2. Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: a) $\vec{F} \equiv (x+y,\ -x+y,\ -2z)$; b) $\vec{F} \equiv (2y,\ 2x+3z,\ 3y)$; c) $\vec{F} \equiv (x^2-z^2,\ 2,\ 2xz)$. Je-li rot $\vec{F} = 0$, najděte skalární pole takové, aby $\vec{F}$ = grad f.
[0,(0,0,−2); 0,(0,0,0), $2xy + 3zy$; $4x$, $(0,-4z,0)$].

3. Určete gradient následujících skalárních polí ($\vec{r}$ je rádiusvektor): a) r, b) r^2, c) r^3, d) $\frac{1}{r}$, e) $\frac{1}{r^2}$, f) $\frac{1}{r^3}$, g) $\vec{c}\cdot\vec{r}$, h) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}$, i) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^2}$, j) $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$.

[$\frac{\vec{r}}{r}$, $2\vec{r}$, $3r\vec{r}$, $\frac{-\vec{r}}{r^3}$, $\frac{-2\vec{r}}{r^4}$, $\frac{-3\vec{r}}{r^5}$, $\vec{c}$, $\frac{r^2\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^3}$, $\frac{r^2\vec{c}-2(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^4}$, $\frac{r^2\vec{c}-3(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$; zde i v následujících příkladech řešení s podmínkou $r \neq 0$, pokud výrazy při $r \to 0$ neomezeně rostou.]

4. Určete divergenci a rotaci následujících vektorových polí: a) $\vec{r}$, b) $\frac{\vec{r}}{r}$, c) $\frac{\vec{r}}{r^2}$, d) $\frac{\vec{r}}{r^3}$, e) $\frac{\vec{c}}{r}$.
[3,0; $\frac{2}{r}$,0; $\frac{1}{r^2}$,0; 0,0; $-\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$, $\frac{\vec{c}\times\vec{r}}{r^3}$. Všimněme si zejména příkladu d), který odpovídá Coulombově poli bodového náboje, umístěného v počátku souřadnic. Toto pole má všude kromě počátku div $\vec{F}$ = 0 v souladu s Poissonovou rovnicí.

1.1.1 Dvě stejné částice, jejichž rozměry můžeme zanedbat, jsou nabity náboji rovnými náboji elektronu. Jakou hmotu by tyto částice musely mít, aby přitažlivá gravitační síla působící mezi nimi byla v rovnováze se silou elektrostatickou. Kolikrát by tato hmota byla větší než hmota elektronu.

1.1.2 Jak velké stejné náboje musíme umístit do středu dvou homogenních koulí z nichž každá má hmotu rovnou hmotě Země /$M_z = 6 \cdot 10^{24}$ kg/, aby gravitační a elektrostatická síla byly v rovnováze.

1.1.3 Mějme dvě měděné kuličky v poloměru $r = 1.10^{-2}$ m. Jakou silou F by tyto kuličky na sebe působily ve vzdálenosti $R = 1$ m, kdyby každému atomu mědi scházel 1 elektron. Jaká by musela být hmota kuličky, aby v gravitačním poli s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81$ m/s^2 na ni působila stejná síla.

1.1.4 Dvě kuličky zanedbatelného průřezu jsou od sebe vzdáleny 1 m. Jedna z nich je nabita nábojem $+ 1.10^{-3}$ C, druhá nábojem $- 3.10^{-3}$C:

a/ jak velkou silou se budou kuličky přitahovat

b/ jak velkou silou na sebe budou působit jestliže se před umístěním do předepsané vzdálenosti kuličky dotkly.

1.1.5 Dva hmotné body, každý o hmotě $m = 1$ g jsou v gravitačním poli s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81$ m/s^2 zavěšeny na nehmotných závěsech délky $\ell = 1$ m. Tyto hmotné body se po nabití stejnými náboji rozestoupí na vzdálenost $r = 5.10^{-2}$ m. Jak velký náboj Q nese každý hmotný bod.

1.1.6 Ve vrcholech čtverce o straně a jsou stejné náboje e. Jaký náboj q opačného znamení musíme umístit doprostřed čtverce. aby síly působící na každý náboj byly rovny nule. Je tato rovnováha stabilní?

1.1.9 Poměr velikosti dvou bodových nábojů opačných znamének je n, vzdálenost obou nábojů je d. Dokažte, že povrch nulového potenciálu je kulová plocha. Vypočítejte poloměr R této plochy a vzdálenost jejího středu od jednoho z nábojů.

1.1.10 Vypočítejte průběh potenciálu a intenzity pole dipólu o momentu $p = q \cdot \ell$. Při výpočtu předpokládejte, že vzdálenost místa, v němž počítáme intenzitu pole od středu dipólu je mnohem větší než délka ℓ dipólu.

1.1.12 Do homogenního elektrického pole o intenzitě $E \equiv (0,0,E_0)$ je vložen elementární dipól s momentem p majícím též směr osy z $(p = (0, 0, p))$

a/ Dokažte, že ekvipotenciální plochou s nulovým potenciálem je kulová plocha a určete její poloměr a.

b/ Změní se tvar pole jestliže do této ekvipotenciální plochy umístíme vodivou plochu nabitou na nulový potenciál?

c/ Jaká by byla hustota náboje na této vodivé ploše?

d/ Jaký by byl celkový dipólový moment P vodivé plochy?

1.1.14 Určete potenciál elektrostatického pole vzbuzeného bodovým nábojem q nacházejícím se ve vzdálenosti a od vodivé rovinné stěny udržované na nulovém potenciálu. Určete dále plošnou hustotu η náboje na vodivé stěně, jeho celkovou velikost a sílu F, kterou je náboj přitahován ke stěně.

1.1.19 Vypočítejte průběh intenzity elektrického pole vně i uvnitř homogenně nabité koule poloměru R. Celkový náboj koule je Q. Při výpočtu použijte Gaussovy věty.

1.1.22 Dva dlouhé tenké vodiče, vložené rovnoběžně ve vzdálenosti d od sebe jsou nabity s lineární hustotou $+\lambda$ a $-\lambda$ (λ = konst.). Určete intenzitu pole E v bodě, který leží v rovině symetrie ve vzdálenosti x od roviny v níž leží vodiče.

1.1.23 Mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami vzdálenými o d je průběh potenciálu dán vztahem $\varphi = k\, x^n$ (k a $n > 1$) jsou konstanty, x je vzdálenost od jedné z rovin). Je třeba určit průběh objemové hustoty ρ náboje v prostoru mezi rovinami a plošnou hustotu σ náboje na vodivých rovinách.

1.2.5 Kulový vodič K_1 o poloměru R_1 je obklopen soustřednou vodivou kulovou slupkou K_2 o poloměru R_2. Pro tuto soustavu vypočítejte kapacitní a influenční koeficienty a přesvědčte se, že platí $c_{ik} = c_{ki}$.

1.2.6 Vypočítejte kapacitu kondensátoru tvořeného dvěma soustřednými kulovými slupkami o poloměrech R_1 a R_2 $(R_2 > R_1)$ pomocí hodnot kapacitních a influenčních koeficientů.

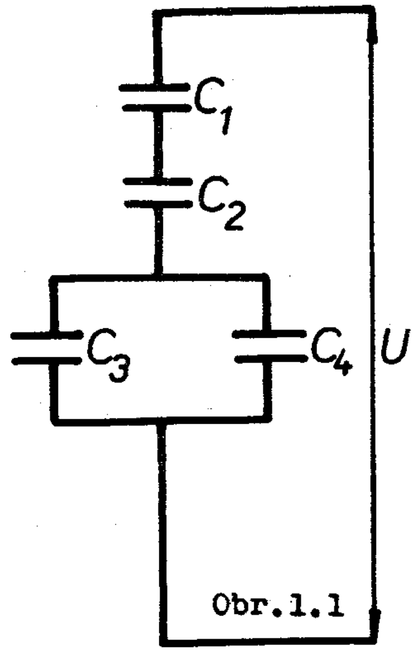
1.2.10 Kondenzátory C_1, C_2, C_3, C_4 jsou řazeny podle obrázku 1.1.

a/ Jaká je celková kapacita zapojení

b/ Jaké napětí je na jednotlivých kapacitách

c/ Jaké náboje jsou na kapacitách C_1 až C_4

d/ jaké budou číselné hodnoty celkové kapacity, napětí a nábojů, je-li $C_1 = C_3 = 1\,\mu F$, $C_2 = C_4 = 10\,\mu F$ a $U = 100$ V .



Obr.1.1

1.2.11 Deskový kondenzátor má kapacitu $C = 100$ pF. Jak se tato kapacita změní vložíme-li mezi desky paralelně vodivý plech, jehož tloušťka je rovna čtvrtině vzdálenosti elektrod. Má poloha plechu vliv na výslednou kapacitu?

1.3.1 Deskový kondenzátor o kapacitě C_0 a ploše desek S byl nabit nábojem Q_0. Poté byl kondenzátor vyplněn beze zbytku nevodivým dielektrikem ε_r a jeho kapacita vzrostla na hodnotu C. Je třeba spočítat

a/ Jaká bude intenzita pole v dielektriku, hustota vázaného náboje na povrchu dielektrika a napětí mezi elektrodami po vložení dielektrika, jestliže kondenzátor není připojen ke zdroji.

b/ Jaká bude intenzita pole v dielektriku, hustota vázaného náboje na povrchu dielektrika a hustota volného náboje na elektrodách po vložení dielektrika, jestliže kondenzátor je připojen k baterii, která udržuje konstantní rozdíl potenciálu mezi elektrodami.

1.3.4 Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru je vyplněn dvěma stejně velkými dielektriky o permitivitách ε_1 a ε_2. Jaká bude kapacita kondenzátoru, je-li rozhraní mezi dielektriky

a/ rovnoběžné s elektrodami

b/ kolmé k elektrodám.

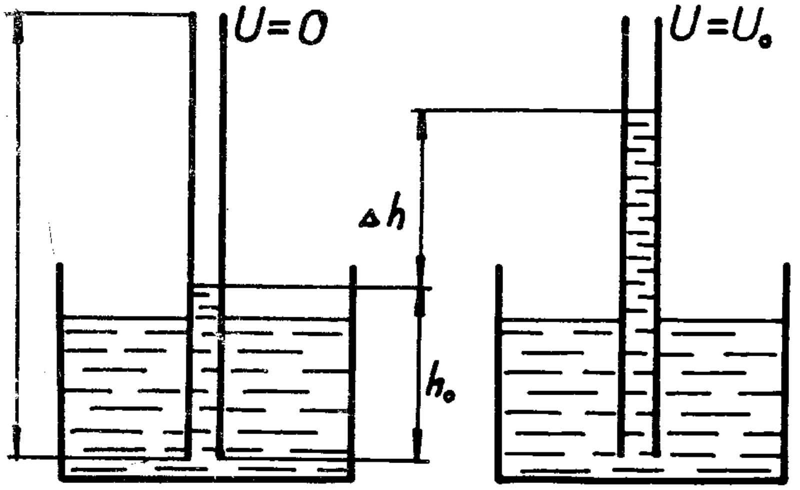
1.3.5 Permitivitu ε pevných látek měříme obvykle tak, že planparalelní destičku tloušťky d zhotovenou z měřeného materiálu vložíme mezi elektrody deskového kondenzátoru. Vzhledem k nerovnostem povrchu materiálu se vytváří obvykle mezi elektrodami a vzorkem vzduchová vrstvička určité tloušťky δ . Jaká může být maximálně tloušťka δ vrstvičky, neuvažujeme-li její vliv na výsledek měření a nemá-li chyba v určení permitivity vzorku být větší než 1 %?

1.4.1 Otočný vzduchový kondenzátor má minimální kapacitu $C_o = 10$ pF, maximální pak $C_m = 10^3$ pF.

a/ Jakou práci vykonáme, změníme-li jeho kapacitu z maximální hodnoty C_m na hodnotu C_o, jestliže je na elektrodách udržováno konstantní napětí $U = 1$ kV.

b/ Jakou práci vykonáme, jestliže kondenzátor byl nabit při kapacitě C_m na napětí $U_o = 1$ kV a během otáčení rotoru byl od zdroje odpojen. Tření v ložiscích zanedbáváme.

1.4.2 Jaká síla působí na elektrody deskového kondenzátoru nabitého na napětí U. Plocha desek je S, jejich vzdálenost x.



Obr.1.3

1.4.6 Do kapalného dielektrika jsou ponořeny dvě paralelní vodivé desky /viz obr.1.3/. Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina kapaliny mezi deskami do výšky h_o měřeno od dolního okraje desek. O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami nabijeme-li desky na napětí U_o. Permitivita kapaliny je ε, vzdálenost desek d.

1.4.9 Do homogenního elektrického pole o intenzitě E_o byla vložena dielektrická koule poloměru R, jejíž permitivita je ε. Určete jaká bude energie této koule.

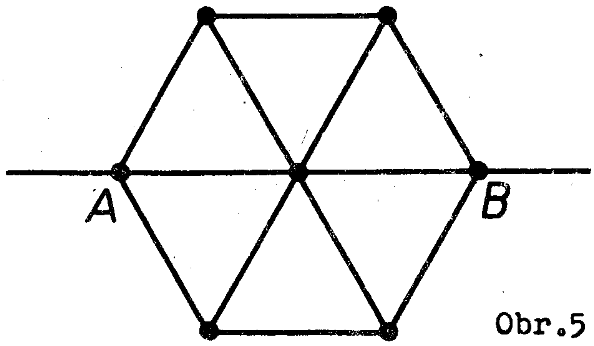
1.4.10 Jaká síla působí na dielektrickou kuličku poloměru R v nehomogenním elektrickém poli o intenzitě $\vec{E}$. Permitivita kuličky je ε. Pro zjednodušení výpočtu předpokládáme, že kulička je tak malá, že pole uvnitř kuličky je možno považovat za homogenní.

2.1.6 Za jak dlouho ohřeje ponorný vařič 2 litry vody $20^{o}C$ teplé na $90^{o}C$? Vařič je připojen na síť U = 220 V, jeho odpor je $R = 100\,\Omega$. Účinnost je 75 %.

2.1.9 Variátor /železný drátek ve vodíkové atmosféře/ má při pokojové teplotě $t_o = 20^{o}C$ odpor $R_o = 4{,}2\,\Omega$. Výkonem P se drátek ohřeje o teplotní rozdíl $t - t_o$ úměrný P; $t - t_o = gP$, kde $g = 9$ deg/W/. Odpor vlákna přitom roste přibližně lineárně s teplotou, teplotní koeficient odporu je 8.10^{-3} deg^{-1}. Jaká je voltampérová charakteristika variátoru? Načrtněte její graf! Vypočtěte mezní hodnotu proudu, který může /za daných zjednodušujících předpokladů/ variátorem procházet!

2.1.10 Z tenké desky o síle t z materiálu o měrné vodivosti σ je vyříznuto mezikruží o vnitřním poloměru r_1 a vnějším r_2. Stanovte odpor mezikruží, slouží-li jako přívody proudu obě kružnice, kterými je omezeno.

5.1.4 Určete odpor mezi body A a B pravidelného šestiúhelníka s úhlopříčkami podle obr.5.2. Odpor každého úseku mezi dvěma uzly je r .



Obr.5.2

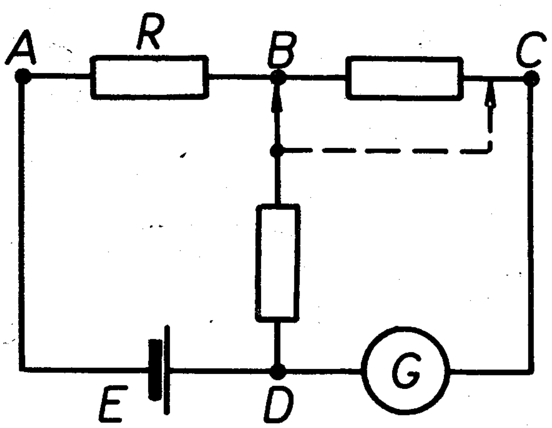
5.1.10 Miliampérmetr se stupnicí do 15 mA má vnitřní odpor 5 Ω . V kombinaci s jakým odporem a jak je přístroj třeba zapojit, aby bylo možné měřit

a/ proudy do 0,15 A ?

b/ napětí do 150 V ?

5.1.11 Ke galvanometru s vnitřním odporem 290 Ω je připojen bočník, který desetkrát snižuje citlivost galvanometru. Jaký sériový odpor je třeba připojit, aby celkový odpor zapojení byl roven odporu galvanometru?

5.1.16 Jaký je vnitřní odpor galvanického článku, je-li odpor R nastaven tak, aby výchylka galvanometru byla stejná při přepojení kontaktu z bodu B do bodu C, obr.5.9. Vnitřní odpor galvanometru je r_g .



Obr.5.9

5.1.29 V zapojení na obr.5.15 jsou hodnoty odporů vybrány tak, že baterií E_1 neprotéká proud. Při zanedbání vnitřních odporů zdrojů zjistěte:

a/ Jaké napětí je na svorkách odporu R_2 ?

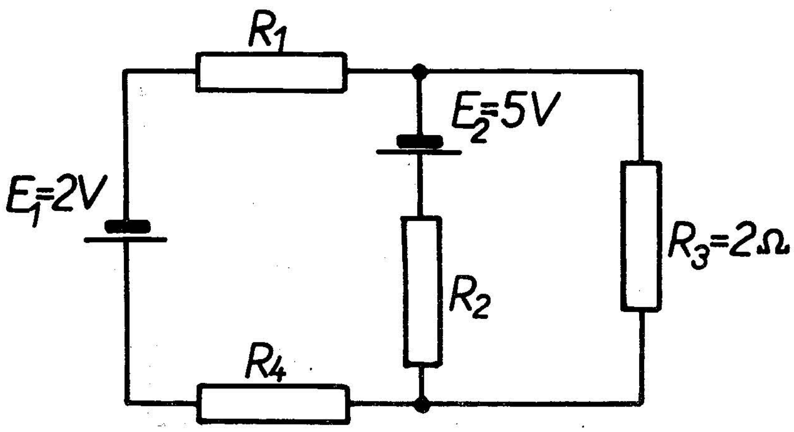
b/ Jaký proud protéká odporem R_3 ?

c/ Jaké hodnoty mají odpory R_1 , R_2 a R_4 ?

5.1.33 Udejte podmínku rovnováhy na Thomsonově dvojmostu /obr.5.18/

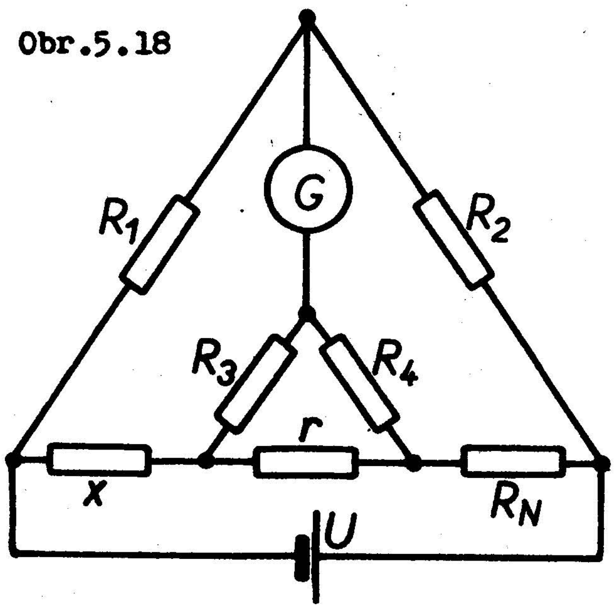
a/ v obecném případě

b/ v případě, že r je velmi malé



Obr.5.15

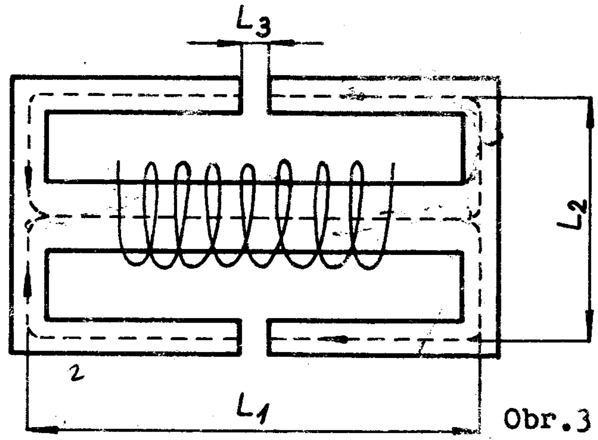
Obr.5.18



3.1.1 K tenkému drátěnému kruhu poloměru R je přiváděn proud i_0 . Nalezněte výraz pro indukci magnetického pole B ve středu kruhu, jestliže přívody dělící kruh na dvě části délky L_1 a L_2 jsou tvořeny dvěma nekonečnými vodiči umístěnými radiálně.

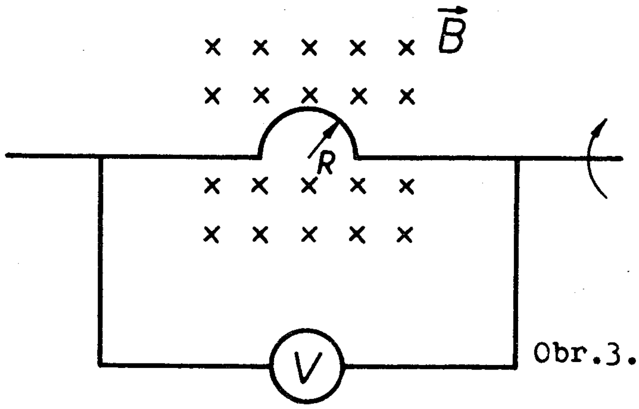
3.1.5 Jaký vztah musí platit mezi délkou L a průměrem D solenoidu, aby bylo možno počítat pole v jeho středu podle vzorce pro nekonečný solenoid s chybou nepřesahující 1 %?

3.2.5 Kolik ampérzávitů musí mít elektromagnet na obr.3.4, aby v mezerách bylo pole $B_3 = 0{,}65\ T$. Délky jednotlivých částí magnetického obvodu: $L_1 = 100$ cm, $L_2 = 80$ cm, $L_3 = 4$ mm. Průřez magnetického toku je ve všech částech obvodu stejný, $S = 20\ \text{cm}^2$. $\mu r = 2700$



Obr.3.4

3.3.1 Odvoďte vztah pro indukovanou elektromotorickou sílu mezi středem a obvodem disku rotujícího kolem vektoru B /homogenní pole/ s konstantní úhlovou rychlostí ω . Poloměr disku je R .



Obr.3.7

3.3.5 Pevný drát tvaru půlkruhu o poloměru R se otáčí s frekvencí f v homogenním magnetickém pole podle obr.3.7. Jaká je indukce pole B , jestliže voltmetr s vnitřním odporem r_i /zbytek obvodu má zanedbatelný odpor/ ukazuje napětí U . Jaká je amplituda indukovaného proudu? Pole vytvořené proudem je zanedbatelné.

3.3.7 Představte si, že kolejnice železniční trati mají směr poledníku a jsou izolovány od země i mezi sebou. Po těchto kolejích jede vlak rychlostí 60 km/hod. Svislá složka intenzity magnetického pole je $H_S = 0{,}5\ Oe$. Co bude ukazovat milivoltmetr připojený v libovolném místě ke kolejnicím /vzdálenost mezi kolejemi $L = 1{,}2$ m/;

$1\,Oe = \frac{10^3}{4\pi}\ \frac{A}{m}$

a/ přibližuje-li se vlak k přístroji,

b/ přístroj leží právě mezi předními koly lokomotivy a druhou dvojicí kol posledního vagonu jedoucího vlaku,

c/ vzdaluje-li se vlak od přístroje?

3.4.7 Udejte výraz pro indukčnost dlouhé válcové cívky délky l , průřezu S , s počtem závitů n .

3.4.10 Vypočítejte indukčnost připadající na jednotku délky pro nekonečně dlouhé dvouvodičové vedení tvořené dvěma dráty kruhového průřezu s poloměrem r . Pro vzdálenost os obou vodičů a nechť platí $a \gg r$.

3.4.11 Stanovte indukčnost na jednotku délky nekonečně dlouhého koaxiálního kabelu se středním vodičem o poloměru r_1 a tenkým pláštěm o poloměru r_2 . Relativní permeabilitu vodiče a izolace položte rovnu jedné.

3.5.2 Toroidní cívka /bez jádra/ sestává ze dvou vinutí, každé má N = 1000 závitů. Vinutí jsou navzájem spojena, jejich magnetická pole mají stejný směr.

a/ Spočítejte magnetickou energii W_2 takovéto cívky.

b/ Jak se změní energie / W_1 /, jestliže jedno vinutí odpojíme.

c/ Nalezněte vztah mezi interakční energií obou cívek a W_2 .

Proud ve vinutí i_0 = 5A , střední délka toroidu L = 25 cm, příčný průřez S = 1 cm^2.

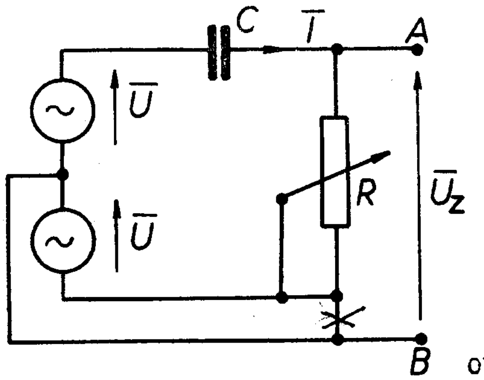
3.5.8 Odvoďte vztah pro nosnost elektromagnetu v případě, že průřez jádra je S a magnetická indukce ve styčné ploše B .

3.5.10 Celková délka střední silokřivky v elektromagnetu na obr.3.13 je L = = 36 cm a šířka každé ze dvou vzduchových mezer l_m = 0,2 mm. Průřez magnetického toku je všude S = 2 cm^2. Vinutí elektromagnetu má N = 294 závity. Při proudu i_0 = 3A je síla magnetu F = 160 N . Určete relativní permeabilitu jádra elektromagnetu.

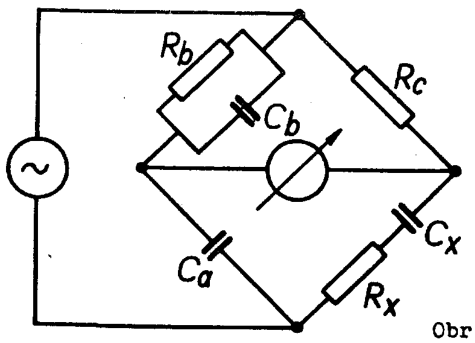
3.5.11 Ukažte, že jestliže intenzita elektrického pole $\vec{E}$ je rovnoběžná s magnetickou indukcí $\vec{B}$ a obě jsou konstantní a homogenní, pohybuje se nabitá částice po kružnici jejíž střed je urychlován.

5.2.3 Třífázová akumulační kamna odebírají ze sítě výkon 10 kW, jsou-li jejich spirály propojeny do hvězdy. Vypočítejte jaký výkon budou kamna odebírat, propojí-li se topná tělesa do trojúhelníka. Při výpočtu předpokládejte, že topná tělesa reprezentují čistě ohmický odpor a zatěžují všechny fáze sítě rovnoměrně. Teplotní změny odporu zanedbejte.

5.2.5 Řešte obvod podle obr.5.29 /viz na následující straně/, v němž jsou za sebou zapojeny v souhlasné fázi dva totožné zdroje střídavého napětí a kapacita je volena tak, že pro maximální hodnotu odporu R_m platí $R_m \gg 1/\omega C$. Diskutujte velikost a fázi napětí U_z na svorkách AB v závislosti na poloze jezdce.



Obr.5.29



Obr.5.33

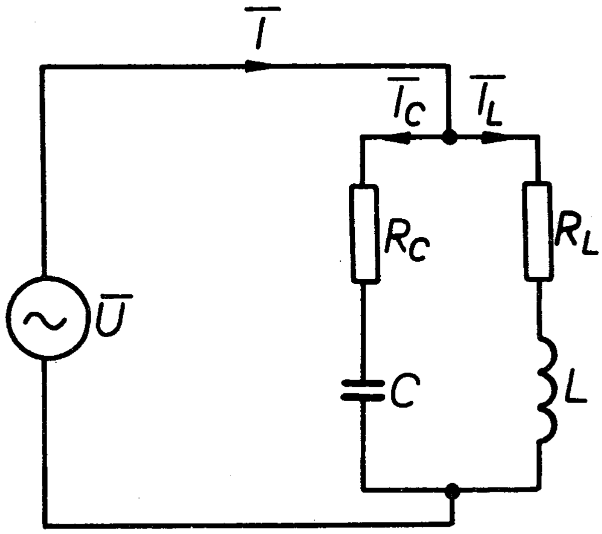
5.2.9 Nalezněte podmínky rovnováhy v Scheringově můstku /obr.5.33 viz na následující straně/ pro měření kapacity.

5.2.19 Pojem resonance v paralelním obvodu podle obr.5.40 lze definovat několika způsoby. Například

a/ jako stav při kterém $\omega L = 1/\omega C$ /seriová resonance/

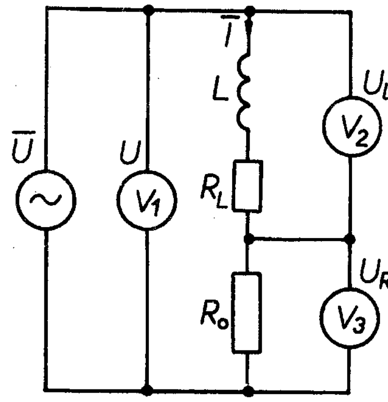
b/ jako stav při němž je celková impedance čistě reálná

Nalezněte frekvenci pro kterou je při daných parametrech obvodu splněna podmínka b/. Diskutujte vztah této frekvence k seriové resonanční frekvenci ω_0.

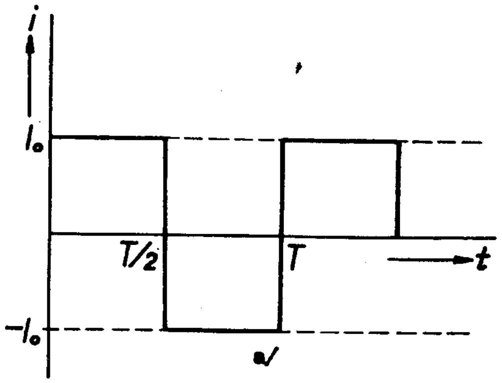


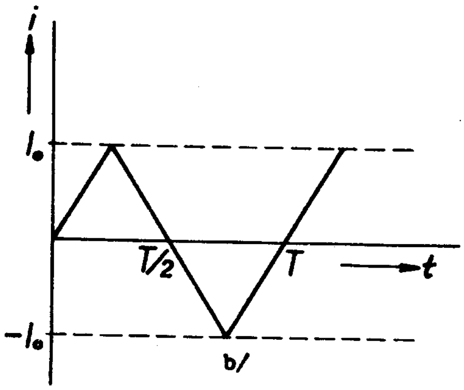
Obr.5.40

5.2.6 Pro měření indukčnosti lze použít metodu tří voltmetrů. Měřená cívka o indukčnosti L a odporu R_L je přes známý odpor R_0 připojena ke zdroji střídavého napětí. Pomocí tří voltmetrů se pak změří napětí na cívce U_L, na známém odporu U_{R_0}, a celkové napětí zdroje U /viz obr.5.30/. Ze známých hodnot U_L, U_{R_0}, U vypočítejte hodnotu indukčnosti L a odporu R_L za předpokladu, že vnitřní odpory voltmetrů můžeme považovat za nekonečně velké. Určete výkon dodaný zdrojem do cívky.

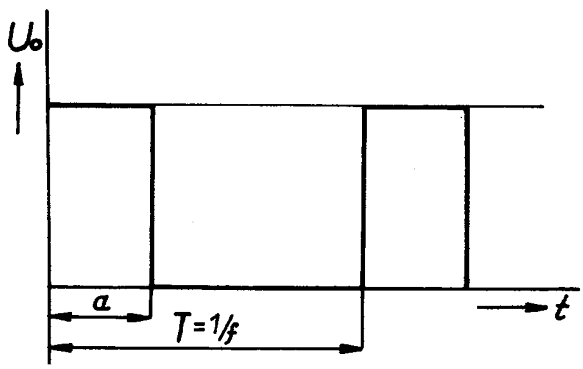


5.3.2 Stanovte střední hodnotu I_s /za půl periody/, efektivní hodnotu I_{ef} a činitele tvaru $K = I_{ef} / I_s$ proudů, jejichž průběhy jsou zobrazeny na obr.





5.3.4 Udejte závislost efektivní hodnoty napětí na šířce a opakovací frekvenci obdélníkových pulsů podle obr.5.48.



2.1.2 Vypočtěte pohyblivost nositelů náboje v mědi, za předpokladu, že na každý atom připadá jeden vodivostní elektron. Atomová hmota mědi $A = 63,6$, její hustota $h = 8,9$ g/cm^3, měrný odpor $\rho = 1,7.10^{-8}\ \Omega$ m. Avogadrovo číslo $N = 6,023.10^{23}$, náboj elektronu $e = 1,6.10^{-19}$C.

2.1.3 Vypočtěte pohyblivost nositelů náboje v germaniu s příměsí arsenu o koncentraci $n = 1,5.10^{15}$ donorů/cm^3. Měrná vodivost $\sigma = 1\,\Omega^{-1}$cm^{-1}.

2.1.4 Předpokládejte, že z materiálů v minulých dvou příkladech jsou zhotoveny válečky o průřezu $q = 0,1$ cm^2 a délce $l = 1$ cm a jsou zapojeny do obvodu elektrického proudu. Proud volíme tak, aby Jouleovy ztráty na válečku byly $P = 10$ W, přičemž vhodným způsobem zabráníme ohřívání válečku. Vypočtěte rychlost uspořádaného pohybu nositelů náboje v obou případech.

2.2.1 Při elektrolytické rafinaci mědi je proudová hustota na povrchu katody $i = 200$ A/m^2; napětí mezi elektrodami je $U = 0,3$ V. Výtěžek činí 95% teoretické hodnoty. Vypočtěte

1. Dobu, potřebnou k vyloučení vrstvy mědi na katodě, tlusté 5 mm,
2. energii, spotřebovanou k rafinaci 1t mědi.

Atomová hmota mědi 63,6, měrná hmota $s = 8,9$ g/cm^3.