d\phi \quad (1.14)$$

$$K_z(z) = -G\sigma z \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{(z^2 + r^2)^3}} \quad (1.15)$$

$$K_z(z) = -2\pi G\sigma z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{(z^2 + R^2)}} \right) \quad (1.16)$$

Výsledek integrace (1.15) si v detailu rozepíšeme následovně.

$$\begin{aligned} \int \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} &= \left| \begin{array}{l} t = r^2 + z^2 \\ dt = 2r dr \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-3/2} dt \\ &= -t^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Stejný výsledek získáme ze záporně vzaté derivace potenciálu (1.12) podle souřadnice z .

$$\begin{aligned} K_z(z) &= -\frac{\partial}{\partial z} \left[-2\pi G\sigma \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right) \right] \\ K_z(z) &= 2\pi G\sigma \frac{\partial}{\partial z} \left[(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} - z \right] \\ K_z(z) &= 2\pi G\sigma \left[\frac{1}{2} (z^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z - 1 \right] \\ K_z(z) &= -2\pi G\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (1.17) \end{aligned}$$

Dosazením plošné hustoty $\sigma = M/(\pi R^2)$ dostáváme intenzitu gravitačního pole disku jako:

$$K_z(z) = -\frac{2GM}{R^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (1.18)$$

Výpočet přes vrstvy

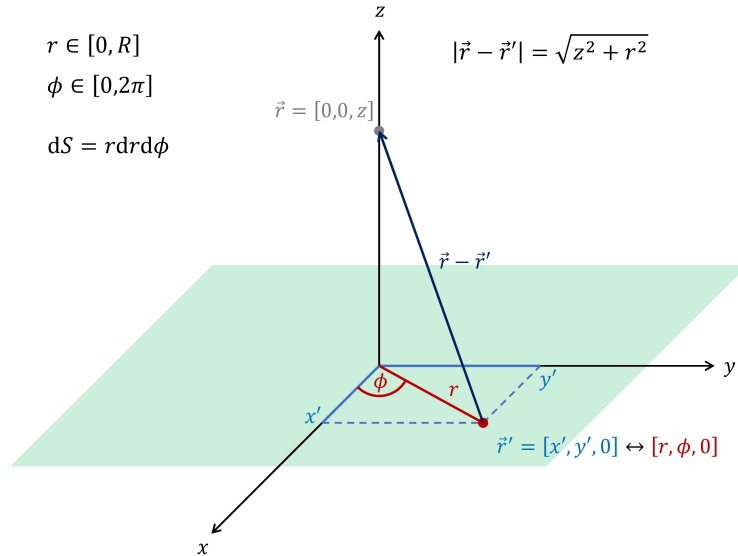
Stejný výsledek bychom dostali také postupem, kdybychom sčítali příspěvky od jednotlivých prstenců, tvořících disk, rovnice (1.2) a (1.7), kde konstantní poloměr R nahradíme proměnnou r a délkovou hustotu μ plošnou hustotou σ .

$$\varphi(z) = -2\pi \int_0^R \frac{G\sigma r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr$$

$$K_z(z) = -2\pi \int_0^R \frac{G\sigma r z}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} dr$$

Vidíme, že oba integrály jsou shodné s předchozími vztahy (1.10) a (1.14).

1.3 Gravitační pole nekonečné homogenní roviny



Obrázek 1.3: Homogenní rovina

Výpočet gravitačního pole je možné provést analogicky jako v předchozím případě pro homogenní disk, rovnice (1.10) a (1.14), přičemž budeme počítat s nekonečným poloměrem R . Výsledek získáme rovnou vypočítáním limit rovnic (1.12) a (1.16). Pro případ nekonečné roviny si zvolme¹ hladinu nulového potenciálu disku pro $z = 0$. Toho lze dosáhnout přičtením konstantního členu $2\pi G\sigma R$ k potenciálu v rovnici (1.12).

$$\varphi(z) = -2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z - R \right) \quad (1.19)$$

¹Všechny potenciály φ jsou dány až na volitelnou (integrační) konstantu.

Výsledný potenciál nekonečné roviny spočítáme pomocí limity.

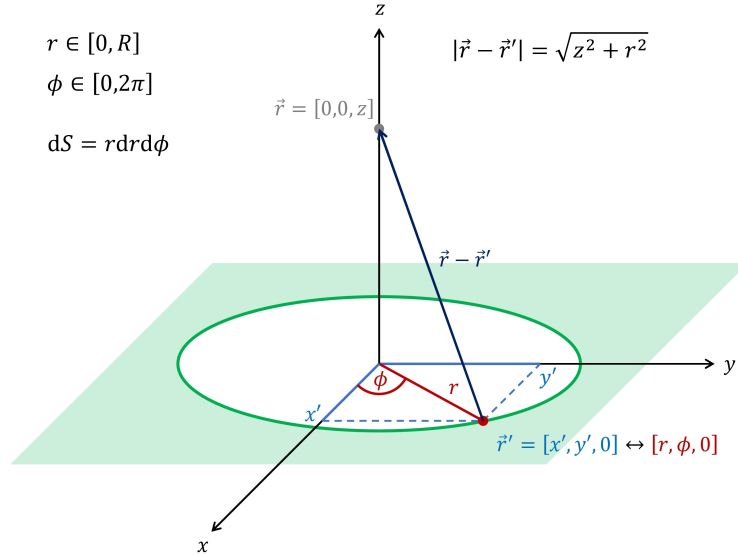
$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \lim_{R \rightarrow \infty} -2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z - R \right) \\
\varphi(z) &= 2\pi G\sigma z + \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi G\sigma R \left(\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R} \right)^2} - 1 \right) \\
\varphi(z) &= 2\pi G\sigma z + \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi G\sigma R \left(1 + \frac{z^2}{2R^2} - 1 \right) \\
\varphi(z) &= 2\pi G\sigma z + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi G\sigma z^2}{R} \\
\varphi(z) &= 2\pi G\sigma z
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Podobně vypočítáme i intenzitu gravitačního pole nekonečné roviny.

$$\begin{aligned}
K_z(z) &= \lim_{R \rightarrow \infty} -2\pi G\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\
K_z(z) &= -2\pi G\sigma
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Výsledkem je homogenní gravitační pole s konstantní intenzitou a lineárně rostoucím potenciálem s výškou z .

1.4 Gravitační pole nekonečné homogenní roviny s dírou



Obrázek 1.4: Homogenní rovina s dírou

Výpočet gravitačního pole je možné jednoduše provést odečtením gravitačních polí neko-

nečné roviny a homogenního disku. Pro potenciály odečítáme rovnice (1.20) a (1.12).

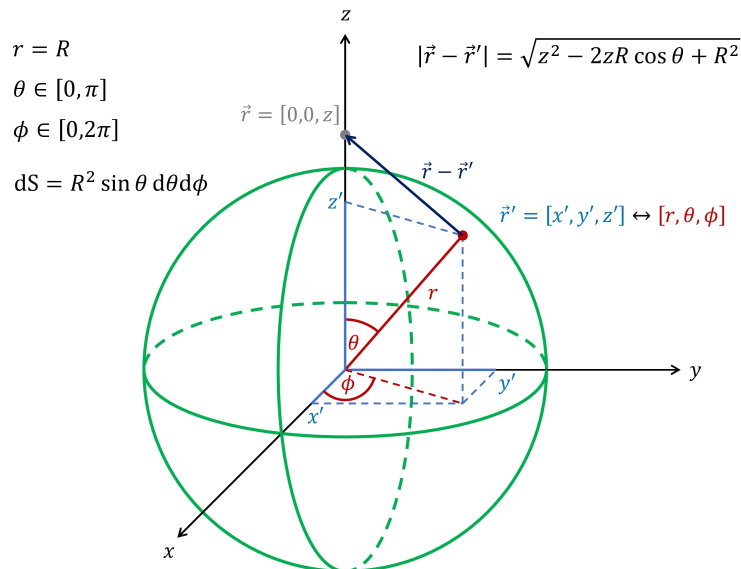
$$\begin{aligned}\varphi(z) &= 2\pi G\sigma z + 2\pi G\sigma \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) \\ \varphi(z) &= 2\pi G\sigma \sqrt{R^2 + z^2}\end{aligned}\tag{1.22}$$

Pro intenzity odečítáme rovnice (1.21) a (1.16).

$$\begin{aligned}K_z(z) &= -2\pi G\sigma + 2\pi G\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \\ K_z(z) &= -2\pi G\sigma \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\end{aligned}\tag{1.23}$$

2 Kulová slupka

2.1 Gravitační pole vně homogenní slupky



Obrázek 2.1: Homogenní kulová slupka (pozorovatel vně)

Výpočet z definice

Pro integraci rovnice (0.2) je vhodné použít sférické souřadnice r , θ a ϕ . Vzdálenost bodů slupky od počátku je konstantní, tedy $r = R$. Úhel θ („zeměpisná šířka“) nabývá hodnot od 0 („severní pól“) do π („jižní pól“), zatímco úhel ϕ („zeměpisná délka“) nabývá hodnot od 0 do 2π . Elementární hmotnost dm si můžeme vyjádřit pomocí plošné hustoty σ a plošného elementu² $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Vektor $\vec{r}$ určuje polohu bodu, v němž vyhodnocujeme intenzitu a potenciál gravitačního pole, vektor $\vec{r}'$ určuje polohy bodů kulové slupky. Velikost jejich rozdílu $|\vec{r} - \vec{r}'|$ spočítáme jako odmocninu ze skalárního součinu vektoru $\vec{r} - \vec{r}'$ se sebou samým s využitím toho, že vektory $\vec{r}$ a $\vec{r}'$ svírají právě úhel θ .

$$\begin{aligned}
 |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \\
 |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r} - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + \vec{r}' \cdot \vec{r}'} \\
 |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{|\vec{r}|^2 - 2|\vec{r}||\vec{r}'|\cos \theta + |\vec{r}'|^2} \\
 |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

²Objemový element ve sférických souřadnicích má tvar $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Vydělením členem dr získáme elementární plochu $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, jejíž integrací získáme povrch koule.

Potenciál gravitačního pole vně kulové slupky získáme výpočtem dvojrozměrného integrálu.

$$\varphi(z) = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -G\sigma R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} d\theta \\ \varphi(z) &= -G\sigma R^2 [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{zR} \sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2} \right]_0^\pi \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\sigma R^2}{zR} \left(\sqrt{z^2 + 2zR + R^2} - \sqrt{z^2 - 2zR + R^2} \right) \\ \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\sigma R}{z} \left(\sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\sigma R}{z} (z+R - z+R) \\ \varphi(z) &= -\frac{4\pi G\sigma R^2}{z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Výsledek integrace (2.3) si v detailu rozepíšeme následovně.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} &= \left| \begin{array}{l} t = z^2 - 2zR \cos \theta + R^2 \\ dt = 2zR \sin \theta d\theta \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2zR} \int t^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{zR} t^{1/2} \\ &= \frac{1}{zR} \sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Při výpočtu **pole vně koule** platí $z \geq R$ a tudíž v rovnici (2.4) $\sqrt{(z-R)^2} = z-R$. Plošnou hustotu σ si vyjádříme jako poměr hmotnosti slupky a její plochy $\sigma = M/(4\pi R^2)$. Vzhledem k symetrii úlohy můžeme ve výsledném tvaru pro potenciál kulové slupky nahradit souřadnici z obecnou vzdáleností r od počátku soustavy souřadnic.

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (2.7)$$

Vektor intenzity gravitačního pole spočítáme jako záporný gradient potenciálu (2.7).

$$\begin{aligned}
\vec{K}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi(r) \\
\vec{K}(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\right) \\
K_x(\vec{r}) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
K_x(\vec{r}) &= GM\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
K_x(\vec{r}) &= -\frac{1}{2}GM(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\
K_x(\vec{r}) &= -\frac{GM}{r^3}x \\
K_y(\vec{r}) &= -\frac{GM}{r^3}y \\
K_z(\vec{r}) &= -\frac{GM}{r^3}z \\
\vec{K}(\vec{r}) &= \frac{GM}{r^3}\vec{r}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Jak pro potenciál tak pro intenzitu gravitačního pole vně kulové slupky dostáváme stejný výsledek jako pro hmotný bod o hmotnosti M umístěný ve středu koule.

Výpočet přes vrstvy

Stejný výsledek bychom dostali také postupem, kdybychom sčítali příspěvky od jednotlivých prstenců (v různých výškách), tvořících kulovou slupku, rovnice (1.2). Poloměr každého prstence je $R \sin \theta$ a jeho z-ová souřadnice je $R \cos \theta$. Velikost rozdílu $|\vec{r} - \vec{r}'|$ je potom následující.

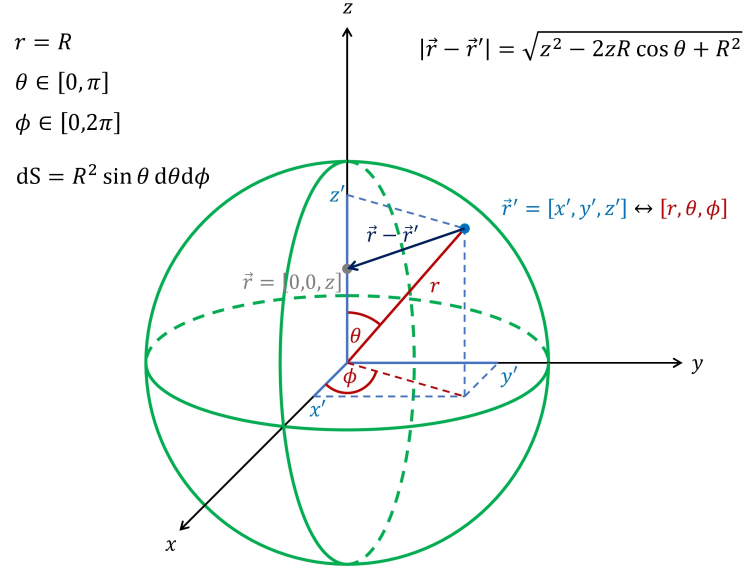
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(z - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta}$$

Délkovou hustotu μ nahradíme plošnou hustotou σ a integraci přes prstence provedeme přidáním členu $Rd\theta$.

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= -\int_0^\pi \frac{2\pi G\sigma R \sin \theta}{\sqrt{(z - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta}} R d\theta \\
\varphi(z) &= -2\pi \int_0^\pi \frac{G\sigma R^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} d\theta
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Vidíme, že poslední integrál je shodný s předchozím vztahem (2.2).

2.2 Gravitační pole uvnitř homogenní slupky



Obrázek 2.2: Homogenní kulová slupka (pozorovatel uvnitř)

Výpočet z definice

Potenciál gravitačního pole uvnitř kulové slupky spočítáme pomocí stejného dvojrozměrného integrálu jako v předchozím případě, rovnice (2.2).

$$\varphi(z) = - \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -G\sigma R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} d\theta \\ \varphi(z) &= -G\sigma R^2 [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{zR} \sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2} \right]_0^\pi \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\sigma R^2}{zR} \left(\sqrt{z^2 + 2zR + R^2} - \sqrt{z^2 - 2zR + R^2} \right) \\ \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\sigma R}{z} \left(\sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\sigma R}{z} (z+R - R+z) \\ \varphi(z) &= -4\pi G\sigma R \end{aligned} \quad (2.13)$$

Výsledek integrace (2.3) jsme získali stejným způsobem jako v předchozím případě, viz rovnice (2.6). Při výpočtu **pole uvnitř koule** platí $z < R$ a tudíž v rovnici (2.12) $\sqrt{(z-R)^2} =$

$R - z$. Plošnou hustotu σ si opět vyjádříme jako poměr hmotnosti slupky a její plochy $\sigma = M / (4\pi R^2)$.

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{R} \quad (2.14)$$

Potenciál uvnitř duté koule je konstantní, tudíž intenzita gravitačního pole je zde nulová.

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi(r) \\ \vec{K}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

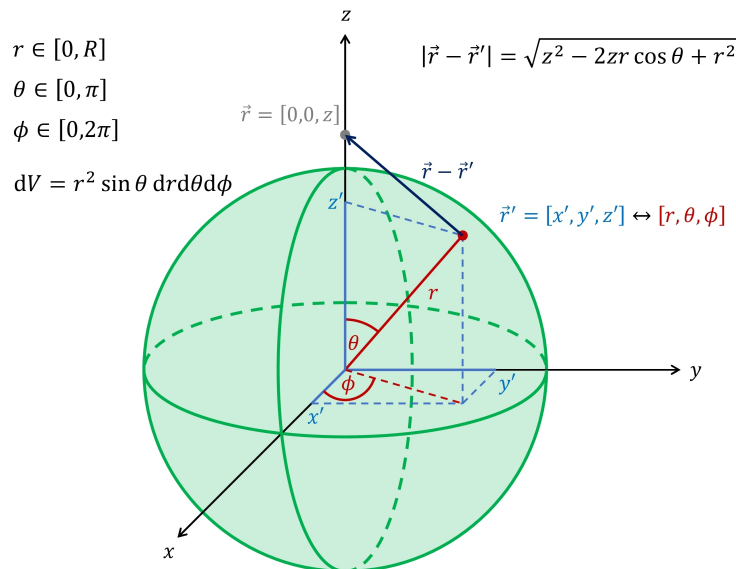
Výpočet přes vrstvy

I v tentokrát bychom dostali stejný výsledek postupem, kdybychom sčítali příspěvky od jednotlivých prstenců, tvořících kulovou slupku, rovnice (1.2) stejně jako v předchozím případě. Poloměr každého prstence je $R \sin \theta$ a jeho z-ová souřadnice je $R \cos \theta$. Velikost rozdílu $|\vec{r} - \vec{r}'|$ je potom následující.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= - \int_0^\pi \frac{2\pi G \sigma R \sin \theta}{\sqrt{(z - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta}} R d\theta \\ \varphi(z) &= -2\pi \int_0^\pi \frac{G \sigma R^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}} d\theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

3 Koule

3.1 Gravitační pole vně homogenní koule



Obrázek 3.1: Homogenní koule (pozorovatel vně)

Výpočet z definice

Stejně jako v případě kulové slupky použijeme pro výpočet integrálu (0.2) sférické souřadnice r , θ a ϕ . Vzdálenost bodů koule od počátku se mění v rozsahu od 0 do R . Úhel θ nabývá hodnot od 0 do π , zatímco úhel ϕ nabývá hodnot od 0 do 2π . Elementární hmotnost dm si můžeme vyjádřit pomocí hustoty ρ a objemového elementu ve sférických souřadnicích $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$. Vektor $\vec{r}$ určuje polohu bodu, v němž vyhodnocujeme intenzitu a potenciál gravitačního pole, vektor $\vec{r}'$ určuje polohy bodů koule. Velikost jejich rozdílu $|\vec{r} - \vec{r}'|$ spočítáme stejně jako v případě kulové slupky, rovnice (2.1), tedy jako odmocninu ze skalárního součinu vektoru $\vec{r} - \vec{r}'$ se sebou samým.

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 - 2zR \cos \theta + R^2}$$

Potenciál gravitačního pole vně homogenní koule získáme výpočtem trojrozměrného integrálu.

$$\varphi(z) = - \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} G \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} \varrho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -G\varrho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} d\theta \\ \varphi(z) &= -G\varrho [\phi]_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \left[\frac{1}{zr} \sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2} \right]_0^\pi dr \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\varrho}{z} \int_0^R r \left(\sqrt{z^2 + 2zr + r^2} - \sqrt{z^2 - 2zr + r^2} \right) dr \\ \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\varrho}{z} \int_0^R r \left(\sqrt{(z+r)^2} - \sqrt{(z-r)^2} \right) dr \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G\varrho}{z} \int_0^R r (z+r - z+r) dr \\ \varphi(z) &= -\frac{4\pi G\varrho}{z} \int_0^R r^2 dr \\ \varphi(z) &= -\frac{4\pi G\varrho}{z} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \\ \varphi(z) &= -\frac{4\pi G\varrho R^3}{3z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Výsledek integrace (3.2) jsme získali stejným způsobem jako v předchozích případech, viz rovnice (2.6). Stejně jako u kulové slupky při výpočtu **pole vně koule** platí $z \geq R$ a tudíž v rovnici (3.3) $\sqrt{(z-r)^2} = z-r$. Hustotu ϱ si vyjádříme jako poměr hmotnosti koule a jejího objemu $\varrho = M/(4/3\pi R^3)$. Vzhledem k symetrii úlohy můžeme ve výsledném tvaru pro potenciál koule nahradit souřadnici z obecnou vzdáleností r od počátku soustavy souřadnic.

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (3.5)$$

Potenciál vně homogenní koule má stejný tvar jako v případě duté koule, tudíž i vektor intenzity gravitačního pole bude stejný, viz rovnice (2.8).

$$\vec{K}(\vec{r}) = \frac{GM}{r^3} \vec{r} \quad (3.6)$$

Jak pro potenciál tak pro intenzitu gravitačního pole vně homogenní koule dostáváme stejný výsledek jako pro hmotný bod o hmotnosti M umístěný v jejím středu.

Výpočet přes vrstvy

Stejný výsledek bychom dostali také postupem, kdybychom sčítali příspěvky od jednotlivých kulových slupek, tvořících kouli, rovnice (2.5). Poloměr každé slupky je r , plošnou hustotu σ nahradíme hustotou ϱ a integraci přes slupky provedeme přidáním členu dr .

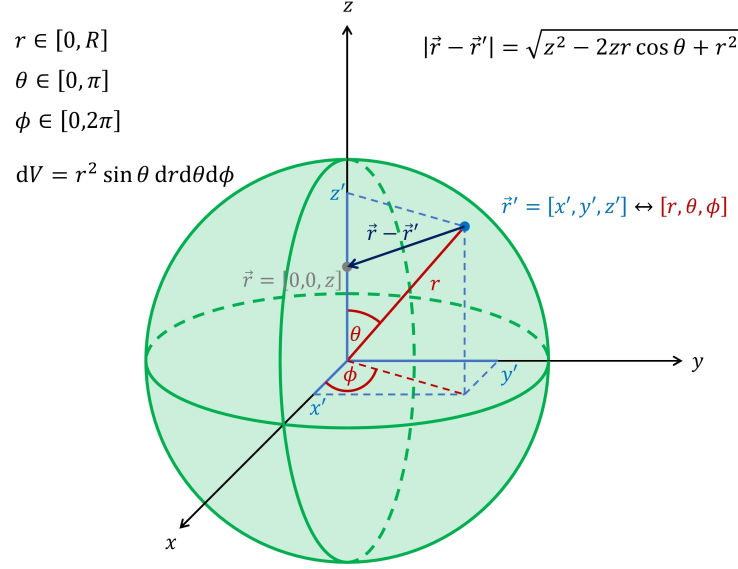
$$\varphi(z) = - \int_0^R \frac{4\pi G \varrho r^2}{z} dr \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= - \frac{4\pi G \varrho}{z} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \\ \varphi(z) &= - \frac{4\pi G \varrho R^3}{3z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\varphi(r) = - \frac{GM}{r} \quad (3.9)$$

Vidíme, že výsledky jsou shodné s předchozím vztahy (3.4) a (3.5).

3.2 Gravitační pole uvnitř homogenní koule



Obrázek 3.2: Homogenní koule (pozorovatel uvnitř)

Výpočet z definice

Potenciál gravitačního pole uvnitř homogenní koule spočítáme pomocí stejného trojrozměrného integrálu, rovnice (3.1), jako v předchozím případě. Výpočet probíhá stejně až po krok (3.3). V něm je potřeba rozdělit oblast integrace na dva intervaly. Pro $r \in [0, z]$ platí $\sqrt{(z-r)^2} = z-r$, zatímco pro $r \in [z, R]$ platí $\sqrt{(z-r)^2} = r-z$.

$$\varphi(z) = -\frac{2\pi G \varrho}{z} \int_0^R r \left(\sqrt{(z+r)^2} - \sqrt{(z-r)^2} \right) dr \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\frac{2\pi G \varrho}{z} \left[\int_0^z 2r^2 dr + \int_z^R 2zr dr \right] \\ \varphi(z) &= -\frac{4\pi G \varrho}{z} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^z - 4\pi G \varrho \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_z^R \\ \varphi(z) &= -\frac{4\pi G \varrho}{3} z^2 - 2\pi G \varrho R^2 + 2\pi G \varrho z^2 \\ \varphi(z) &= -2\pi G \varrho \left(R^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hustotu ϱ si opět vyjádříme jako poměr hmotnosti koule a jejího objemu $\varrho = M / (4/3\pi R^3)$. Vzhledem k symetrii úlohy můžeme ve výsledném tvaru pro potenciál koule nahradit souřad-

nici z obecnou vzdáleností r od počátku soustavy souřadnic.

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{2R^3} (3R^2 - r^2) \quad (3.12)$$

Vektor intenzity gravitačního pole spočítáme jako záporný gradient potenciálu (3.12).

$$\begin{aligned} \vec{K}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi(r) \\ \vec{K}(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\right) \\ K_x(\vec{r}) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{GM}{2R^3} (3R^2 - x^2 - y^2 - z^2)\right) \\ K_x(\vec{r}) &= -\frac{GM}{2R^3} \cdot 2x \\ K_x(\vec{r}) &= -\frac{GM}{R^3} x \\ K_y(\vec{r}) &= -\frac{GM}{R^3} y \\ K_z(\vec{r}) &= -\frac{GM}{R^3} z \\ \vec{K}(\vec{r}) &= \frac{GM}{R^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Potenciál gravitačního pole uvnitř homogenní koule má tvar paraboly s minimem v počátku. Intenzita gravitačního pole uvnitř homogenní koule lineárně vzrůstá se vzdáleností od jejího středu. Obě veličiny jsou spojité na povrchu koule, neboli jejich hodnota je stejná pro pole uvnitř i vně.

Výpočet přes vrstvy

Stejný výsledek bychom dostali opět postupem, kdybychom sčítali příspěvky od jednotlivých kulových slupek, tvořících kouli. Poloměr každé slupky je r , plošnou hustotu σ nahradíme hustotou ϱ a integraci přes slupky provedeme přidáním členu dr . Opět si můžeme naši kouli rozdělit na 2 oblasti. Vnitřní koule o poloměru z má potenciál gravitačního pole dle rovnice (3.4):

$$\varphi_1(z) = -\frac{4\pi G \varrho z^2}{3} \quad (3.14)$$

Potenciál gravitačního pole vnějších slupek, rovnice (2.13), zintegrujeme od z do R .

$$\varphi_2(z) = -\int_z^R 4\pi G \varrho r dr \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= -4\pi G \varrho \left[\frac{r^2}{2} \right]_z^R \\ \varphi_2(z) &= -2\pi G \varrho R^2 + 2\pi G \varrho z^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Celkový potenciál uvnitř homogenní koule je tedy:

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) \quad (3.17)$$

$$\varphi(z) = -\frac{4\pi G \varrho z^2}{3} - 2\pi G \varrho R^2 + 2\pi G \varrho z^2$$

$$\varphi(z) = -2\pi G \varrho \left(R^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \quad (3.18)$$

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{2R^3} (3R^2 - r^2) \quad (3.19)$$

Výsledky jsou opět shodné s předchozím vztahy (3.11) a (3.12).