Relaxační oscilace

Laser v kontinuálním režimu, který odpovídá matematicky stacionárnímu řešení kinetických rovnic, může být nějakou vnější poruchou ze stacionárního stavu vyveden. Například může svazkem proletět částečka prachu, dojde k vibraci jednoho ze zrcadel (zmenšení pole v rezonátoru) nebo dojde k zakolísání čerpání (změna inverze). Ukážeme, že laser vždy relaxuje k rovnovážným hodnotám a že pro určité typu laseru přitom pole a inverze konají v čase tlumené oscilace, tzv. relaxační oscilace.

Soustředíme se na čtyřhladinový laser, který lze popsat kinetickými rovnicemi (v obvyklém značení veličin)

$$\dot{q} = c\sigma q N - \frac{q}{t_c} \tag{1}$$

$$\dot{N} = (N_{tot} - N)\, W_p - c\sigma q N - \frac{N}{\tau} \tag{2}$$

Z rov. (1) máme pro stacionární řešení

$$q_0 \left(c\sigma N_0 - \frac{1}{t_c} \right) = 0 \tag{3}$$

tedy

$$a)\ q_0 = 0;\ b)\ N_0 = \frac{1}{c\sigma t_c} \tag{4}$$

Řešení a) odpovídá inverze

$$N_0 = \frac{W_p N_{tot}}{W_p + \frac{1}{\tau}} \tag{5}$$

a řešení b) hustota fotonů

$$q_0 = t_c \left[W_p \left(N_{tot} - N_0 \right) - \frac{N_0}{\tau} \right] \tag{6}$$

Vyšetříme nejprve stabilitu řešení a), které odpovídá tomu, že laser nesvítí. Pokud uvážíme, že se počet fotonů zvýší o malou výchylku δq (zřejmě je $\delta q > 0$), $q(t) = q_0 + \delta q(t)$dostáváme z (1)

$$\dot{\delta q} = \left(c\sigma q_0 N_0 - \frac{q_0}{t_c} \right) + c\sigma \delta q N_0 - \frac{\delta q}{t_c} \tag{7}$$

Výraz v závorce je zřejmě podle (1) roven nule (stacionární hodnoty). Pak $\dot{\delta q} = \left(c\sigma N_0 - \frac{1}{t_c} \right) \delta q$. Derivace výchylky pole je tedy kladná nebo záporná podle znaménka kulaté závorky. Řešení rovnice je $\delta q(t) = \delta q(0) \exp\left(rt\right)$, kde $r = \left(c\sigma N_0 - \frac{1}{t_c} \right)$. Pokud tedy $N_0 < \frac{1}{c\sigma t_c}$, je $r < 0$, derivace je záporná a počáteční výchylka pole se v čase tlumí, v opačném případě exponenciálně narůstá. Časová závislost tohoto nárůstu se ovšem zastaví, když bude výchylka velká. Zmíněné dva různé případy odpovídají tomu, zda je stacionární hodnota inverze menší nebo větší, než prahová hodnota inverze $N_{th} = \frac{1}{c\sigma t_c}$ (skutečně může být $N_0 > N_{th}$, pokud $q = 0$). Pokud je v aktivním prostředí načerpaná inverze větší než prahová inverze, dojde k nárůstu pole z nulové hodnoty za současného zmenšení inverze na její prahovou hodnotu.

Zajímavější je ovšem případ, kdy laser svítí, tedy standardní kontinuální režim, který odpovídá stacionárnímu řešení b). Budeme uvažovat, že pole a inverze se vychýlí ze svých stacionárních hodnot málo, tj.

$$q(t) = q_0 + \delta q(t),\ N(t) = N_0 + \delta N \tag{8}$$

přičemž předpokládáme malé výchylky, $\left| \frac{\delta q}{q} \right| << 1$, $\left| \frac{\delta N}{N} \right| << 1$, abychom mohli kinetické rovnice linearizovat. Dosadíme-li (8) do (1), dostaneme

$$\dot{\delta q} = c\sigma q_0 \delta N \tag{9}$$

dosazením (8) do (2) a s využitím (6)

$$\dot{\delta N} = -c\sigma N_0 \delta q - W_p \frac{N_{tot}}{N_0} \delta N. \tag{10}$$

Rovnice (9) a (10) jsou svázané diferenciální rovnice pro výchylky. Protože pole a inverze jsou svázány kinetickými rovnicemi, můžeme předpokládat řešení ve tvaru$\delta q = A \exp(\alpha t),\ \delta N = B \exp(\alpha t)$. Stacinární řešení bude stabilní, pokud bude $Re\left\{\alpha\right\} < 0$ (tlumení), k oscilacím bude docházet, pokud bude $Im\left\{\alpha\right\} \neq 0$. Dosazením těchto výrazů do (9) a (10) dostaneme soustavu algebraických rovnic

$$A\alpha - c\sigma q_0 B = 0$$

$$A c\sigma N_0 + B \left(\alpha + W_p \frac{N_{tot}}{N_0} \right) = 0. \tag{11}$$

Tato soustava bude mít netriviální řešení, pokud její determinant bude roven nule. Odtud

$$\alpha^2 + C\alpha + D = 0, \tag{12}$$

kde

$$C = W_p \frac{N_{tot}}{N_0},\ D = \left(c\sigma\right)^2 q_0 N_0. \tag{13}$$

Řešení kvadratické rovnice je

$$\alpha_{1,2} = -\frac{C}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - 4D}\ , pro\ C^2 \geqq 4D \tag{14}$$

respektive

$$\alpha_{1,2} = -\frac{C}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4D - C^2}\ , pro\ C^2 < 4D. \tag{15}$$

Rovnice (14) odpovídá tlumení-skutečně zřejmě je$C > 0, D > 0$ a proto $Re\left\{\alpha_{1,2}\right\} < 0,\ Im\left\{\alpha_{1,2}\right\} = 0$. Vzhledem k tomu, že je imaginární část nulová, nedochází k žádným oscilacím. Naopak případ (15) odpovídá tlumeným oscilacím

$$\alpha_{1,2} = -\Gamma \pm i\omega_{RO} \tag{16}$$

Zde

$$\Gamma = \frac{C}{2}$$

a

$$\omega_{RO} = \frac{1}{2}\sqrt{4D - C^2}. \tag{17}$$

Hledané řešení je tedy

$$\delta q = A_1 \exp\left(\alpha_1 t\right) + A_2 \exp\left(\alpha_2 t\right),\ \delta N = B_1 \exp\left(\alpha_1 t\right) + B_2 \exp\left(\alpha_2 t\right). \tag{18}$$

Nyní budeme diskutovat, za jakých podmínek může dojít k relaxačním oscilacím.

$$\omega_{RO} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(c\sigma\right)^2 q_0 N_0 - W_p^2\left(\frac{N_{tot}}{N_0}\right)^2}. \tag{19}$$

Vzhledem k tomu, že pole je nenulové, je $N_0 = N_{th} = \frac{1}{c\sigma t_c}$. Vyjádříme-li z (6) W_p, a uvážíme-li, že prahová míra čerpání odpovídá situaci, kdy $q_0 = 0$ a $N_0 = N_{th}$, máme

$$W_p^{th} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{N_{tot}}{N_0} - 1} \doteq \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{N_{tot}}{N_0}} \tag{20}$$

Poslední přibižná rovnost odpovídá tomu, že zpravidla $\frac{N_{tot}}{N_0} >> 1$. Z (6) a (20) máme

$$\omega_{RO} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(p-1\right)\frac{1}{\tau t_c} - p^2\frac{1}{\tau^2}}, \tag{21}$$

kde jsme zavedli relativní míru čerpání

$$p = \frac{W_p}{W_p^{th}}. \tag{22}$$

O možnosti relaxačních oscilací tedy rozhodujeznaménko výrazu pod odmocninou (22). Uvážíme-li obvyklou malou hodnotu relativního čerpání, např. $p = 2$, pak oscilace nastanou pro

$$\frac{1}{t_c} > \frac{1}{\tau}. \tag{23}$$

Typickým příkladem laserů, v nichž se relaxační oscilace pozorují, jsou běžné pevnolátkové lasery, pro něž je doba horní laserové hladiny dlouhá, v oblasti stovek mikrosekund (Nd:YAG laser). Vzhledem k tomu, že v běžných rezonátorech je $t_c \approx 100$ns , je $\frac{1}{t_c} >> \frac{1}{\tau}$ a frekvenci relaxačních oscilací lze psát

$$\omega_{RO} = \sqrt{(p-1)\frac{1}{\tau t_c}}. \qquad (24)$$

Tato frekvence se dá považovat za charakteristickou frekvenci "přelévání" energie uskladněné v laseru z aktivního prostředí do pole a zpět. Je také nejvyšší mezní frekvencí pro lasery s modulovaným čerpáním (přímá modulace). Její hodnotu můžeme ilustrovat pro případ laseru Nd:YAG:$p = 2$, $\tau = 230\mu s$, $t_c = 100\, ns$, $f_{RO} = \omega_{RO}/2\pi \doteq 33\, kHz$. Pro plynové lasery je zpravidla doba života horní laserové hladiny jednotky až desítky nanosekund a relaxační oscilace nenastávají.