

Pozitron – teoretická předpověď

- Schrödingerova rovnice

= nerelativistická rovnice pro pohyb elektronu

$$\left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x}, t) \right] \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$



Erwin Schrödinger
1933 Nobelova cena

Pozitron – teoretická předpověď

- Diracova rovnice

= relativistická rovnice pro pohyb elektronu

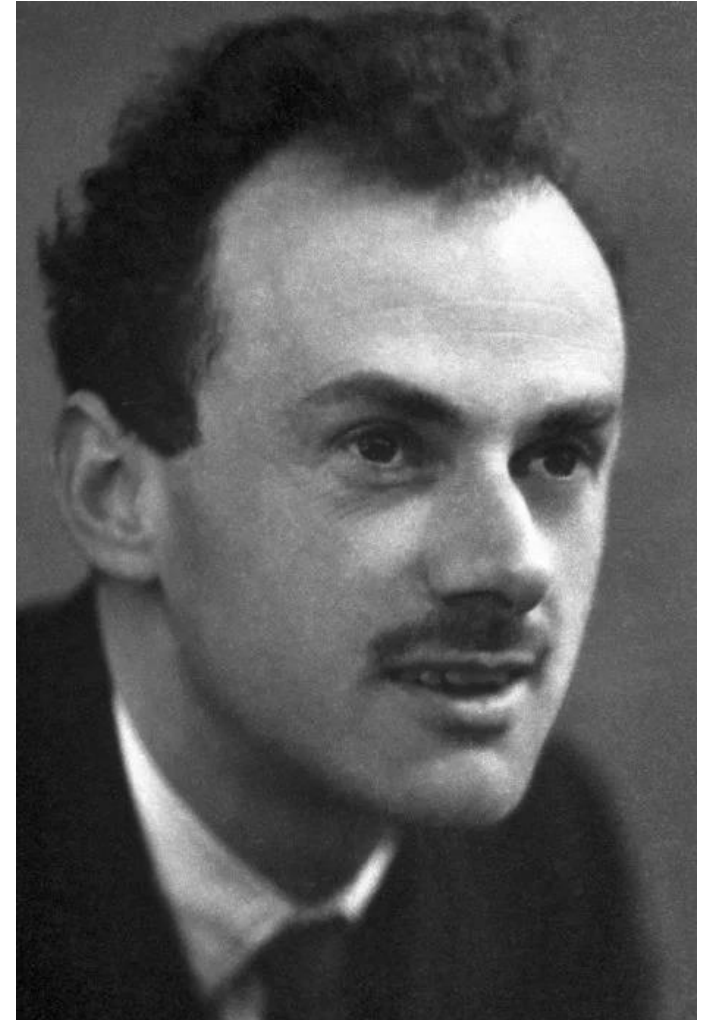
$$(\alpha\hat{p}c + \beta mc^2)\psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

- řešení s pozitivní energií **elektrony**
- řešení s negativní energií **vakuum**

P.A.M. Dirac, The Quantum Theory of The Electron,
Proc. R. Soc. Lond. A 117, 610-624 (1928)

P.A.M. Dirac, A Theory of Electrons and Protons,
Proc. R. Soc. Lond. A 126, 360-365 (1930)

P.A.M. Dirac, Quantised Singularities in the Electromagnetic Field,
Proc. R. Soc. Lond. A 133, 60-72 (1931)



Paul Adrien Maurice Dirac
1933 Nobelova cena

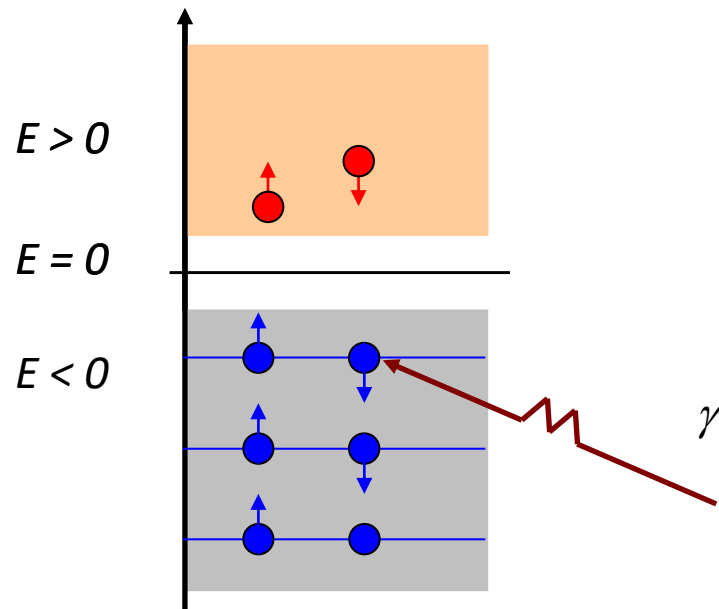
Pozitron – teoretická předpověď

- Diracova rovnice

- řešení s pozitivní energií
- řešení s negativní energií

elektrony

vakuum = „Diracovo moře elektronů“



Pozitron – teoretická předpověď

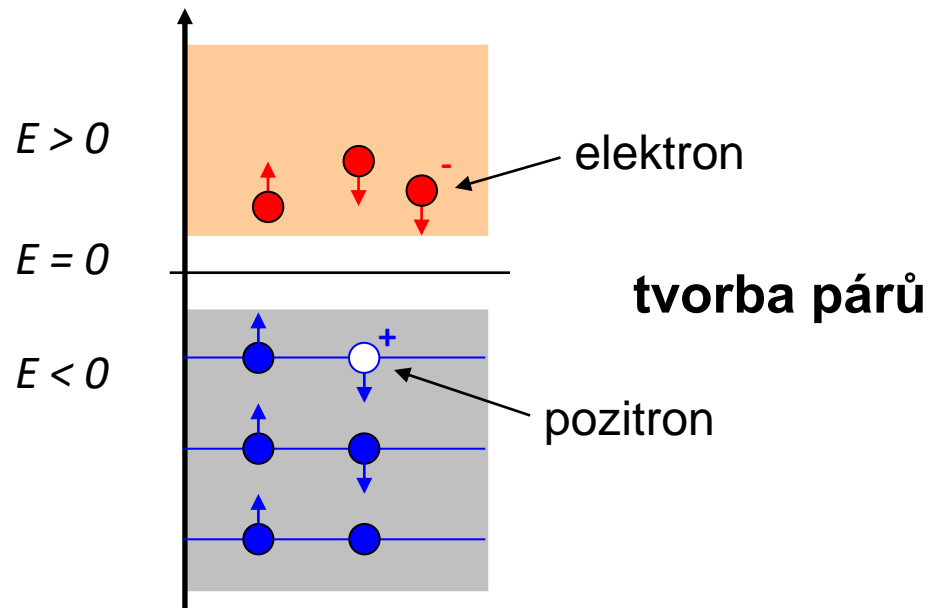
- Diracova rovnice

- řešení s pozitivní energií
- řešení s negativní energií

elektrony

vakuum = „Diracovo moře elektronů“

pozitrony = „díry ve vakuu“



Pozitron – teoretická předpověď

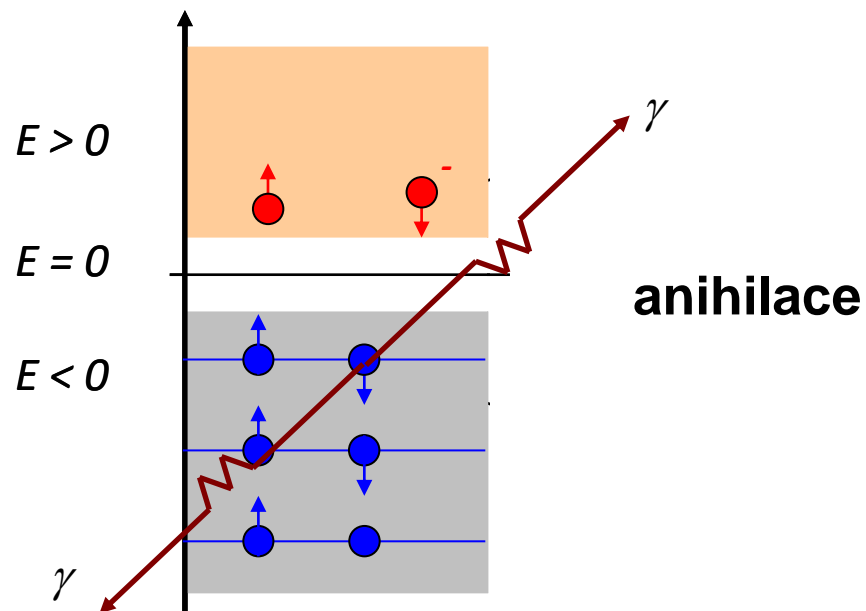
- Diracova rovnice

- řešení s pozitivní energií
- řešení s negativní energií

elektrony

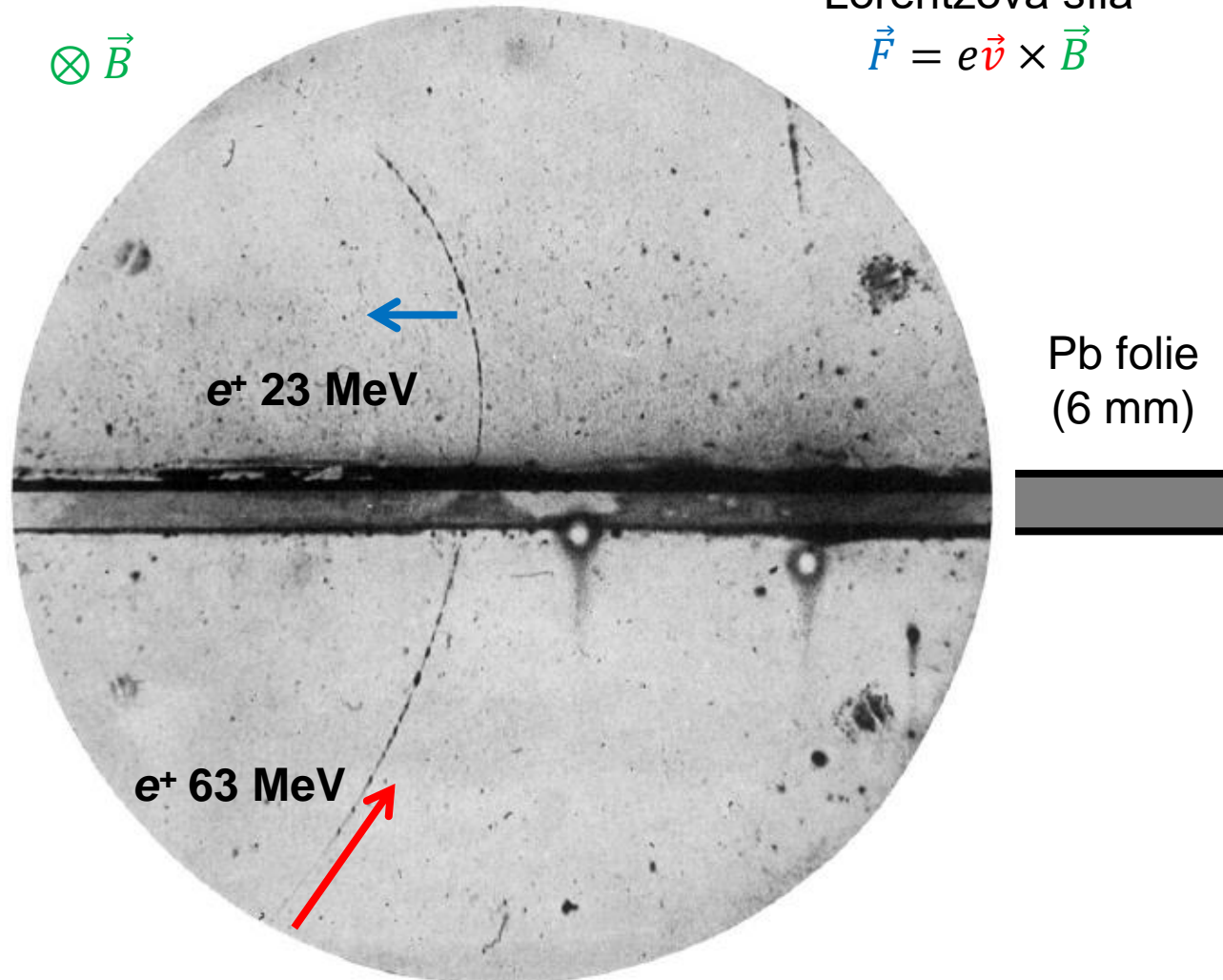
vakuum = „Diracovo moře elektronů“

pozitrony = „díry ve vakuu“



Pozitron – experiment

- objev pozitronu (1932)



Carl David Anderson
1936 Nobelova cena

The Positive Electron

CARL D. ANDERSON, *California Institute of Technology, Pasadena, California*

(Received February 28, 1933)

Out of a group of 1300 photographs of cosmic-ray tracks in a vertical Wilson chamber 15 tracks were of positive particles which could not have a mass as great as that of the proton. From an examination of the energy-loss and ionization produced it is concluded that the charge is less than twice, and is probably exactly equal to, that of the proton. If these particles carry unit positive charge the

curvatures and ionizations produced require the mass to be less than twenty times the electron mass. These particles will be called positrons. Because they occur in groups associated with other tracks it is concluded that they must be secondary particles ejected from atomic nuclei.

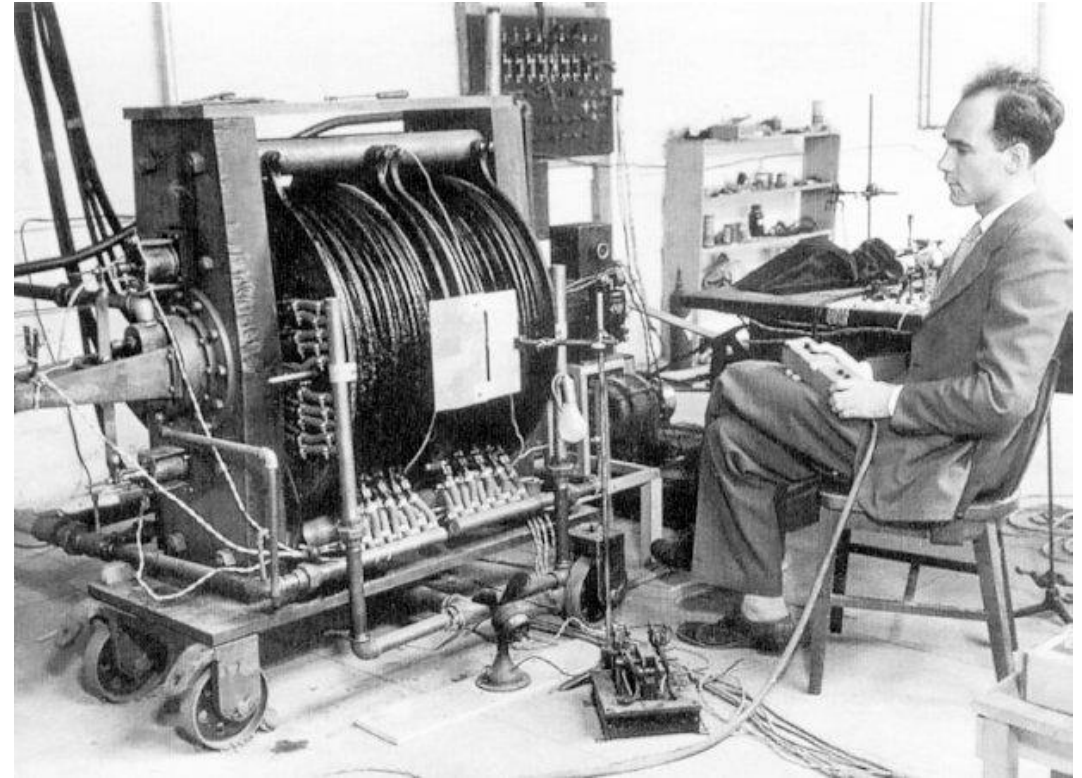
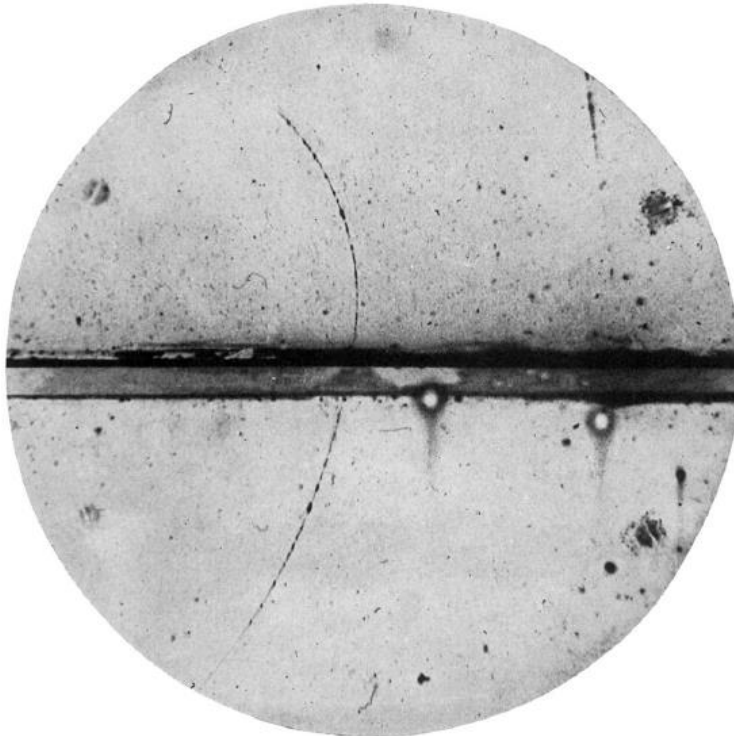
Editor

ON August 2, 1932, during the course of photographing cosmic-ray tracks produced in a vertical Wilson chamber (magnetic field of 15,000 gauss) designed in the summer of 1930 by Professor R. A. Millikan and the writer, the tracks shown in Fig. 1 were obtained, which seemed to be interpretable only on the basis of the existence in this case of a particle carrying a positive charge but having a mass of the same order of magnitude as that normally possessed by a free negative electron. Later study of the

electrons happened to produce two tracks so placed as to give the impression of a single particle shooting through the lead plate. This assumption was dismissed on a probability basis, since a sharp track of this order of curvature under the experimental conditions prevailing occurred in the chamber only once in some 500 exposures, and since there was practically no chance at all that two such tracks should line up in this way. We also discarded as completely untenable the assumption of an electron of 20

Pozitron – experiment

- pozitron = antičástice elektronu
 - klidová hmotnost m_e
 - náboj $+e$
 - spin $1/2$



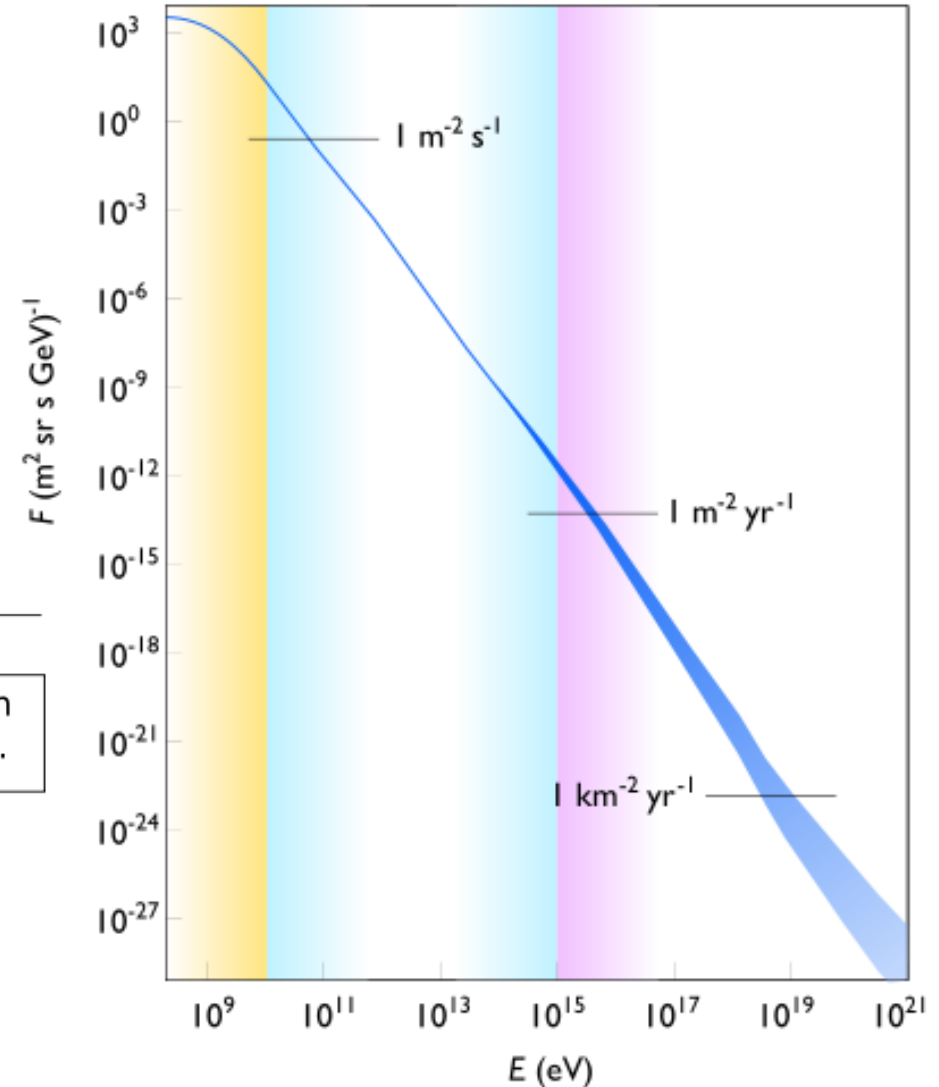
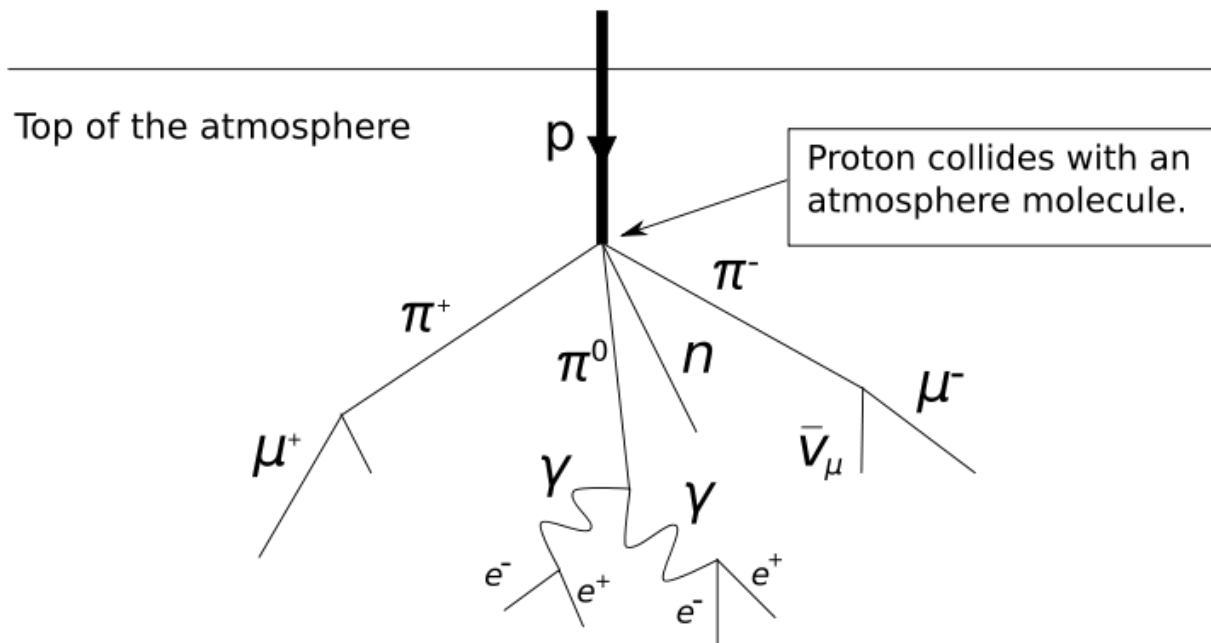
$B = 1.7 \text{ T}$
 $P = 425 \text{ kW}$
 $m > 3 \text{ t}$

Zdroje pozitronů

- **kosmické záření**

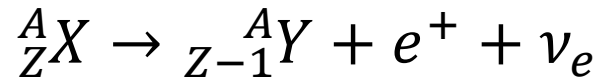
- 90% protony
- 9% α částice
- 1% elektrony (a ostatní částice e^+ , p^-)

- primární a sekundární

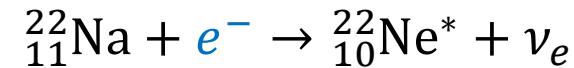
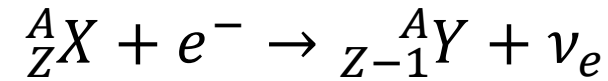


Zdroje pozitronů

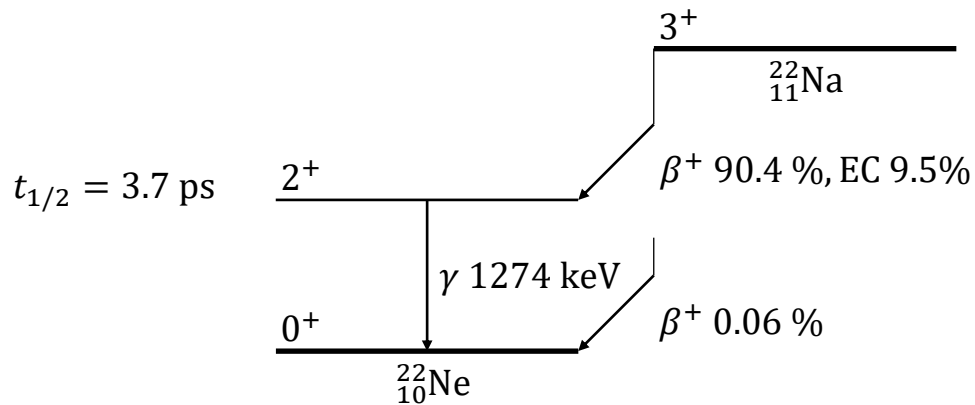
- β^+ rozpad



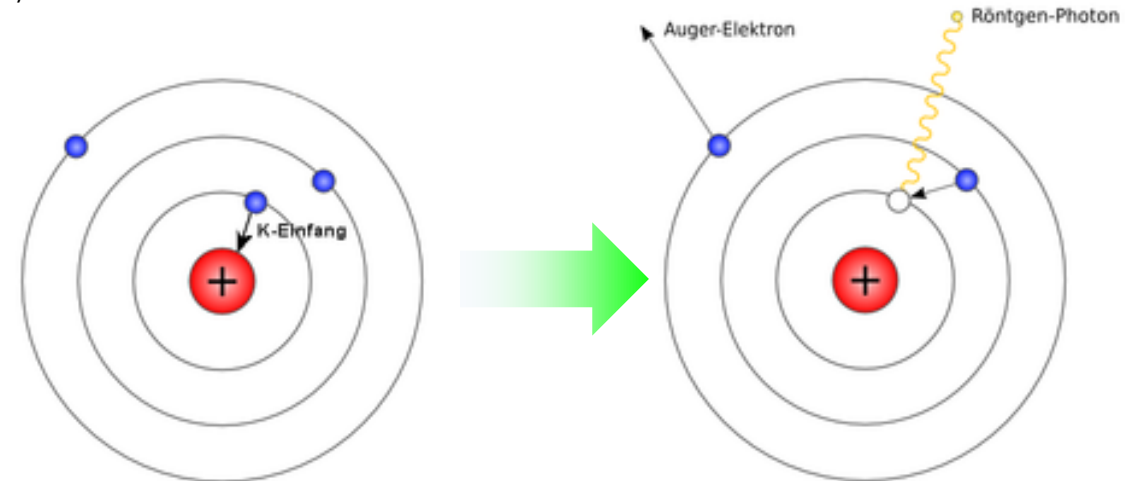
- záchyt e^- (EC)



pro $Q < 2m_e c^2$ pouze EC



$T_{1/2} = 2.6 \text{ year}$

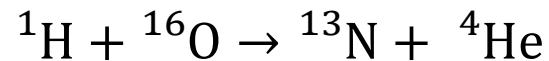


Zdroje pozitronů

- β^+ rozpad
 - branching ratio (e^+ yield)
 - Q-value (E_{\max})
 - poločas rozpadu ($T_{1/2}$)
 - sekundární foton

| Isotope | $T_{1/2}$ | e^+ yield | E_{\max} (MeV) | secondary γ | E_{γ} (MeV) |
|-----------------|-----------|-------------|------------------|--------------------|--------------------|
| ^{11}C | 20.33 min | 0.98 | 0.45 | 0 | - |
| ^{13}N | 9.96 min | 1.00 | 1.20 | 0 | - |
| ^{15}O | 123 s | 1.00 | 1.74 | 0 | - |
| ^{18}F | 110 min | 0.97 | 0.64 | 0 | - |

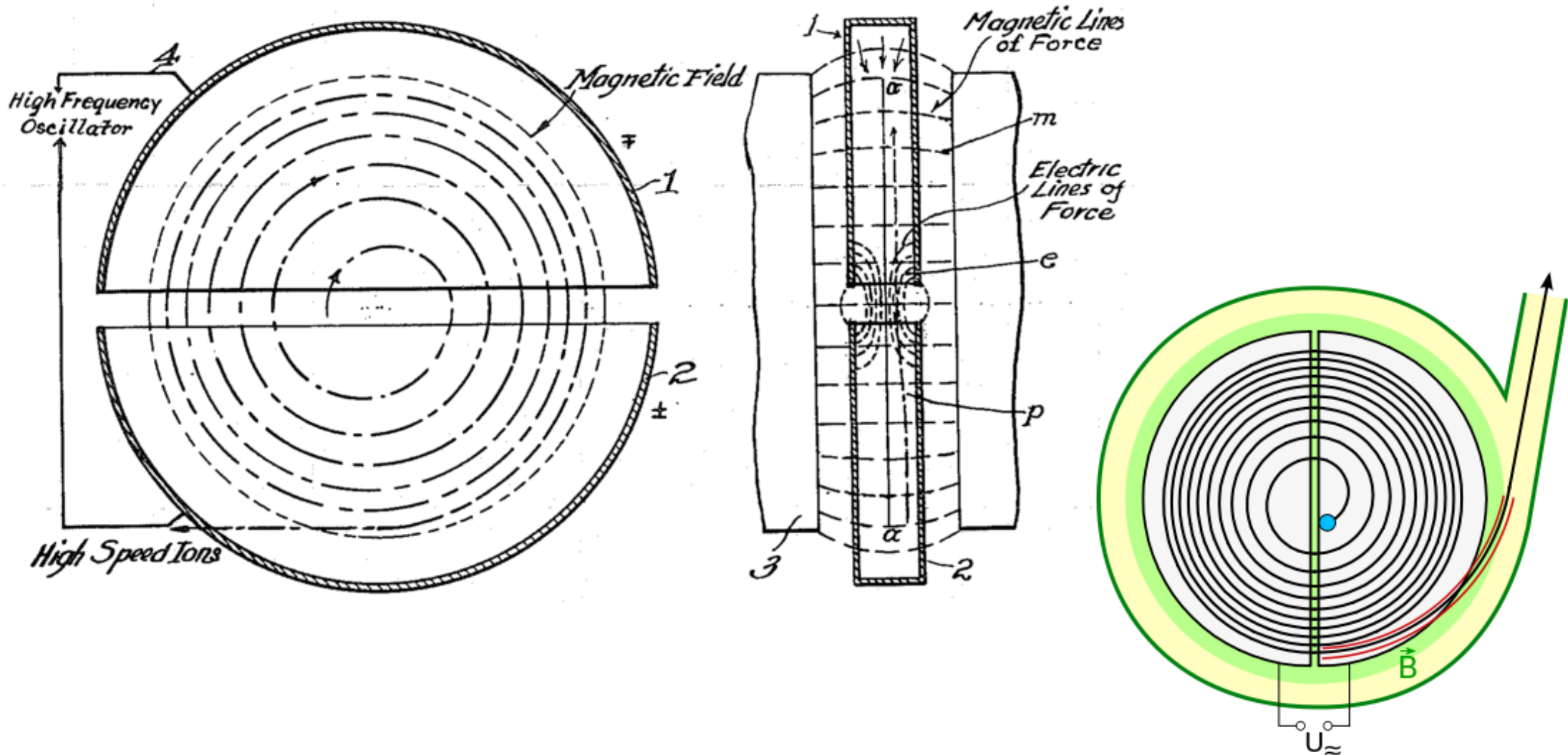
- příprava v cyklotronu



- protony urychlené na $T = 5.2 \text{ MeV}$

Zdroje pozitronů

- cyklotron



Zdroje pozitronů

- **cyklotron**



UJV Řež: cyklotron U-120M, p^+ 5.4 – 38 MeV



Siemens Eclipse,
negativní ionty 11 MeV
výroba ^{18}F , ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O , ^{64}Cu

Zdroje pozitronů

- LINAC



AccSyS Technology Inc.
p⁺ 7 MeV
výroba ¹⁸F, ¹¹C, ¹³N, ¹⁵O

Zdroje pozitronů

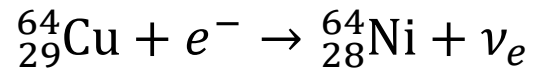
- **cyklotron**
 - branching ratio (e^+ yield)
 - Q-value (E_{\max})
 - poločas rozpadu ($T_{1/2}$)
 - sekundární foton

| Isotope | $T_{1/2}$ | e^+ yield | E_{\max} (MeV) | secondary γ | E_{γ} (MeV) |
|------------------|-------------------|-------------|------------------|--------------------|--------------------|
| ^{11}C | 20.33 min | 0.98 | 0.45 | 0 | - |
| ^{13}N | 9.96 min | 1.00 | 1.20 | 0 | - |
| ^{15}O | 123 s | 1.00 | 1.74 | 0 | - |
| ^{18}F | 110 min | 0.97 | 0.64 | 0 | - |
| ^{22}Na | 2.6 y | 0.9 | 0.545 | 1 | 1.274 |
| ^{26}Al | 8×10^5 y | 0.85 | 1.17 | 1 | 1.81 |
| ^{44}Ti | 47 y | 0.94 | 1.47 | 1 | 1.156 |
| ^{64}Cu | 12.7 h | 0.178 | 0.653 | 0 | - |
| ^{68}Ge | 275 d | 0.88 | 1.90 | 0.02 | 1.078 |
| ^{82}Sr | 23.4 d | 1 | 3.38 | 0 | - |

Zdroje pozitronů

- ^{64}Cu

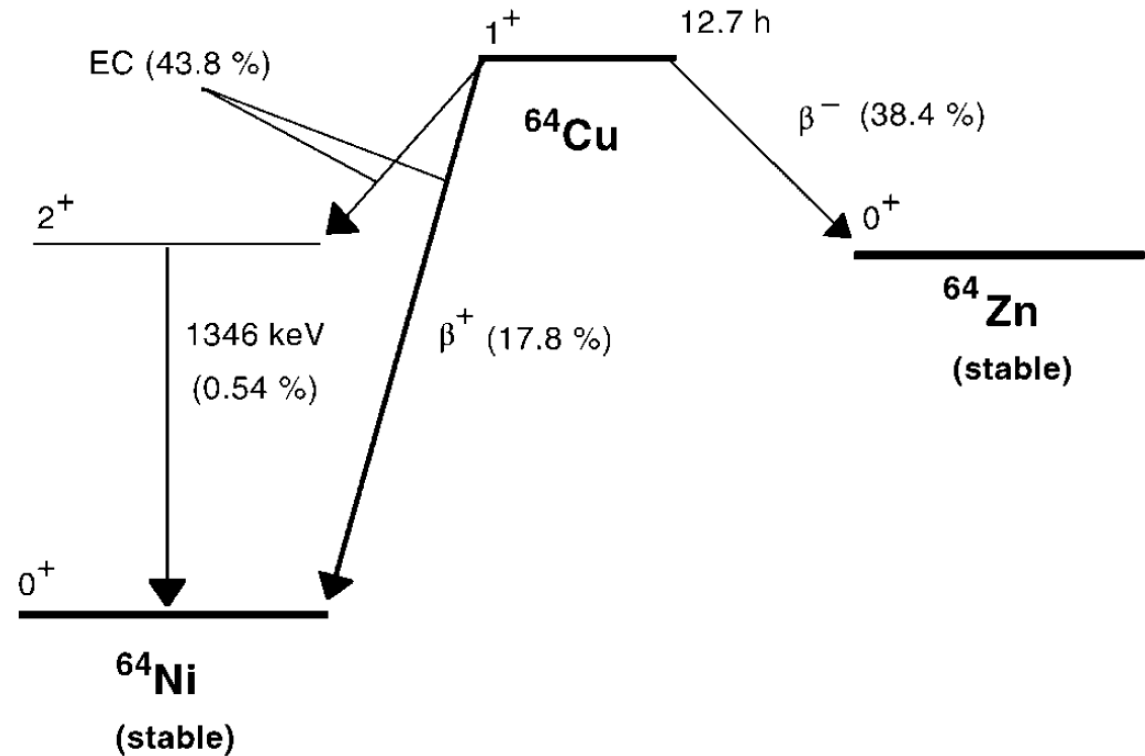
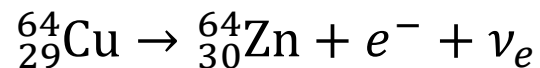
- záchyt e^- (43.8%)



- β^+ rozpad (17.8%)



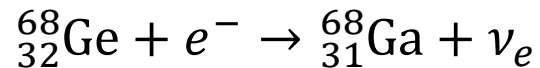
- β^- rozpad (38.4%)



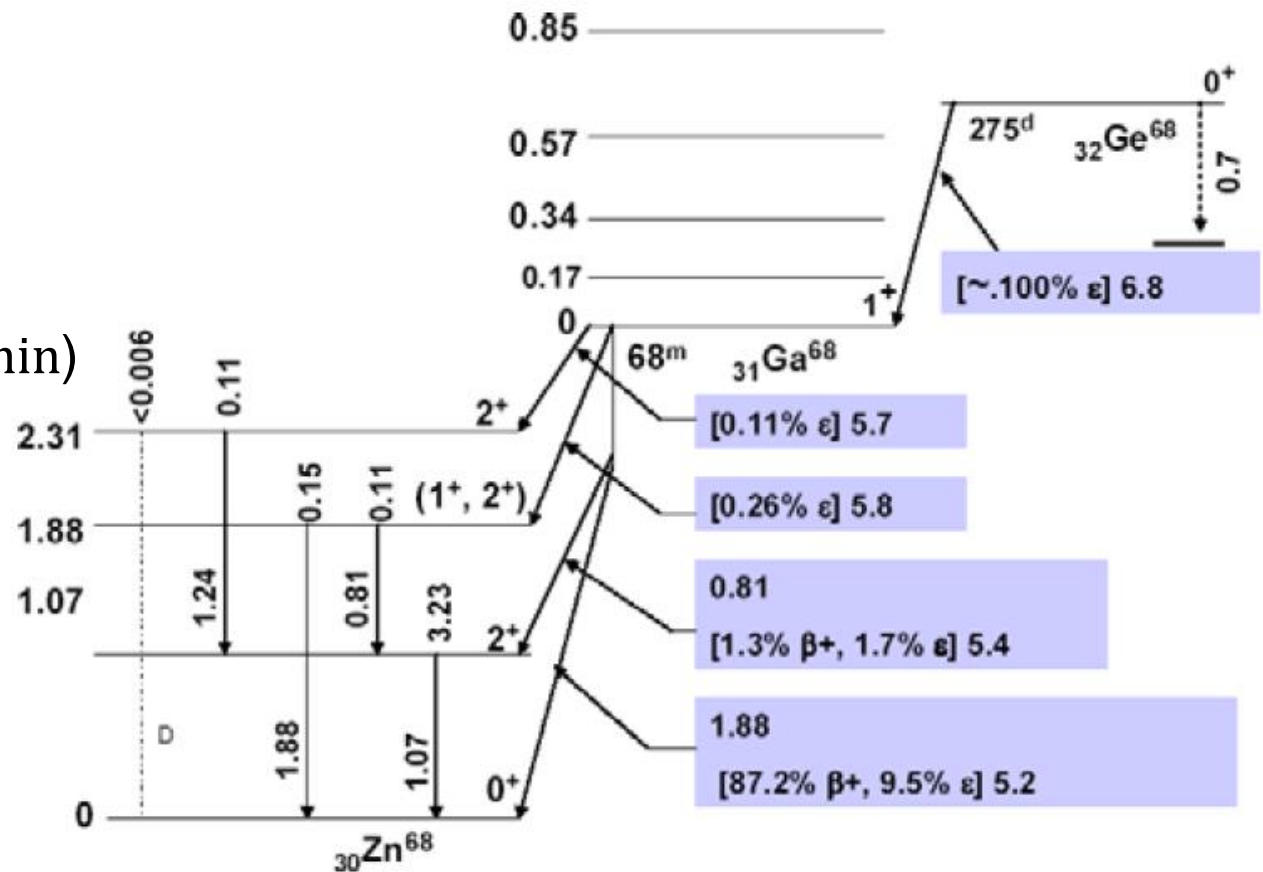
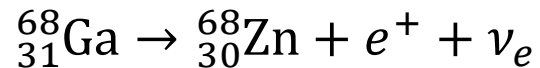
Zdroje pozitronů

- **$^{68}\text{Ge} / ^{68}\text{Ga}$ generátor**

- rozpad ^{68}Ge ($T_{1/2} = 275$ d)
záchyt e^- (100%)

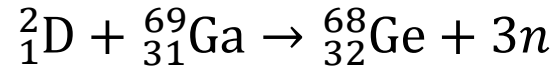


- rozpad ^{68}Ga ($T_{1/2} = 68$ min)
 β^+ rozpad (87.2%)

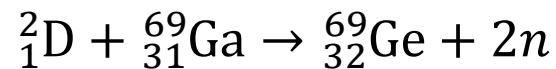


Zdroje pozitronů

- **příprava ^{68}Ge (cyklotron)**



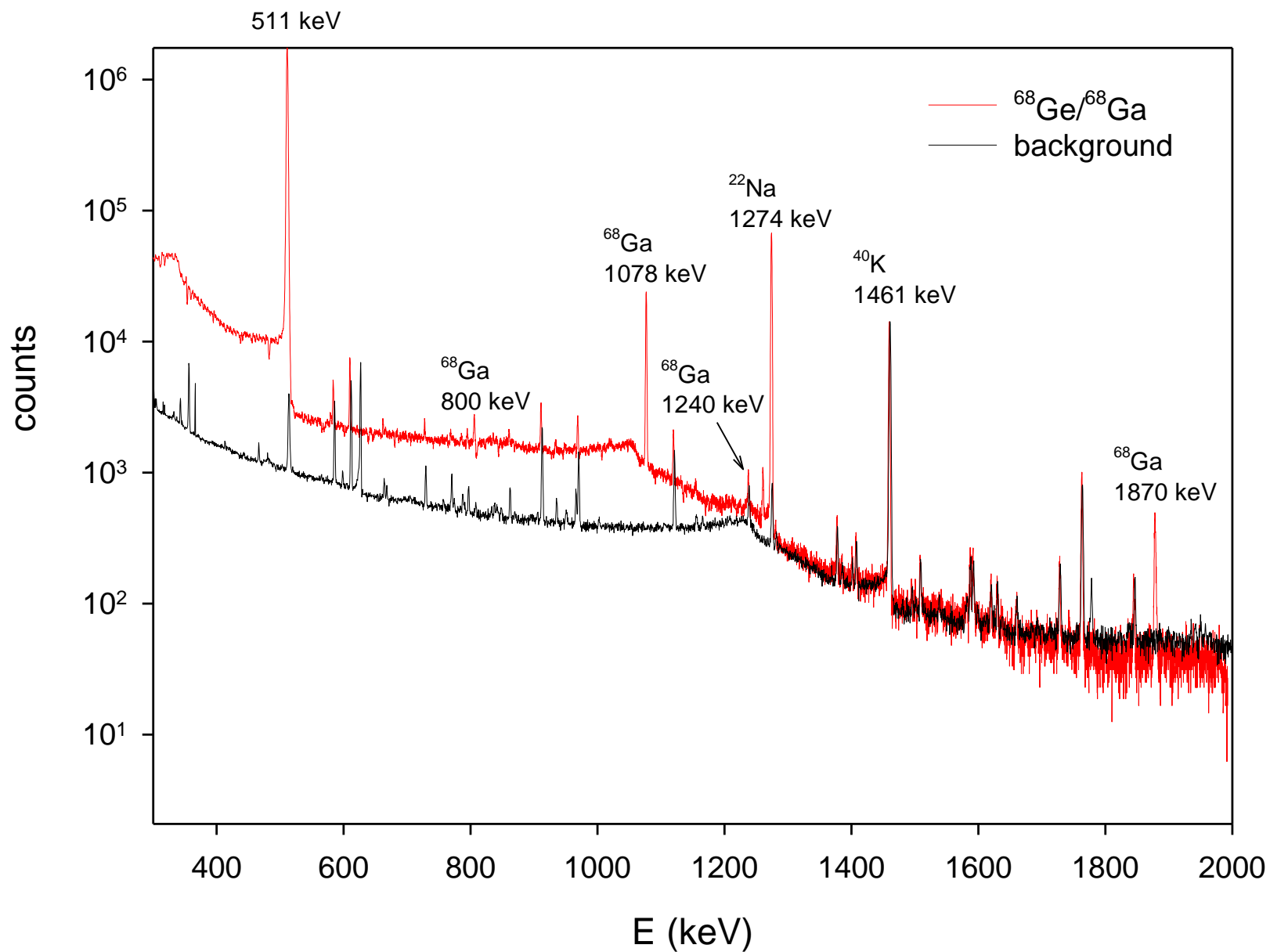
- D ionty urychlené na $T \geq 14 \text{ MeV}$
- maximální účinný průřez pro $T = 27 \text{ MeV}$ je $\sigma = 550 \text{ mBarn}$



- pro $T = 27 \text{ MeV}$ je $\sigma = 1650 \text{ mBarn}$
- poločas rozpadu ^{69}Ge je $T_{1/2} = 39 \text{ h}$



Zdroje pozitronů $^{68}\text{Ge} / ^{68}\text{Ga}$



Zdroje pozitronů

- ^{22}Na

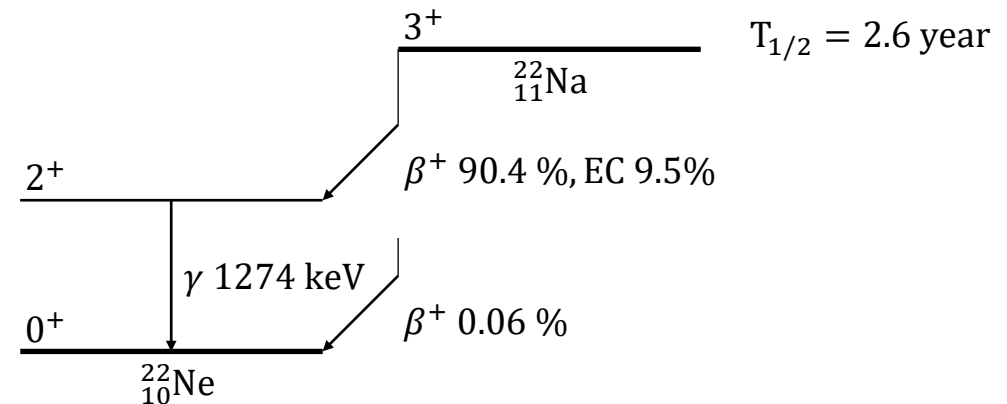
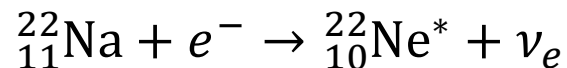
- β^+ rozpad (90.4% + 0.06%)



poločas rozpadu $T_{1/2} = 2.6 \text{ y}$

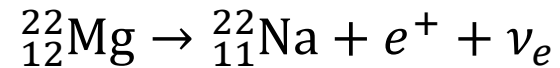
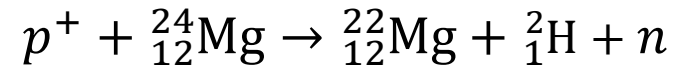
sekundární γ 1274 MeV $t_{1/2} = 3.7 \text{ ps}$

- záchyt e^- (9.5%)

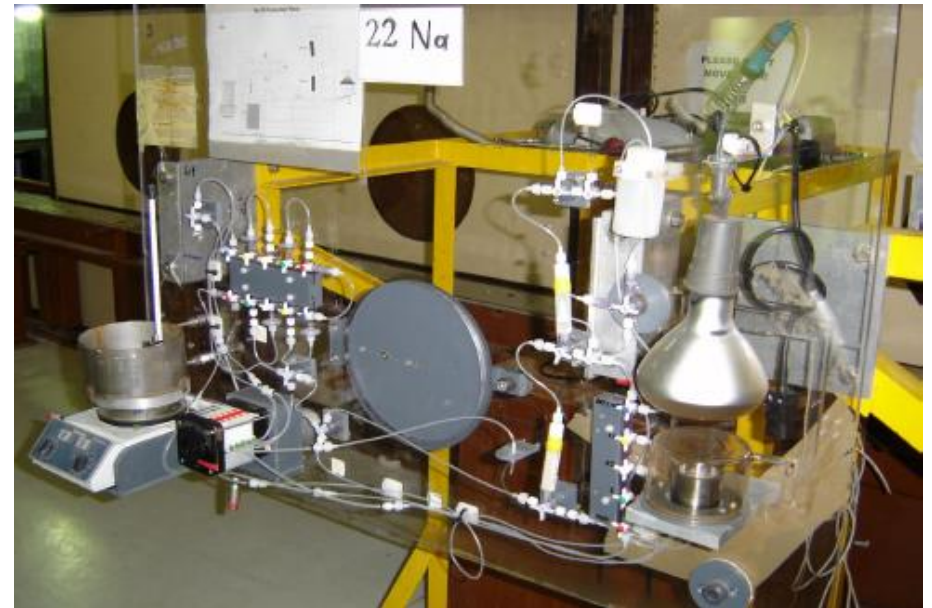


Zdroje pozitronů

- **příprava ^{22}Na (cyklotron)**

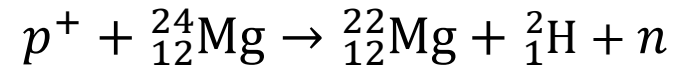


- protony urychlené na $T = 66 \text{ MeV}$

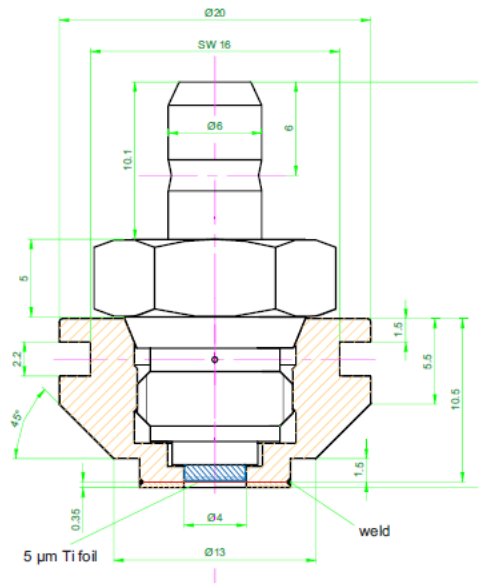
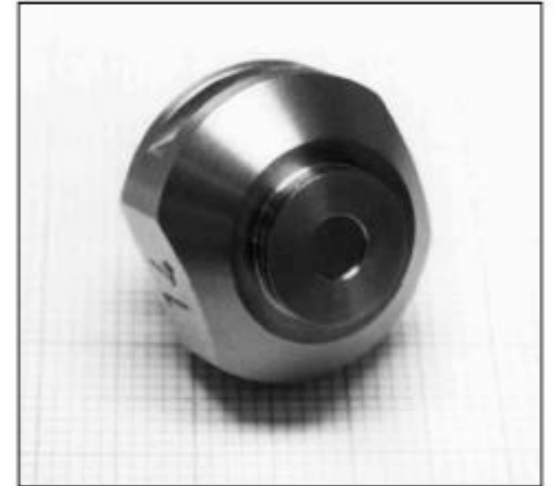


Zdroje pozitronů

- **příprava ^{22}Na (cyklotron)**

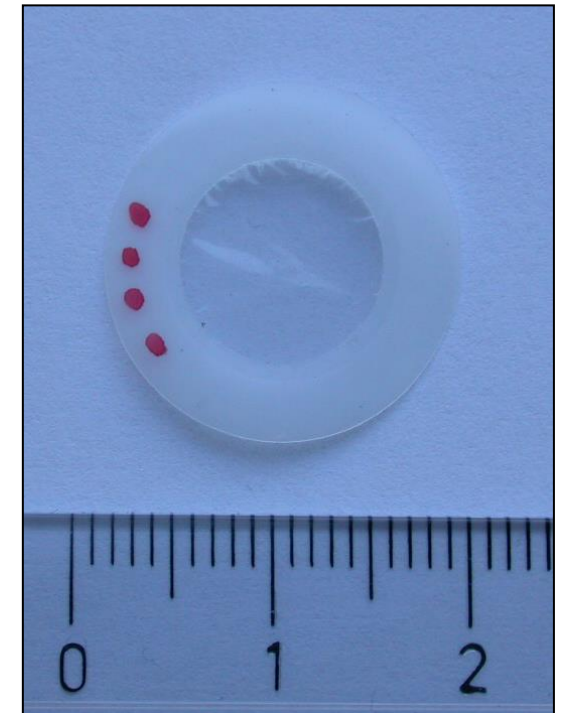
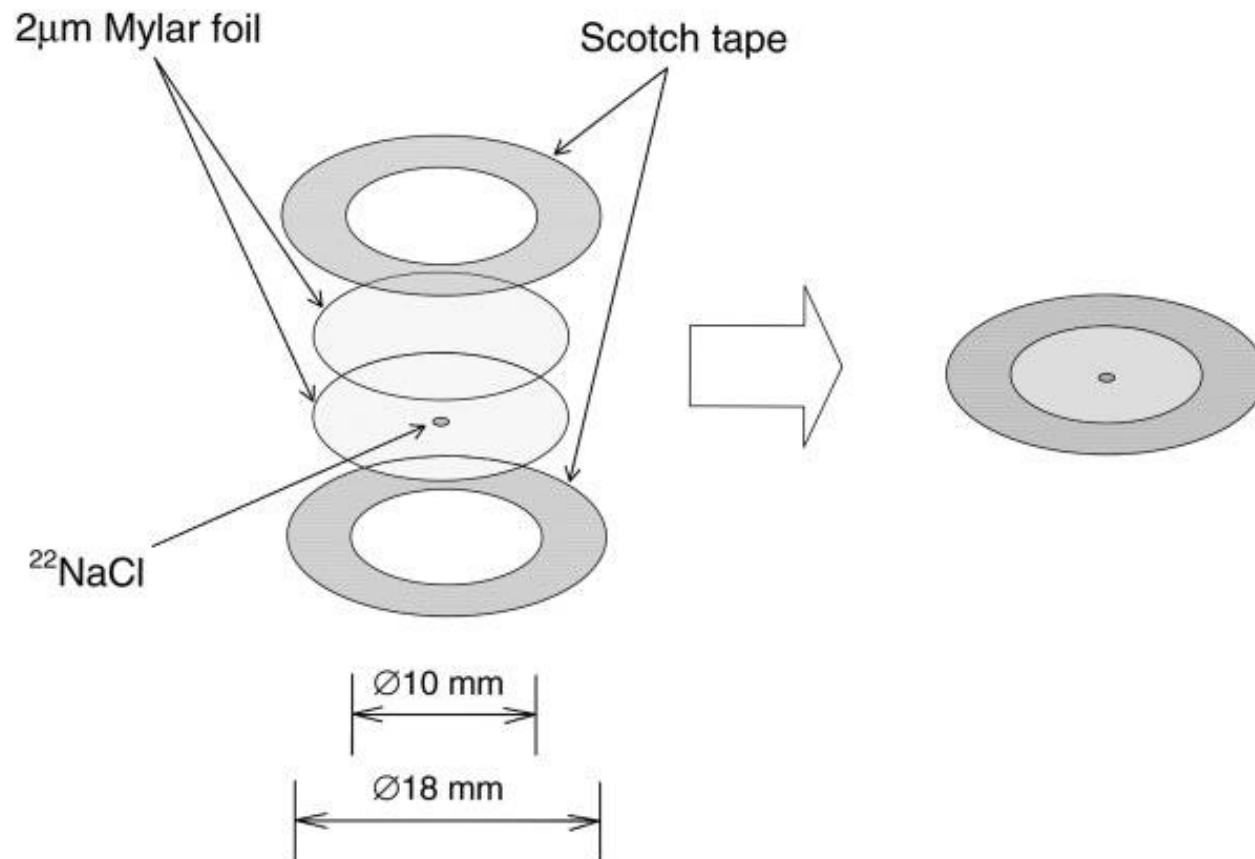


- protony urychlené na $T = 66 \text{ MeV}$



Zdroje pozitronů

- ^{22}Na pozitronový zdroj (KFNT)



Hloubka průniku pozitronů

- pozitrony emitované β^+ zářičem

- **pravděpodobnost**, že pozitron pronikne do hloubky z : $P(z) = \alpha e^{-\alpha z}$

$$\alpha [\text{cm}^{-1}] = 16 \frac{\rho [\text{g cm}^{-3}]}{E_{\text{max}}^{1.4} [\text{MeV}]}$$

ρ – hustota materiálu

$$E_{\text{max}} = 0.545 \text{ MeV (pro } ^{22}\text{Na)}$$

- **střední hloubka průniku**

$$\int_0^{\infty} z P(z) dz = \frac{1}{\alpha}$$

Příklad:

$$\text{Mg: } \alpha^{-1} = 154 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\text{Al: } \alpha^{-1} = 99 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\text{Cu: } \alpha^{-1} = 30 \text{ } \mu\text{m}$$

Termalizace pozitronu

- snížení kinetické energie pozitronu ze ~ 100 keV na $\sim k_B T = 0.03$ eV
- rychlost ztráty energie při pronikání do materiálu (**stopping power**): $S = -\frac{dE}{dx}$
- **doba termalizace**

$$dt = \frac{dx}{v}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} \quad \Rightarrow \quad dt = \sqrt{\frac{m_e}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E}} = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \frac{dE}{S\sqrt{E}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{E_i}^{E_f} \frac{dE}{S\sqrt{E}}$$

Termalizace pozitronu

- snížení kinetické energie pozitronu ze ~ 100 keV na $\sim k_B T = 0.03$ eV

1. $E > 100$ eV

- nepružné srážky s elektrony
- elastický rozptyl na jádrech atomů

2. 0.1 eV $< E < 100$ eV

- excitace elektronů

3. $E < 0.1$ eV

- rozptyl na fononech

Termalizace pozitronu

1. $E > 100$ eV

- nepružné srážky s elektrony
- elastický rozptyl na jádrech atomů

$$t_s = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{E_i}^{E_m} \frac{dE}{S_S \sqrt{E}}$$

- pro $E_m \sim 100$ eV je $t_s \leq 1$ ps

$$t_s [\text{ps}] = \frac{17.2}{\rho [\text{g cm}^{-3}]} E_{\text{max}}^{1.2} [\text{MeV}]$$

ρ – hustota materiálu

$E_{\text{max}} = 0.545$ MeV (pro ^{22}Na)

Termalizace pozitronu

2. $0.1 \text{ eV} < E < 100 \text{ eV}$

- excitace elektronů
- kovy: excitace vodivostních elektronů

$$S_R = \frac{2\pi m_e}{105 \hbar} \sqrt{\frac{2 E^{5/2}}{m_e E_F}}$$

$$t_R = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{E_m}^{E_c} \frac{dE}{S_R \sqrt{E}}$$

- pro $E_c \ll E_m$ je $t_R \sim 1 \text{ ps}$

$$t_R = \frac{105 \hbar E_F}{8\pi E_C^2}$$

E_F – Fermiho energie

Termalizace pozitronu

3. $E > 0.1$ eV

- rozptyl na fononech

$$S_{ph} = \frac{2 m_e^3 W^2}{\pi \rho \hbar^4} E$$

ρ – hustota materiálu

W – deformační potenciál $W = bE_F$
($b = 2/5 - 2/3$)

Termalizace pozitronu

3. $E > 0.1$ eV

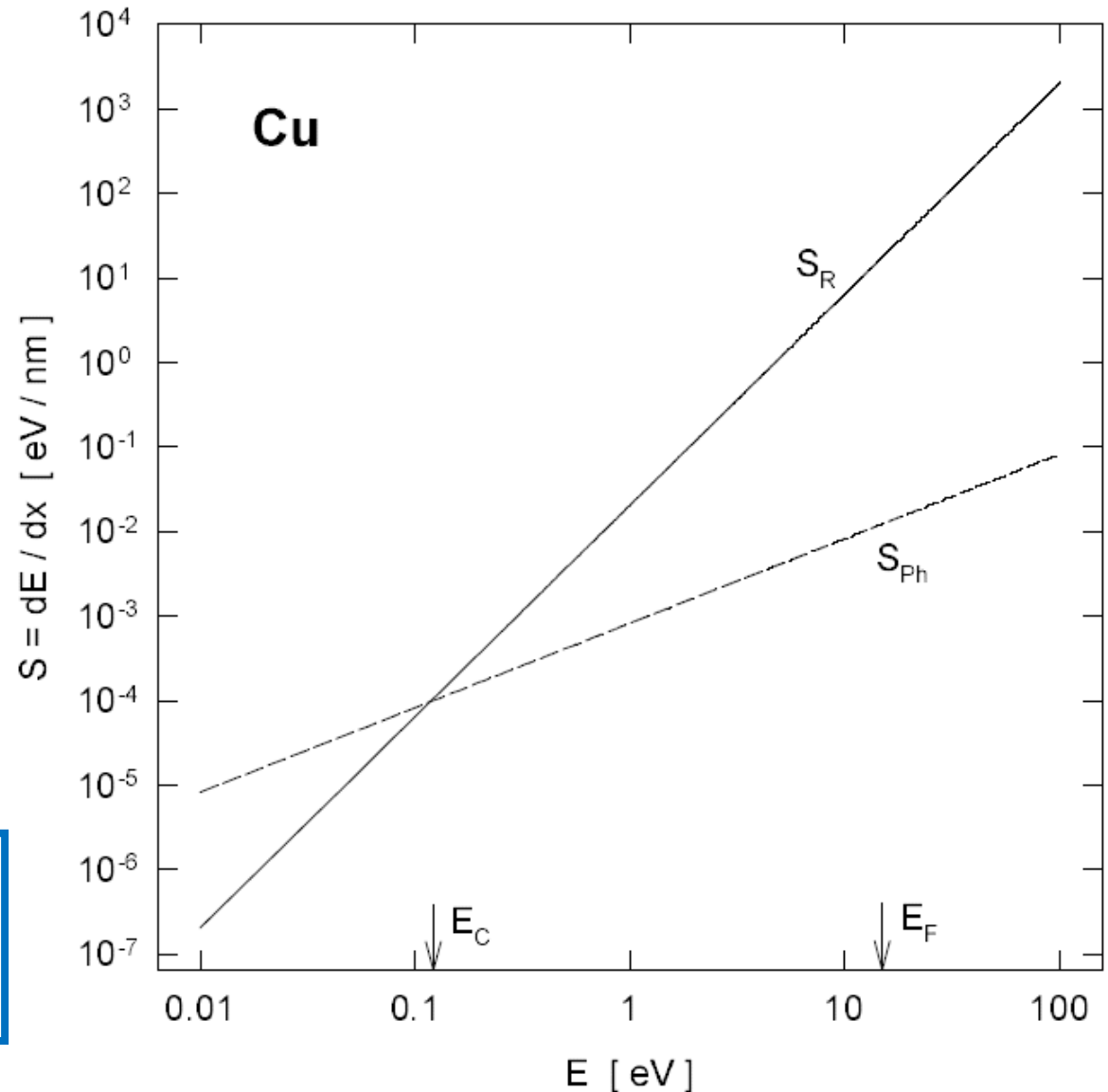
- rozptyl na fononech

$$S_{ph} = \frac{2 m_e^3 W^2}{\pi \rho \hbar^4} E$$

$$S_R = \frac{2\pi m_e}{105 \hbar} \sqrt{\frac{2 E^{5/2}}{m_e E_F}}$$

$$S_{ph}(E_c) = S_R(E_c)$$

$$E_c = \left(\frac{105 b^2 m_e^{5/2} E_F^3}{\sqrt{2} \pi^2 \rho \hbar^3} \right)^{2/3}$$



Termalizace pozitronu

3. $E > 0.1$ eV

- rozptyl na fononech

$$t_{ph} = -\sqrt{\frac{m_e}{2}} \int_{E_c}^{E_f} \frac{dE}{S_{ph}\sqrt{E}} = 4t_R \sqrt{\frac{E_c}{\frac{3}{2}k_B T} - 1}$$

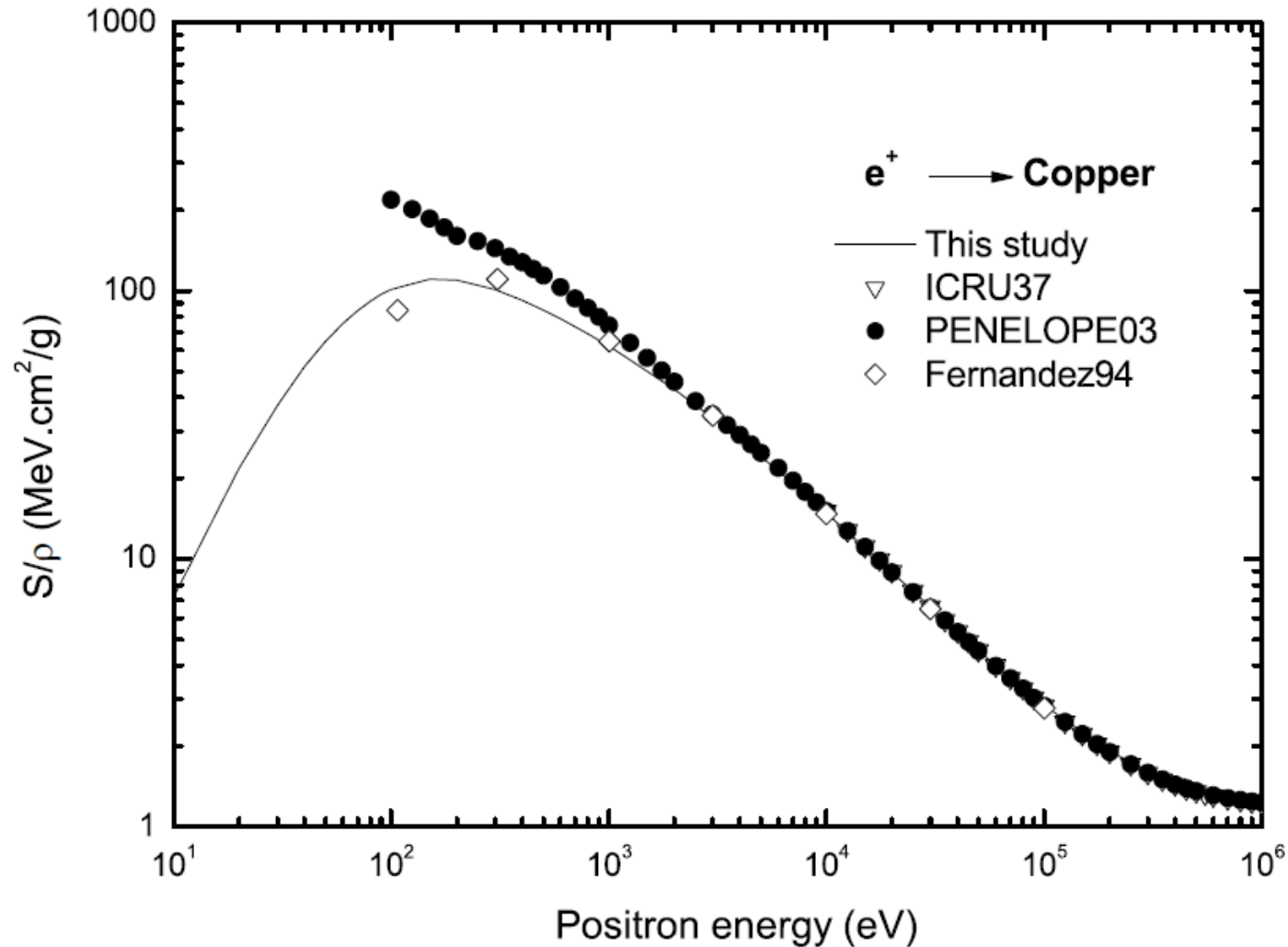
- celková doba termalizace

$$t = t_S + t_R + t_{ph}$$

např. Cu: $t_S = 0.93$ ps, $t_R = 2.86$ ps, $t_{ph} = 8.92$ ps, $t = 12.71$ ps

Termalizace pozitronu

- např. Cu: $t_S = 0.93$ ps, $t_R = 2.86$ ps, $t_{ph} = 8.92$ ps, $t = 12.71$ ps



Anihilace pozitronů

- anihilace pozitronu

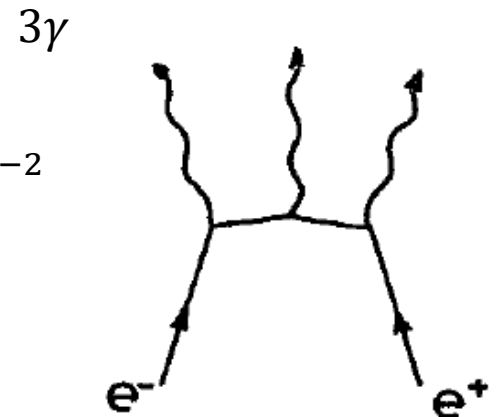
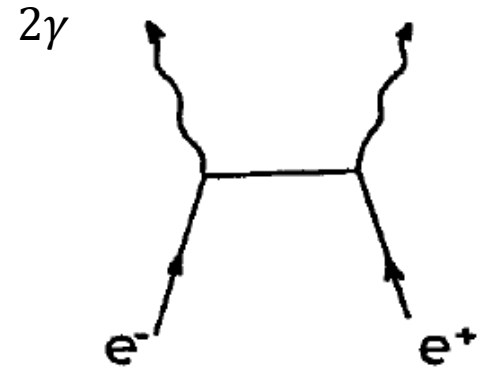
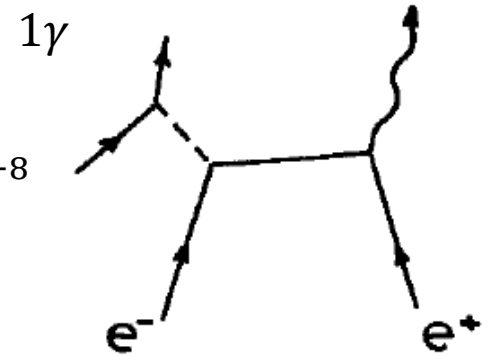
$$e^- + e^+ \rightarrow n\gamma$$

- $n = 1$ vylučuje zákon zachování hybnosti (možné pouze v přítomnosti další částice, např. jádra)
- $n > 1$ pro každý další foton je pravděpodobnost menší faktorem $\alpha = 1/137$

- $n = 2$ dominantní proces

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$$

$$\sigma_{(1)}/\sigma_{(2)} \approx \alpha^4 \approx 10^{-8}$$



$$\sigma_{(3)}/\sigma_{(2)} \approx \alpha \approx 10^{-2}$$

Anihilace pozitronů

- účinný průřez pro 2 γ anihilaci pozitronu (Dirac 1930)

$$\sigma_{(2)} = \frac{\pi r_e^2}{\gamma + 1} \left[\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

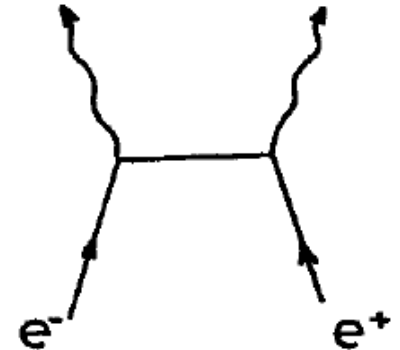
- klasický poloměr elektronu $r_e = e^2/m_e c^2$

- pro $v \ll c$ je $\sigma_{(2)} = \frac{\pi r_e^2 c}{v}$

- pravděpodobnost 2 γ anihilace

$$P_{(2)} = \sigma_{(2)} v n_e = \pi r_e^2 c n_e$$

n_e - elektronová hustota



Dopplerův posun anihilačního záření

- zákon zachování energie a hybnosti

$$p_L = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c} \cos \theta \approx \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}$$

$$p_T = \frac{E_2}{c} \sin \theta \approx \frac{m_0 c^2}{c} \theta$$

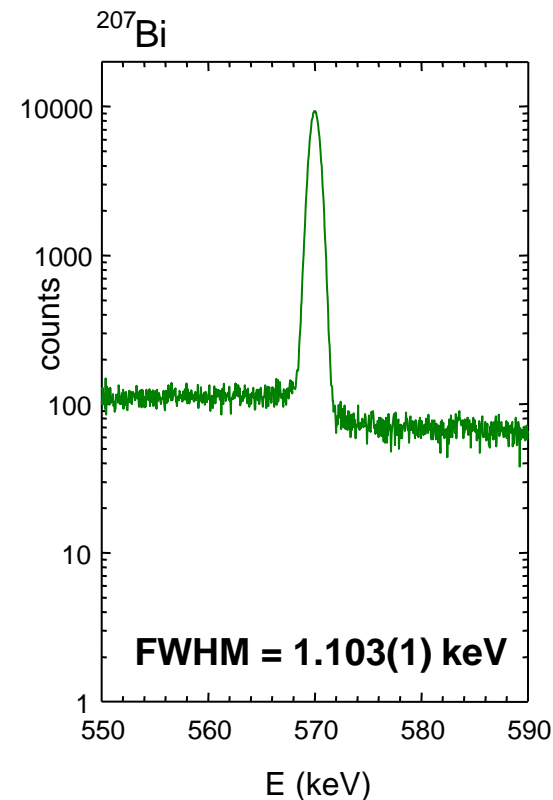
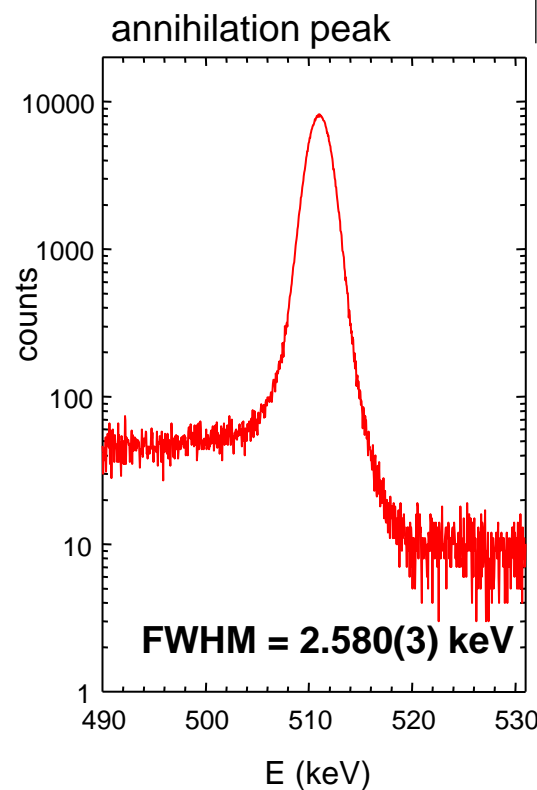
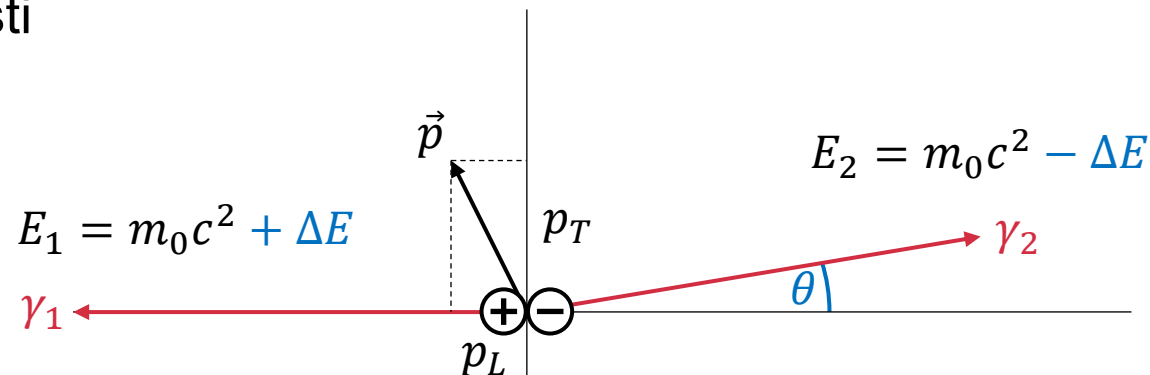
- Dopplerův posun energie ΔE

$$E_1 - E_2 = 2\Delta E = cp_L$$

$$E_1 + E_2 = 2m_0c^2$$

- odchylka od antikolinearity θ

$$\theta = \frac{p_T}{m_0c}$$



Doba života pozitronů

- doba života = doba termalizace + **doba difúze**
- pravděpodobnost anihilace

$$P_{(2)} = \sigma_{(2)} v n_e = \pi r_e^2 c n_e$$

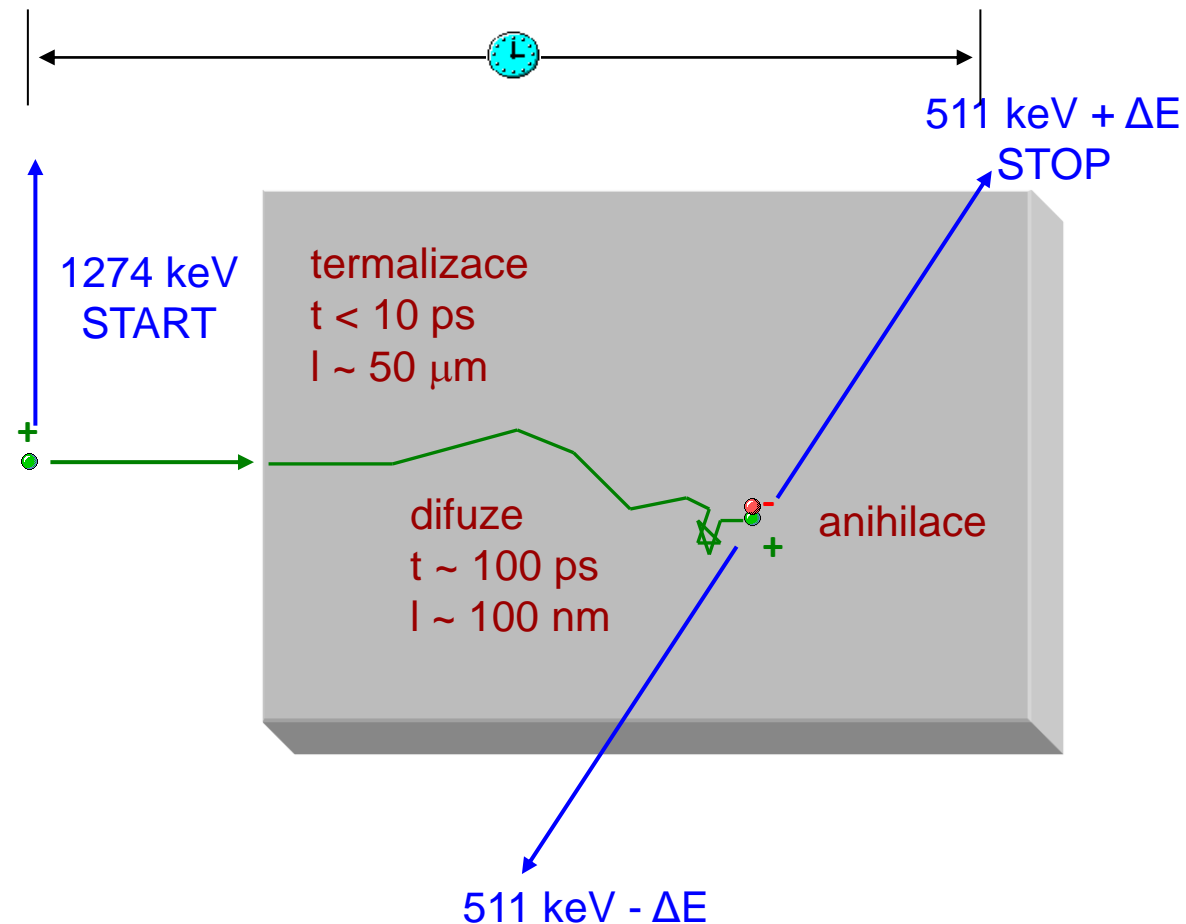
- anihilační rychlost

$$\lambda = \pi r_e^2 c \int n_-(\vec{r}) n_+(\vec{r}) \gamma(n_-) d\vec{r}$$

- doba života pozitronů

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

- enhancement factor $\gamma(n_-(\vec{r}))$

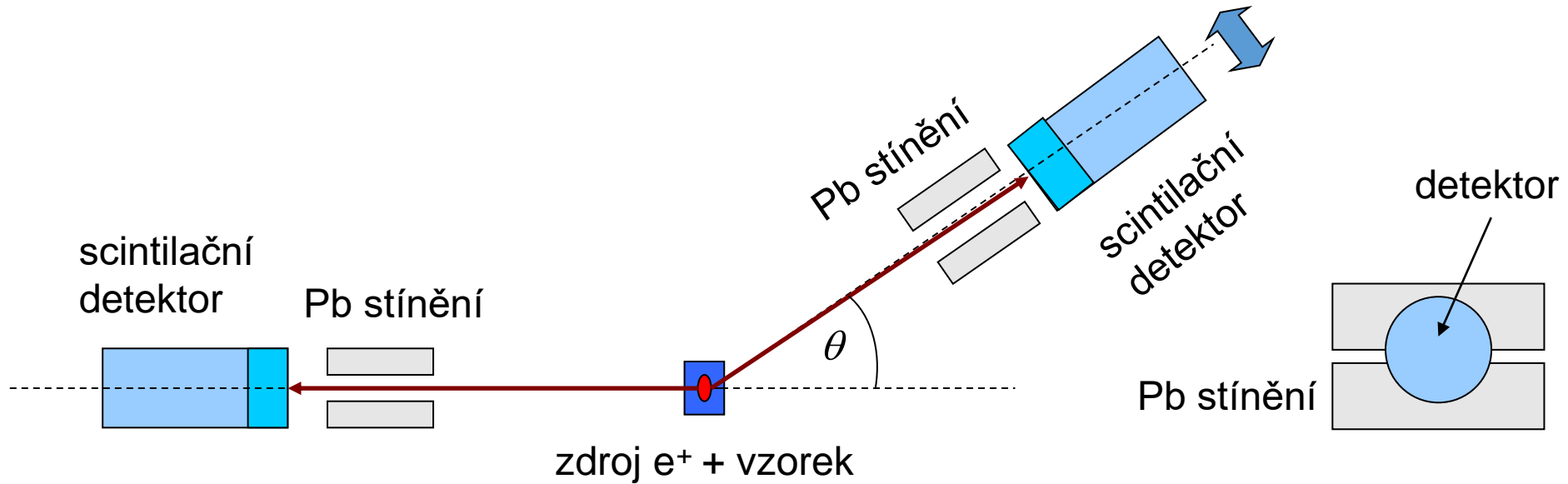


Anihilace pozitronů - pozorovatelné

- doba života pozitronů **LT** (τ, E) → scintilační detektory
- úhlové korelace **ACAR** (τ, θ) → scintilační detektory
- Dopplerovské rozšíření **DB** (E, τ) → polovodičové detektory
- **scintilační detektory** (scintilátor + fotonásobič)
 - výborné časové rozlišení
 - horší energetické rozlišení
- **polovodičové detektory** (HPGe)
 - vynikající energetické rozlišení
 - špatné časové rozlišení

Měření doby úhlových korelací (ACAR)

- long slit geometrie



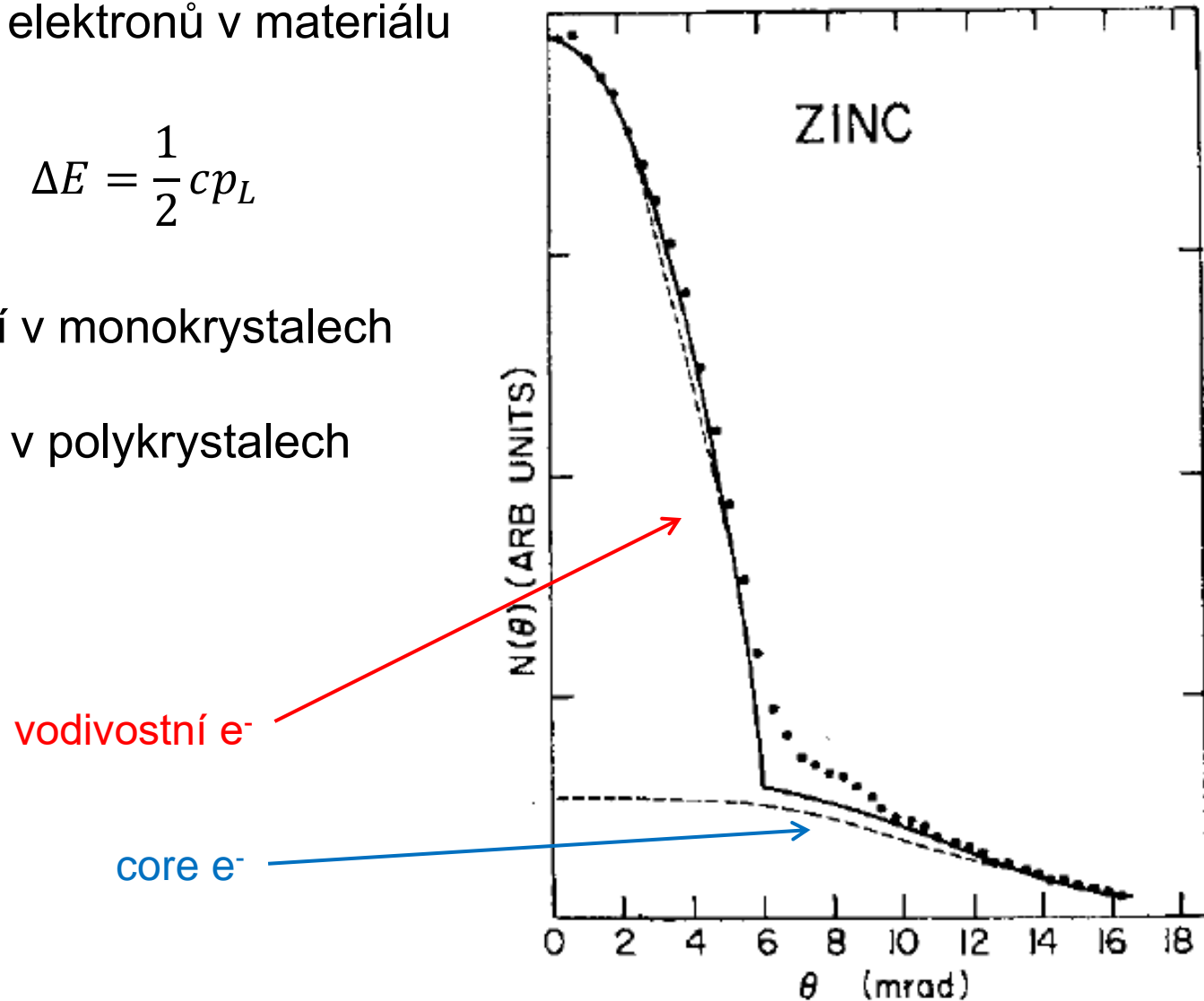
Měření doby úhlových korelací (ACAR)

- rozdělení hybností elektronů v materiálu

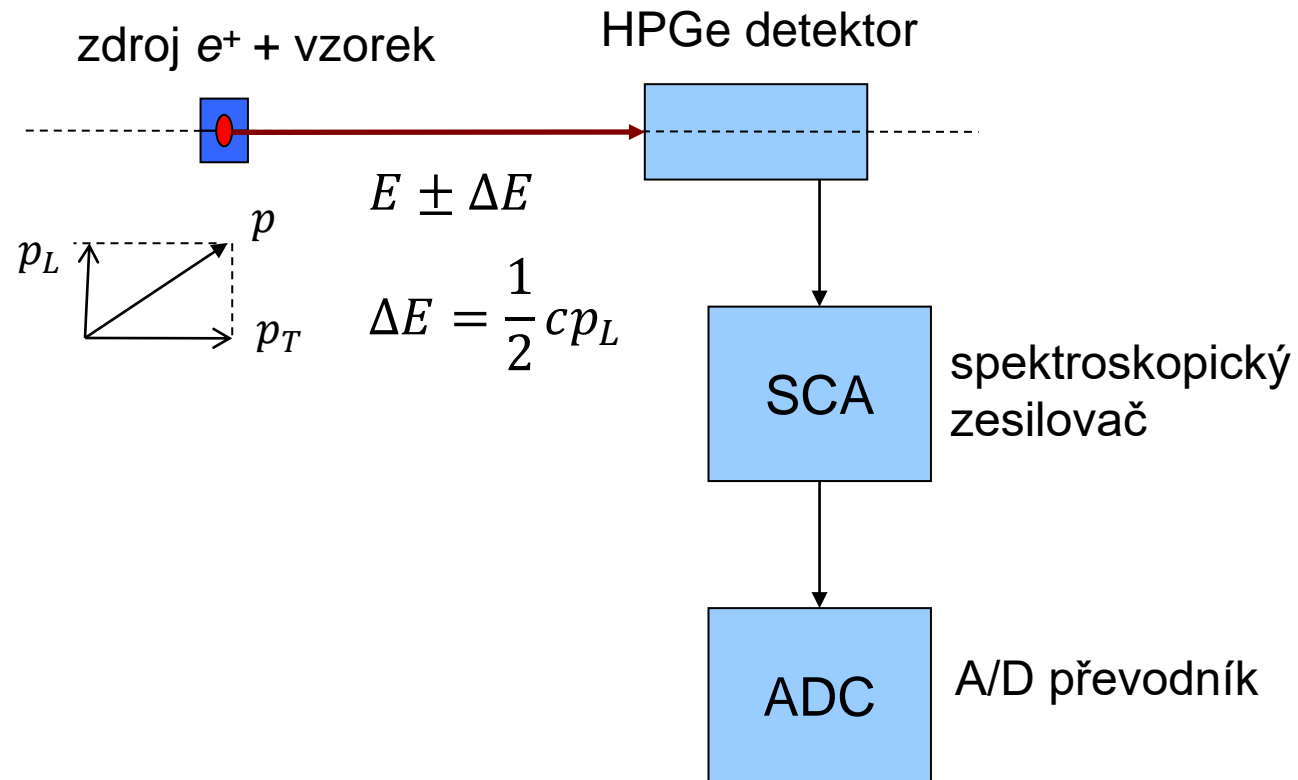
$$\theta = \frac{p_T}{m_0 c}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} c p_L$$

- mapování hybností v monokrystalech
- izotropní rozdělení v polykrystalech



Měření Dopplerovského rozšíření (DB)



Srovnání rozlišení DB vs ACAR

- **ACAR** $\theta = \frac{p_T}{m_0 c}$

neurčitost úhlu $\Delta\theta \approx 1$ mrad

$$\Rightarrow \Delta p_T \approx \Delta\theta \frac{m_0 c^2}{c} \approx 0.5 \frac{\text{keV}}{c}$$

- **DB** $\Delta E = \frac{1}{2} p_L c$

neurčitost energie $\Delta E \approx 1$ keV

$$\Rightarrow \Delta p_L \approx \frac{2\Delta E}{c} \approx 2 \frac{\text{keV}}{c}$$

Měření Dopplerovského rozšíření – tvarové parametry

- **S parametr**

$$S = A_{centr}/A_{tot}$$

$$S = \eta_B S_B + \sum_{i=1}^n \eta_{D_i} S_{D_i}$$

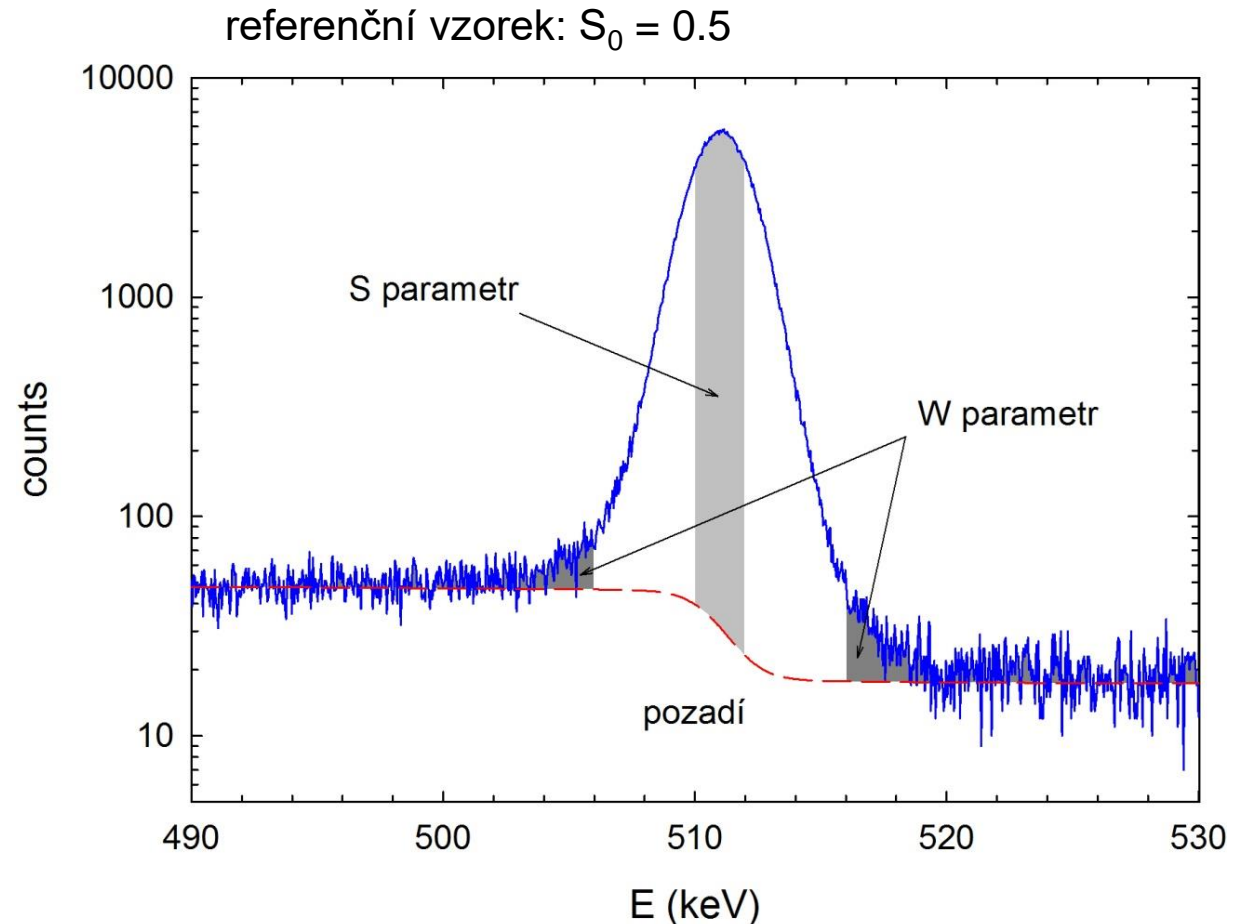
volné e⁺

e⁺ zachycené
v defektech

- **W parametr**

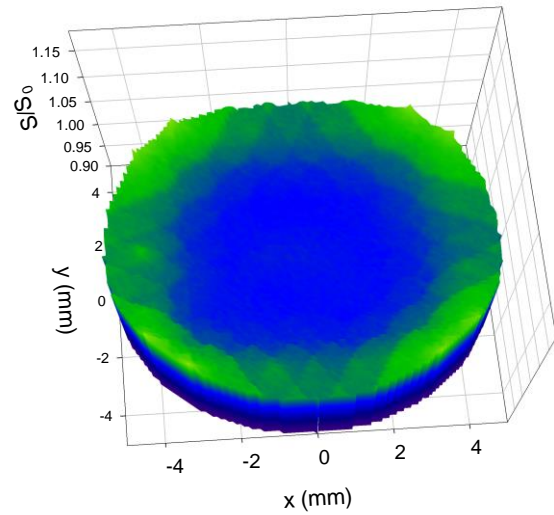
$$W = A_{tails}/A_{tot}$$

- S = míra podílu anihilací e⁺ s valenčními e⁻
→nárůst koncentrace defektů = nárůst S parametru
- W = míra podílu anihilací e⁺ s core e⁻ (chemické okolí defektu)

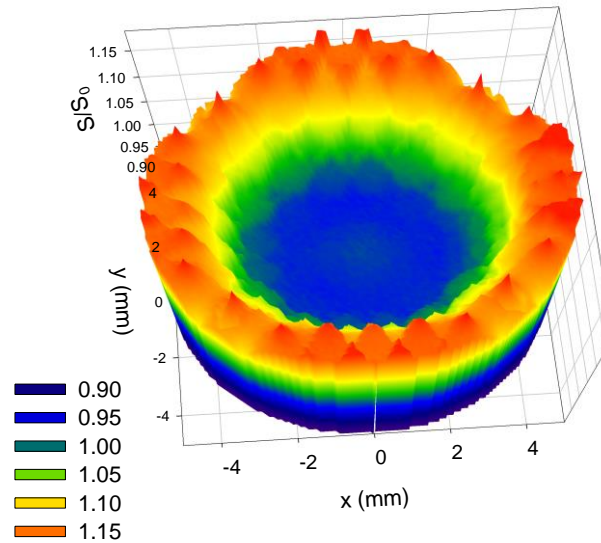


Měření Dopplerovského rozšíření – tvarové parametry

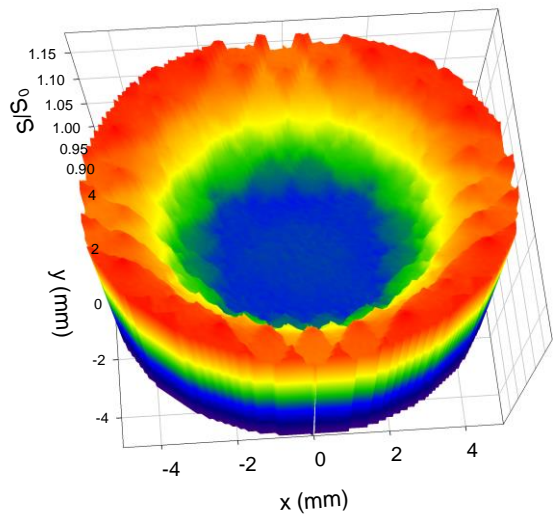
1 HPT revolution



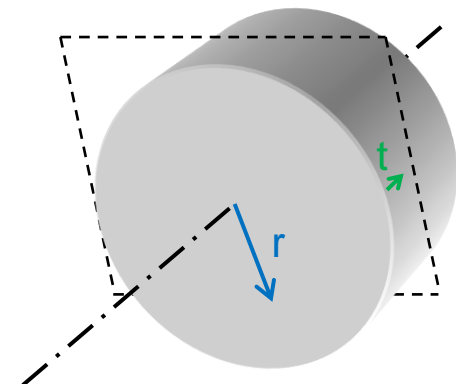
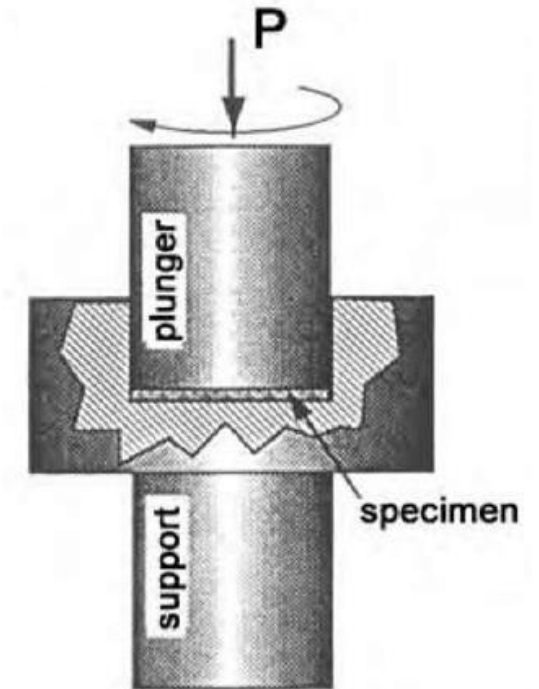
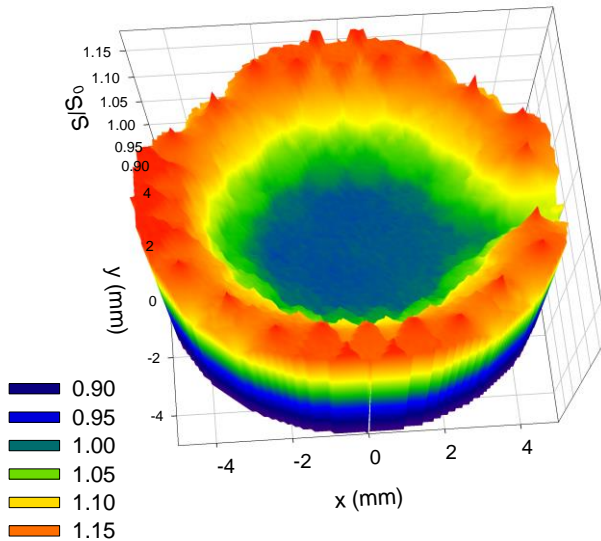
3 HPT revolutions



15 HPT revolutions

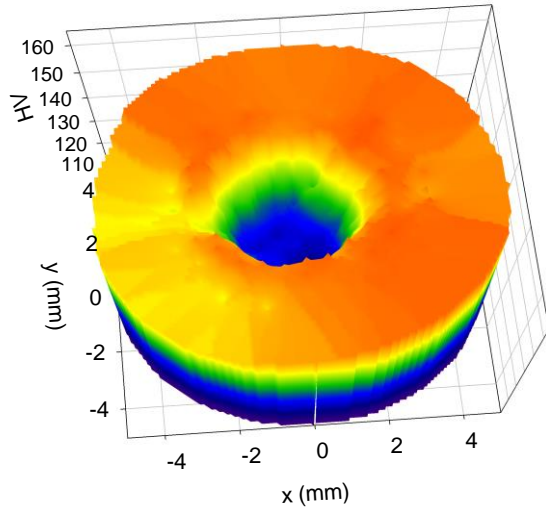


25 HPT revolutions

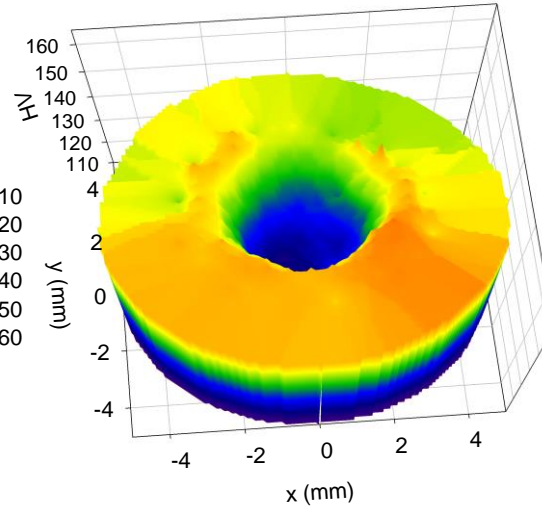


Srovnání s mikrotvrdostí

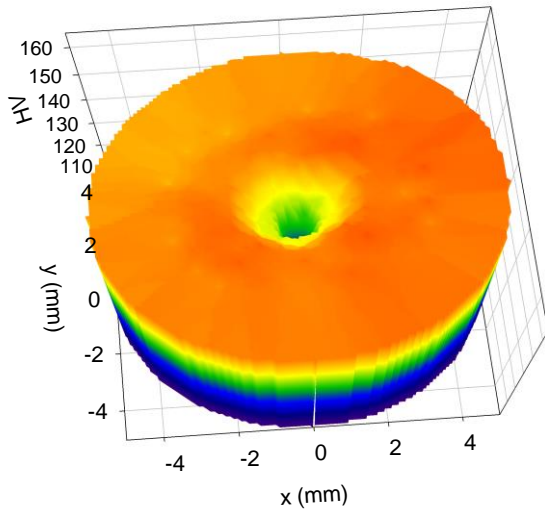
1 HPT revolution



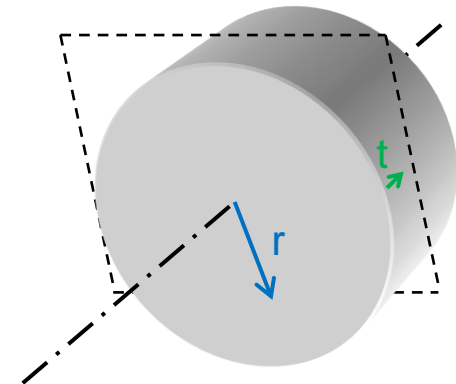
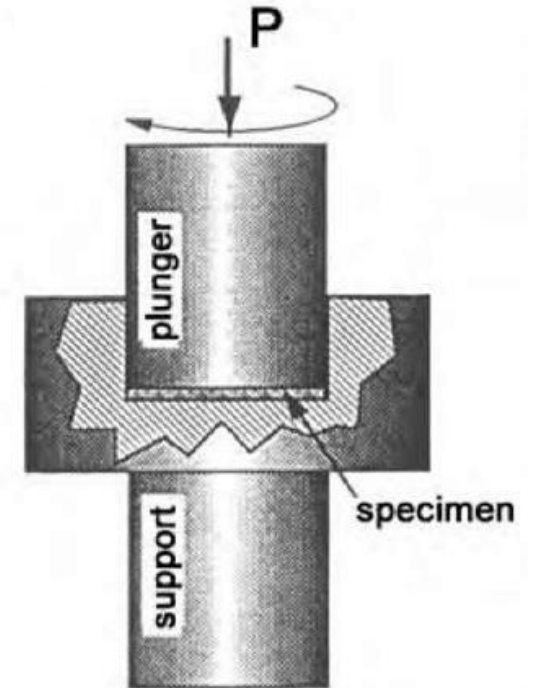
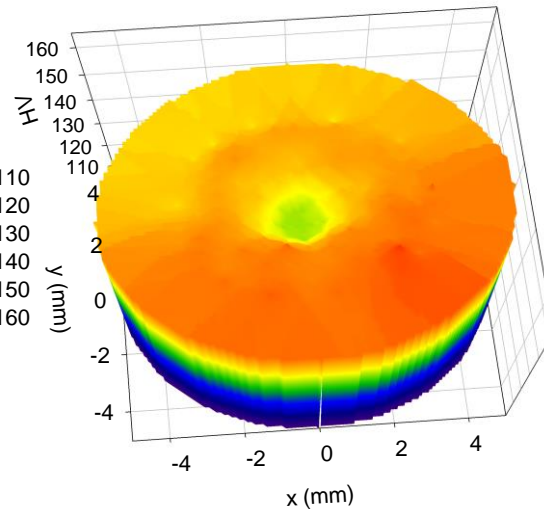
3 HPT revolutions



15 HPT revolutions

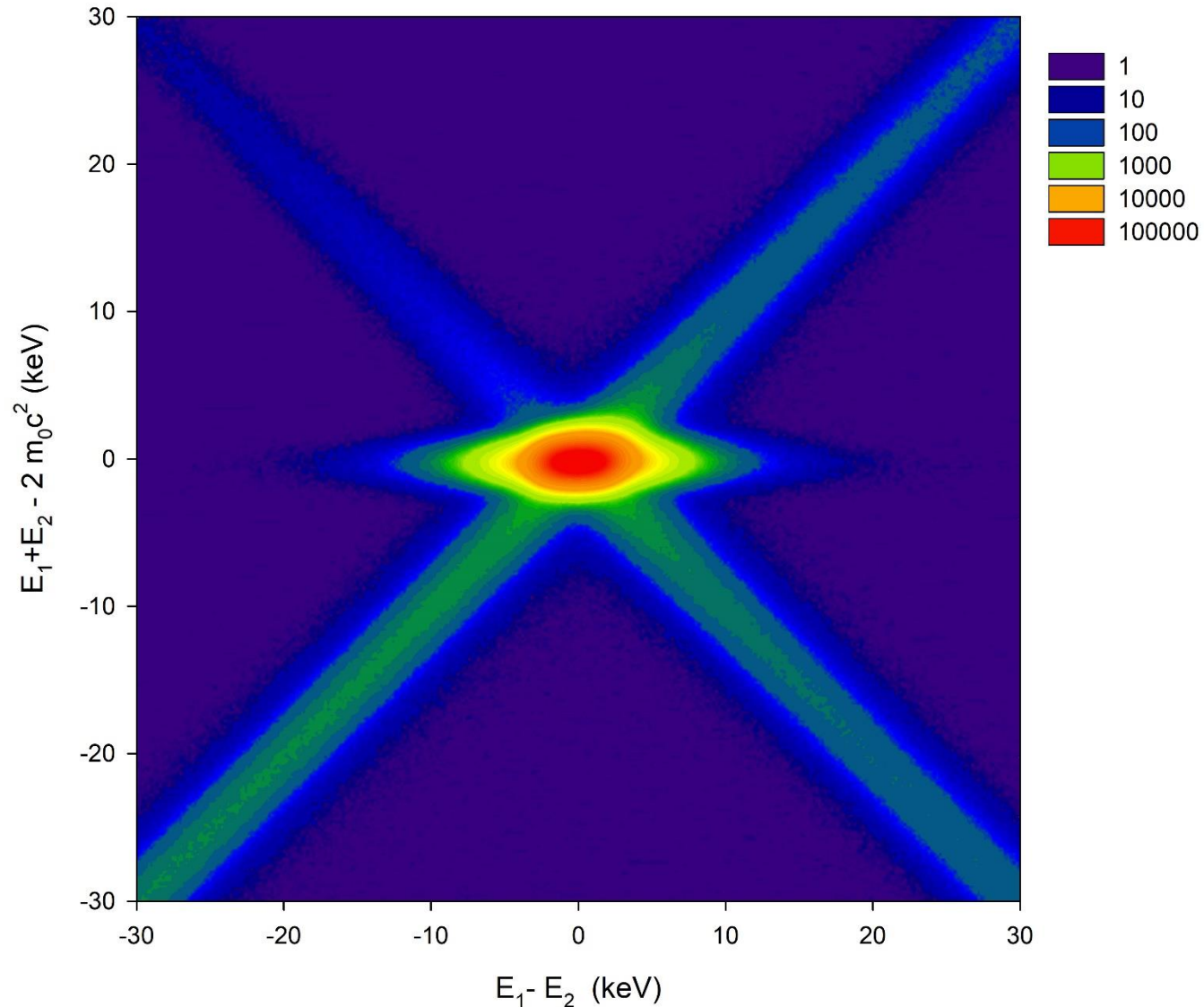
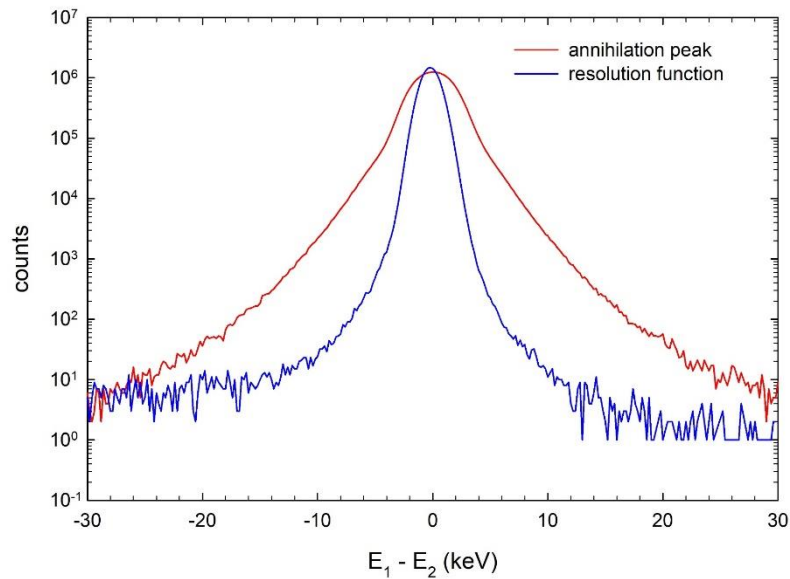


25 HPT revolutions



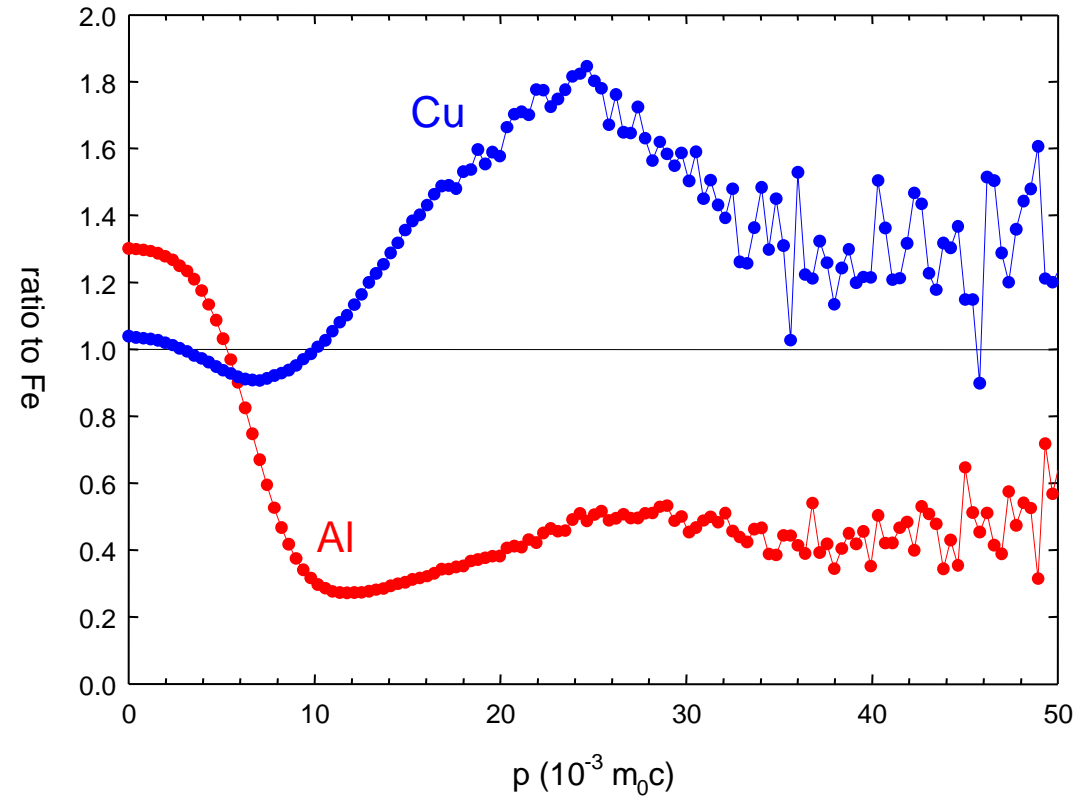
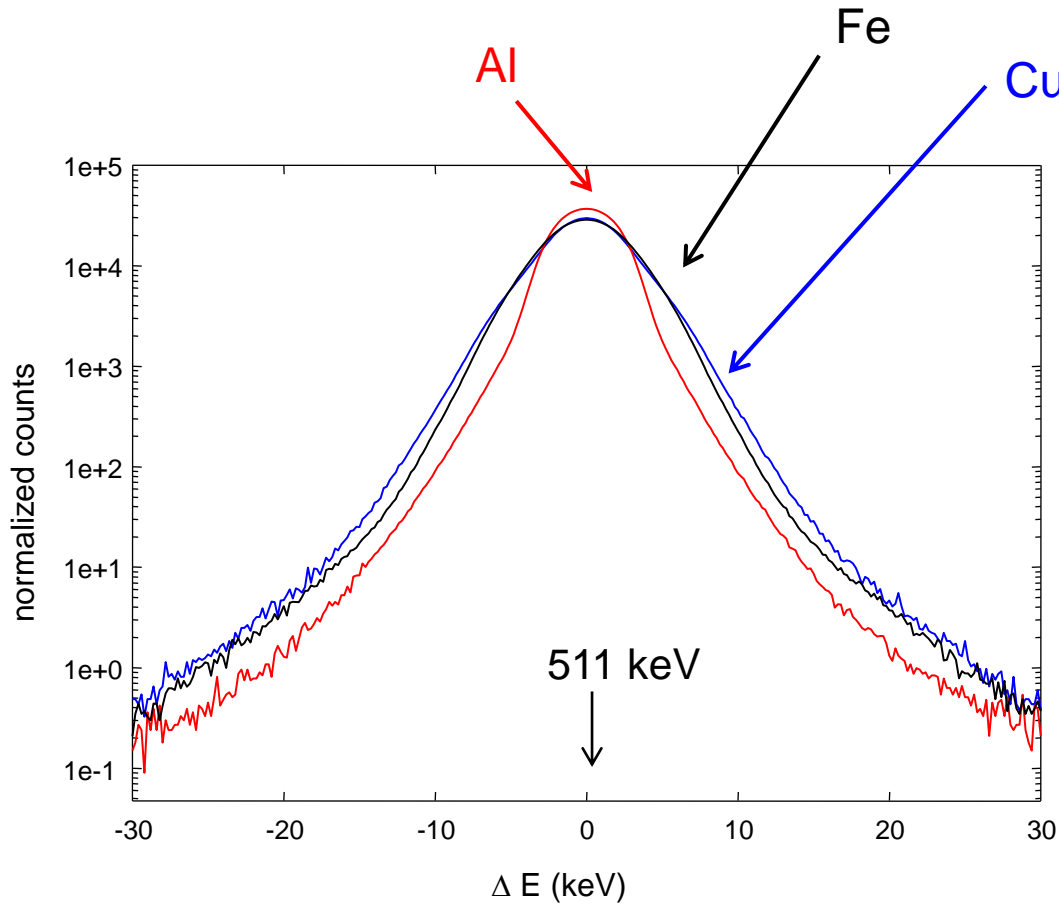
Koincidenční měření Dopplerovského rozšíření (CDB)

- $E_1 - E_2 = 2\Delta E$
 - Dopplerovský posun
- $E_1 + E_2 = 2m_0c^2$
 - rozlišovací funkce

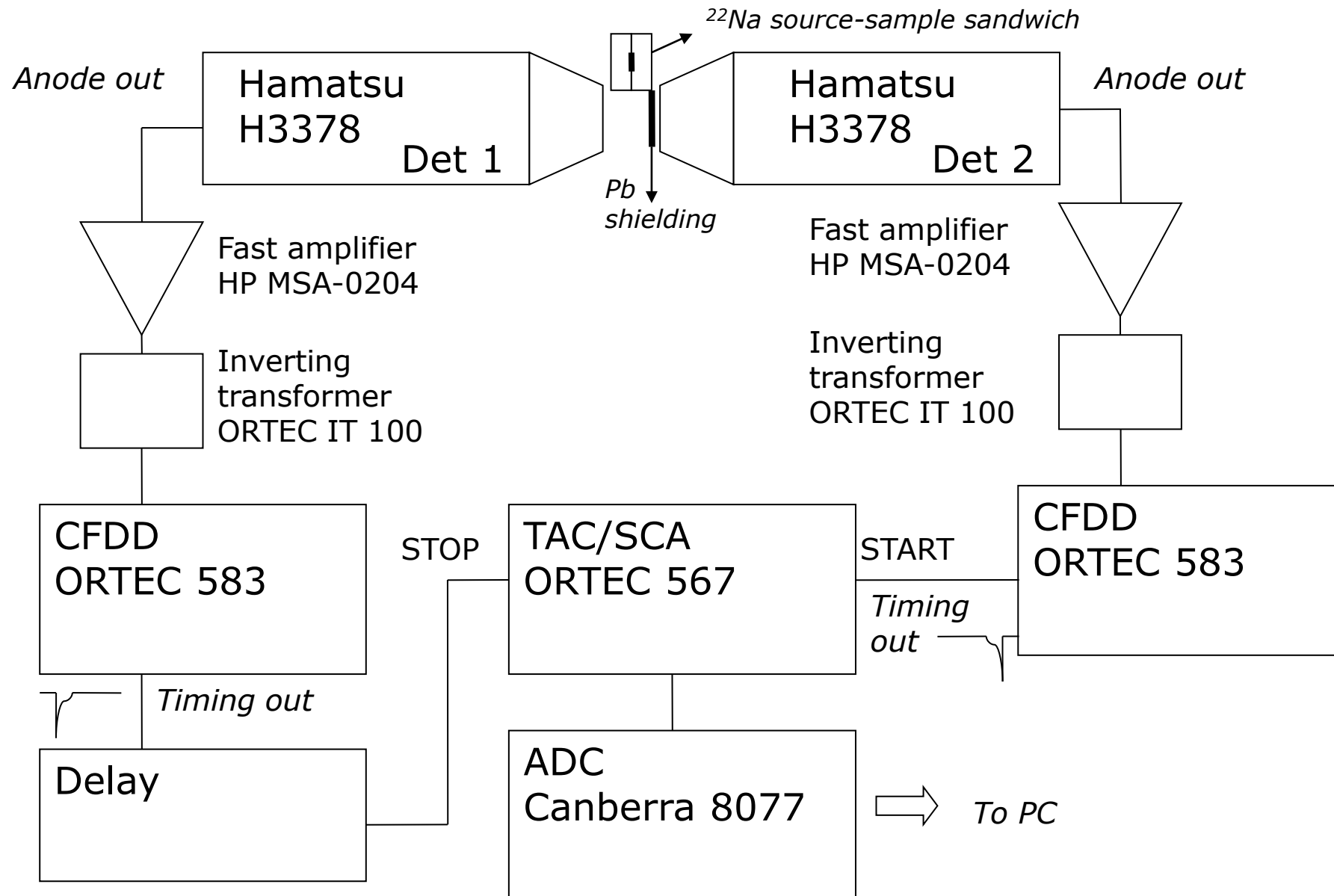


Koincidenční měření Dopplerovského rozšíření (CDB)

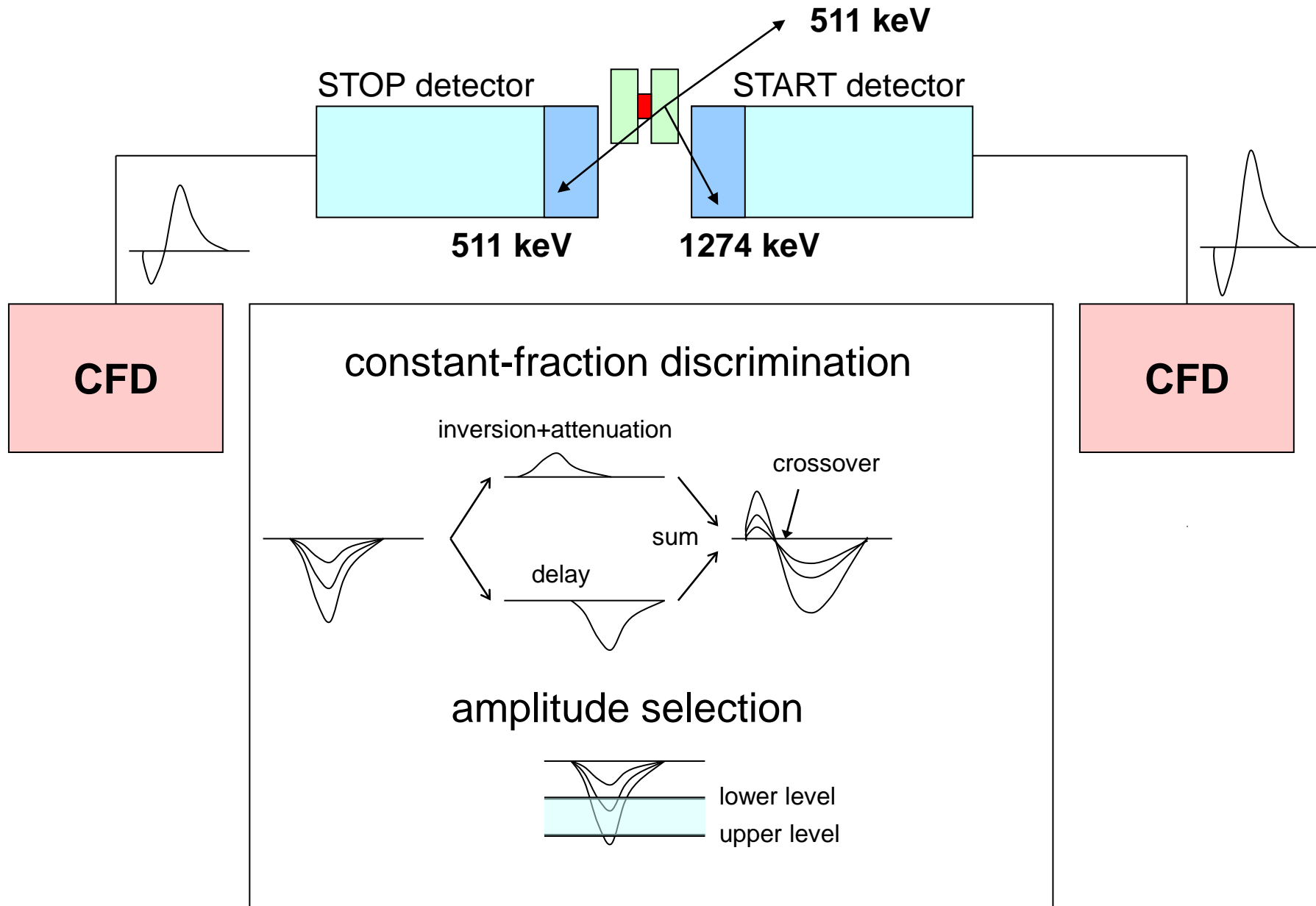
- podílové CDB křivky = chemické okolí defektu



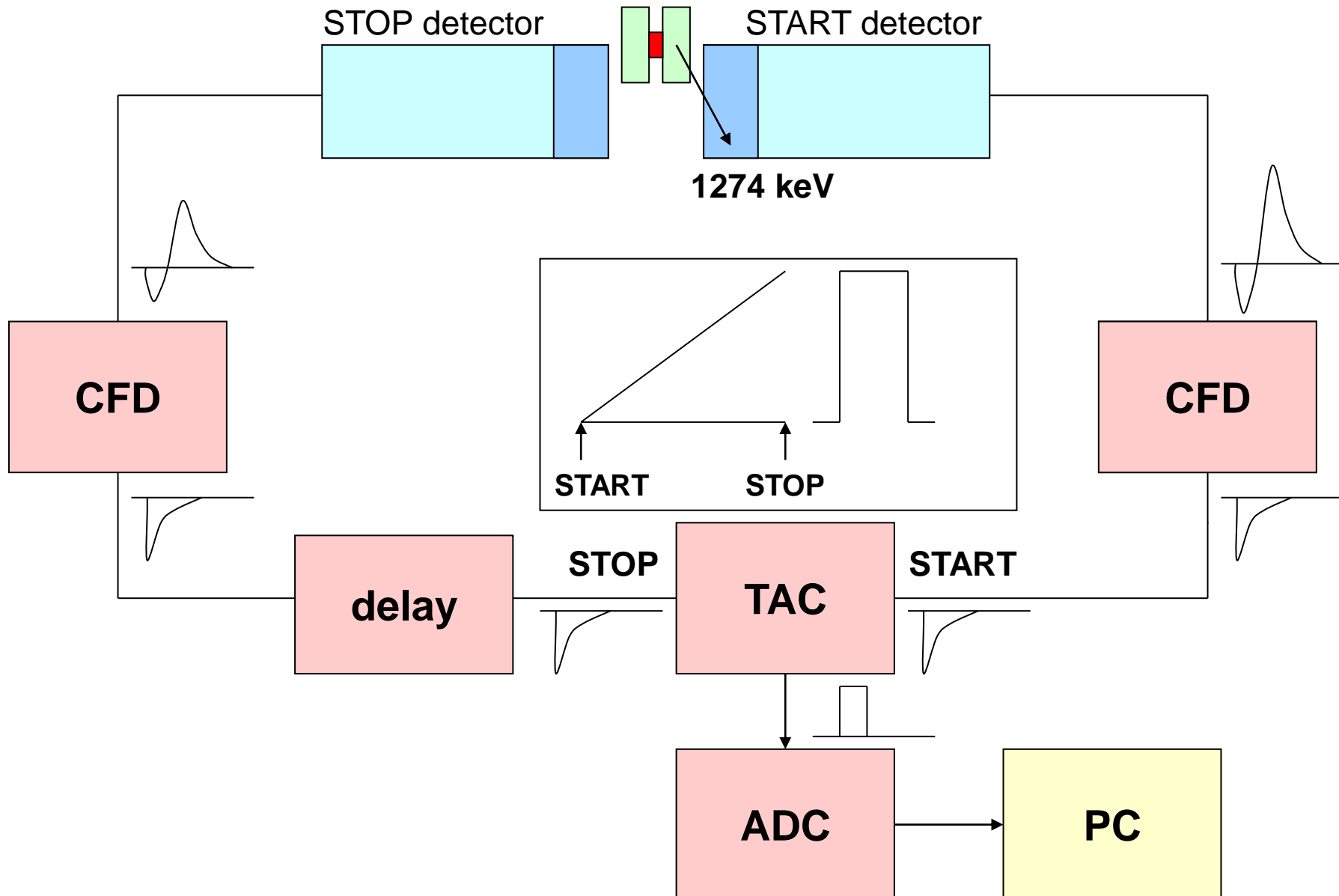
Měření doby života pozitronů – analogový spektrometr



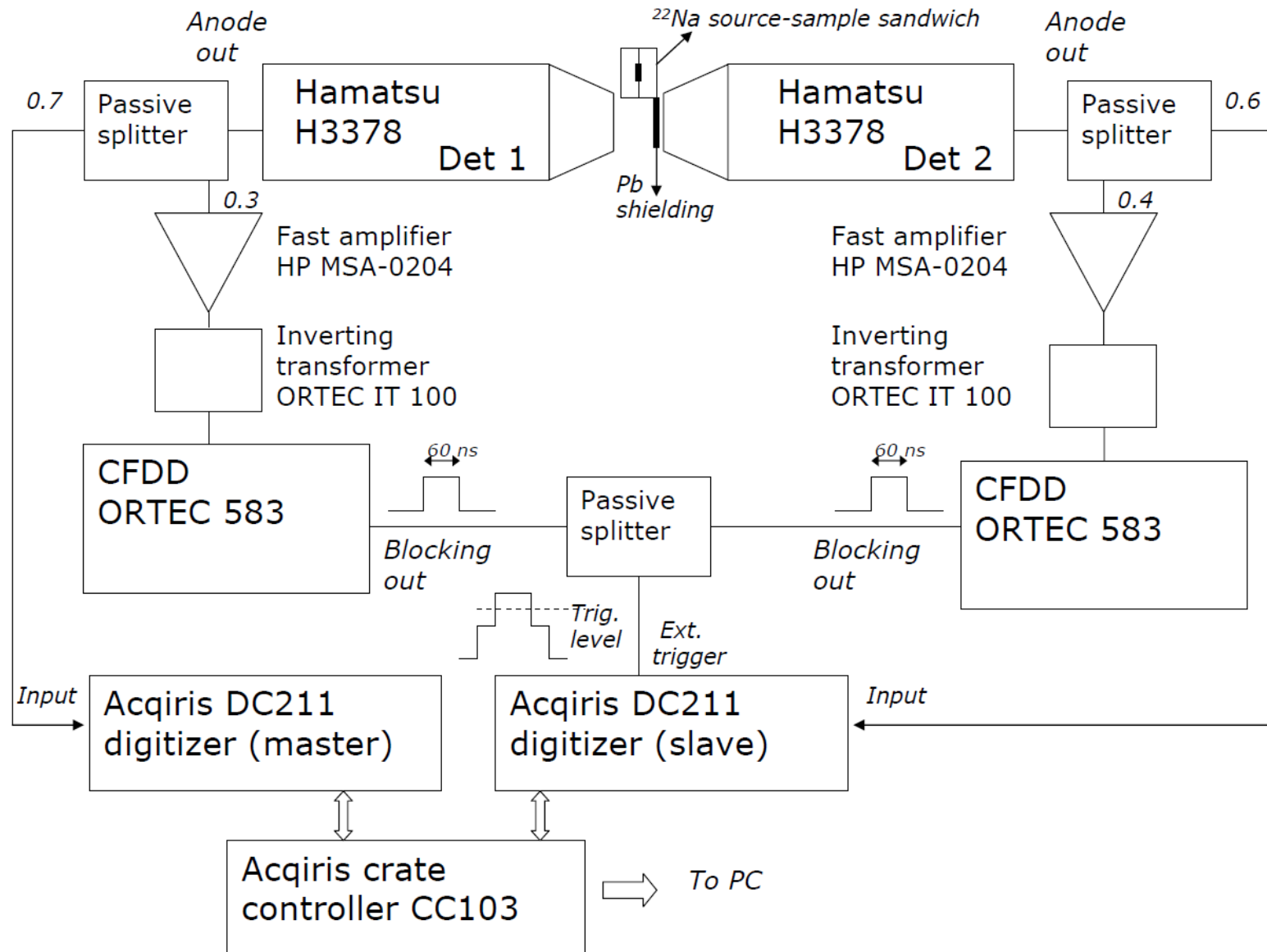
Měření doby života pozitronů – analogový spektrometr



Měření doby života pozitronů – analogový spektrometr



Měření doby života pozitronů – digitální spektrometr

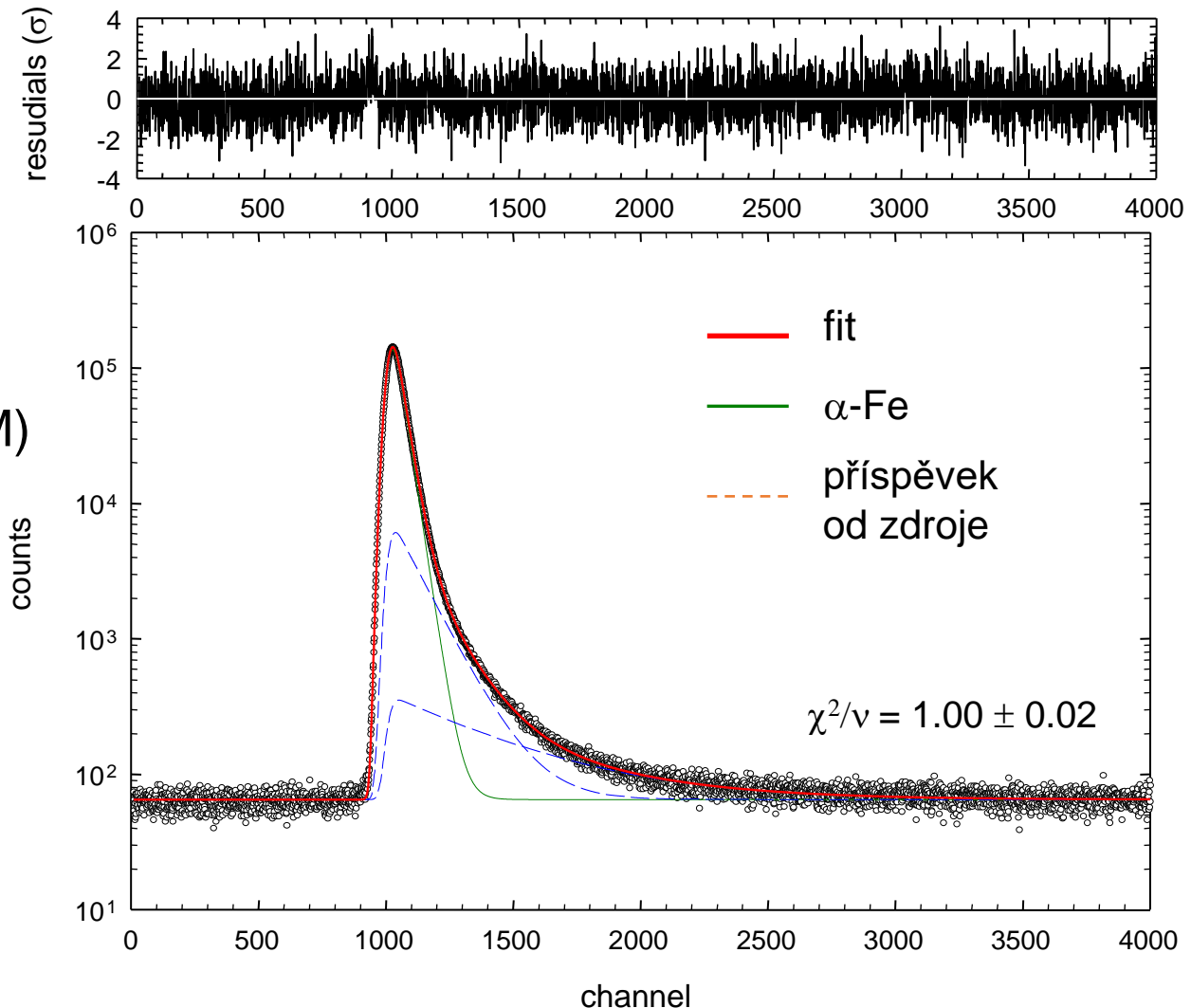


Měření doby života pozitronů

- referenční vzorek vyžíhané α -Fe (99.999%)
- zářič ^{22}Na (1.2 MBq)
- celková statistika 8×10^6
- α -Fe: $\tau = 107.0(3)$ ps
- časové rozlišení 145 ps (FWHM)

$$S_{id}(t) = \frac{I_f}{\tau_f} e^{-\frac{t}{\tau_f}} + \sum_{i=1}^n \frac{I_{D_i}}{\tau_{D_i}} e^{-\frac{t}{\tau_{D_i}}}$$

$$S_{real}(t) = S_{id} * R(t) + B$$



Měření doby života pozitronů

- deformovaný vzorek Nb

$$S_{id}(t) = \frac{I_f}{\tau_f} e^{-\frac{t}{\tau_f}} + \sum_{i=1}^n \frac{I_{D_i}}{\tau_{D_i}} e^{-\frac{t}{\tau_{D_i}}}$$

- volné pozitrony τ_f
- pozitrony zachycené v defektech τ_d
(n typů defektů – vakance, dislokace atd.)

- doby života → typy defektů
- intenzity → koncentrace defektů

