Gaussovské svazky

Gaussovské svazky hrají velmi důležitou roli v laserové fyzice, neboť ve většině případů lze záření vystupující z laseru popsat právě jako Gaussovské svazky.

Předpokládejme, že v rovině z = 0 je pole, které se šíří ve směru osy z, popsané Gaussovou funkcí

$$E(r,0) = E_0 e^{-\left(\frac{r}{w_0}\right)^2}, \qquad (1)$$

kde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ je vzdálenost příslušného bodu od osy z, E_0 je velikost amplitudy pole na ose z, w_0 je parametr popisující míru úbytku pole směrem od osy z. Podle rovnice (1) je fáze pole konstantní v celé rovině z = 0 a je rovna nule. To znamená, že v této rovině je čelo odpovídající vlny rovinné, ale na rozdíl od obvyklé rovinné vlny je amplituda proměnná.

Lze ukázat, že pro elektromagnetické pole, jehož amplituda se mění pomalu s rostoucí vzdáleností (tj. svazek má malou rozbíhavost) je řešením Maxwellových rovnic za počáteční podmínky (1) vztah

$$E(r,z) = E_0 \frac{w_0}{w} e^{-\left(\frac{r}{w_0}\right)^2} e^{-i\left(kz - \Phi - \frac{kr^2}{2R}\right)}, \qquad (2)$$

kde

$$w^2 = w_0^2\left(1 + \left(\frac{2z}{D}\right)^2\right), \qquad (3)$$

$$R = -z\left(1 + \left(\frac{D}{2z}\right)^2\right), \qquad (4)$$

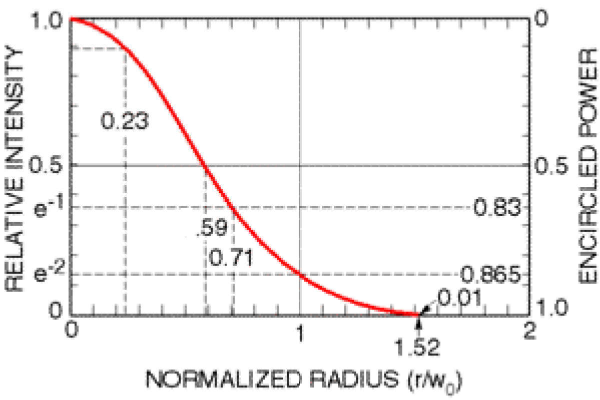
$$tg\,\Phi = \frac{2z}{D}, \qquad (5)$$

$$D = kw_0^2 = \frac{2\pi}{\lambda} w_0^2. \qquad (6)$$

Závislost (2) se nazývá rovnicí gaussovského svazku. Je z ní zřejmé, že v každé rovině z = konst. je rozdělení amplitudy dáno opět Gaussovou funkcí. Podle (3) je pro $z \neq 0$, $w > w_0$, což znamená, že s rostoucím z klesá velikost amplitudy na ose.

Rozdělení amplitudy, resp. intenzity pole $I \sim EE^*$, není v gaussovském svazku ostře ohraničeno, nicméně pro praktické účely je vhodné definovat průměr svazku. Je to průměr kružnice, na níž amplituda je e-krát menší než amplituda ve středu svazku, resp. intensita e^2-krát. Příčný průběh pole je

$$I(r,z) = I(0,z) e^{-\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)}. \qquad (7)$$



Podle této definice je gaussovský průměr svazku roven 2w. Průměr svazku je nejmenší v rovině z = 0, a proto se tomuto místu říká pás svazku (waist) $2w_0$.

Fáze gaussovské vlny má podle (2) tvar

$$\varphi = kz - \Phi - \frac{kr^2}{2R}\,. \tag{8}$$

Člen kz je typický člen pro fázi šířící se rovinné vlny, Φ představuje odchylku fáze gaussovského svazku od rovinné vlny na ose. Poslední člen popisuje změnu fáze v závislosti na vzdálenosti od osy z, což znamená, že fázové čelo vlny je zakřivené.

V laserovém svazku je obvykle vyšetřována situace r << R (paraxiální aproximace), kdy čelo vlny je sférické. Pro z = 0 a z = ∞ je čelo rovinné (viz (4)), maximální křivost R_{min} = D má pro z = ±D/2.

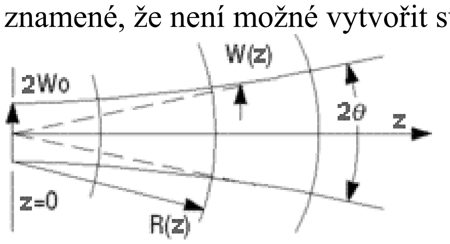
Je výhodné dále definovat úhel divergence svazku

$$2\theta = \lim_{z\to\infty} \frac{2w}{z} = \frac{4}{\sqrt{kD}}\,. \tag{9}$$

Z rovnic (9) a (6) dostáváme

$$(2w_0)(2\theta) = \frac{8}{k} = \frac{4\lambda}{\pi}\,. \tag{10}$$

Tedy nejmenší průměr svazku vynásobený úhlem divergence je konstatní veličina. To znamené, že není možné vytvořit svazek libovolného průměru a libovolné rozbíhavosti.



Průchod tenkou čočkou

Z hlediska optiky je základní otázka, jak se transformují gaussovské svazky optickými prvky. Budeme vyšetřovat transformaci gaussovského svazku v paraxiální aproximaci a budeme předpokládat, že gaussovské rozdělení amplitudy v rovině kolmé ke směru šíření se nenaruší při průchodu optickým prvkem (tj. všechny clony jsou dostatečně velké atp.). Sférická vlna je optickými prvky v paraxiálním přiblížení transformována opět do sférické vlny. Čelo gaussovského svazku je sférické, ale hodnota poloměru křivosti čela se mění složitým způsobem, a proto transformační vlastnosti optického prvku jsou splněny pouze lokálně. Vyšetřujme působení tenké čočky s ohniskovou vzdáeností f na gaussovký svazek.

Komplexní amplitudová propustnost tenké čočky o ohniskové vzdálenosti f je úměrná ~ exp(ikr^2/2f) [Saleh]. Při průchodu gaussovského svazku čočkou je nutné jeho komplexní amplitudu (2) vynásobit tímto faktorem. Dojde tak ke změně poloměru křivosti vlnoplochy R, šířka svazku w se nezmění. Fáze vlny po průchodu čočkou se změní na

$$\varphi' = kz - \Phi - \frac{kr^2}{2R} + \frac{kr^2}{2f} = kz - \Phi - \frac{kr^2}{2R'}, \tag{11}$$

kde

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}. \tag{12}$$

Řešením (3), (4) a (12) dostaneme následující vztahy, které svazují parametry dopadajícího a prošlého svazku (*Z*, resp. *Z’*, značí vzdálenost pásu dopadajícího, resp. prošlého, svazku od ohnisek čočky):

min. pološířka $\quad w_0' = M w_0,$ (13)

poloha pásu $\quad Z' = M^2 Z,$ (14)

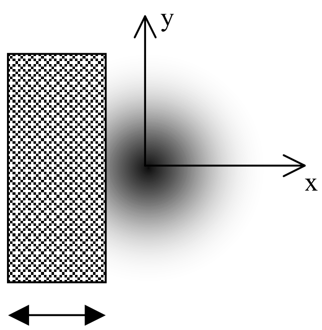
ohnisková hloubka $\quad D' = M^2 D,$ (15)

úhlová divergence $\quad 2\theta = \dfrac{2\theta}{M},$ (16)

příčné zvětšení $\quad M = \dfrac{f}{\sqrt{Z^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}}.$ (17)

Měření parametrů gaussovského svazku metodou skenovací hrany

Parametry gaussovského svazku lze měřit metodou skenovací hrany, kdy se měří signál z fotodetektoru, který je úměrný intenzitě světla I, v závislosti na poloze hrany x (viz obr.).



Celková intenzita světla dopadlá na detektor je dána

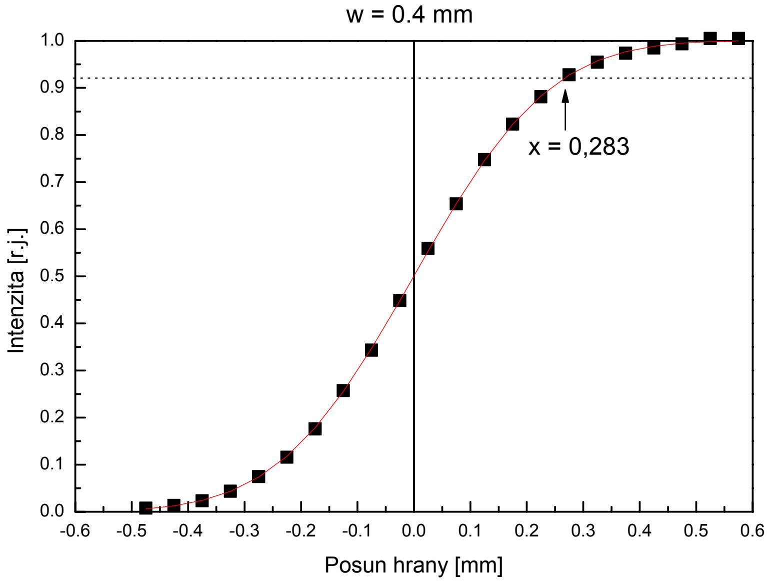
$$I(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-2\frac{x'^2+y'^2}{w^2}} dx'dy' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\frac{y'^2}{w^2}} dy' \int_{-\infty}^{x} e^{-2\frac{x'^2}{w^2}} dx' = \frac{\pi w^2}{4}\left(1 + erf\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w}\right)\right) = \frac{\pi w^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w}\right)\right), \quad (18)$$

kde *erf*, resp. *erfc*, jsou tabelované tzv. chybové funkce.

Podle (18) lze určit parametr svazku w: pro $x = w/\sqrt{2}$ je erfc(1) = 0,15730, a tak

$$I\left(x = w/\sqrt{2}\right) = 0{,}9214\, I_{\max} \quad (19)$$

Případně se dá fitovat naměřený průběh.



Určením w pro různá místa dráhy svazku (souřadnici z) lze najít podle (3) w_0 a polohu pásu z = 0, a tím charakterizovat gaussovský svazek.

Úkoly

1. Určete základní parametry svazku He-Ne laseru, tj. velikost w_0 a polohu pásu vůči výstupu laseru (počátek souřadnice z). Stanovte FWHM svazku v místě pásu.
2. Navrhněte uspořádání s užitím jedné čočky pro získání svazku s minimálním poloměrem w_0. Jaká čočka je pro tento účel nejvhodnější a kam ji umístíte?
3. Změřte parametry čočkou transformovaného svazku (velikost a poloha pásu) a porovnejte je s teoretickým výpočtem w_0' a Z' dle vztahů (13) a (14).
4. Navrhněte uspořádání s užitím dvou čoček pro získání svazku s minimální divergencí θ.

Literatura

[Saleh] B. A. Saleh, M. C. Teich: Základy fotoniky, sv. 1, Matfyzpress, Praha, 1994.
[Nemoto] S. Nemoto, Appl. Opt. **21**, 25 (1986).