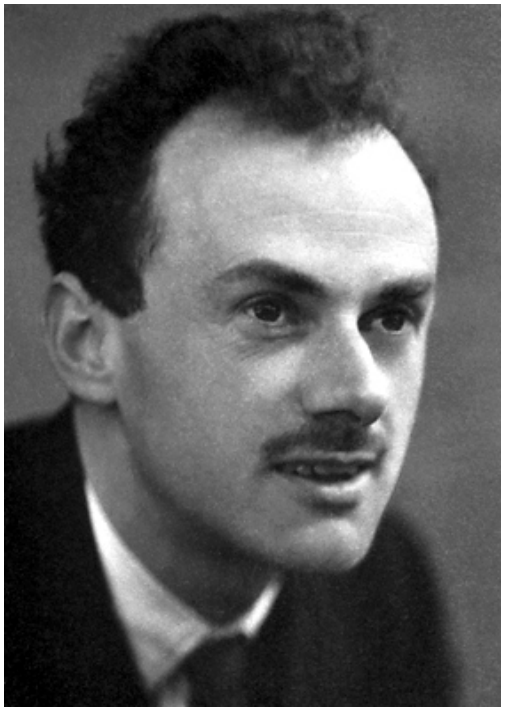
Pozitron – teoretická předpověď

Diracova rovnice: $\left(\boldsymbol{\alpha}\,\hat{\mathbf{p}}\,c+\beta\,mc^2\right)\psi\left(\mathbf{x},t\right)=i\hbar\dfrac{\partial\psi\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t}$

- snaha popsat relativisticky pohyb elektronu
- řešení s negativní energií → vakuum je Diracovo moře elektronů
- pozitrony → díry ve vaku

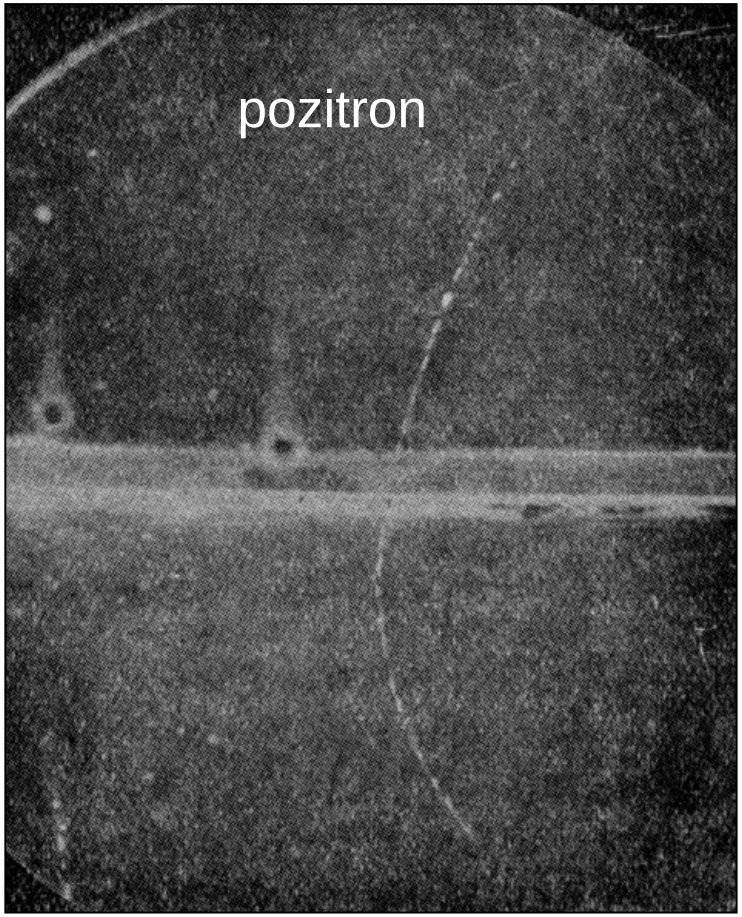


Paul Adrien Maurice Dirac
1933 Nobelova cena

P.A.M. Dirac: The Quantum Theory of the Electron, Proc. R. Soc. Lond. A 117, 610-624 (1928)
P.A.M. Dirac: A Theory of Electrons and Protons, Proc. R. Soc. Lond. A 126, 360-365 (1930)
P.A.M. Dirac: Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, Proc. R. Soc. Lond. A 133, 60-72 (1931)

Pozitron – experiment

objev pozitronu 1932

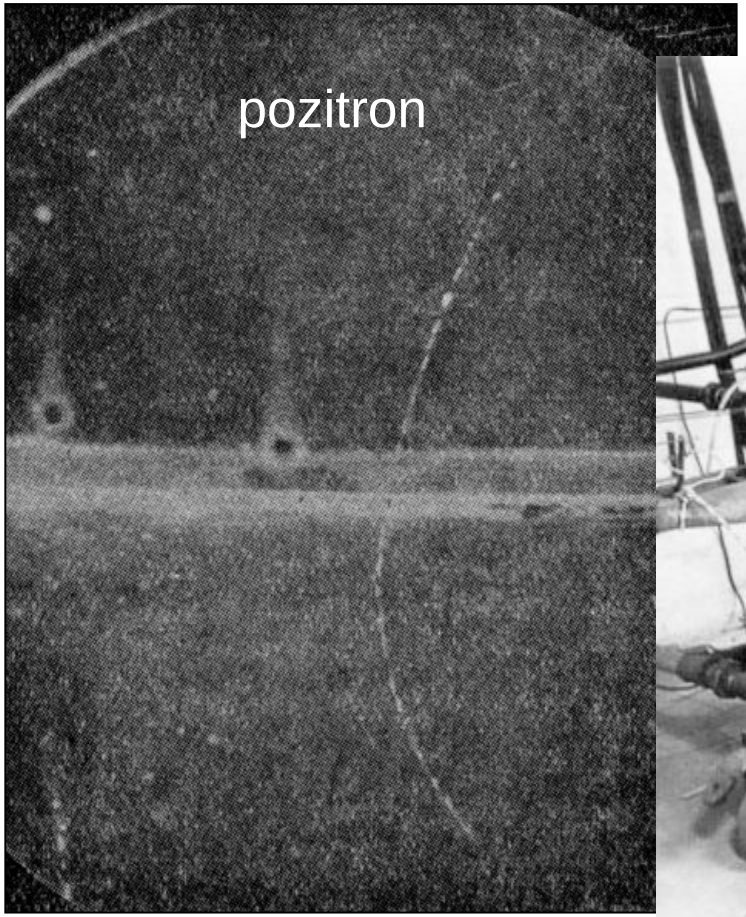


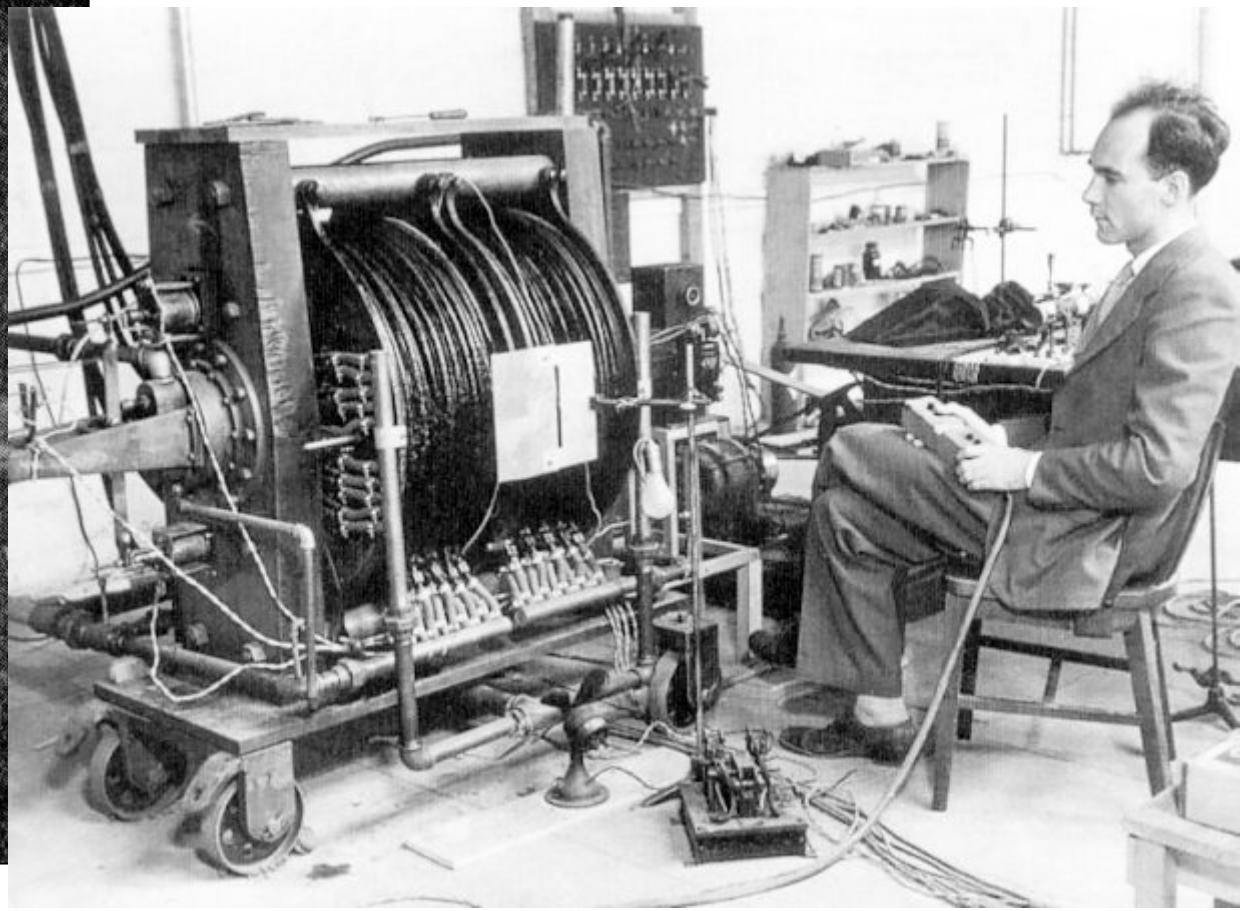
Carl David Anderson

1936 Nobelova cena

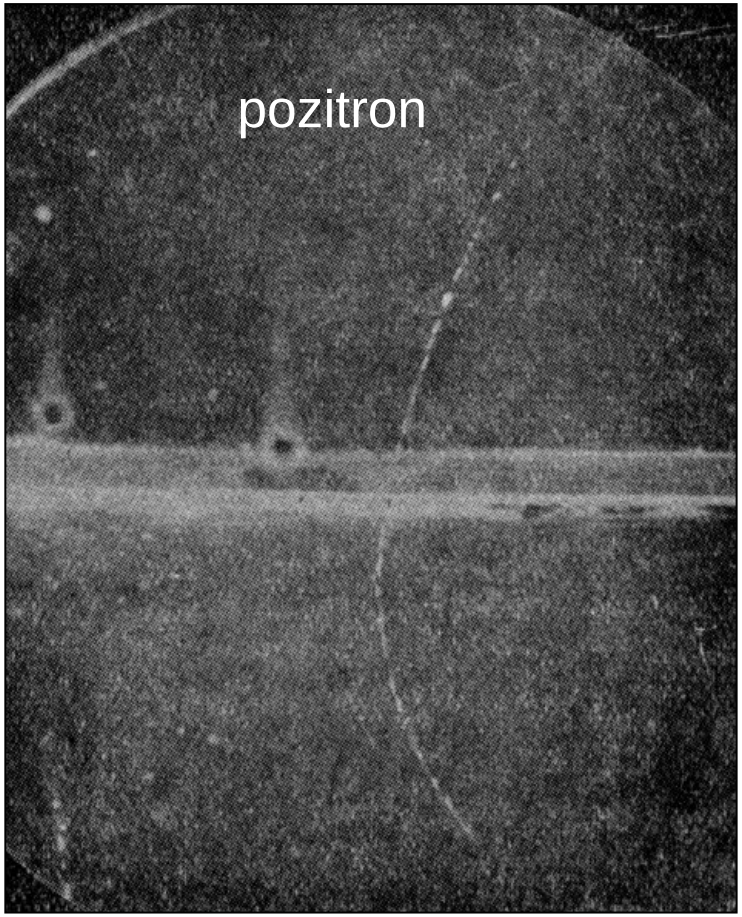
Pozitron - experiment

objev pozitronu 1932





Pozitron



pozitron = antičástice elektronu

- klidová hmotnost: m_e
- náboj: $+e$
- spin: 1/2

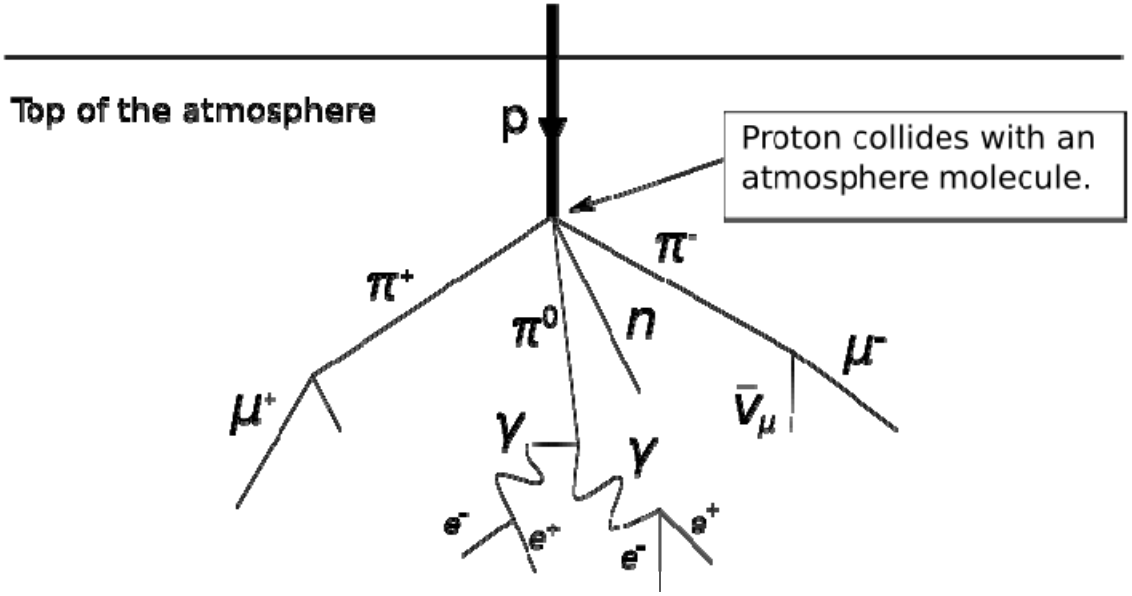
Zdroje pozitronů

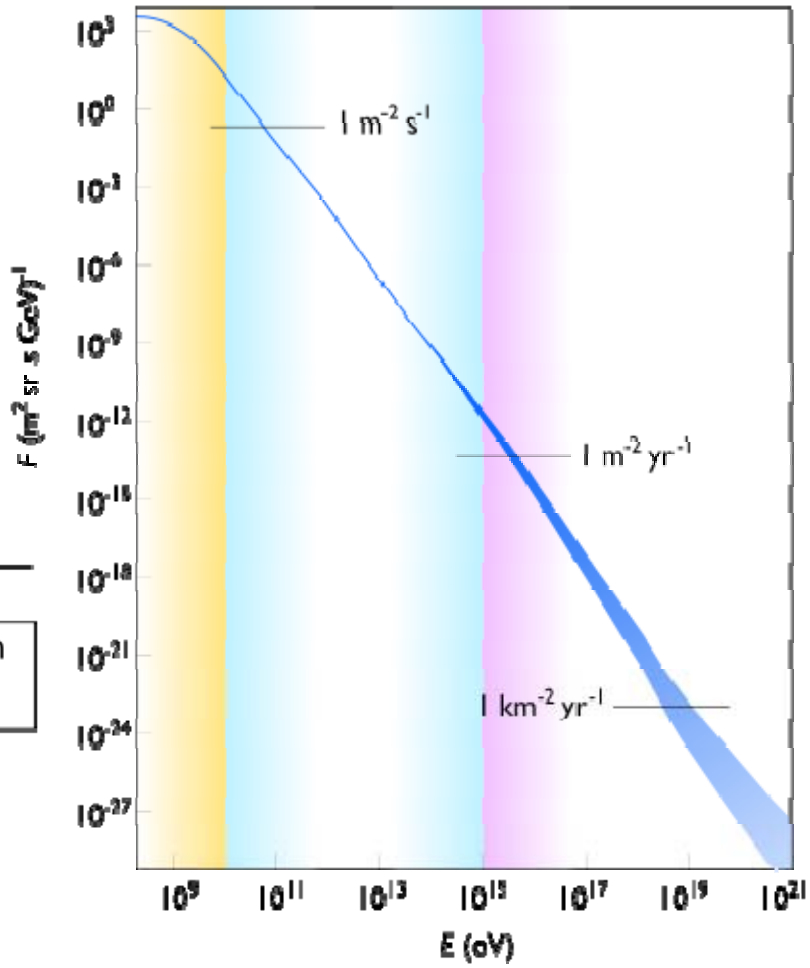
kosmické záření

90 % protony

9 % α-částice

1 % elektrony (a ostaní částice e^+, p^-)



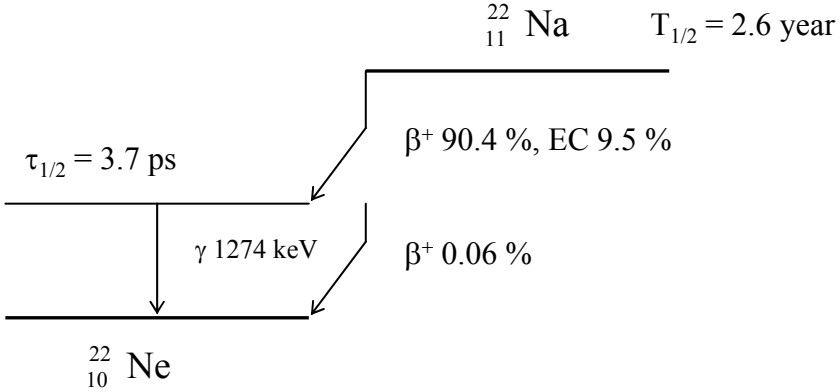


Zdroje pozitronů

β^+ - rozpad

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + e^{+} + \nu_e $$

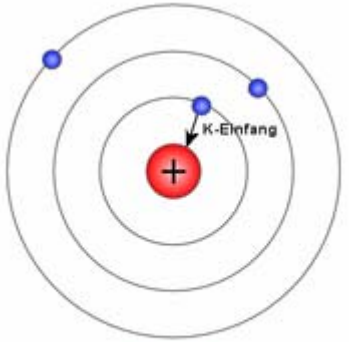
$$ {}^{22}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + \mathrm{e}^{+} + \upsilon_e $$



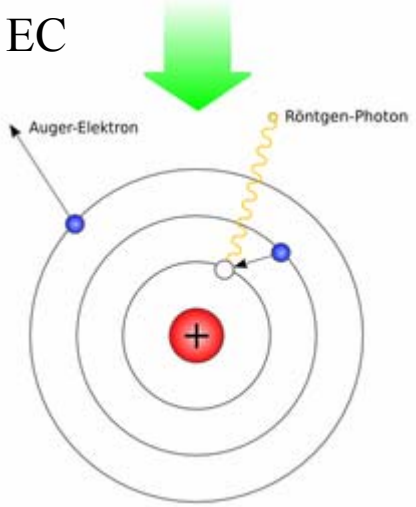
záchyt e^-

$$ {}^{A}_{Z}X + e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + \nu_e $$

$$ {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + \upsilon_e $$



- pro $Q < 2m_e c^2$ pouze EC



Zdroje pozitronů

β^+ - zářiče

- branching ratio (β^+ vs EC)
- E_{max} (tj. Q-value)
- poločas rozpadu $T_{1/2}$
- sekundární foton

Isotope	$T_{1/2}$	e^+ yield	E_{max} (MeV)	secondary γ	E_γ (MeV)
^{11}C	20.33 min	0.98	0.45	0	-
^{13}N	9.96 min	1	1.20	0	-
^{15}O	123 s	1	1.74	0	-
^{18}F	110 min	0.97	0.64	0	-

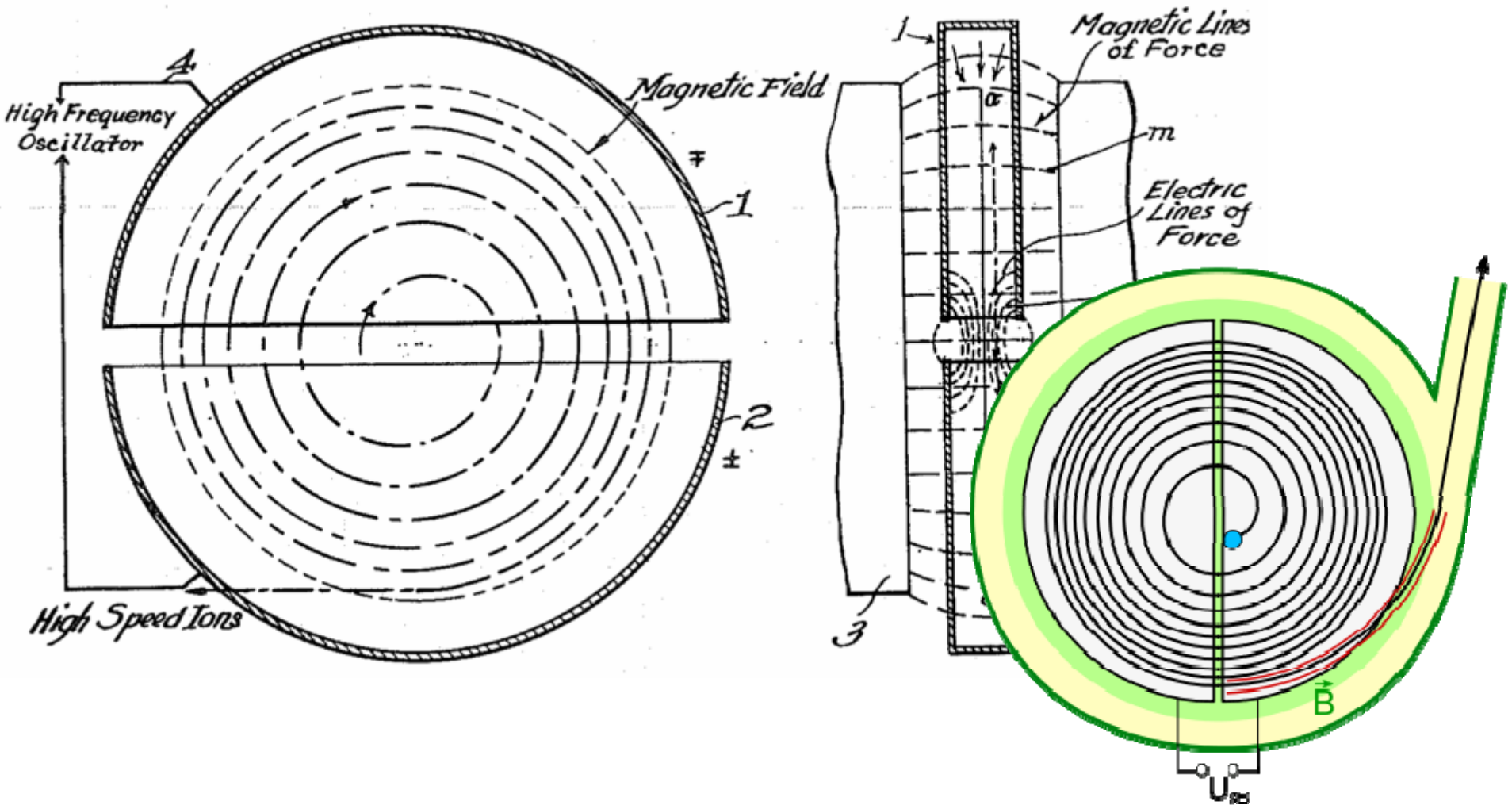
- příprava v cyklotronu

$$^{1}H + ^{16}O \rightarrow ^{13}N + ^{4}He$$

protony urychlené na T = 5.2 MeV

Zdroje pozitronů

cyklotron



Zdroje pozitronů

cyklotron

UJV Řež: cyklotron U-120M, p^+, $T = 5.4 – 38$ MeV

Siemens Eclipse,
negativní ionty 11 MeV
výroba ^{18}F, ^{11}C, ^{13}N, ^{15}O, ^{64}Cu

Zdroje pozitronů

LINAC

AccSyS Technology
p^+ 7 MeV
výroba ^{18}F, ^{11}C, ^{13}N, ^{15}O

Zdroje pozitronů

β^+ - zářiče

- branching ratio (β^+ vs EC)
- E_{max} (tj. Q-value)
- poločas rozpadu $T_{1/2}$
- sekundární foton

isotope	$T_{1/2}$	e^+ yield	E_{max} (MeV)	secondary γ per e^+	E_γ (MeV)
^{11}C	20.33 min	0.98	0.96	0	-
^{13}N	9.96 min	1	1.20	0	-
^{15}O	123 s	1	1.74	0	-
^{18}F	110 min	0.97	0.64	0	-
^{22}Na	2.6 y	0.9	0.545	1	1.274
^{26}Al	8×10^5 y	0.85	1.17	1	1.81
^{44}Ti	47 y	0.94	1.47	1	1.156
^{64}Cu	12.7 h	0.178	0.653	0	-
^{68}Ge	275 d	0.88	1.90	0.02	1.078
^{82}Sr	23.4 d	1	3.38	0	-

Zdroje pozitronů

^{64}Cu

- záchyt e^- (43.8 %)

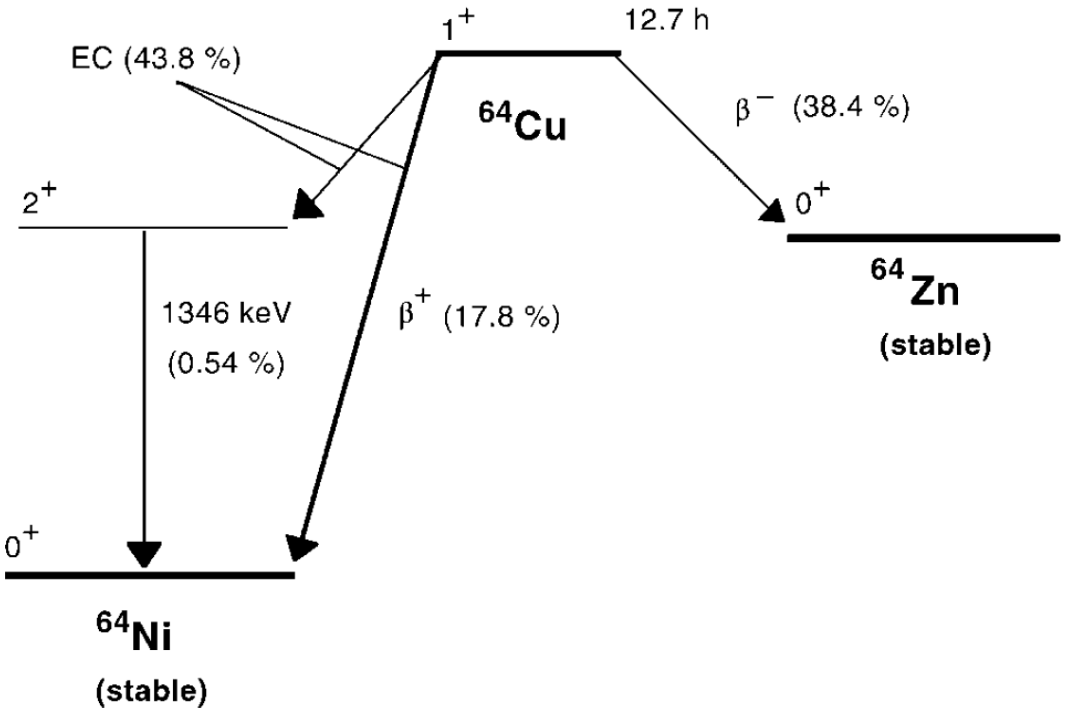
$$^{64}_{29}\mathrm{Cu} + e^- \rightarrow ^{64}_{28}\mathrm{Ni} + \nu_e$$

- β^+ rozpad (17.8 %)

$$^{64}_{29}\mathrm{Cu} \rightarrow ^{64}_{28}\mathrm{Ni} + e^+ + \nu_e$$

- β^- rozpad (38.4 %)

$$^{64}_{29}\mathrm{Cu} \rightarrow ^{64}_{30}\mathrm{Zn} + e^- + \overline{\nu}_e$$



Zdroje pozitronů

^{68}Ge / ^{68}Ga generátor

rozpad ^{68}Ge ($T_{1/2}$ = 275 d):

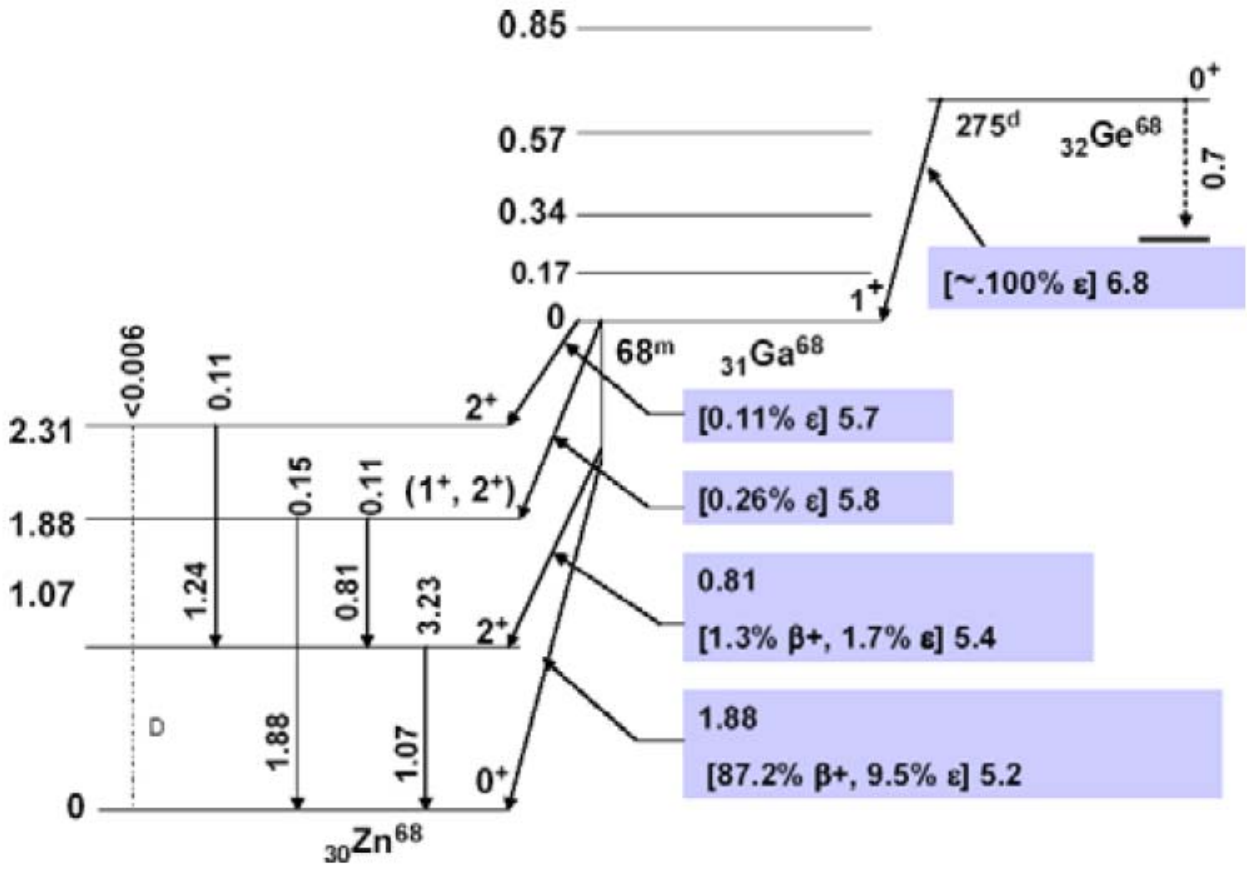
• záchyt e^- (100 %)

$$^{68}_{32}\mathrm{Ge} + e^- \rightarrow {}^{68}_{31}\mathrm{Ga} + \nu_e$$

rozpad ^{68}Ga ($T_{1/2}$ = 68 min):

• β^+ rozpad (87.2 %)

$$^{68}_{31}\mathrm{Ga} \rightarrow {}^{68}_{30}\mathrm{Zn} + e^+ + \nu_e$$



Zdroje pozitronů

příprava ^{68}Ge

cyklotron

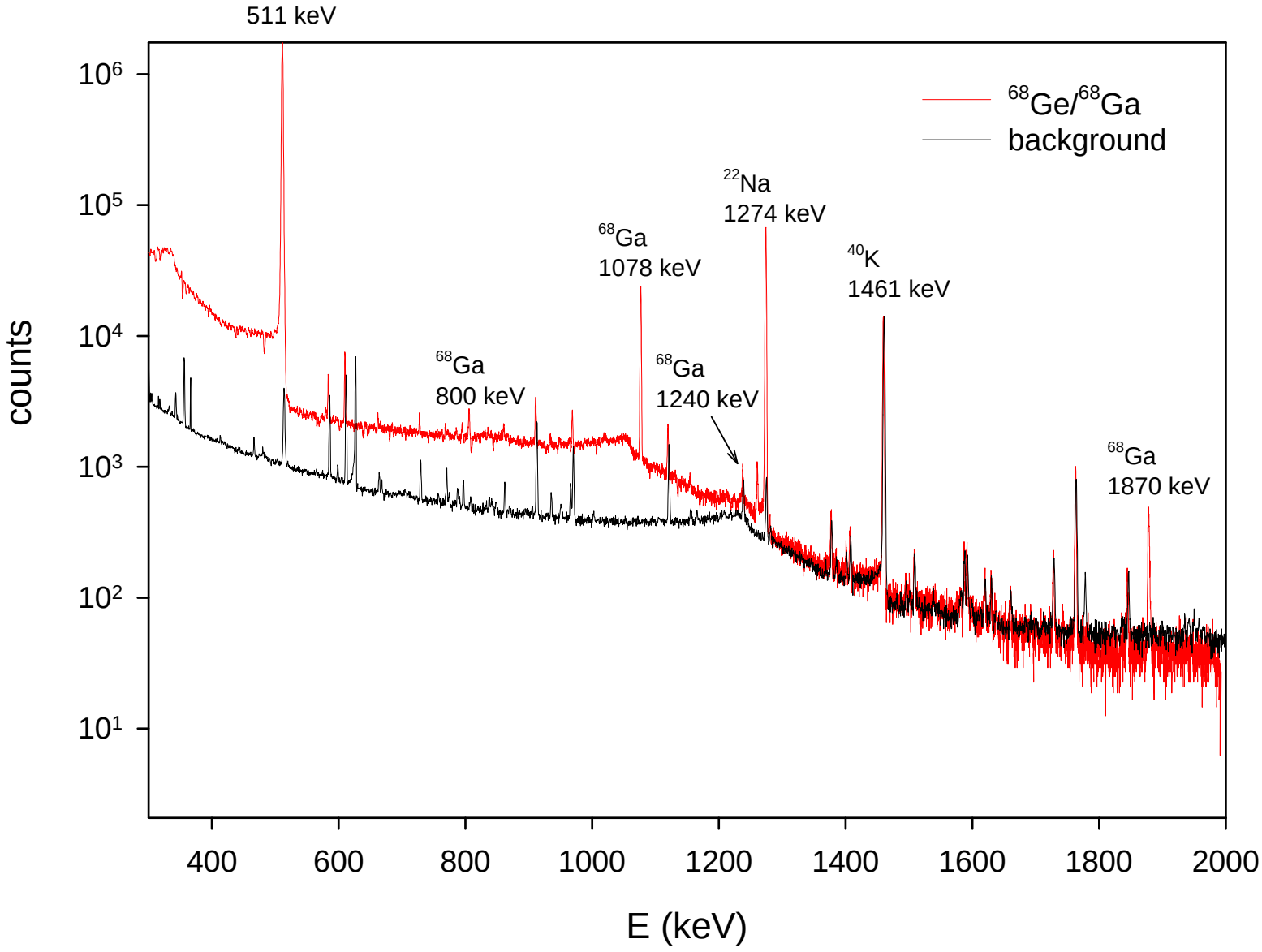
$$^{2}_{1}\mathrm{D} + ^{69}_{31}\mathrm{Ga} \rightarrow ^{68}_{32}\mathrm{Ge} + 3n$$

- D ionty urychlené na $T \geq 14$ MeV
- maximální účinný průřez pro $T = 27$ MeV: $\sigma = 550$ mBarn

$$^{2}_{1}\mathrm{D} + ^{69}_{31}\mathrm{Ga} \rightarrow ^{69}_{32}\mathrm{Ge} + 2n$$

- pro $T = 27$ MeV $\sigma = 1650$ mBarn
- doba života ^{69}Ge je $T_{1/2} = 39$ h

Zdroje pozitronů – $^{68}Ge/^{68}Ga$



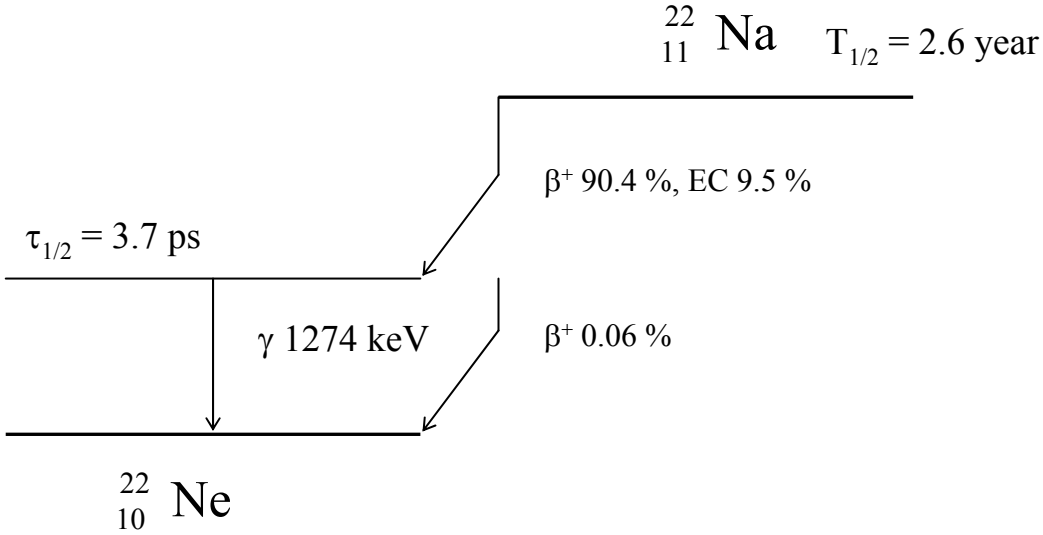
Zdroje pozitronů

^{22}Na

- β^+ rozpad, $T_{1/2} = 2.6$ y

$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + e^+ + \nu_e$$

- sekundární γ 1274 MeV



Zdroje pozitronů

příprava ^{22}Na

- cyklotron, p^+, $T = 66$ MeV

$$p^+ + {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{22}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} + n$$

$${}^{22}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + e^+ + \nu_e$$

National Research Foundation | iThemba LABS Laboratory for Accelerator Based Sciences

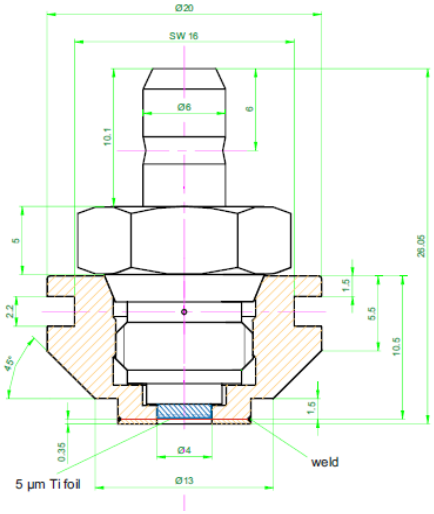
Zdroje pozitronů

příprava ^{22}Na

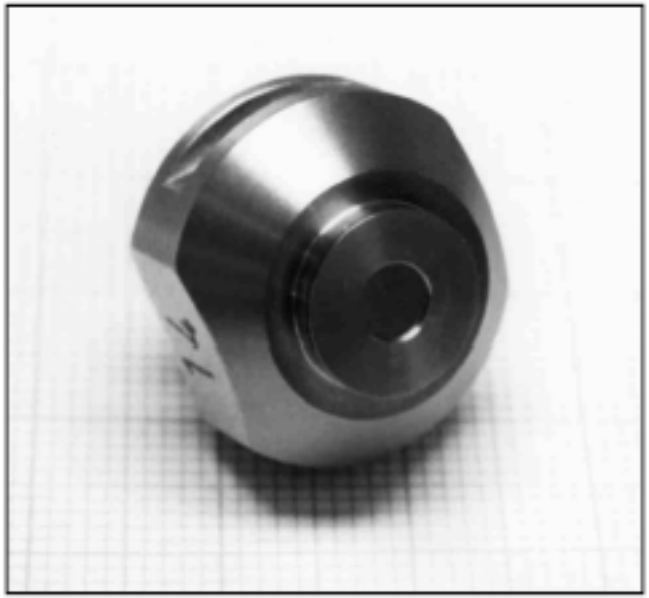
- cyklotron, p^+, $T = 66$ MeV

$$p^+ + {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{22}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} + n$$

$${}^{22}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + e^+ + \nu_e$$

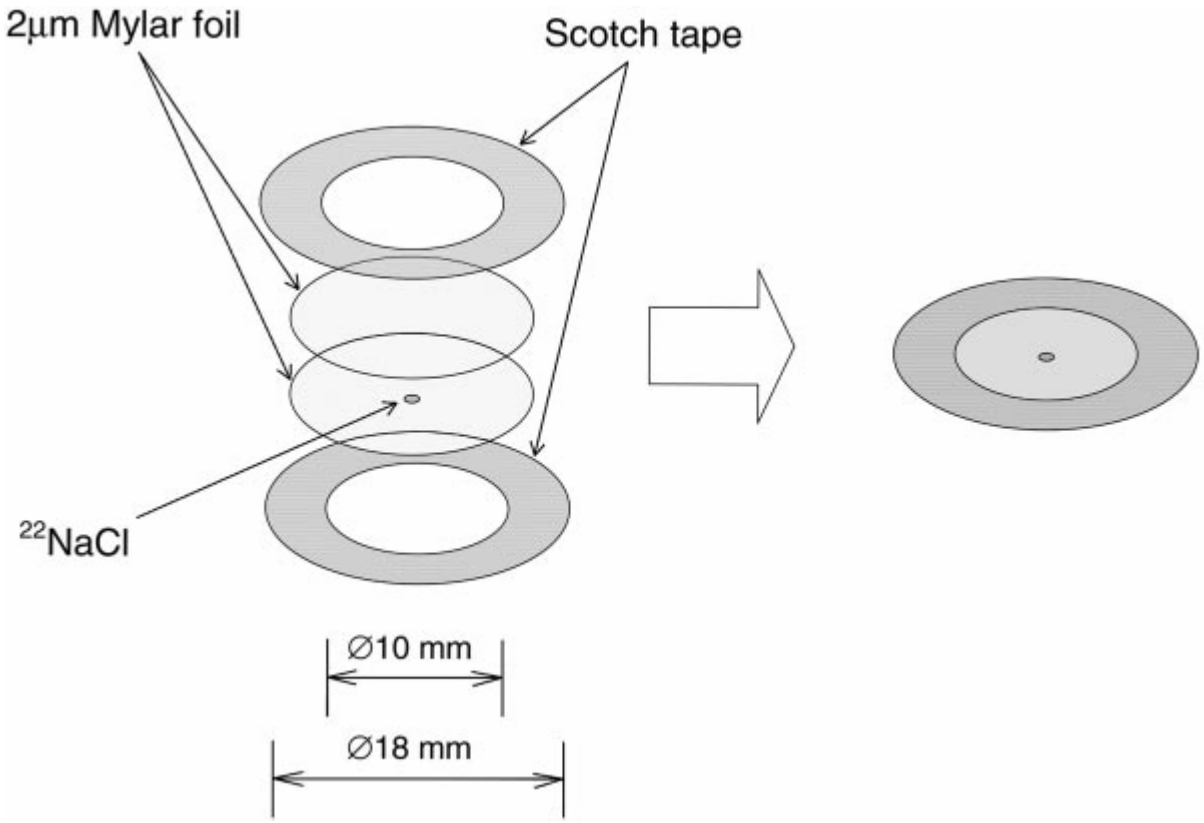


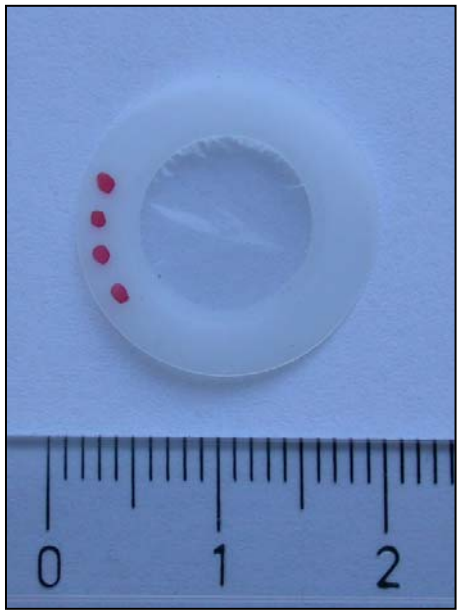
National Research Foundation | iThemba LABS Laboratory for Accelerator Based Sciences



Zdroje pozitronů

^{22}Na pozitronový zdroj





Hloubka průniku pozitronů

pozitrony emitované β^+ zářičem

pravděpodobnost, že pozitron pronikne do hloubky z $\quad P(z) = \alpha\, e^{-\alpha z}$

$$\alpha\left[\mathrm{cm}^{-1}\right] = 16\,\frac{\rho\left[\mathrm{g\,cm}^{-3}\right]}{E_{\max}^{1.4}\left[\mathrm{MeV}\right]}$$

ρ – hustota materiálu

$E_{\max} = 0.545\,\mathrm{MeV}$ (pro ^{22}Na)

střední hloubka průniku $\quad \int_0^\infty z\,P(z)\,dz = \frac{1}{\alpha}$

Příklad:

Mg: α^{-1} =154 μm

Al: α^{-1} = 99 μm

Cu: α^{-1} = 30 μm

Termalizace pozitronu

• rychlost ztáty energie při pronikání do materiálu (stopping power): $S = -\frac{dE}{dx}$

• **doba termalizace:**

$$\left.\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{v} \\ v &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \end{aligned}\right\} \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E}} = -\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dE}{S\sqrt{E}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{E_i}^{E_f}\frac{dE}{S\sqrt{E}}$$

Termalizace pozitronu

- snížení kinetické energie pozitronu 100 keV $\rightarrow$ kT = 0.03 eV
- ***E* > 100 eV:**
  - nepružné srážky a elektrony
  - elastický rozptyl na jádrech atomů
- **0.1 eV < *E* < 100 eV:**
  - excitace elektronů
- ***E* < 0.1 eV:**
  - rozptyl na fononech

Termalizace pozitronu

- ***E* > 100 eV:**
  - nepružné srážky a elektrony
  - elastický rozptyl na jádrech atomů

$$t_s = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{E_i}^{E_m} \frac{dE}{S_S \sqrt{E}}$$

  - pro $E_m \sim 100$ eV

$$t_s\left[\mathrm{ps}\right] = \frac{17.2}{\rho\left[\mathrm{g\,cm^{-3}}\right]} E_{\max}^{1.2}\left[\mathrm{MeV}\right] \qquad t_s \leq 1\,\mathrm{ps}$$

ρ – hustota
$E_{\max}$ = maximální kinetická energie e^+

Termalizace pozitronu

- **0.1 eV < *E* < 100 eV:**
  - excitace elektronů
  - kovy – excitace vodivostních e^-

$$S_R = \frac{2\pi}{105}\frac{m_e}{\hbar}\sqrt{\frac{2}{m_e}}\frac{E^{5/2}}{E_F}$$

$$t_R = -\sqrt{\frac{m_e}{2}}\int_{E_m}^{E_c}\frac{dE}{S_R\sqrt{E}}$$

- pro $E_c \ll E_m$ $\qquad t_R = \frac{105\,\hbar}{8\pi}\frac{E_F}{E_c^2}$

E_F = Fermiho energie

Termalizace pozitronu

- ***E* < 0.1 eV:**
  - rozptyl na fononech

$$S_{Ph} = \frac{2}{\pi} \frac{m_e^3 W^2}{\rho \hbar^4} E$$

ρ = hustota

W = deformační potenciál $\quad W = bE_F \quad$ b = 2/5 – 2/3

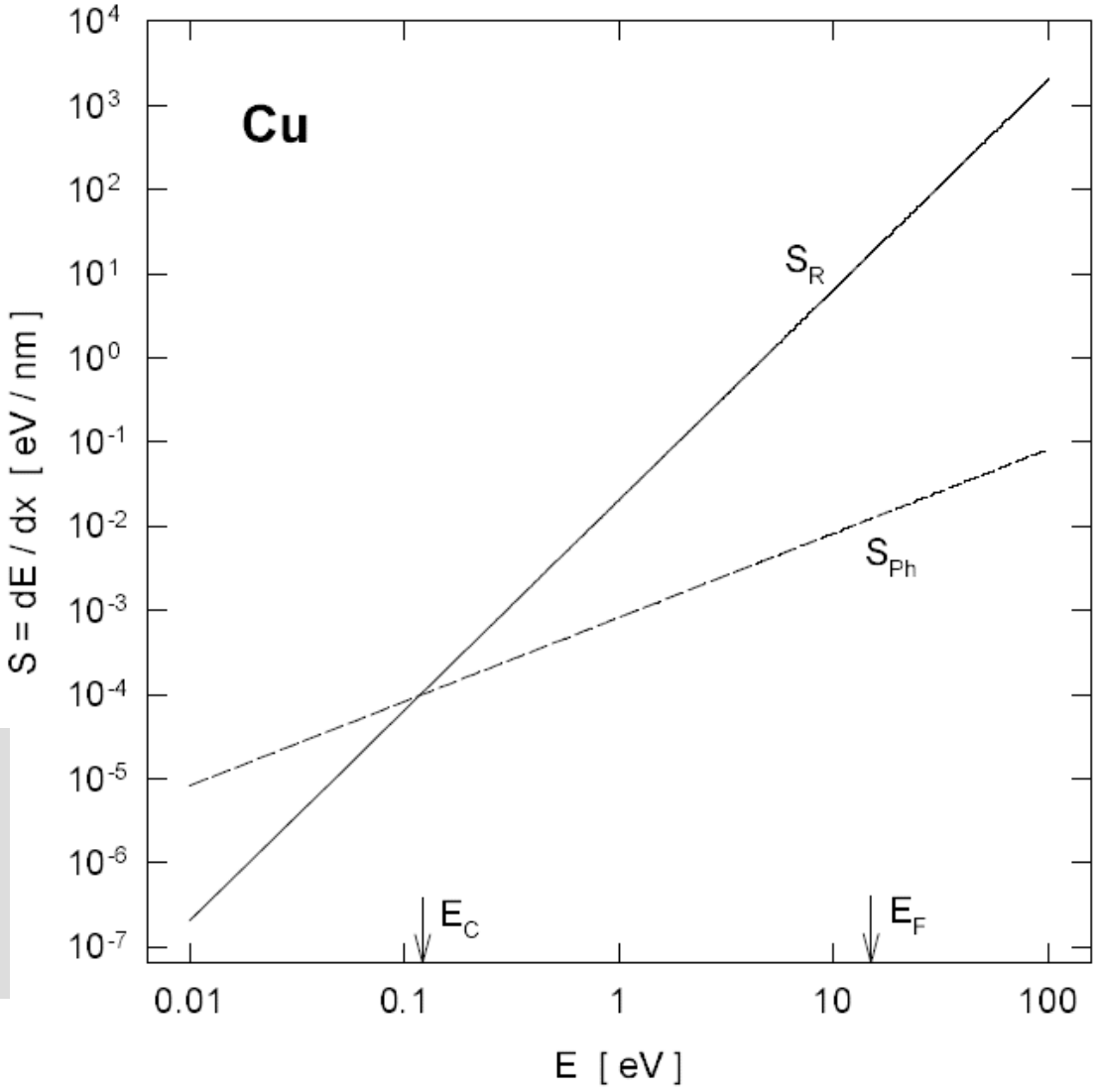
Termalizace pozitronu

$$S_{Ph} = \frac{2}{\pi}\frac{m_e^3 W^2}{\rho \hbar^4} E$$

$$S_R = \frac{2\pi}{105}\frac{m_e}{\hbar}\sqrt{\frac{2}{m_e}}\frac{E^{5/2}}{E_F}$$

$$S_{Ph}(E_c) = S_R(E_c)$$

$$E_c = \left(\frac{105 b^2}{\sqrt{2}\,\pi^2}\frac{m^{5/2} E_F^3}{\rho \hbar^3}\right)^{2/3}$$



Termalizace pozitronu

- ***E* < 0.1 eV:**
  - rozptyl na fononech

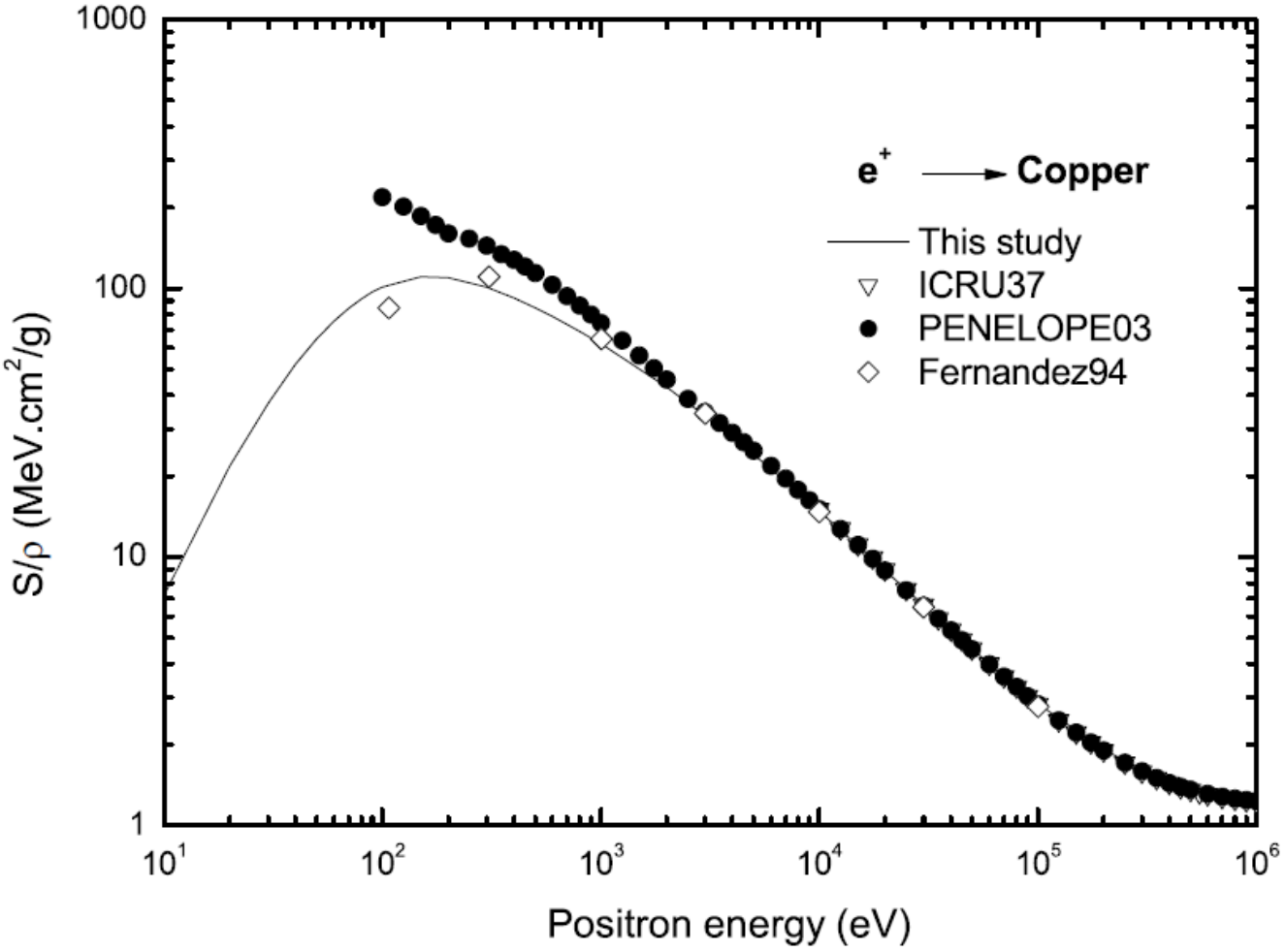
$$t_{Ph} = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{E_c}^{E_f} \frac{dE}{S_{Ph}\sqrt{E}} = 4t_R \left(\sqrt{\frac{E_C}{\frac{3}{2}kT} - 1} \right)$$

  - celková doba termalizace $t = t_S + t_R + t_{Ph}$

  - př. Cu: t_S = 0.93 ps, t_R = 2.86 ps, t_{Ph} = 8.92 ps, ***t* = 12.74 ps**

Termalizace pozitronu

• př. Cu: $t_S = 0.93$ ps, $t_R = 2.86$ ps, $t_{Ph} = 8.92$ ps, $\boldsymbol{t = 12.74}$ **ps**



Anihilace pozitronů

• anihilace pozitronu

$$e^- + e^+ \rightarrow n\gamma$$

• $n = 1$ vylučuje zákon zachování hybnosti
(je to možné pouze v přítomnosti další částice)

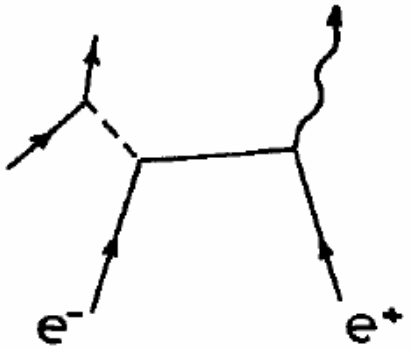
• $n > 1$ pro každý další foton je pravděpodobnost menší faktorem $\alpha = 1/137$

• dominantní proces $n = 2$

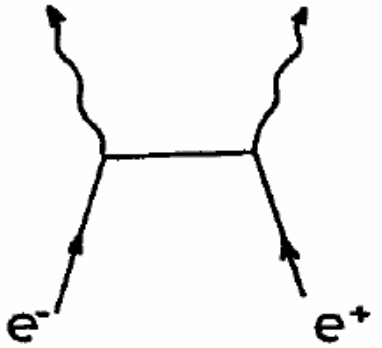
$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

1 γ

$$\sigma_{(1)} / \sigma_{(2)} \approx \alpha^4 \approx 10^{-8}$$

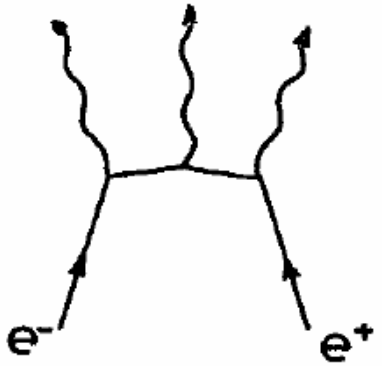


2 γ



3 γ

$$\sigma_{(3)} / \sigma_{(2)} \approx \alpha \approx 10^{-2}$$

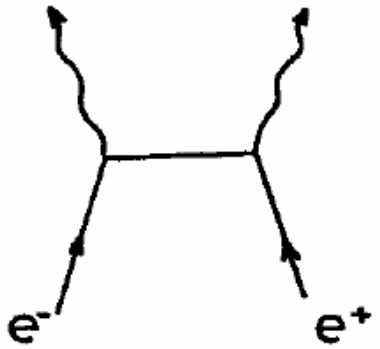


Anihilace pozitronů

• účinný průřez pro 2 γ anihilaci pozitronu (Dirac 1930)

$$\sigma_{(2)} = \frac{\pi r_e^2}{\gamma+1}\left\{\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right\}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



• klasický poloměr elektronu $r_e = e^2 / m_0 c^2$

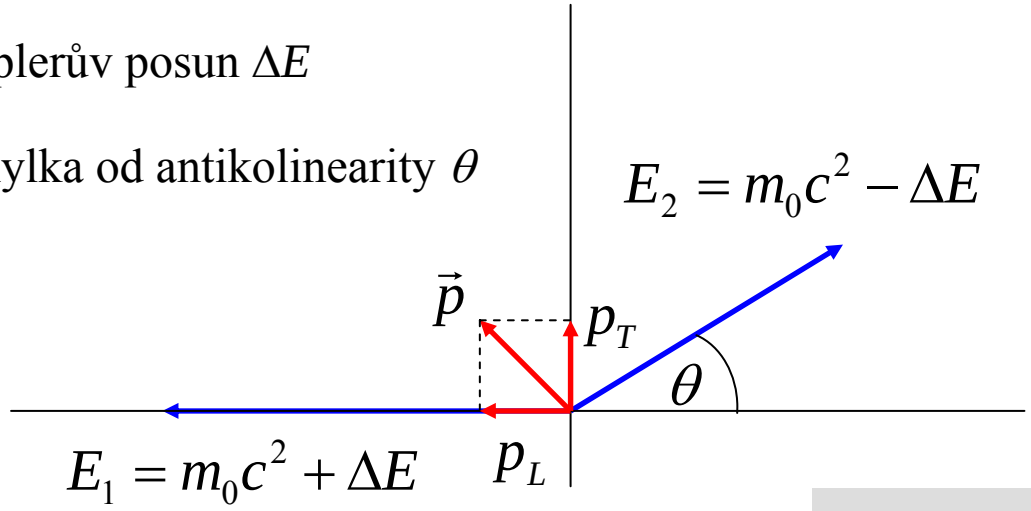
• pro $v << c$ $\quad \sigma_{(2)} = \frac{\pi r_e^2 c}{v}$

• Pravděpodobnost anihilace $\quad P_{(2)} = \sigma_{(2)} v n_e = \pi r_e^2 c n_e$

n_e – elektronová hustota

Anihilace pozitronů – pozorovatelné

- Dopplerův posun ΔE
- odchylka od antikolinearity θ



- zákon zachování hybnosti

$$p_L = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}\cos\theta$$

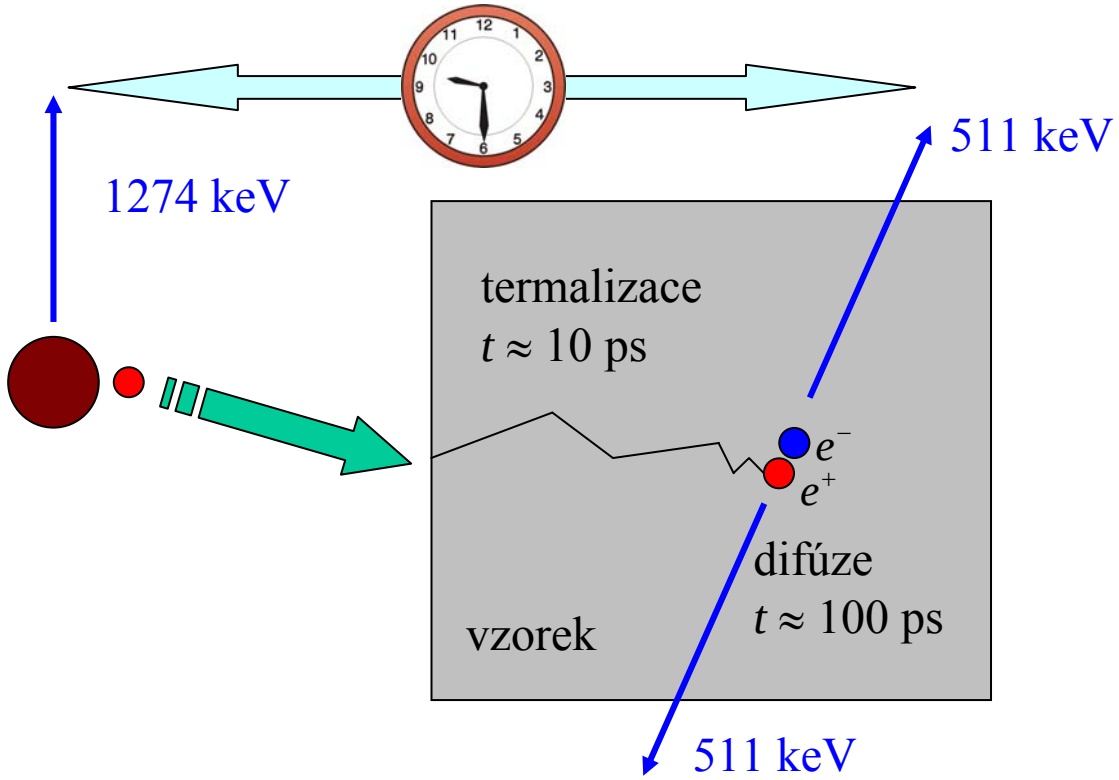
$$\cos\theta \approx 1$$

- **Dopplerův posun energie** $\Delta E = \frac{1}{2} p_L c$

$$p_T = \frac{E_2}{c}\sin\theta \qquad \sin\theta \approx \theta \qquad E_2 \approx m_0c^2$$

- **odchylka od antikolinearity** $\theta = \frac{p_T}{m_0c}$

Doba života pozitronů



• Pravděpodobnost anihilace

$$P_{(2)} = \sigma_{(2)} v n_e = \pi r_e^2 c n_e$$

• **anihilační rychlost:** $\lambda = \pi r_e^2 c \int n_-(\vec{r}) n_+(\vec{r}) \gamma(n_-) d\vec{r}$

• **doba života pozitronů:** $\tau = \frac{1}{\lambda}$

• **enhancement factor** $\gamma(n_-)$

Anihilace pozitronů – pozorovatelné

- **doba života pozitronů LT (τ, E)**
- **úhlové korelace ACAR (τ, θ)**

} scintilační detektory

- **Dopplerovské rozšíření DB (E, τ)** polovodičové detektory

- **scintilační detektory (scintilátor + fotonásobič)**
  - výborné časové rozlišení
  - horší energetické rozlišení
- **polovodičové detektory (HPGe)**
  - vynikající energetické rozlišení
  - špatné časové rozlišení