Část I
Laserové rezonátory

Velmi důležitou částí laseru jsou optické rezonátory, které zajišťují zpětnou vazbu. Rezonátory lze vyšetřovat do jisté míry pomocí geometrické optiky, jejich vlastnosti jsou ovšem popsány lépe vlnovou optikou.

Laserové rezonátory jsou v naprosté většině současných laserů tvořené dvojicí zrcadel, jedná se tedy o tzv. otevřené rezonátory. Jedá se o dvě rovinná nebo kulová zrcadla umístěná v jisté vzdálenosti, mezi nimi je umístěno aktivní prostředí laseru. Otevřené rezonátory se používají jednak z praktického hlediska, aby bylo možné dobře aktivní prostředí čerpat, a jednak také proto, jak uvidíme dále, aby byl omezen počet módů optického záření laseru. Základní vlastnosti rezonátorů lze ale dobře vysvětlit na příkladu uzavřené rezonanční optické dutiny.

1 Uzavřená pravoúhlá rezonanční dutina

Uvažujme dutinu tvaru kvádru a rozměry $2a$, $2b$, L, která je tvořena zcela vodivými stěnami, jak je znázorněno na obrázku. Elektrické pole musí vyhovovat okrajovým podmínkám na vodivých stěnách, tj. tečné složky elektrického vektoru musí být nulové. Bude-li dutina rezonátoru prázdná, vyhovuje elektrické pole vlnové rovnici1

$$\triangle\vec{E}\left(\vec{r,t}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}\left(\vec{r,t}\right)}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že hledáme řešení odpovídající stojatým vlnám v dutině, budeme předpokládat

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\vec{u}(\vec{r})\,A\left(t\right). \tag{2}$$

Dosazením do 1 získáme například pro x-ovou složku

$$\frac{\triangle u_x}{u_x}-\frac{1}{c^2A}\frac{d^2A}{dt^2}=0. \tag{3}$$

První člen závisí jen na prostorové souřadnici, druhý člen pouze na čase, proto musí být každý ze členů roven stejné konstantě, kterou označíme $-k^2$. Protože analogická rovnice platí pro každou složku, dostáváme pro prostorovou funkci $\vec{u}$ Helmholtzovu vlnovou rovnici

$$\triangle\vec{u}+k^2\vec{u}=0 \tag{4}$$

a pro časovou část rovnici

$$\frac{d^2A}{dt^2}+c^2k^2A=0. \tag{5}$$

Řešením rovnice 5 jsou harmonické kmity

$$A\left(t\right)=A_0\cos\left(\omega t+\varphi\right),\tag{6}$$

kde konstanty A_0a φjsou určeny počátečními podmínkami a kruhová frekvence (srov. rov. 5)

$$\omega=ck,\tag{7}$$

kde k je velikost vlnového vektoru. Jak bylo již řečeno, prostorová část musí splňovat okrajové podmínky. Je proto jako řešení rovnice 4 výhodné uvažovat

$$\begin{aligned}u_x&=e_x\cos\left(k_xx\right)\sin\left(k_yy\right)\sin\left(k_zz\right)\\u_y&=e_y\sin\left(k_xx\right)\cos\left(k_yy\right)\sin\left(k_zz\right)\\u_z&=e_z\sin\left(k_xx\right)\sin\left(k_yy\right)\cos\left(k_zz\right)\end{aligned}\tag{8}$$

, neboť je splněna nulovost tečných složek na stěnách procházejících počátkem souřadného systému. Zde k_ja $e_j$jsou konstanty. Dosazením do 4máme

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2,\tag{9}$$

což naznačuje, že k_jmůžeme chápat jako komponenty vlnového vektoru. Konstanty $e_j$vyjadřují polarizaci světelné vlny. Jejich velikosti volíme tak, aby byly složkami jednotkového polarizačního vektoru. Protože ve vakuu platí divergenční Maxwellova rovnice

$$\nabla\cdot\vec{u}=0,\tag{10}$$

dostaneme přímým výpočtem

$$e\cdot\vec{k}\vec{=}0\tag{11}$$

což zřejmě odpovídá příčné elektromagnetické vlně. Mají-li být splněny okrajové podmínky i na opačných stěnách dutiny, musí pro odpovídající souřadnice nabývat sinové funkce nulové hodnoty, tedy musí platit (l, m, n jsou celá čísla):

$$\begin{aligned}k_zL&=n\pi\\k_y2b&=m\pi\\k_x2a&=l\pi\end{aligned}\tag{12}$$

.

Odtud je zřejmé, že komponenty vlnového vektoru $k_j$mohou nabývat pouze určitých hodnot, což znamená také, že velikost vlnového vektoru je dána trojicí čísel l, m, n

$$k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2,\tag{13}$$

tedy

$$k_{l,m,n}^2=\pi^2\left(\frac{l^2}{4a^2}+\frac{m^2}{4b^2}+\frac{n^2}{L^2}\right).\tag{14}$$

Pro kruhové frekvence tak dostáváme

$$\omega_{l,m,n}^2 = \pi^2 c^2 \left(\frac{l^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2} + \frac{n^2}{L^2} \right). \tag{15}$$

Stavy elektrického pole, které mohou v dutině existovat, módy, jsou tedy určeny trojicí celých čísel. Frekvence určující oscilace v čase i komponenty vlnového vektoru určující rozložení v prostoru jsou pro záporná i kladná čísla stejné. Řešení 8tak představuje stojaté vlnění tvořené rovinnými vlnami uvnitř pravoúhlé dutiny, jak je obvzlášť zřejmé, nahradíme-li součin kosinů, resp. sinů, odpovídajícím vyjádřením pomocí exponenciál. Výrazy pro $u_j$tak obsahují 8 členů s faktory $\exp\left(\pm ik_x x \pm ik_y y \pm ik_z z\right)$, 8 rovinných vln. Pro lasery se ale používají tzv. otevřené rezonátory, které nemají boční stěny. Stavy světla, které jsou reprezentovány vlněním s vlnovými vektory se směry blízkými ose rezonátoru z, "cítí odstranění boků" málo, a proto můžeme předpokládat, že jejich charakter zůstane nezměněn, stejný jako pro uzavřenou dutinu. Vlny s vlnovými vektory, které svírají velký úhel s osou z naopak mají veliké ztráty a světlo v nich nemůže být laserem generováno, protože není dosaženo prahové podmínky. Směrové kosiny vůči jednotlivým souřadným osám jsou dány zřejmě poměry $\frac{k_j}{k}$. Pro stav pole s $m = 0$,$l = 0$ je zřejmě $k = k_z$, tedy $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$, což dává známou rezonanční podmínku $L = n\frac{\lambda}{2}$. Pro rezonátor dlouhý 1 m a vlnovou délku 500 nm je $n = 4 \times 10^6$.V laserech mohou oscilovat i další módy pole, které jsou charakterizovány indexy $l, m \lessapprox 10$, tj. $l, m \ll n$. Odpovídající frekvence dostaneme z 15 (předpokládáme, jak je obvyklé $a = b$)

$$\omega_{l,m,n} = \pi c \frac{n}{L} \left(1 + \frac{l^2 + m^2}{4a^2} \frac{L^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq \pi c \frac{n}{L} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{l^2 + m^2}{4a^2} \frac{L^2}{n^2} \right). \tag{16}$$

Sledujeme-li různé stavy pole, které se liší pouze indexem n, který vyjadřuje podélné rozložení pole, mluvíme o *podélných módech.* Naopak, pokud sledujeme různé stavy pole, které se liší v indexech l,a m pro konstantní index n, mluvíme o *příčných módech.* Je ovšem zřejmé, že úplné rozdělení módů na podélné a příčné, jak se často chápe, není možné, nejsou to odlišné stavy pole. Frekvenční rozdíl mezi dvěma následujícími podélnými mody je tedy (zanedbáváme druhý člen v 16 vzhledem k poměru velikostí módových indexů a geometrických rozměrů typických rezonátorů)

$$\Delta\omega_n = \omega_{l,m,n+1} - \omega_{l,m,n} = \frac{\pi c}{L}, \tag{17}$$

neboli

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2L} = \frac{1}{T_R}. \tag{18}$$

(Srov. výraz pro volný interval Fabry-Perotova interferometru s rovinnými zrcadly). Podélné módy jsou ve frekvenci ekvidistantní. Frekvenční rozdíl dvou příčných módů

$$\Delta\omega_l = \omega_{l+1,m,n} - \omega_{l,m,n} = \pi c \frac{1}{2} \frac{(l+1)^2 - l^2}{4a^2} \frac{L}{n} = \frac{\pi c L}{8a^2 n} \left(2l + 1\right), \tag{19}$$

roste s rostoucím číslem módu.