

Fyzikální metody a technika v biomedicíně NAFY101

Jan Matoušek – Katedra fyziky nízkých teplot

místnost V168 (Troja)

jan.matousek@matfyz.cuni.cz

<https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/biomedicina/>

Doporučená literatura:

- Particle Data Group, The Review of Particle Physics, <https://pdg.lbl.gov>
- W.R. Leo: Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer-Verlag, Berlin (1987)
- P. Hautojärvi: Positrons in Solids, Topics in Current Physics, Springer-Verlag (1979)
- A. Dupasquier, A.P. Mills, Jr. (eds.): Positron Spectroscopy of Solids, IOS Press, Amsterdam (1995)
- Y.C. Jean: Principles and Application of Positron & Positronium Chemistry, World Scientific, Singapore (2003)

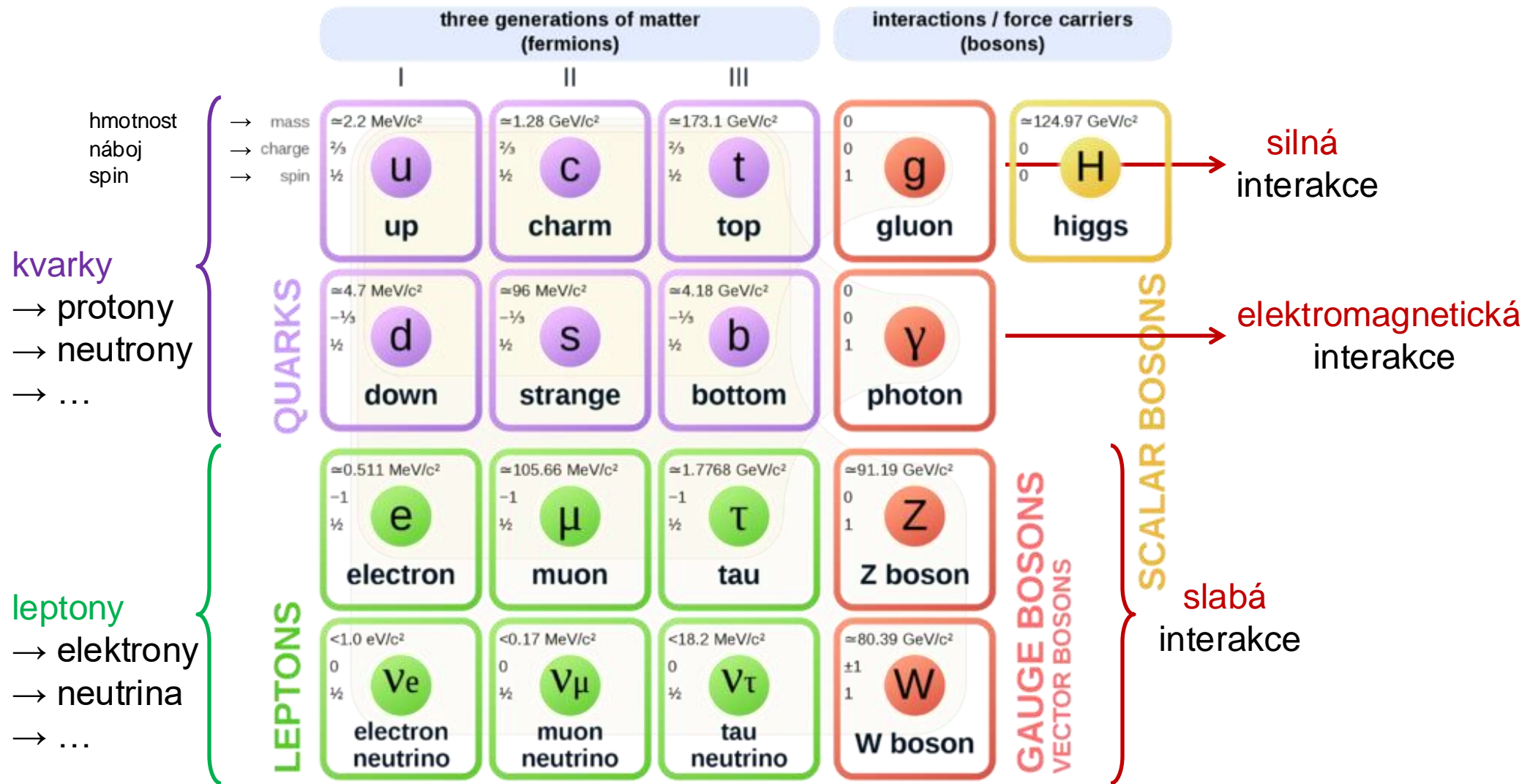
Fyzikální metody a technika v biomedicíně

Obsah:

- Interakce částic a záření s látkou a se živou tkání
- Zobrazovací systémy využívající rentgenové záření
- Anihilace pozitronů
- Pozitronová emisní tomografie
- Další nukleární zobrazovací systémy

Elementární částice (standardní model)

Standard Model of Elementary Particles



Standardní model elementárních částic – fermiony

Fermiony (částice hmoty)

- poločíselný spin ($1/2, 3/2, 5/2, \dots$)
 - **antičástice** – mají stejnou hmotnost a spin, ale opačný náboj
-

1. Leptony („lehké částice“)

- existují samostatně
- elektrický náboj -1 (např. e^-) nebo 0 (např. ν_e)

elektron e^- (-1) \rightarrow pozitron e^+ (+1)

elektronové neutrino ν_e (0) \rightarrow elektronové antineutrino $\bar{\nu}_e$ (0)

Standardní model elementárních částic – fermiony

Fermiony (částice hmoty)

- poločíselný spin ($1/2, 3/2, 5/2, \dots$)
 - **antičástice** – mají stejnou hmotnost a spin, ale opačný náboj
-

2. Kvarky („těžké částice“)

- vytvářejí tzv. **hadrony** = **baryony** (qqq, fermiony) a **mezony** (q \bar{q} , bosony)
- elektrický náboj $+2/3$ (např. **up**) nebo $-1/3$ (např. **down**)

proton $p = uud (+1)$ \rightarrow antiproton $\bar{p} = \bar{u}\bar{u}\bar{d} (-1)$

neutron $n = udd (0)$ \rightarrow antineutron $\bar{n} = \bar{u}\bar{d}\bar{d} (0)$

pion π^+ $\pi^+ = u\bar{d} (+1)$ \rightarrow pion π^- $\pi^- = \bar{u}d (-1)$

Standardní model elementárních částic – bosony

Bosony (částice pole, interakce)

- celočíselný spin (0, 1, 2, ...)
 - **antičástice** – mají stejnou hmotnost a spin, ale opačný náboj
-
- **elektromagnetická interakce** (fotony γ)
 - působí na nabitě částice (leptony, kvarky, baryony)
 - elektromagnetické silové působení
 - **slabá interakce** (bosony W^+ , W^- , Z^0)
 - působí na kvarky a leptony
 - např. radioaktivní rozpad jader β^+ a β^-

Standardní model elementárních částic – bosony

Bosony (částice pole, interakce)

- celočíselný spin (0, 1, 2, ...)
 - **antičástice** – mají stejnou hmotnost a spin, ale opačný náboj
-

- **silná interakce**

- **základní silná interakce** (gluony g)

- působí na kvarky
 - drží pohromadě hadrony

- **zbytková silná interakce** (mezony $q\bar{q}$)

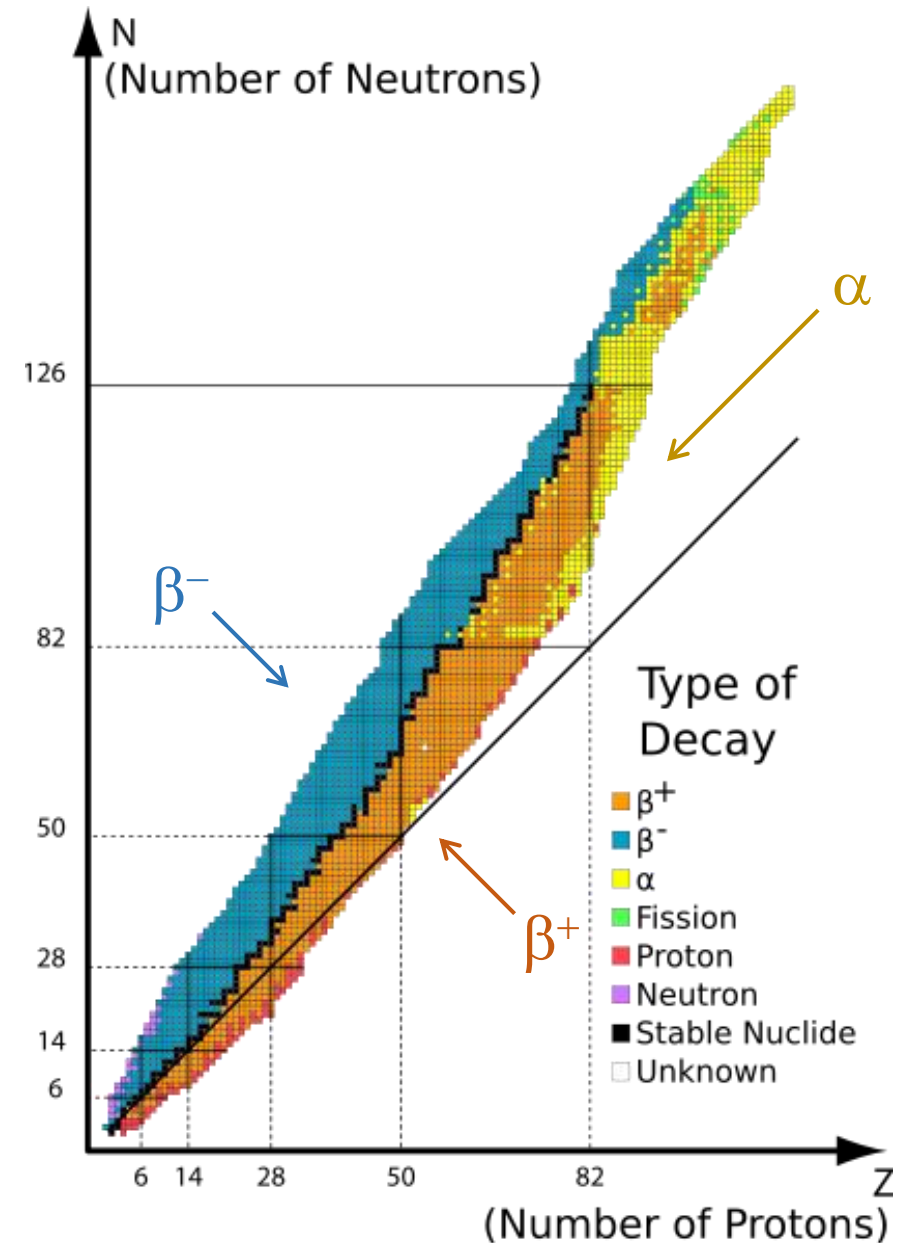
- působí na hadrony
 - drží pohromadě jádro (jaderná síla)

- **Higgsovo pole** (Higgsův boson H)

- stojí za původem hmotnosti elementárních částic

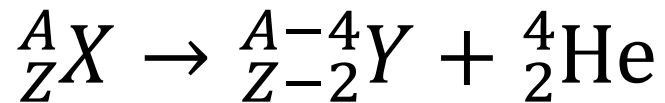
Radioaktivita

- radioaktivní přeměny (rozpady)
 - α rozpad
 - β rozpad
 - jaderné štěpení aj.
- vznik jaderného záření → ionizující záření
 - záření přímo ionizující
proud elektricky nabitých částic
 - záření nepřímo ionizující
(elektromagnetické záření a neutrony)



α rozpad

- přeměna těžšího prvku na lehčí (snížení nukleonového čísla A)

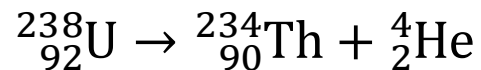


- alfa částice ${}^4_2\alpha^{2+} = \text{jádro } {}^4_2\text{He}^{2+}$

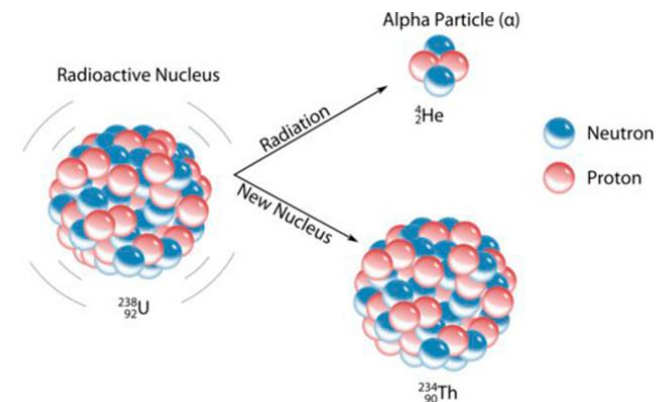
- diskrétní energetické spektrum

$E = 4\text{--}10 \text{ MeV}$

- příklad: rozpad jádra ${}^{238}_{92}\text{U}$

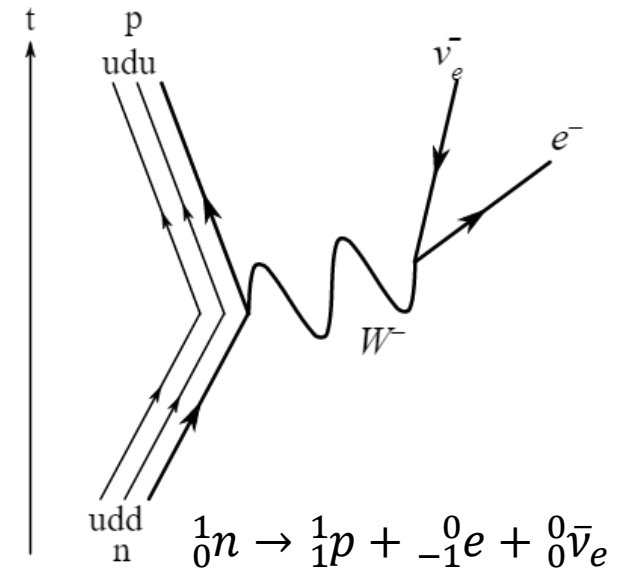
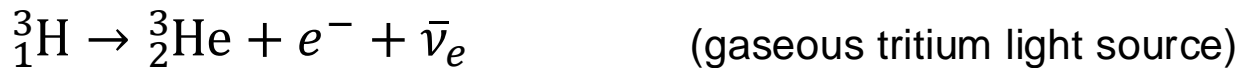
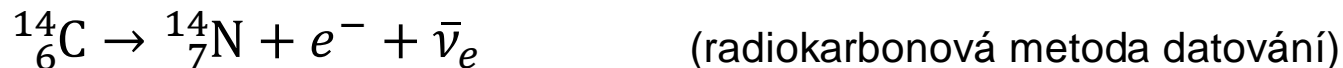


$$T_{1/2} = 4.5 \times 10^9 \text{ y}$$

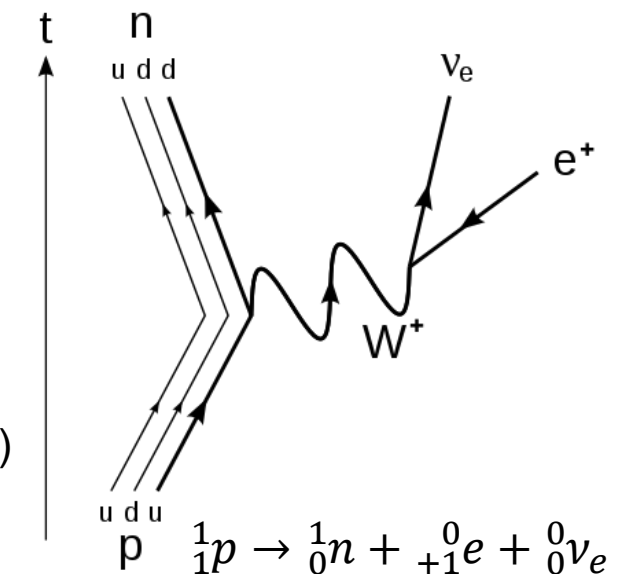
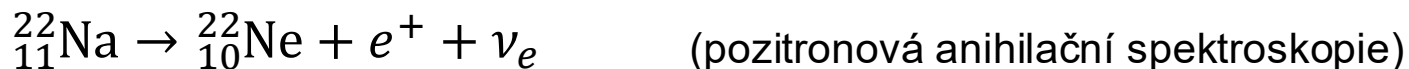


β rozpad

- β^- rozpad (zvýšení počtu protonů o 1)

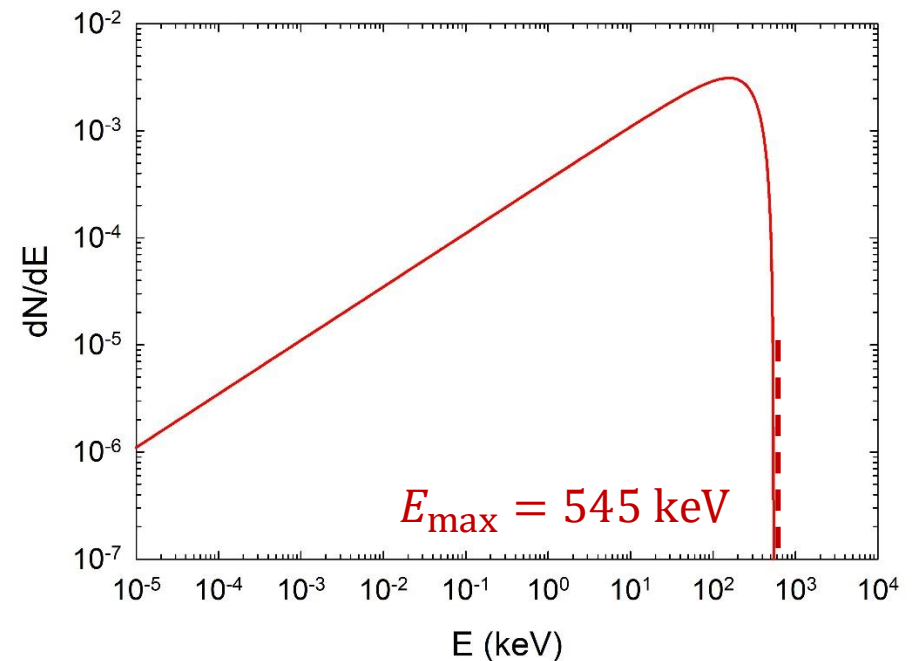
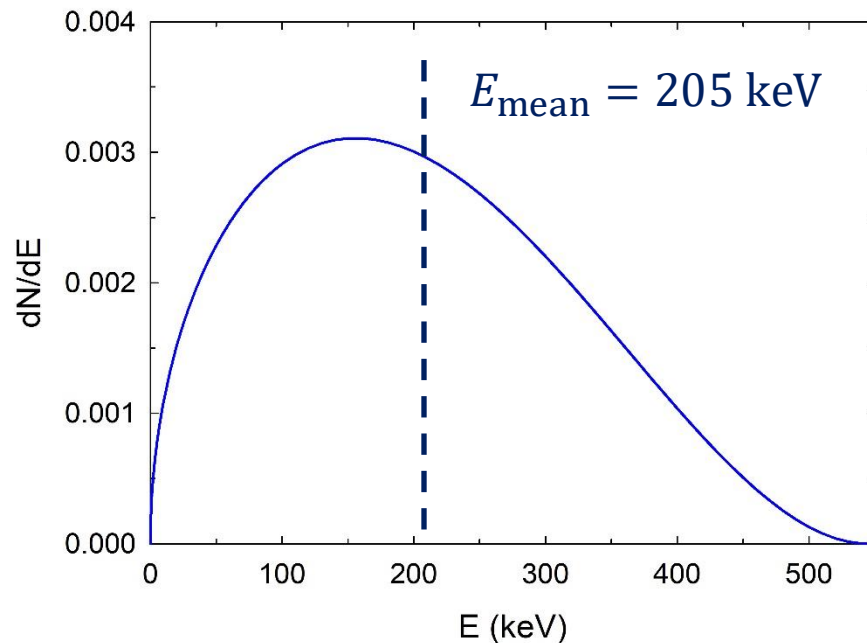


- β^+ rozpad (snížení počtu protonů o 1)



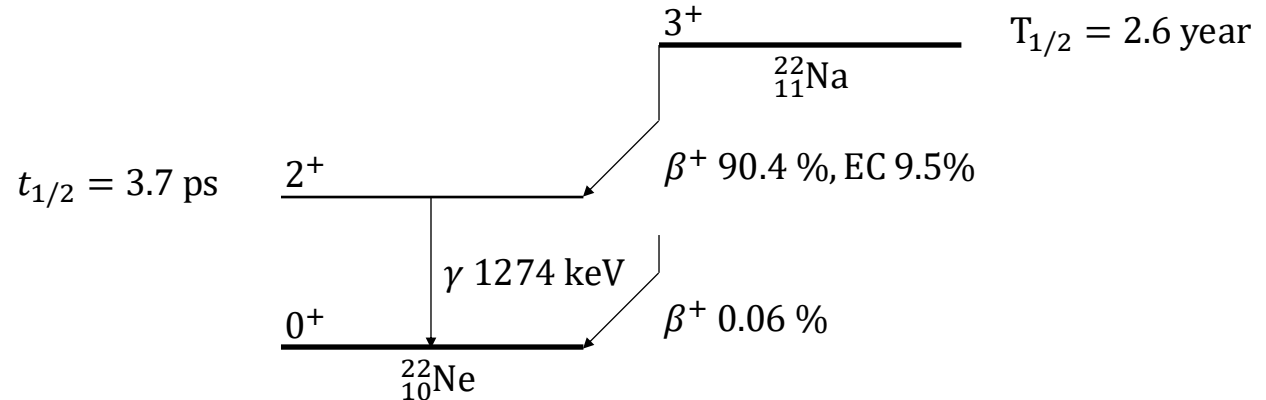
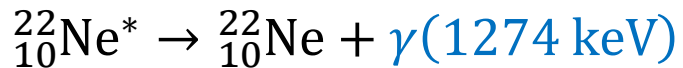
β rozpad

- β^- částice = elektrony
- β^+ částice = pozitrony („antielektrony“)
- emise neutrina (β^+) resp. antineutrina (β^-) → spojité energetické spektrum
- příklad: β^+ rozpad ${}^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{22}_{10}\text{Ne} + e^+ + \nu_e$

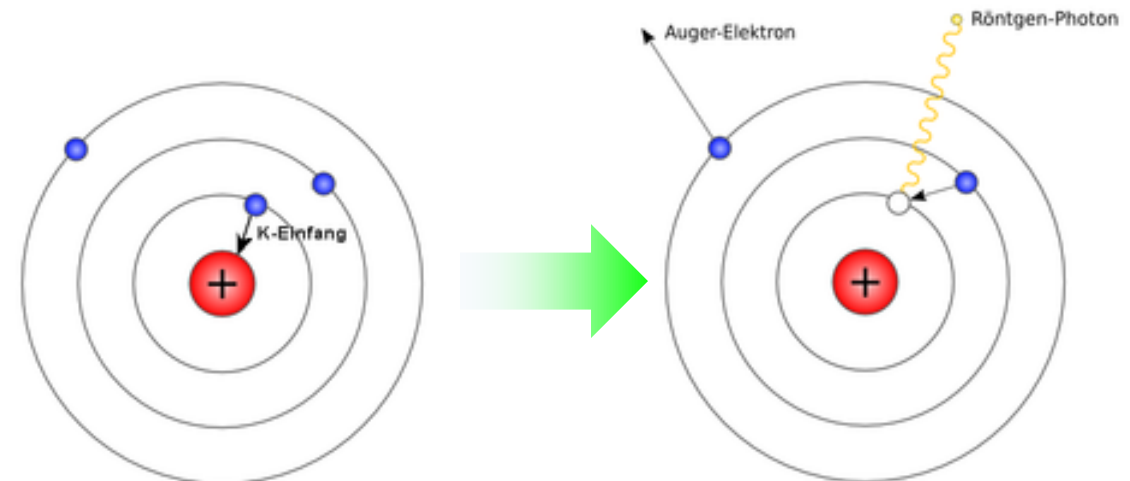
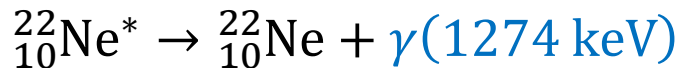
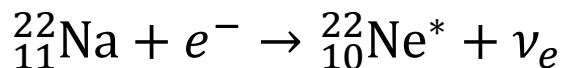


Příklad: rozpad ^{22}Na

- β^+ rozpad



- záchyt e^- (EC = electron capture)

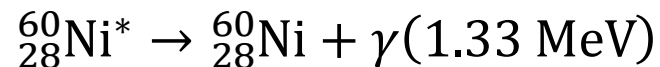
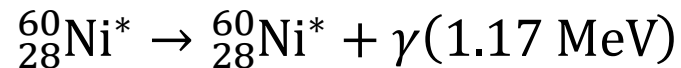


- pro $Q < 2m_e c^2 = 2 \times 511 \text{ keV}$ pouze EC
- doprovázený emisí rtg. fotonu (X) nebo Augerova elektronu (e^-)

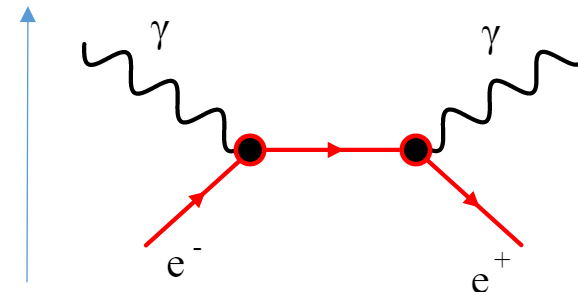
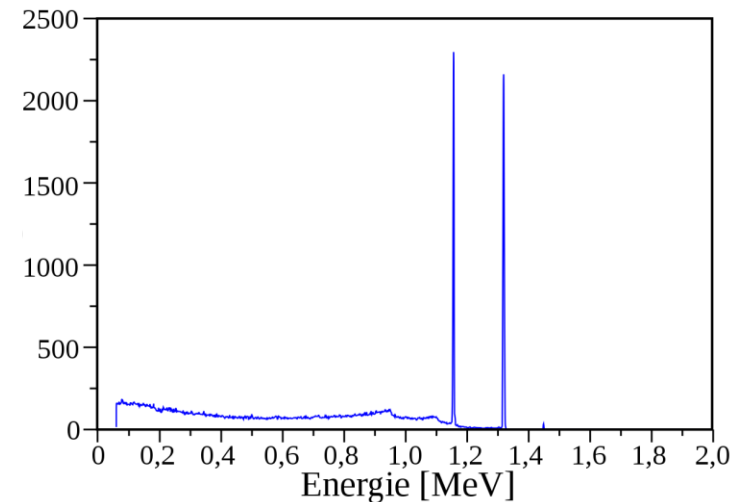
Emise γ záření

- elektromagnetické záření (γ fotony)
- **diskrétní energetické spektrum** $E > 10$ keV
- původ v jaderných a subjaderných reakcích

- de-excitace jader (snížení energie jádra)

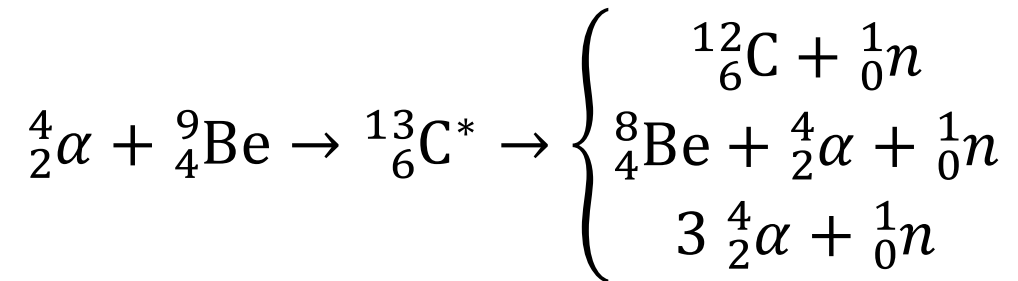


- anihilace částice – antičástice

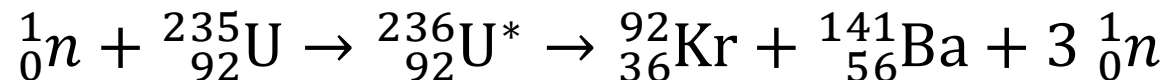


Emise neutronového záření

- **pomalé neutrony** ($E = 1 \text{ meV} - 1 \text{ keV}$), středně rychlé neutrony ($E = 1 \text{ keV} - 1 \text{ MeV}$)
- **rychlé neutrony** ($E = 1 - 10 \text{ MeV}$), vysoko-energetické neutrony ($E = 10 - 50 \text{ MeV}$)
- **energetické spektrum** (většinou) **spojité** + rozmazání Dopplerovým posuvem
- vzniká při jaderných reakcích nebo jaderném štěpení
 - emitor a částic + vhodný izotop



- štěpení jádra ${}^{235}_{92}\text{U}$ v jaderných reaktorech



Radioaktivita

- zákon radioaktivní přeměny (rozpadový zákon)

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \quad \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- poločas přeměny (rozpadu)

$$N(T) = \frac{1}{2} N_0 \quad \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

- aktivita = počet rozpadů za jednotku času

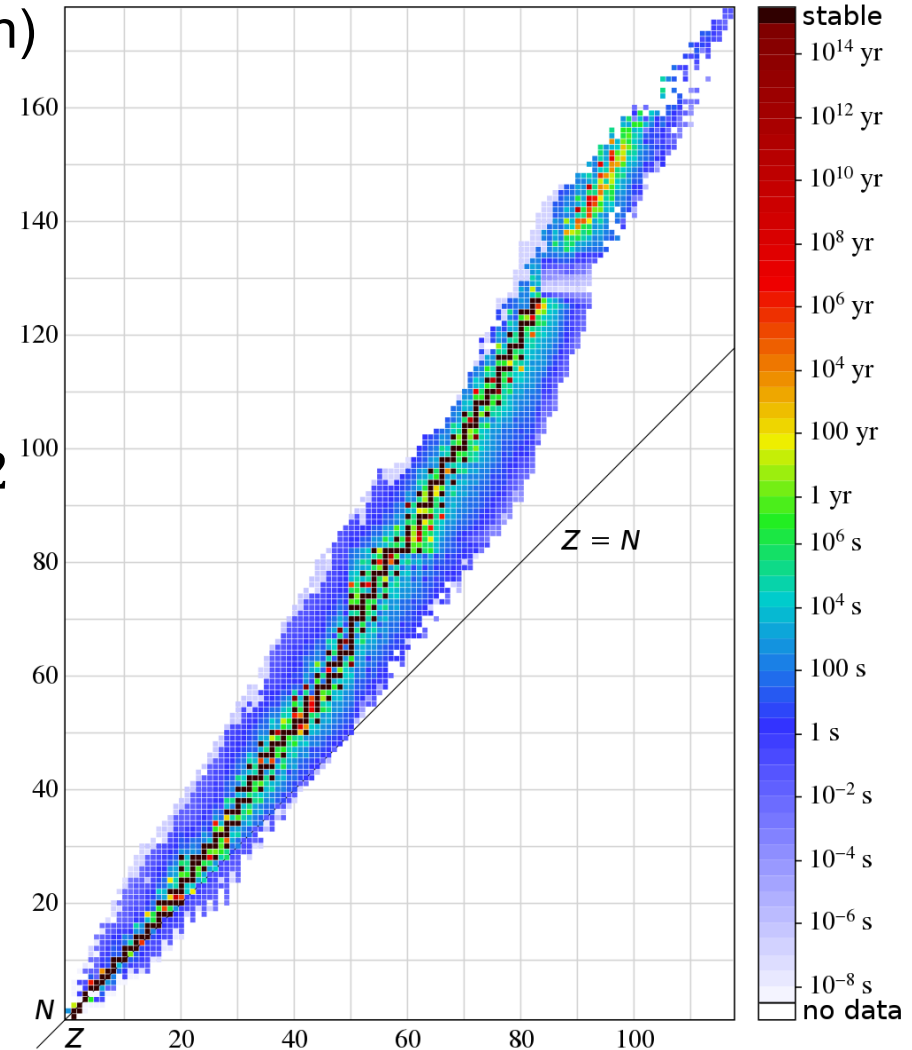
$$A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| \quad \Rightarrow A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

$$1 \text{ Curie (Ci)} = 3.7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$1 \text{ Ci} = \text{aktivita } 1 \text{ g } {}^{226}\text{Ra}$$

$$1 \text{ Becquerel (Bq)} = \text{s}^{-1} = 2.7 \times 10^{-11} \text{ Ci}$$

$$1 \text{ MBq} = 27 \text{ } \mu\text{Ci}$$



λ – rozpadová konstanta

τ – střední doba života

Ionizující záření

Typ záření	Původ	Fyzikální proces	Náboj	m_0c^2 (MeV)	energetické spektrum
α částice (jádra ^4He)	jádro	jaderný rozpad / reakce	+2	3727.33	diskrétní (MeV)
β^- záření (elektrony)	jádro	jaderný rozpad	-1	0.511	spojité (keV – MeV)
β^+ záření (pozitrony)	jádro	jaderný rozpad	+1	0.511	spojité (keV – MeV)
γ záření (γ fotony)	jádro	de-excitace jádra	0	0	diskrétní (keV – MeV)
Rentgenové záření (X fotony)	elektronový obal	de-excitace atomu / Bremsstrahlung	0	0	diskrétní / spojité (eV – keV)
konverzní e^-	elektronový obal	de-excitace jádra	-1	0.511	diskrétní (keV)
Augerovy e^-	elektronový obal	de-excitace atomu	-1	0.511	diskrétní (eV – keV)
neutrony	jádro	jaderná reakce	0	939.57	spojité / diskrétní (keV – MeV)

Účinky ionizujícího záření na látku

- **dávka** D (jednotka **gray**) = *množství absorbované radiace*

$$D = \frac{d\bar{\epsilon}}{dm} \quad [D] = \text{J kg}^{-1} = \text{Gy}$$

- energie absorbovaná (deponovaná) v jednotce hmotnosti

- **dávkový příkon** \dot{D}

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} \quad [\dot{D}] = \text{W kg}^{-1} = \text{Gy s}^{-1}$$

- přírůstek dávky za jednotku času

- **kerma** (kinetic energy released in matter) K

$$K = \frac{dE_k}{dm} \quad [K] = \text{J kg}^{-1} = \text{Gy}$$

- energie předaná neutrálním ionizujícím zářením nabitým částicím
- sekundární částice mohou element hmoty opustit, proto může být $K > D$

Biologické účinky ionizujícího záření (podle druhu záření)

- **dávkový ekvivalent** H (jednotka **sievert**) = velikost poškození způsobeného radiací

$$H = D \cdot Q \quad [H] = \text{Sv}$$

- D je dávka v uvažovaném bodě tkáně
- Q je **jakostní činitel**, vyjadřující biologickou účinnost různých druhů záření

$$Q \sim \frac{dE}{dx} \quad \text{lineární přenos energie}$$

- **ekvivalentní dávka** H_T (jednotka **sievert**) = velikost poškození způsobeného radiací

$$H_T = w_R \cdot D_T \quad [H_T] = \text{Sv}$$

- D_T je střední dávka v orgánu (tkáni)
- w_R je **radiační váhový faktor** pro daný druh záření

Druh (energie) záření	$w_R(Q)$	Druh (energie) záření	$w_R(Q)$
fotony (γ , X)	1	α částice, těžké ionty	20
elektrony, pozitrony, miony	1	pomalé neutrony	2 – 5
protony, nabité piony	2	rychlé neutrony	20

Biologické účinky ionizujícího záření (podle typu tkáně)

- **efektivní dávka E**

$$E = \sum_T w_T \cdot H_T \quad [E] = \text{Sv}$$

- H_T je ekvivalentní dávka v dané tkáni T
- w_T je **tkáňový váhový faktor** dané tkáně T , vyjadřuje radiosenzitivitu tkáně nebo orgánu na stochastické účinky ozáření

$$\sum_T w_T = 1 \quad (\text{i.e. rovnoměrné ozáření těla} \rightarrow E = H_T)$$

tkáň nebo orgán	w_T		
		mléčná žláza	0,12
gonády	0,08	játra	0,04
červená kostní dřeň	0,12	štítná žláza	0,04
tlusté střevo	0,12	kůže	0,01
plíce	0,12	povrch kostí	0,01
žaludek	0,12	mozek	0,01
močový měchýř	0,04	slinné žlázy	0,01
jícen	0,04	ostatní orgány a tkáně	0,12

Biologické účinky ionizujícího záření (podle typu tkáně)

- úvazek efektivní dávky E_{50}

$$E_{50} = \int_{t_0}^{t_0+50} \dot{E} dt \quad [E_{50}] = \text{Sv} \quad [t] = \text{rok}$$

- slouží pro posouzení vnitřní kontaminace
-

- expozice X (jednotka rentgen)

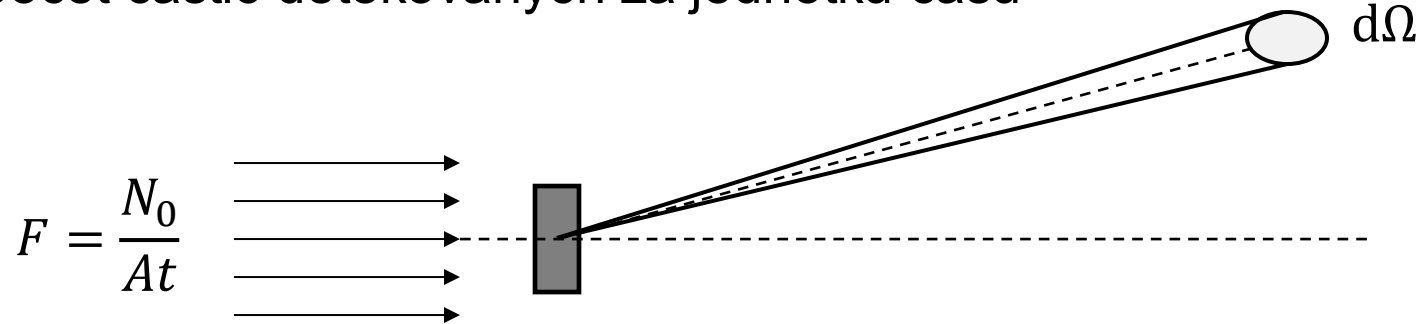
$$X = \frac{|dQ|}{dm} \quad [X] = R = 2.58 \cdot 10^{-4} \text{ C kg}^{-1}$$

- dříve používaná jednotka výhradně pro elektromagnetické záření ve vzduchu
- elektrický náboj sekundárních částic vzniklý ve vzduchu o jednotkové hmotnosti
- 1 R \rightarrow 0.01 Gy \rightarrow 0.01 Sv
- 3,6 R \rightarrow 0.036 Gy \rightarrow 0.036 Sv $>$ **0.02 Sv/rok**



Charakterizace pole ionizujícího záření – účinný průřez

- tok (fluence) F
= počet částic dopadajících na jednotku plochy za jednotku času
- \dot{N}_s počet částic detekovaných za jednotku času



- diferenciální účinný průřez

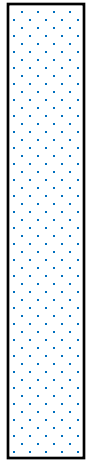
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \Omega) = \frac{1}{F} \frac{d\dot{N}_s}{d\Omega} \quad (\text{m}^2 \text{srad}^{-1})$$

- celkový účinný průřez

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \Omega) d\Omega \quad (\text{m}^2)$$

$$(1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2)$$

Charakterizace pole ionizujícího záření – střední volná dráha



N – počet atomů na jednotku objemu

A – plocha terčíku

P_{int} – pravděpodobnost interakce

$$\dot{N}_S(\Omega) = FAN \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta x$$

$$\dot{N}_{tot} = FAN\sigma \Delta x$$

$$\dot{N}_{tot} = FA \cdot P_{int}$$

$P(x)$ – pravděpodobnost, že částice urazí dráhu x **bez jakékoliv interakce**

$w dx$ – pravděpodobnost, že částice **bude interagovat na úseku** $(x, x + dx)$

$$P(x + dx) = P(x)(1 - w dx) \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -wP \Rightarrow \boxed{P(x) = e^{-wx}}$$

Charakterizace pole ionizujícího záření – střední volná dráha

- pp. částice urazí dráhu x a pak bude interagovat na úseku $(x, x + dx)$

$$f(x)dx = e^{-wx}w dx$$

- průměrná dráha, kterou částice urazí než dojde k interakci

$$\lambda = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xw e^{-wx} dx = \frac{1}{w}$$

- pravděpodobnost, že částice interaguje při průletu terčíkem o tloušťce Δx

$$P_{int} = 1 - P(\Delta x) = 1 - e^{-w \Delta x} = 1 - e^{-\frac{\Delta x}{\lambda}} = 1 - \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda} + \dots\right) \approx \frac{\Delta x}{\lambda}$$

$$P_{int} = N\sigma \Delta x$$

- střední volná dráha

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma}$$

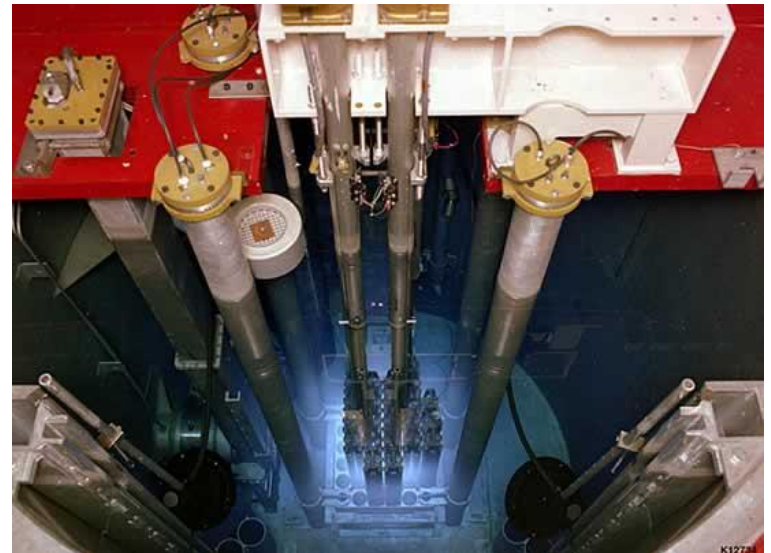
Interakce ionizujícího záření s látkou

- přímo ionizující záření
 - těžké nabité částice (α , protony, ionty)
 - lehké nabité částice (elektrony, pozitrony)
- nepřímo ionizující záření
 - elektromagnetické záření (γ fotony, X fotony)
 - neutrony

Interakce nabitých částic s látkou

- **nepružné srážky** s elektrony v elektronovém obalu atomů a molekul
 - ionizace a excitace atomů
- **brzdné záření** (Bremsstrahlung)
 - vyzařování **spojitého elektromagnetického záření** nabitou částicí

-
- elastický rozptyl na jádrech atomů
 - jaderné reakce (α částice)
 - anihilace ($e^- + e^+$)
 - emise Čerenkovova záření ($v > v_f$)



Interakce nabitých částic s látkou

- **těžké částice** (těžší než elektron): α , protony, ionty, ...
 - nepružné srážky s elektrony $\sigma = 10^7 - 10^8$ barn
 - měkké srážky \rightarrow **excitace**, tvrdé srážky \rightarrow **ionizace**
 - rychlost úbytku energie (stopping power) $\frac{dE}{dx}$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \frac{\gamma^2 m v^3}{z e^2 \bar{v}} \quad (\text{N. Bohr}) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

N_e – elektronová hustota, m_e – klidová hmotnost elektronu,
 e – elementární náboj, \bar{v} – střední orbitální rychlost elektronů,
 m – hmotnost částice, $z e$ – náboj částice, v – rychlost částice

- např. 10 MeV p^+ ztratí všechnu svou kinetickou energii na $x \approx 0.25$ mm
- stochastický proces – tenký absorbér (málo kolizí) – dE má velký rozptyl

Interakce nabitých částic s látkou

- **těžké částice** (těžší než elektron): α , protony, ionty,...

– rychlost úbytku energie (stopping power) $\frac{dE}{dx}$ $\beta = \frac{v}{c}$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z z^2}{A \beta^2} \left[\ln \frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right] \quad (\text{Bethe-Bloch})$$

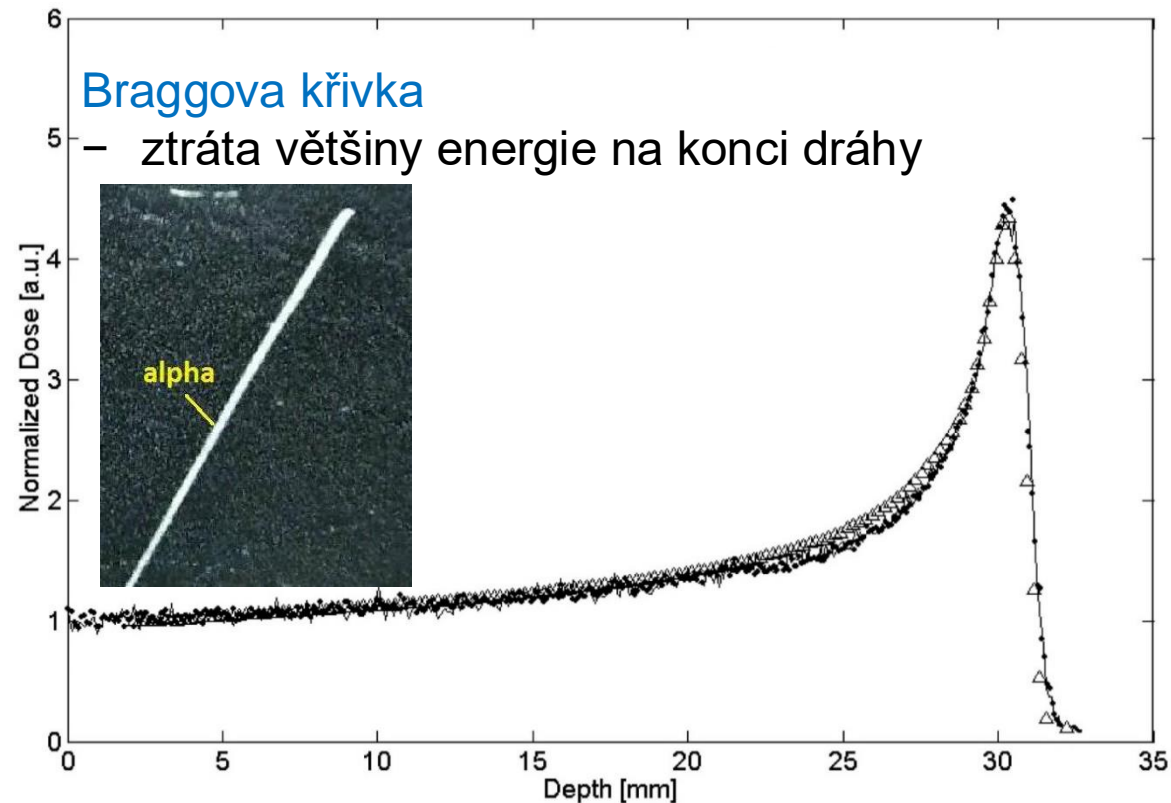
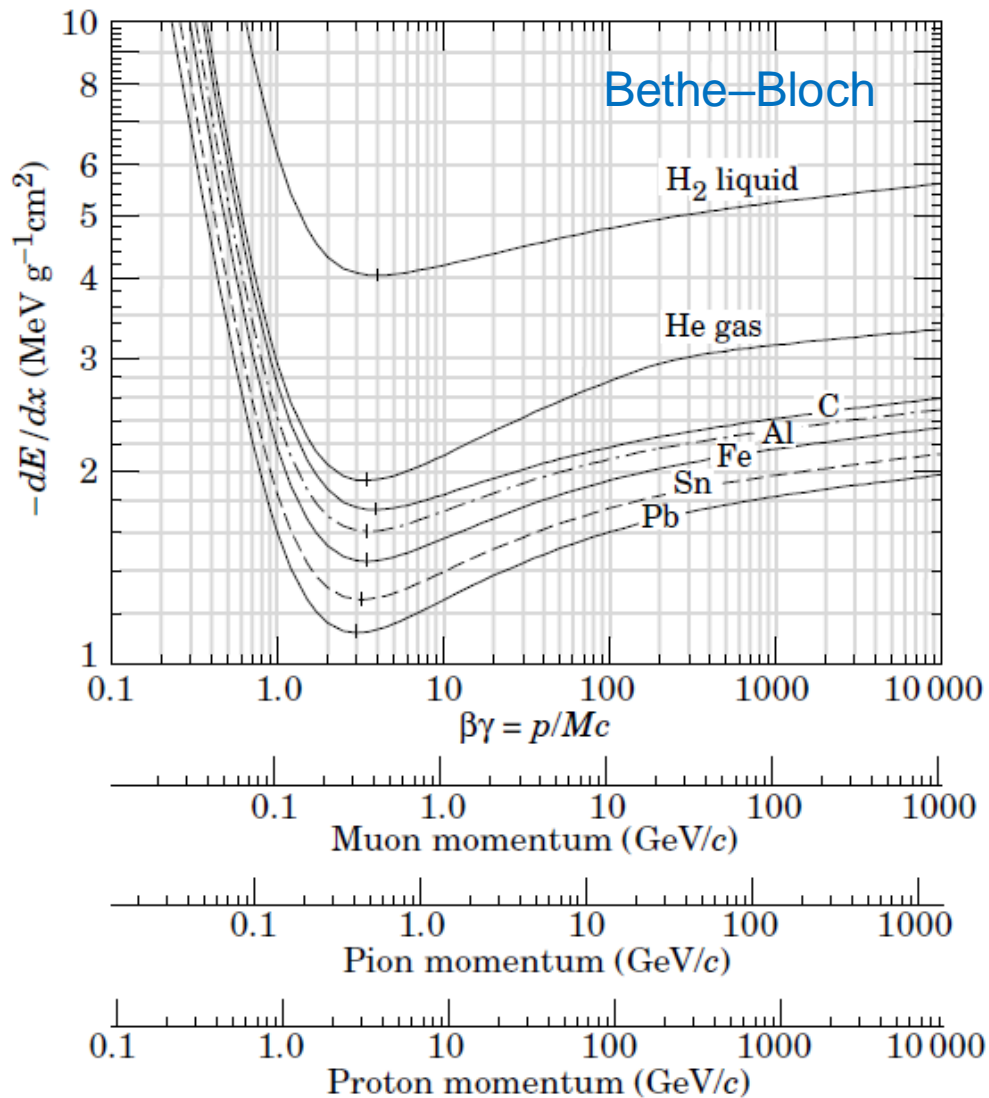
$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8179 \times 10^{-15} \text{ m}$$

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2}$$

N_A – Avogadrova konstanta, r_e – klasický poloměr elektronu,
 m_e - klidová hmotnost elektronu, c – rychlost světla ve vakuu,
 ρ – hustota materiálu, Z – protonové číslo materiálu,
 A – hmotnostní číslo materiálu, z – náboj částic v jednotkách e ,
 v – rychlost částice, W_{\max} – maximální transfer energie v jedné srážce,
 I – střední excitační potenciál, δ – korekce na hustotu,
 C – korekce na orbitální rychlost elektronu v elektronovém obalu

Interakce těžkých nabitých částic s látkou

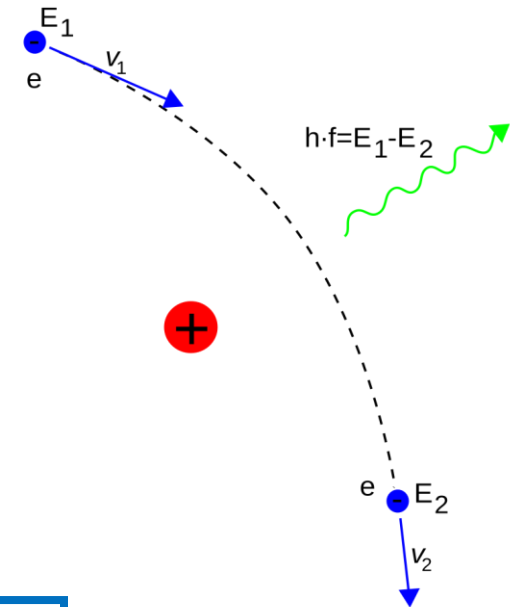
- těžké částice (těžší než elektron): α , protony, ionty,...



- přímá, krátká dráha s vysokou hustotou ionizace
- malý dolet α částic z jaderných rozpadů (~cm na vzduchu, ~ μ m v pevných látkách)

Interakce nabitých částic s látkou

- **lehké částice:** elektrony, pozitrony
 - nepružné srážky s elektrony (**excitace, ionizace**)
 - brzdné záření (**Bremsstrahlung**) – záření částic při zrychlení
 - rychlost úbytku energie (stopping power) $\frac{dE}{dx}$



$$\frac{dE}{dx} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{col} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$$

↑
nepružné srážky
(Bethe–Bloch)

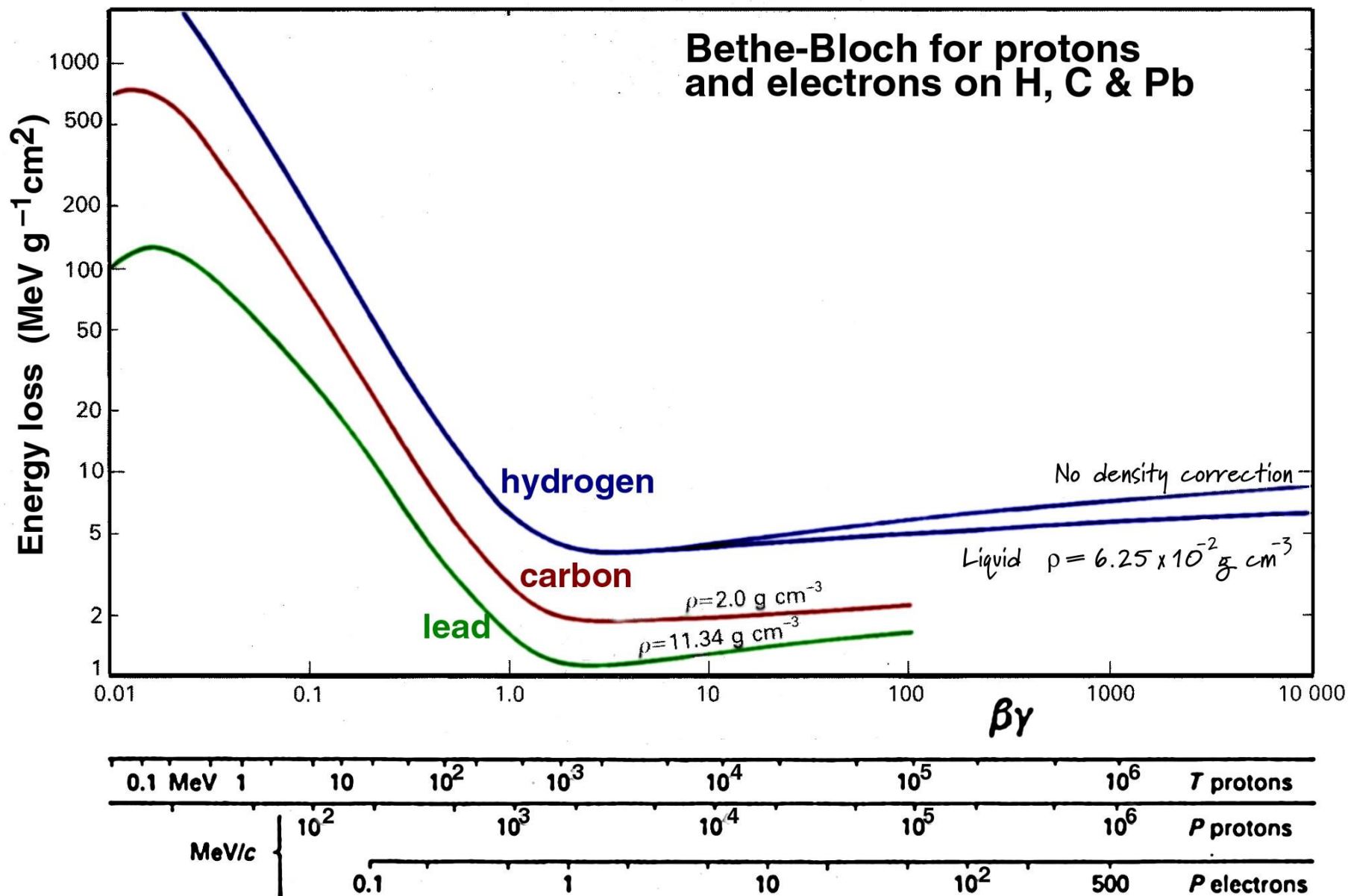
↑
brzdné záření
 $\propto EZ^2$

$$\frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{col}} \approx \frac{EZ}{800}$$

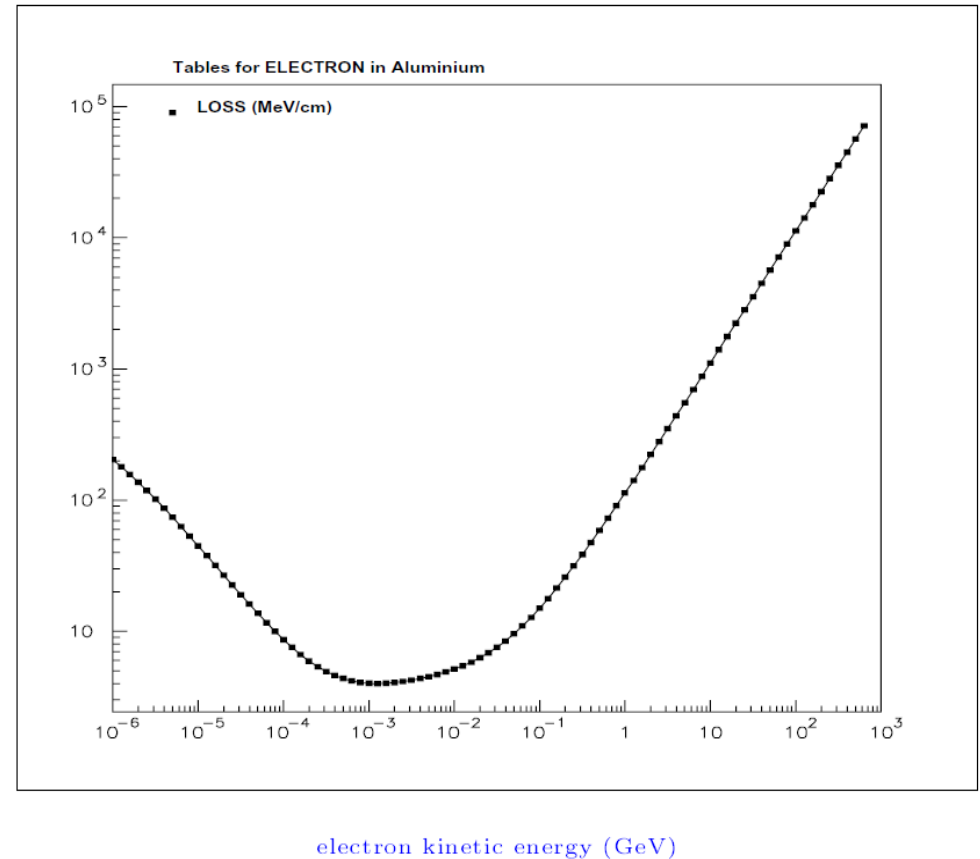
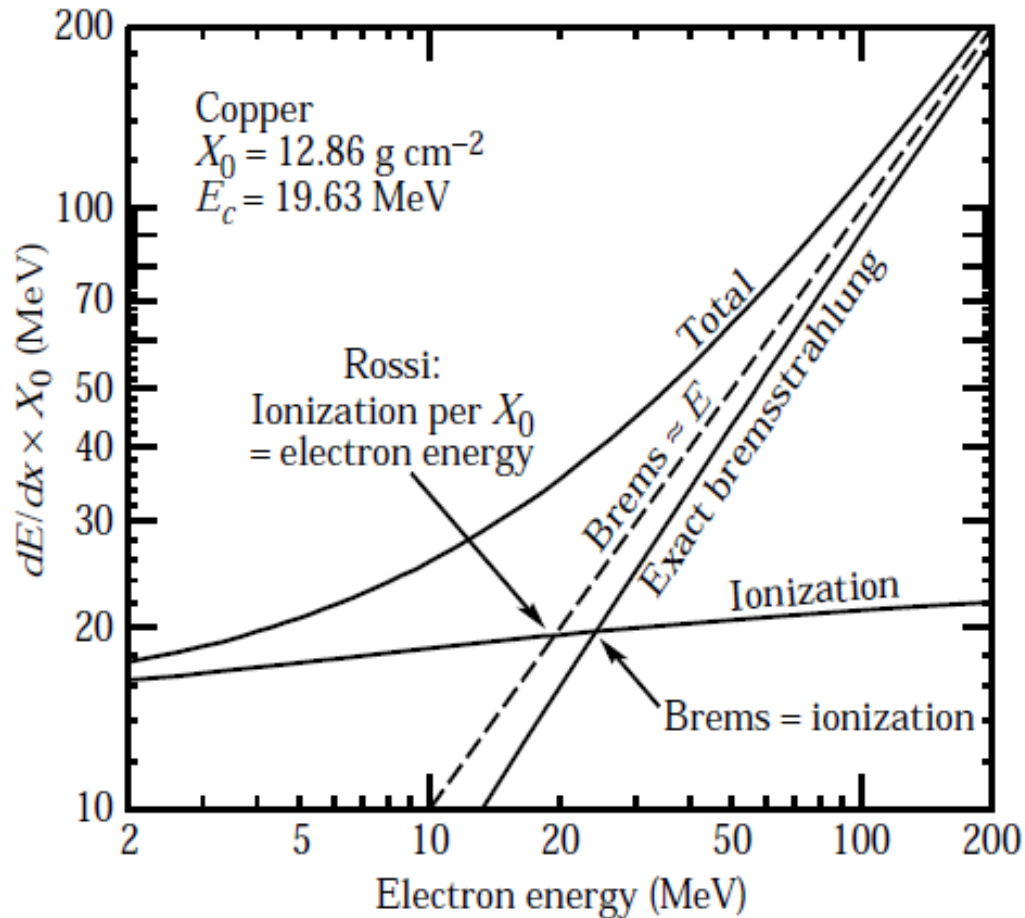
Výkon brzdného záření je $\sim \gamma^4 = E^4 m^{-4} c^{-8}$ ($\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$)
nebo $\sim \gamma^6 = E^6 m^{-6} c^{-12}$ ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{v}$)

- proto má význam pro lehké částice,
- je obtížné postavit kruhový urychlovač e^+e^-

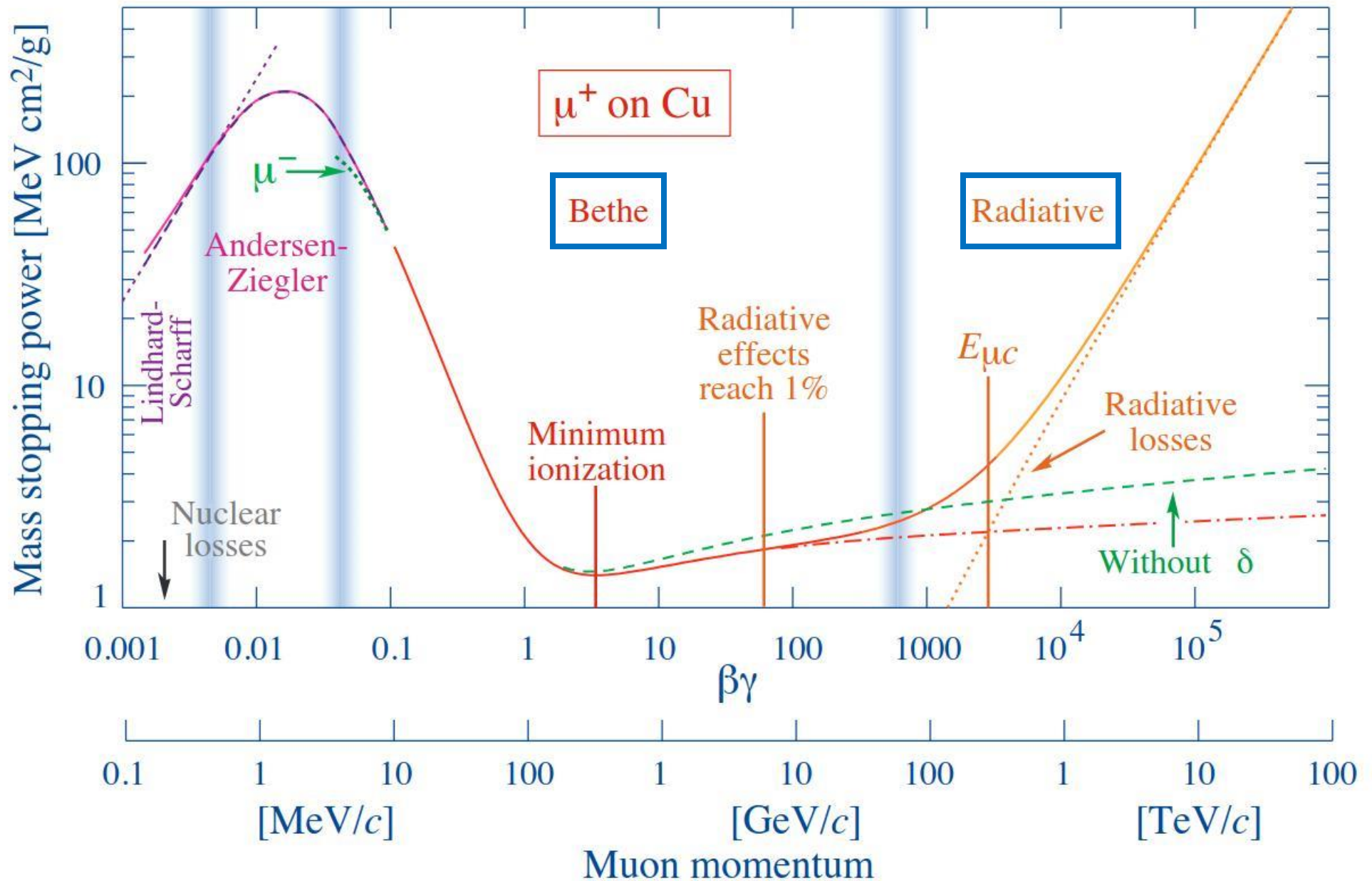
Interakce nabitých částic s látkou



Interakce lehkých nabitých částic s látkou



Interakce lehkých nabitých částic s látkou



Interakce lehkých nabitých částic s látkou

- **lehké částice:** elektrony, pozitrony

– empirické vzorce

$$R \sim 0.1 - 1 \text{ m}$$

dolet β ve vzduchu

$$R[\text{cm}] = \frac{E[\text{MeV}]}{2}$$

dolet β ve vodě

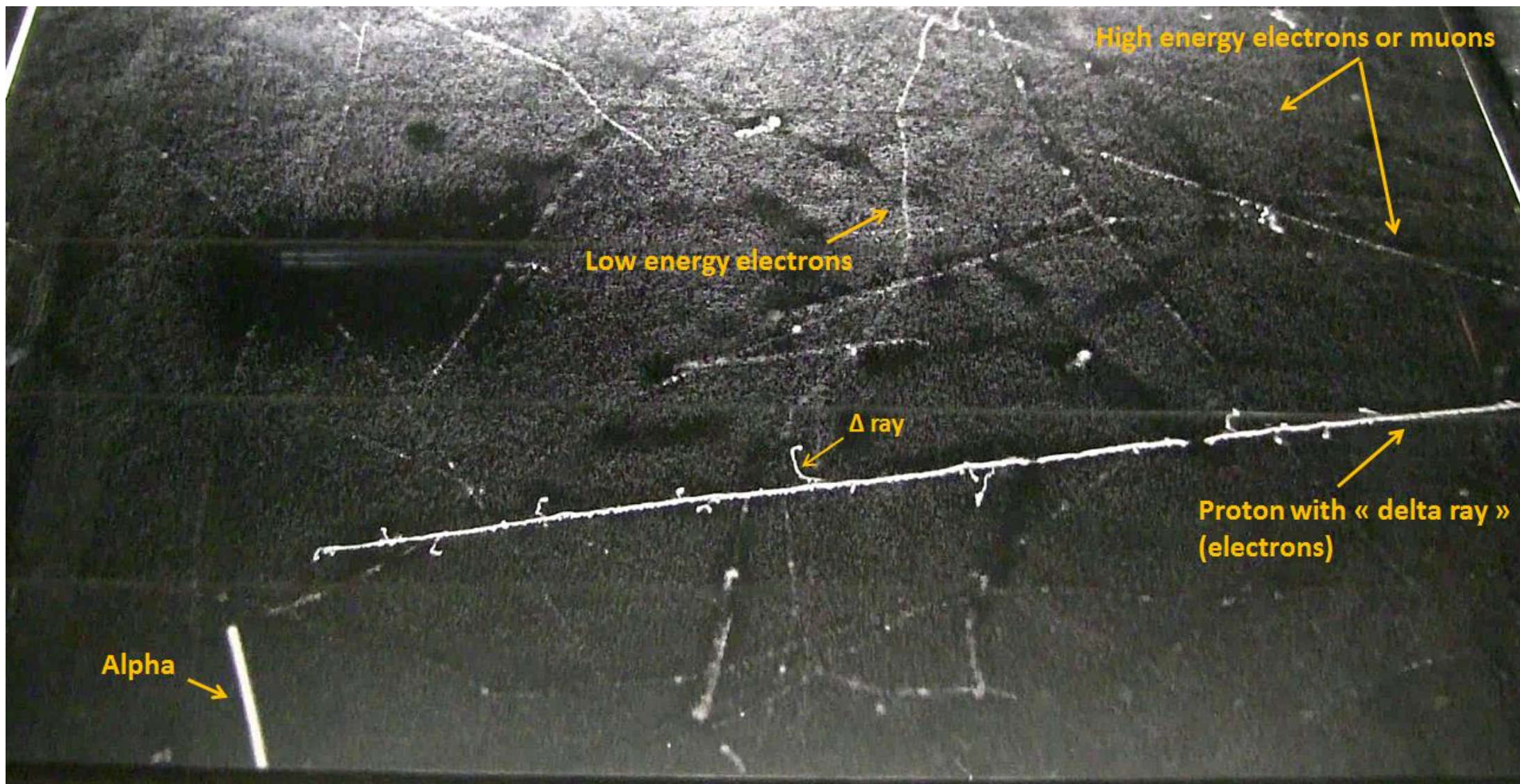
$$\frac{1}{\alpha}[\text{cm}] = \frac{E_{\text{max}}^{1.4}[\text{MeV}]}{16\rho[\text{g cm}^{-3}]}$$

hloubka průniku β v pevných látkách

$$f(x) = \alpha \exp(-\alpha x)$$

implantační profil β v pevných látkách

Interakce nabitých částic s látkou

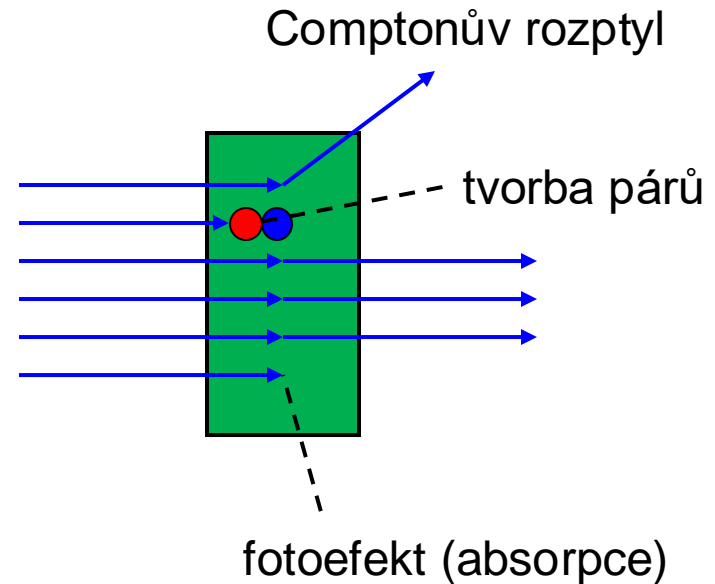


Fotografie z mlžné komory na Pic du Midi (2877 m), 45x45 cm, [By Cloudylabs - Own work, CC BY-SA 3.0](#)

Částice rozpoznáme podle odlišné míry ionizace. Δ rays: sekundární e, které mají dost energie aby samy ionizovaly.

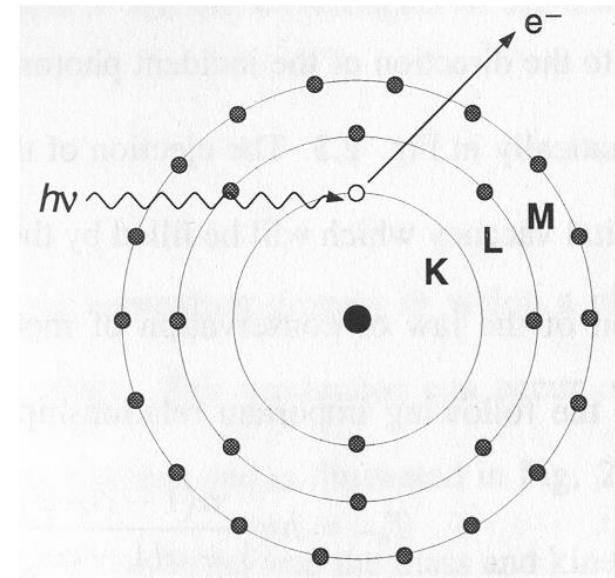
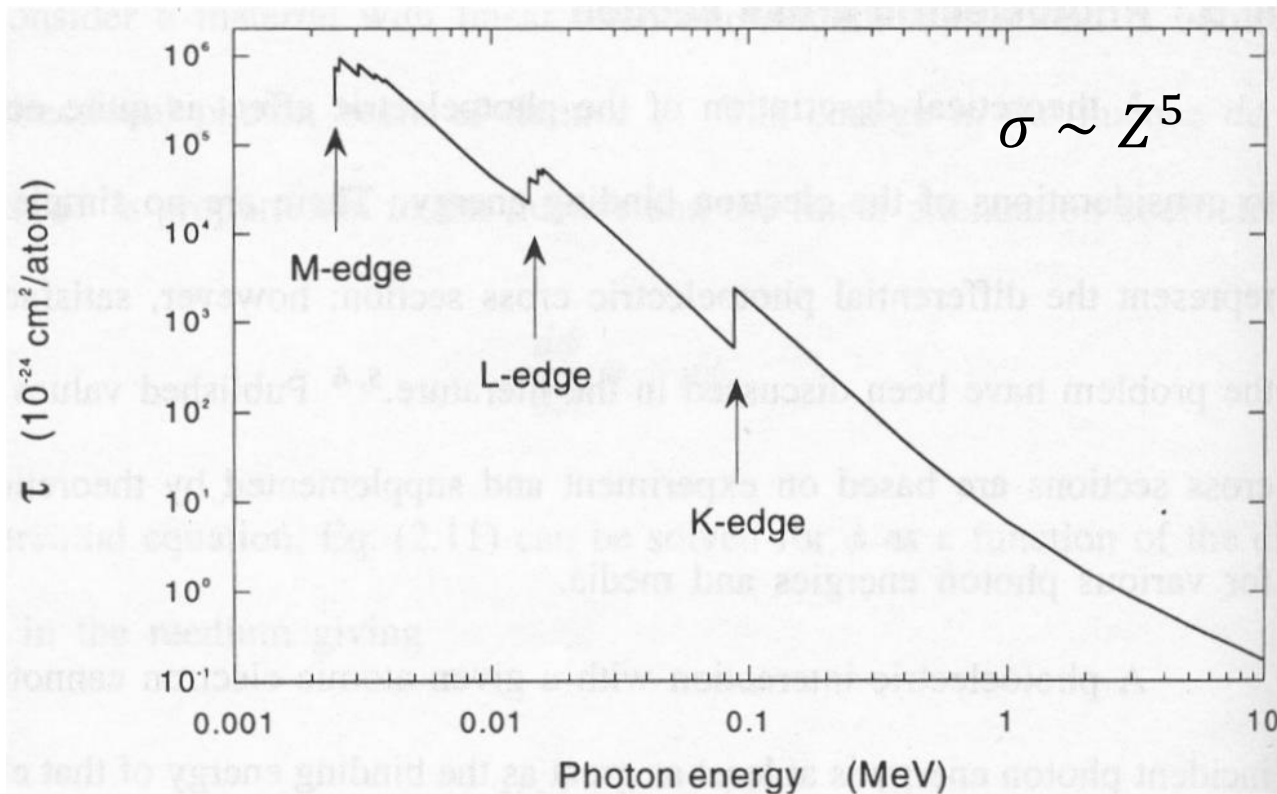
Interakce fotonů s látkou

- fotoelektrický jev (fotoefekt)
- Comptonův rozptyl
- tvorba párů
- jaderné reakce
- základní odlišnosti od nabitých částic:
 - podstatně větší pronikavost (menší σ)
 - při průchodu svazku fotonů terčíkem dochází k zeslabení intenzity, ale ne ke změně energie
 - zeslabení intenzity po průchodu terčíkem o tloušťce x : $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$
 - absorpční koeficient μ



Fotoefekt

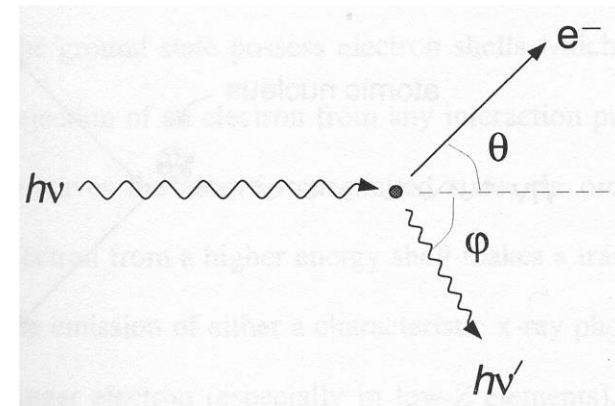
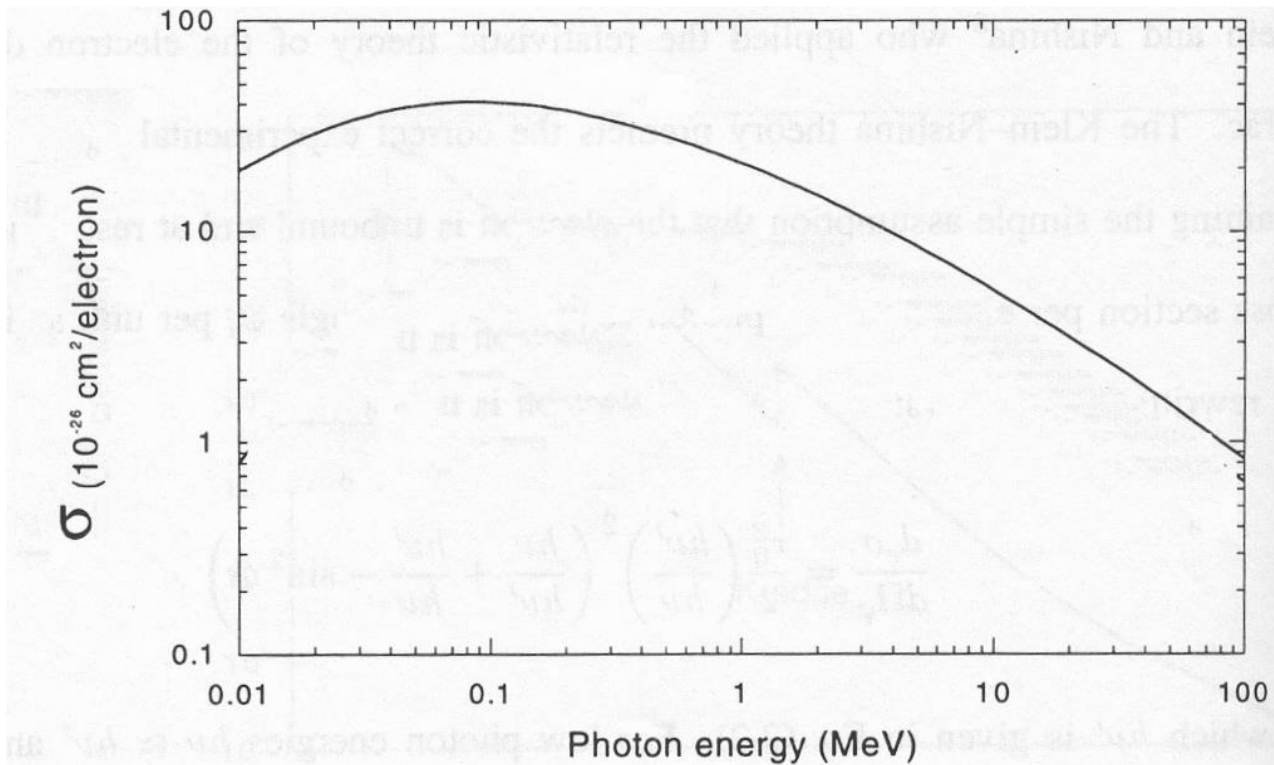
- ionizace (excitace) elektronů
- energie vyraženého elektronu: $E = h\nu - E_B$
 - $h\nu$ – energie absorbovaného fotonu
 - E_B - vazebná energie elektronu



Comptonův rozptyl

- neelastický rozptyl
- energie rozptýleného fotonu:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \varphi)}$$



maximální energie elektronu ($\varphi = 180^\circ$):

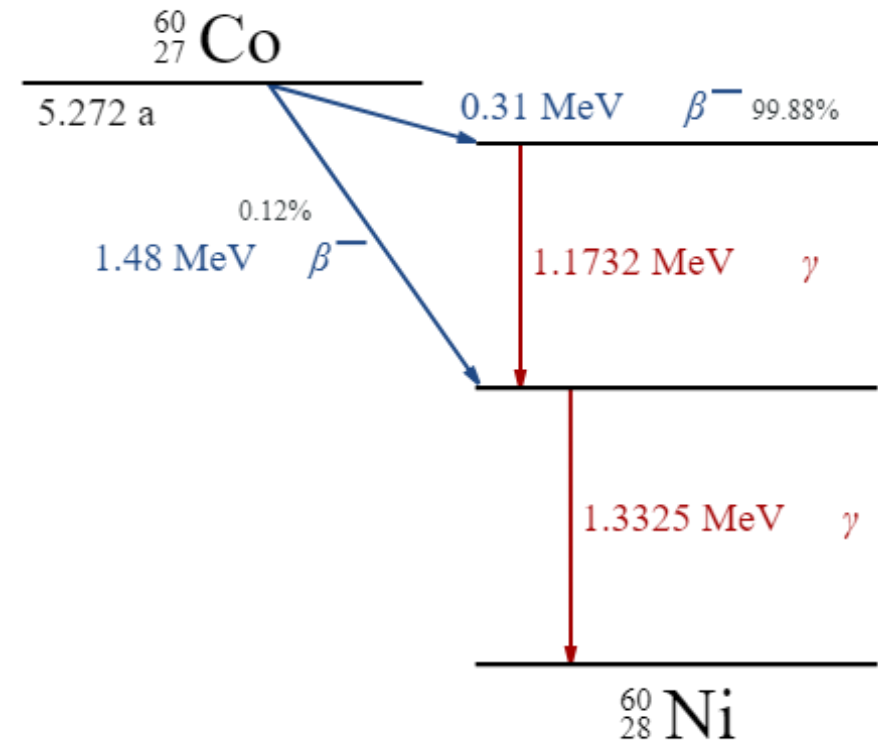
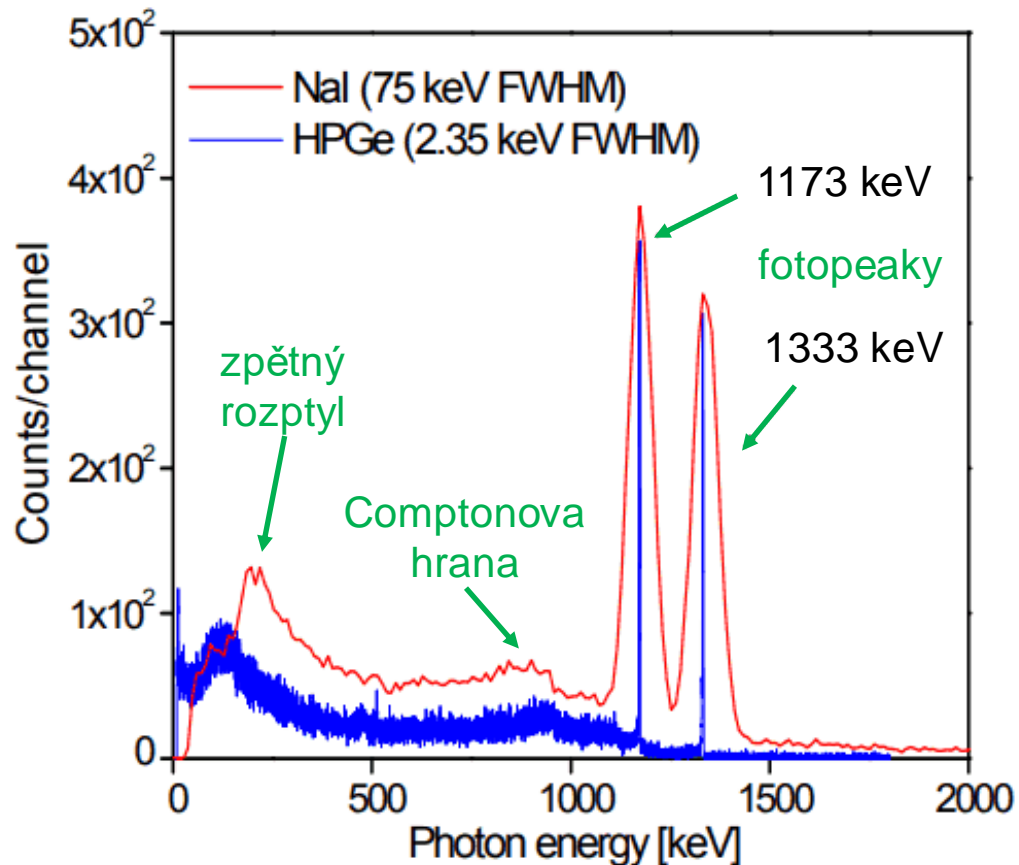
$$T = h\nu \frac{2\gamma}{1 + 2\gamma} \quad \text{Comptonova hrana}$$

$$\gamma = \frac{h\nu}{m_e c^2} \quad T = h\nu - h\nu'$$

Comptonův rozptyl

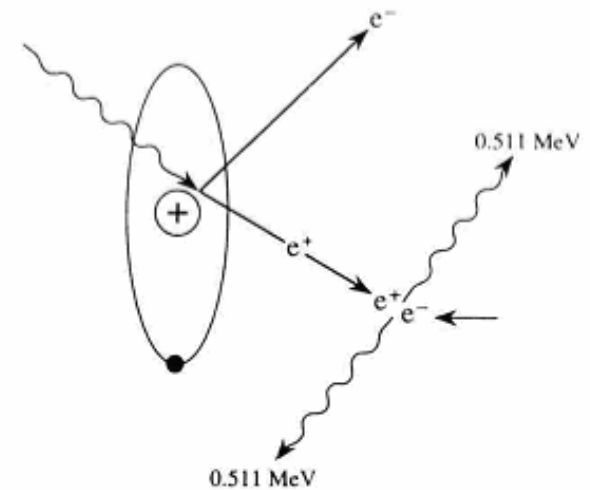
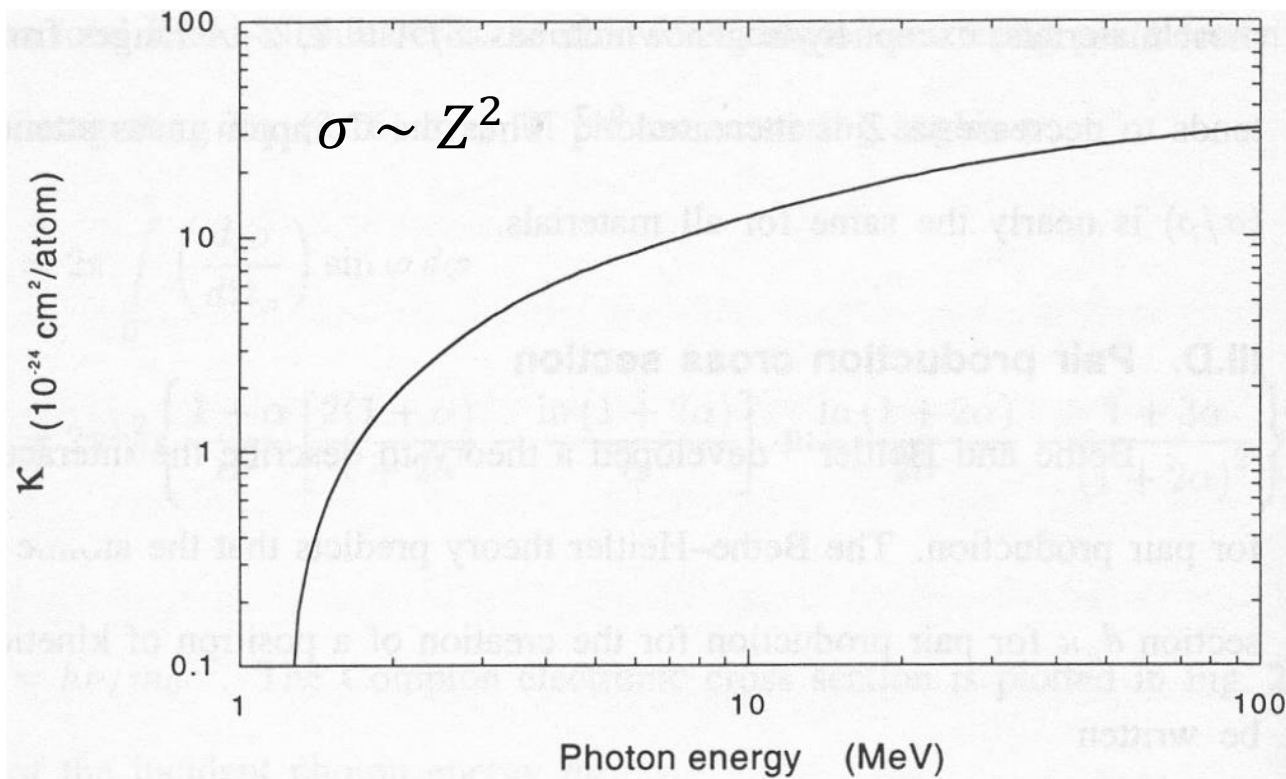
- neelastický rozptyl
- energie rozptýleného fotonu:

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \varphi)}$$

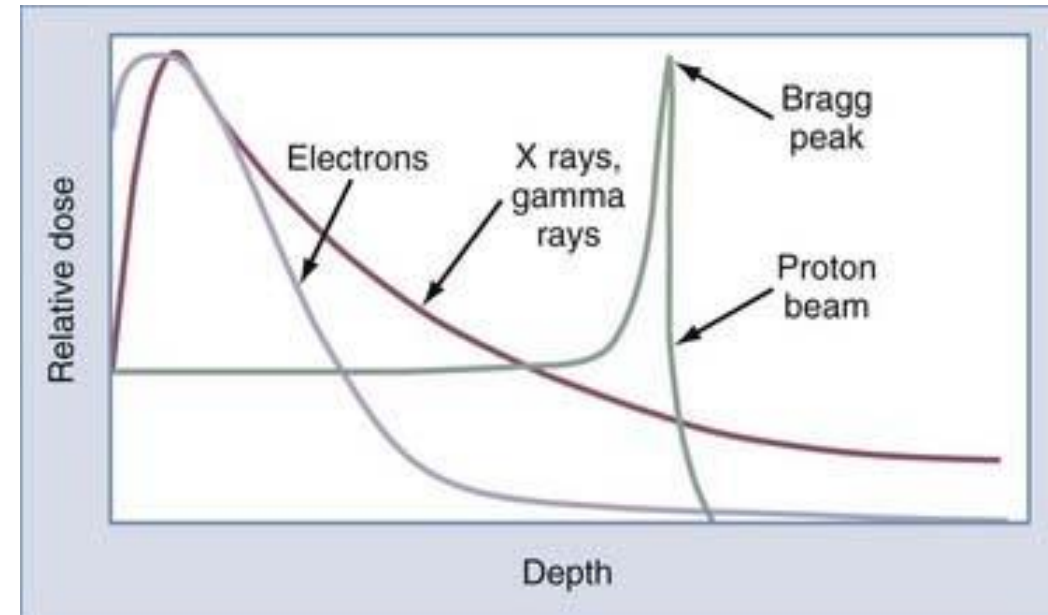
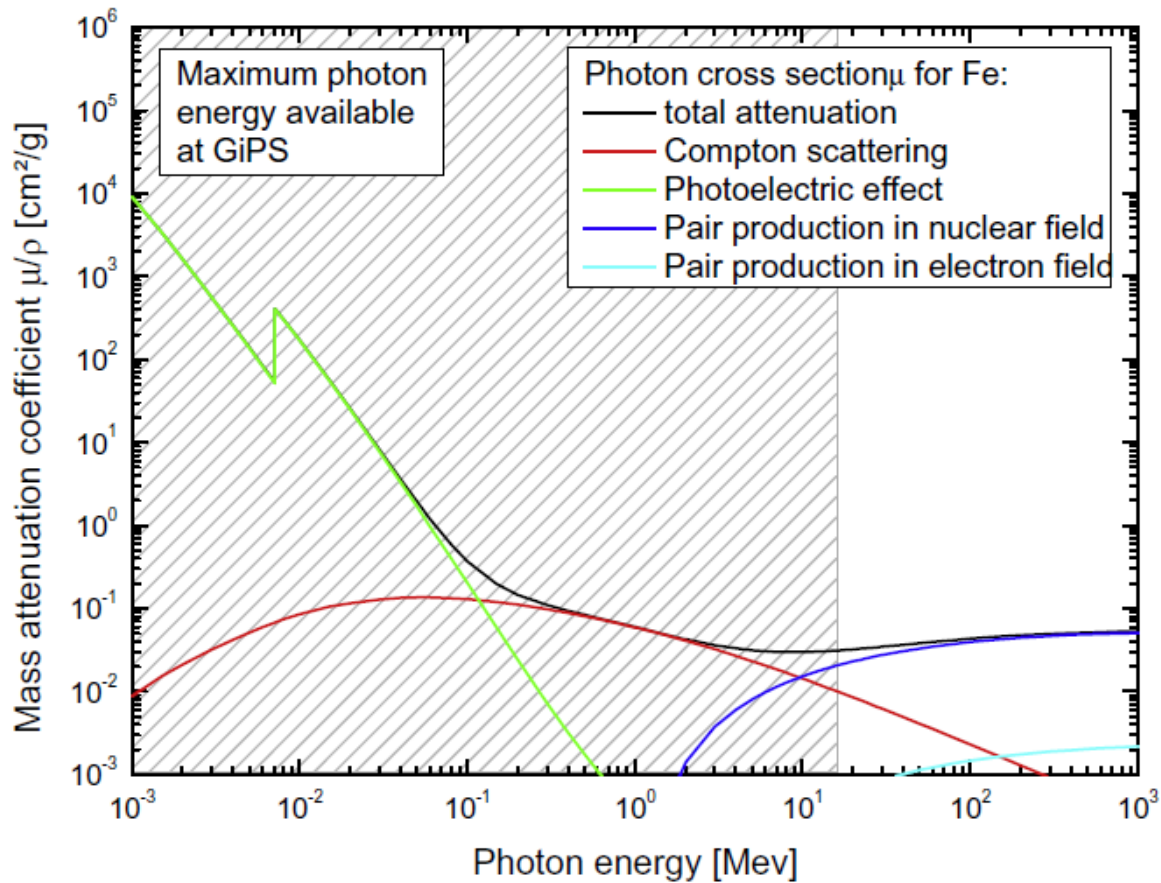


Tvorba párů

- tvorba páru elektron – pozitron v blízkosti nabitě částice (jádra)
- minimální energie fotonu: $h\nu > 2m_e c^2 = 2 \times 511 \text{ keV}$

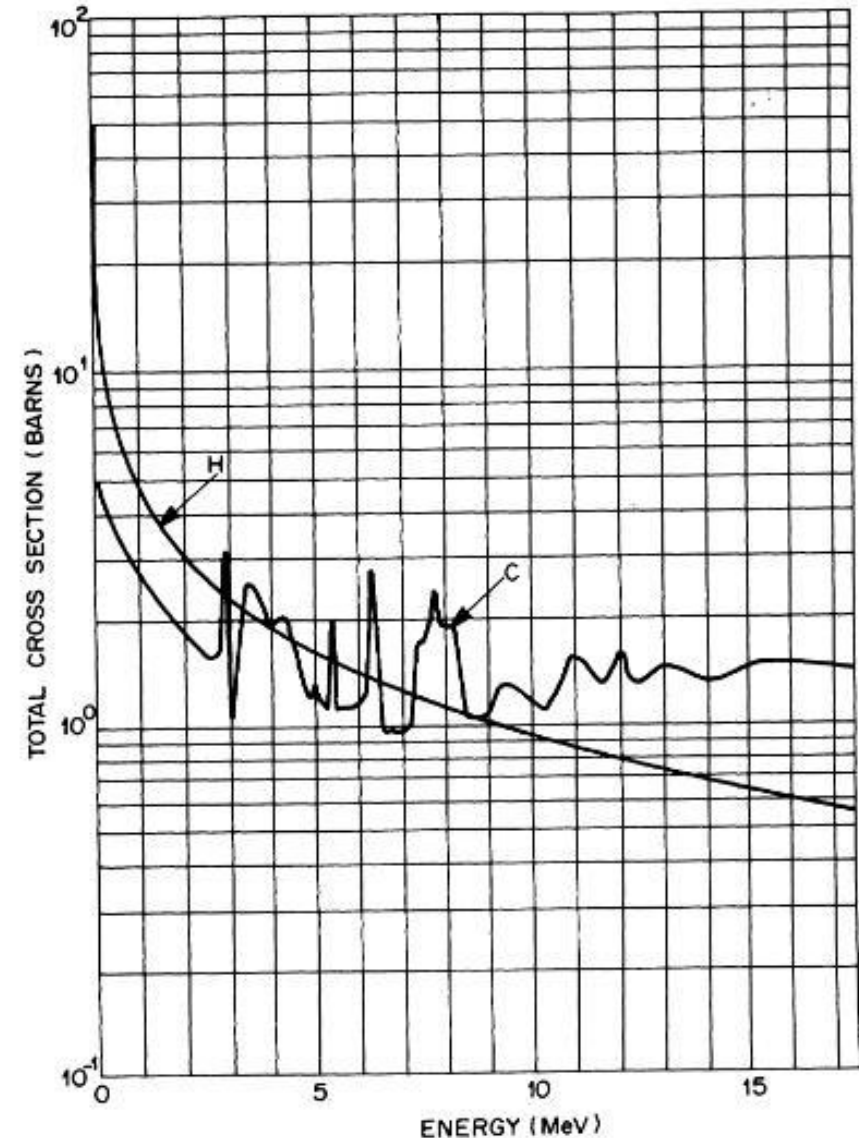


Interakce fotonů s látkou



Interakce neutronů

- pružný rozptyl neutronů (bez excitace jader)
 - moderace (zpomalování) neutronů
- nepružný rozptyl neutronů (excitace → de-excitace jader)
 - moderace neutronů doprovázená emisí γ záření
- záchyt neutronů jádrem
 - radiační záchyt
 - emise γ záření a/nebo α/β částic
 - jaderné štěpení



Simulace interakce částic s látkou

- Deponovaná energie závisí na
 - Typu částic a jejich energii,
 - Materiálech a jejich geometrii...
- V praxi se používají Monte Carlo simulace
 - [Geant 4](#) (C++)
 - [FLUKA](#) (Fortran)
 - [MCMNP](#) (Fortran)
 - ...
- Využití:
 - Radiační ochrana,
 - Návrh detektorů a celých experimentů,
 - Interpretace měření,
 - Medicína, částicová fyzika, jaderná fyzika a inženýrství, letectví...

