# Příklad 5.1.

- dokonale pružná srážka => zákon zachování hybnosti (ZZH) ... VŽDY
  zákon zachování (mechanické) energie (ZZE) ... jen u pružných srážek

- ZZH:

$$p_0 = p$$

celková hybnost před srážkou — celková hybnost po srážce

$$m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot v = m_1 \cdot w - m_2 \cdot w \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m_1 - m_2}{m_2} w$$

- ZZE:

$$E_{k0} = E_k$$

celková kinetická energie před srážkou — celková kinetická energie po srážce

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_1 w^2 + \frac{1}{2} m_2 w^2$$

$$m_2 \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_2}\right)^2 w^2 = (m_1 + m_2)\, w^2 \qquad / \cdot m_2 / w^2$$

$$m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2 = m_1 m_2 + m_2^2$$

$$m_1^2 = 3 m_1 m_2$$

$$m_1 = 3 m_2$$

# Příklad 5.2.

ZZH: $$m_n u = -m_n v + M_C w \qquad (1)$$

ZZE: $$\frac{1}{2} m_n u^2 = \frac{1}{2} m_n v^2 + \frac{1}{2} M_C w^2 \qquad (2)$$

označení: $\frac{1}{2} m_n u^2 = E_0$ ... energie před srážkou (3)

$$m_n u = \sqrt{2E_0 m_n} \qquad \leftarrow (3)$$
$$M_C w = \sqrt{2E_0 m_n} + m_n v \qquad \leftarrow (1),(3)$$

$$\Rightarrow \quad E_0 = \frac{1}{2} m_n v^2 + \frac{1}{2M_C}\left(\sqrt{2E_0 m_n} + m_n v\right)^2$$

$$2E_0 M_C = m_n M_C v^2 + 2E_0 m_n + 2 m_n v \sqrt{2E_0 m_n} + m_n^2 v^2$$

$$\underline{v^2 (M_C + m_n) m_n + v\left(2 m_n \sqrt{2E_0 m_n}\right) + 2E_0 (m_n - M_C) = 0}$$

$$\rightarrow \quad v_{1/2} = \frac{1}{2 m_n (m_n + M_C)}\left[-2 m_n \sqrt{2E_0 m_n} \pm \sqrt{8E_0 m_n^3 + 8E_0 \cancel{m_n} (M_C^2 - m_n^2)}\right]$$

$$v_{1/2} = \frac{1}{2 m_n (m_n + M_C)}\left[-2 m_n \sqrt{2E_0 m_n} \pm 2\sqrt{2E_0 m_n}\sqrt{m_n^2 + M_C^2 - m_n^2}\right]$$

$$v_{1/2} = \frac{2\sqrt{2E_0 m_n}\,(-m_n \pm M_C)}{2 m_n (m_n + M_C)}$$

$$v_1 = \frac{2\sqrt{E_0 m_n}\,(-m_n - M_C)}{2 m_n (m_n + M_C)} = -u$$ ... nedošlo ke srážce!

$$v_2 = \frac{2\sqrt{2E_0 m_n}\,(-m_n + M_C)}{2m_n(m_n + M_C)} = \frac{M_C - m_n}{M_C + m_n}\sqrt{\frac{2E_0}{m_n}} = \frac{M_C - m_n}{M_C + m_n}\,u$$

označení: $E_1 = \frac{1}{2} m_n v_2^2$ ... energie po srážce

$$E_1 = \frac{1}{2} m_n u^2 \left(\frac{M_C - m_n}{M_C + m_n}\right)^2$$

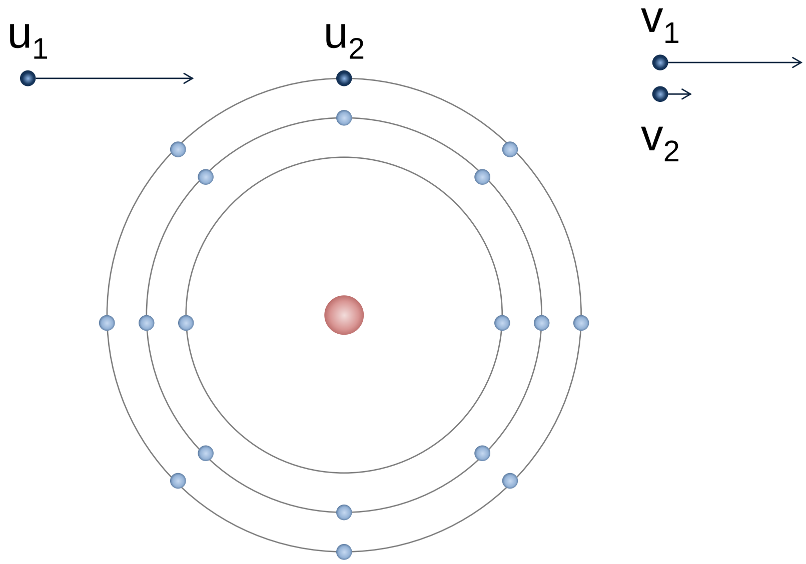
$$E_1 = E_0 \left(\frac{M_C - m_n}{M_C + m_n}\right)^2$$

přibližně: $M_C = 12\ \mu$, $m_n = 1\ \mu$ $\Rightarrow$ $E_1 = \left(\frac{11}{13}\right)^2 E_0 = \frac{121}{169} E_0 = 0{,}72\, E_0$

relativní atomové hmotnosti

# Příklad 5.3

**Zadání:** Elektron o kinetické energii $E$ se srazí s valenčním elektronem argonu a ionizuje jej. Při ionizaci se část energie nalétávajícího elektronu spotřebuje na uvolnění valenčního elektronu argonu. Jaké budou energie obou elektronů po srážce, je-li kinetická energie nalétávajícího elektronu přesně 4krát větší než ionizační energie $E_I$ argonu. Předpokládejte, že hybnost valenčního elektronu před srážkou je zanedbatelná ve srovnání s počáteční hybností nalétávajícího elektronu. Změnu hybnosti atomu argonu zanedbejte.




**Řešení:** Na celý proces ionizace argonu můžeme nahlížet jako na nepružnou srážku dvou elektronů. Platí zákon zachování hybnosti, celková hybnost soustavy se nemění.

$$\begin{aligned} p_0 &= p \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{aligned}$$

Indexem 1 a 2 jsme označili nalétávající resp. valenční elektron. Změnu hybnosti atomu argonu jsme dle zadání zanedbali. Ze zadání rovněž můžeme počáteční rychlost $u_2$ valenčního elektronu položit rovnu 0. Oba elektrony mají stejnou hmotnost $m_1 = m_2 = m_e$. Dohromady dostáváme ze zákona zachování hybnosti vztah:

$$u_1 = v_1 + v_2.$$

Při nepružné srážce se nezachovává kinetická energie, část kinetické energie $E$ nalétávajícího elektronu se spotřebuje na ionizaci valenčního elektronu danou ionizační energií $E_I$.

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_I \\ \frac{1}{2} m_e u_1^2 &= \frac{1}{2} m_e v_1^2 + \frac{1}{2} m_e v_2^2 + E_I \\ u_1^2 &= v_1^2 + v_2^2 + \frac{2E_I}{m_e} \end{aligned}$$

Ze zadání víme, že velikost ionizační energie $E_I$ je 4krát menší než počáteční kinetická energie elektronu $E$.

$$E_I = \frac{1}{4}E = \frac{1}{8}m_e u_1^2$$

Ze zákona zachování hybnosti si vyjádříme rychlost $v_2$ jako:

$$v_2 = u_1 - v_1$$

a dosadíme poslední dva vztahy zpět do zákona zachování energie.

$$\begin{aligned}
u_1^2 &= v_1^2 + u_1^2 - 2u_1 v_1 + v_1^2 + \frac{1}{4}u_1^2 \\
0 &= 2v_1^2 - 2u_1 v_1 + \frac{1}{4}u_1^2 \\
0 &= v_1^2 - u_1 v_1 + \frac{1}{8}u_1^2
\end{aligned}$$

Poslední kvadratická rovnice má dva kořeny:

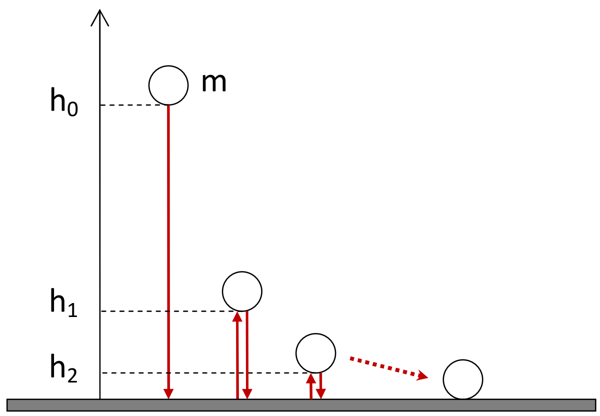
$$\begin{aligned}
v_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(u_1 \pm \sqrt{u_1^2 - \frac{1}{2}u_1}\right) \\
v_{1,2} &= \frac{1}{2}u_1\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
v_{1,2} &= u_1\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Řešením kvadratické rovnice jsme rovnou získaly obě výsledné rychlosti $v_1$ a $v_2$, neboť platí, že jejich součet je roven $u_1$. V důsledku principu nerozlišitelnosti nelze rozhodnout, který z elektronů má po srážce kterou rychlost, stejně jako nejde rozhodnout, který z elektronů byl před srážkou nalétávajícím elektronem a který elektronem valenčním. Spočítejme konečné kinetické energie $E_1$ a $E_2$ obou elektronů.

$$\begin{aligned}
E_{1,2} &= \frac{1}{2}m_e v_{1,2}^2 \\
E_{1,2} &= \frac{1}{2}m_e u_1^2\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \\
E_{1,2} &= \frac{1}{2}m_e u_1^2\left(\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8}\right) \\
E_{1,2} &= \left(\frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}\right)E
\end{aligned}$$

# Příklad 5.4

**Zadání:** Ocelovou kouli o hmotnosti $m = 1$ kg pustíme z výšky $h_0 = 1$ m a necháme dopadnout na pevnou podložku. Koule se odrazí a vystoupá do výšky $h_1 = 30$ cm. Když uděláme totéž s olověnou koulí o stejné hmotnosti, tak vystoupá jenom do výšky $h_1' = 2$ cm. Jaká část energie koule $\varepsilon$ se při dopadu spotřebovala na deformaci koule a podložky anebo se přeměnila na teplo? Jaká je celková dráha $s$ (tj. celková délka trajektorie) ocelové a olověné koule? Jakou celkovou práci $W$ vykonala tíhová síla při pohybu ocelové a olověné koule?




b

**Řešení:** Uvážíme-li, že ve výšce $h_1$ a $h_2$ koule stojí, tj. jejich kinetická energie je nulová, pak lze zapsat zákon zachování energie ve tvaru:

$$\begin{aligned} E_{p0} &= E_{p1} + Q \\ mgh_0 &= mgh_1 + Q, \end{aligned}$$

kde $Q$ je energie spotřebovaná na deformaci koule a teplo a představuje energetické ztráty v průběhu nepružné srážky. Pro poměr $\varepsilon$ energie $Q$ a počáteční energie $E_{p0}$ potom platí:

$$\varepsilon = \frac{mgh_0 - mgh_1}{mgh_0} = \frac{h_0 - h_1}{h_0} = 1 - \frac{h_1}{h_0}.$$

Po dosazení hodnot ze zadání dostaneme, že u ocelové koule se spotřebuje 70% energie, v případě olověné koule 98% energie.

Výsledná délka trajektorie $s$ je dána jako součet drah $h_0$ (dolů), $h_1$ (nahoru), $h_1$ (dolů), $h_2$ (nahoru), $h_2$ (dolů) atd. (viz obrázek). Sousední výšky $h_i$ a $h_{i+1}$ jsou ovšem ve vzájemném poměru $\eta = 1 - \varepsilon$. Výsledná dráha $s$ je tedy:

$$\begin{aligned} s &= h_0 + 2h_1 + 2h_2 + ... = -h_0 + 2\sum_{i=0}^{\infty} h_i \\ s &= -h_0 + 2\sum_{i=0}^{\infty} h_0\eta^i = -h_0 + 2h_0\frac{1}{1-\eta} \\ s &= h_0\left(-1 + \frac{2}{1-\eta}\right) = h_0\frac{1+\eta}{1-\eta} \\ s &= h_0\frac{h_0 + h_1}{h_0 - h_1}, \end{aligned}$$

kde ve druhé rovnici jsme využili znalosti součtu geometrické řady. Číselně je délka dráhy pro ocelovou kouli rovna 13/7 m, pro olověnou kouli 51/49 m.

Práce, kterou vykoná tíhová síla, je při dopadu kuličky z výšky $h_0$ na podložku je $A = mgh_0$, protože tíhová síla je konstantní a má směr tečny k pohybu. Po odrazu kuličky je při jejím pohybu do výšky $h_1$ práce $mgh_1$ záporná a je stejně velká jako práce, kterou tíhová síla vykoná, když kuličku stáhne z výšky $h_1$ zpět na podložku. Takže tyto dva příspěvky se navzájem odečtou. Podobně při každém dalším odrazu. Výsledná celková práce, kterou vykonala tíhová síla, je tedy $A = mgh_0$, číselně 9.81 J.

# Příklad 5.5

**Zadání:** Světový rekord v hodu oštěpem je $L_o = 98.48$ m, diskem $L_d = 74.08$ m a koulí $L_k = 23.12$ m. Hmotnost oštěpu je 800 g, disku 2 kg a koule 7.26 kg. Jaká byla práce vykonaná sportovcem při světovém rekordu v hodu oštěpem, diskem a koulí? Předpokládejte, že atlet hodil svoje nářadí pod úhlem $\alpha = 45°$, aby dolétlo nejdále. Odpor vzduchu zanedbejte.

**Řešení:** Práce $W$, kterou atlet vykonal je rovna celkové mechanické energii vrženého předmětu. Ta má nejjednodušší tvar v počátečním a koncovém bodě vrhu, kdy je potenciální energie nulová:

$$W = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

je tedy nutné vyjádřit neznámý kvadrát počáteční rychlosti $v_0$ ze znalosti délky vrhu $L$.

Pohybové rovnice pro šikmý vrh mají následující tvar:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -mg. \end{aligned}$$

Obecné řešení těchto rovnic po dosazení hodnoty úhlu, pod kterým byl předmět vržen, $\alpha = 45°$ a nulových počátečních poloh $x_0$ a $y_0$ je:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t \\ y(t) &= y_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

V bodě kdy se vržený předmět dotkne Země je hodnota $y$ nulová:

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Poslední rovnice má dva kořeny $t_0 = 0$ a $t_L$ odpovídající vrhu předmětu resp. jeho dopadu.

$$t_L = \frac{\sqrt{2}v_0}{g}$$

Délka vrhu je potom rovna hodnotě funkce $x(t)$ v čase $t_L$:

$$L = x(t_L) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 t_L = \frac{v_0^2}{g}.$$

Dosadíme-li do zákona zachování energie, dostaneme konečný výsledek. Číselně je vykonaná práce 386.6 J pro hod oštěpem, 727.0 J pro hod diskem a 823.6 J pro vrh koulí.

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgL$$

Stejného výsledku je možné dosáhnout také skrze úvahu o výšce výstupu $H$. V nejvyšším bodě je celková energie rovna součtu potenciální energie ve výšce $H$ a kinetické energie odpovídající rovnoměrnému pohybu ve směru osy $x$.

$$W = mgH + \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = mgH + \frac{1}{4}mv_0^2$$

V maximální výšce je rychlost $v_y$ nulová a lze si vyjádřit dobu výstupu $t_H$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 - gt \\ t_H &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v_0}{g}. \end{aligned}$$

Výšku výstupu dostaneme, dosadíme-li do trajektorie $y(t)$ za čas dobu $t_H$:

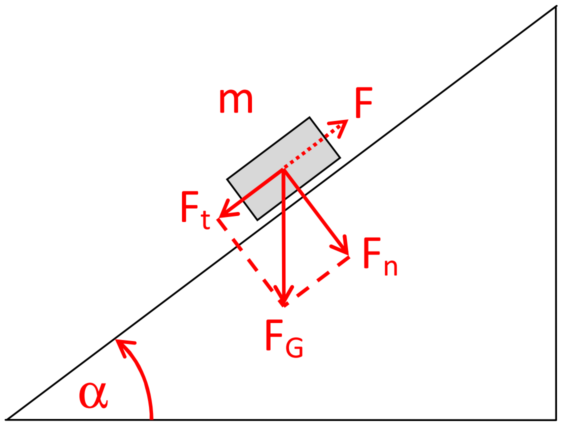
$$H = y(t_H) = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t_H - \frac{1}{2} g t_H^2 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{4g} = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Dohromady po dosazení do vztahu pro práci dostáváme stejný výsledek jako v předchozím případě, což pouze potrvrzuje, že během pohybu vrženého předmětu se celková mechanická energie zachovává.

$$W = mg\frac{v_0^2}{4g} + \frac{1}{4} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} mgL$$

# Příklad 5.6

**Zadání:** Automobil o hmotnosti $m = 1.2$ t má motor o maximálním výkonu $P_{max} = 63$ kW. Při pohybu po rovině konstantní rychlostí $v = 50$ km/h vyvíjí motor výkon pouze $P_r = 15$ kW. Určete největší stoupání silnice (tj. úhel $\alpha$, který svah svírá s vodorovným směrem), na němž se automobil může pohybovat touto rychlostí za předpokladu, že odporové síly nezávisí na velikosti stoupání.




**Řešení:** Při maximální možné velikosti stoupání $\alpha$ využije automobil veškerý maximální výkon $P_{max}$. Přitom jeho část o velikosti $P_r$, která nezávisí na velikosti stoupání, spotřebuje na překonání odporových sil jako jsou např. tření a odpor vzduchu. Zbylou část výkonu $P_\alpha$ závislou na velikosti stoupání $\alpha$ spotřebuje automobil na překonání tečné složky tíhové síly.

$$P_{max} = P_r + P_\alpha$$

Aby se automobil pohyboval konstantní rychlostí $v$, musí být výslednice působících sil nulová. Na automobil tedy musí působit vedle tíhové síly ještě síla $F$ o stejné velikosti a opačném směru, jako má tečná složka tíhové síly $F_t$, viz obrázek. Výkon $P_\alpha$ je tedy roven součinu síly $F$ a rychlosti $v$.

$$\begin{aligned} P_{max} &= P_r + mgv \sin\alpha \\ \sin\alpha &= \frac{P_{max} - P_r}{mgv} \end{aligned}$$

Velikost maximálního stoupání silnice je 17°.

# Příklad 5.7.

$$F = m a_d = F_G + F_S$$

$F$ … síla, působící na kuličku

$a_d$ … dostředivá síla … zakřivuje trajektorii

$F_G$ … tíhová síla

$F_S$ … síla, kterou působí stěna na kuličku

$$F_K = -F_S \quad \text{(3. Newtonův zákon)}$$

$F_K$ … síla, kterou kulička působí na stěnu

$$F_K = -mg \quad \Rightarrow \quad m a_d = mg + mg$$

$-mg$ … ze zadání

$$a_d = 2g$$

$$a_d = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR$$

zákon zachování energie:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + 2mgR$$

$v_0$ … rychlost na rovince

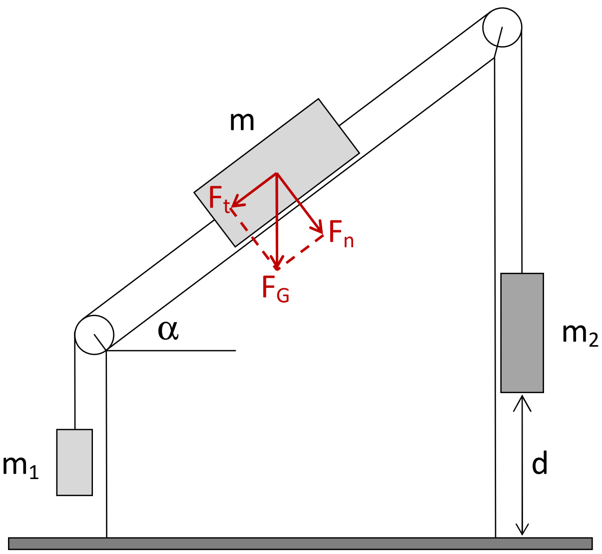
$v$ … rychlost v horním bodě

$$v_0^2 = 6gR$$

$$v_0 = \sqrt{6gR} = 10{,}8 \ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

# Příklad 5.8

**Zadání:** Hranol o hmotnosti $m$ klouže po nakloněné rovině a je spojen nehmotnými lany se dvěma závažími $m_1$ a $m_2$, které visí na dvou kladkách podle obrázku. Kinematický koeficient smykového tření je $f$. Závaží $m_2$ je těžší a je zavěšeno ve výšce $d$ nad zemí. Vypočtěte zrychlení závaží $m_2$ a čas, za který dopadne na zem.




**Řešení:** Výsledná síla $F$ působící na závaží $m_2$ je rovna součtu 4 sil: $F_1$ tíhová síla působící na závaží $m_1$, $F_2$ tíhová síla působící na závaží $m_2$, tečná složka tíhové síly $F_t$ působící na závaží $m$ a třecí síla $F_s$ působící smykovým třením proti pohybu závaží $m$. Z obrázku je patrné, že pro velikosti sil musí platit:

$$\begin{aligned} F &= F_2 - F_1 - F_t - F_s \\ F_1 &= m_1 g \\ F_2 &= m_2 g \\ F_t &= mg \sin\alpha \\ F_s &= f F_n = mgf \cos\alpha, \end{aligned}$$

kde velikost třecí síly je rovna součinu kinematického koeficientu smykového tření $f$ a normálové složky tíhové síly $F_n$.

Celá soustava závaží o celkové hmotnosti $M = m_1 + m_2 + m$ se bude pohybovat se zrychlením $a$. Neboli:

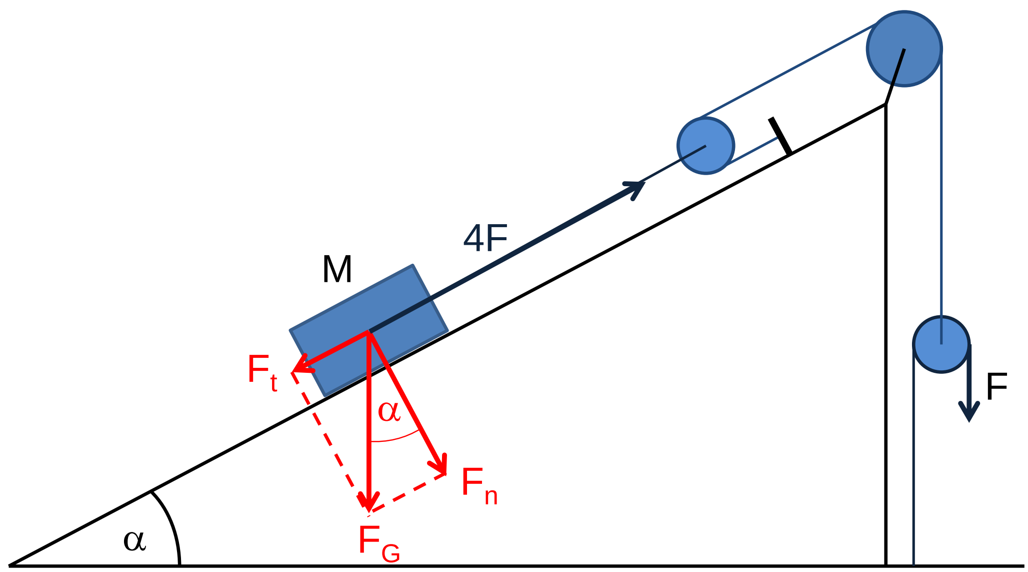
$$\begin{aligned} F &= Ma \\ a &= g\,\frac{m_2 - m_1 - m\sin\alpha - mf\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m}. \end{aligned}$$

Pro dráhu $d$ rovnoměrně zrychleného pohybu platí $d = \frac{1}{2}aT^2$. Výsledná doba $T$, za kterou dopadne závaží na zem je tedy rovna:

$$T = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g}\frac{m_1 + m_2 + m}{m_2 - m_1 - m\sin\alpha - mf\cos\alpha}}.$$

# Příklad 5.9

**Zadání:** Těleso o hmotnosti $M = 10$ kg umístíme na nakloněnou rovinu se sklonem $\alpha = 40°$ a přes kladkostroj na něj působíme silou $F$, viz obrázek. (a) Jaká je minimální velikost síly $F$, aby byla celá soustava v rovnováze? (b) Jaké bude zrychlení tělesa $M$ (velikost a směr), pokud síla $F = 8$ N a koeficient smykového tření mezi tělesem $M$ a rovinou $f = 0.3$? Hmotnost všech vláken a kladek zanedbejte.




**Řešení:** Nejprve rozeberme všechny síly, které působí v těžišti tělesa $M$. Tíhovou sílu $F_G$ můžeme rozložit na tečnou složku $F_t$ a normálovou složku $F_n$.

$$\begin{aligned} F_G &= Mg \\ F_t &= F_G \sin\alpha = Mg \sin\alpha \\ F_n &= F_G \cos\alpha = Mg \cos\alpha \end{aligned}$$

Silou $F$ působíme na těleso přes 2 volné a jednu pevnou kladku. Jak víme, síla působící na volnou kladku je dvojnásobná oproti síle působící na jejím kraji. Dohromady tedy působí ještě na těleso v tečném směru síla o velikosti $4F$. Velikost třecí síly $F_s$ je dána jako součin velikosti normálové síly $F_n$ a koeficientu smykového tření $f$, přičemž její směr je vždy opačný než je směr pohybu.

Uvažujme nejprve pohyb tělesa po nakloněné rovině směrem vzhůru. 2. Newtonův zákon má tvar:

$$\begin{aligned} Ma &= 4F - F_t - F_s \\ Ma &= 4F - Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha. \end{aligned}$$

Při nulovém zrychlení tělesa dostáváme maximální sílu F:

$$F_{max} = \frac{Mg}{4}\left(\sin\alpha + f\cos\alpha\right).$$

Při pohybu tělesa po nakloněné rovině směrem dolů má 2. Newtonův zákon tvar:

$$\begin{aligned} Ma &= F_t - F_s - 4F \\ Ma &= Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha - 4F. \end{aligned}$$

Pro nulové zrychlení tělesa dostáváme minimální sílu F:

$$F_{min} = \frac{Mg}{4}\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right).$$

Pokud bude velikost působící síly ležet v intervalu hodnot od $F_{min}$ do $F_{max}$, bude zrychlení tělesa nulové a soustava bude v rovnováze. V důsledku statického tření může tedy síla $F$ nabývat více různých hodnot a podmínka rovnováhy bude stále splněna.

$$\begin{aligned} F &\in [F_{min}, F_{max}] \\ F &\in [10.1\ \mathrm{N}, 21.4\ \mathrm{N}] \end{aligned}$$

Síla o velikosti 8 N je menší než $F_{min}$. Těleso se tudíž bude pohybovat směrem dolů se zrychlením $a$ o velikosti 0.85 m s$^{-2}$:

$$\begin{aligned} Ma &= Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha - 4F, \\ a &= g\sin\alpha - gf\cos\alpha - \frac{4F}{M}. \end{aligned}$$