

čerpání)

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{(\mathcal{D}_0 - \mathcal{D})}{\tau} + 2ig(\mathcal{P}\mathcal{E}^* - \mathcal{P}^*\mathcal{E}). \quad (6.106)$$

Laserová dynamika je tak popsána pomocí tří makroskopických proměnných. Pro reálné situace je výhodné řešit laserovou dynamiku řešením tří rovnic spíše než velkého počtu rovnic s vyjádřením pole v jednotlivých módech a popisem prostředí pomocí jednotlivých atomů.

6.3 Laserová dynamika – třídy laserů a chaos v laserech

Kapitolu o semiklasickém popisu dynamického chování laserů uzavřeme zmínkou o řazení laserů do tříd podle jejich dynamických vlastností a o zvláštním dynamickém chování laseru: deterministickém chaosu [15]. V tomto odstavci budeme vycházet ze semiklasického popisu laseru. Laserovou dynamiku v semiklasické aproximaci můžeme popsat Maxwell-Blochovými rovnicemi, které spojují elektrické pole, polarizaci a inverzi. V případě homogenně rozšířeného přechodu, jednomódového laseru, při rezonanci mezi frekvencí přechodu a frekvencí laserového módu dostáváme rovnice ve tvaru uvedeném v kapitole 6. Pole \mathcal{E} můžeme zvolit jako reálnou veličinu, polarizaci $\mathcal{P} \rightarrow i\mathcal{P}$ jako reálnou veličinu s fázovým posuvem i , inverze \mathcal{D} je reálná. Pak lze rovnice přepsat

$$\dot{\mathcal{E}} = -\kappa\mathcal{E} + g\mathcal{P}, \quad (6.107)$$

$$\dot{\mathcal{P}} = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} + g\mathcal{E}\mathcal{D}, \quad (6.108)$$

$$\dot{\mathcal{D}} = \gamma_{\parallel}(\mathcal{D}_0 - \mathcal{D}) - 4g\mathcal{P}\mathcal{E}, \quad (6.109)$$

zde jsme zavedli označení γ_{\perp} , resp. γ_{\parallel} , pro rychlostní konstantu relaxace polarizace, resp. inverze. Podle vzájemné velikosti tří relaxačních konstant vystupujících v Maxwell-Blochových rovnicích se rozdělují lasery do tří tříd:

- třída A : $\gamma_{\perp} \sim \gamma_{\parallel} \gg \kappa$
- třída B: $\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}, \kappa$
- třída C: $\gamma_{\perp} \sim \gamma_{\parallel} \sim \kappa$

Do třídy A svými parametry patří například tyto lasery: He-Ne, argonový iontový, kryptonový iontový, barvivové lasery. Do třídy B patří rubínový

laser, neodýmové lasery, CO₂ laser. Do třídy C se řadí „neobvyklé“ lasery, například lasery generující v daleké infračervené oblasti.

Zařazení do třídy určuje, jak bohaté dynamické chování laseru můžeme očekávat. Pro třídu C musíme vzít v úvahu všechny tři rovnice. Pro ostatní třídy můžeme použít adiabatickou aproximaci (viz kapitola 6). Pro třídu B tak můžeme vyloučit diferenciální rovnici pro polarizaci, tj. ve smyslu adiabatické aproximace položíme $\dot{\mathcal{P}} = 0$, tedy

$$\mathcal{P} = \frac{g}{\gamma_{\perp}} \mathcal{E} \mathcal{D} \quad (6.110)$$

a dosazením do diferenciálních rovnic pro pole a inverzi dostaneme dvě kinetické rovnice. V případě třídy A se situace ještě dále zjednoduší, protože vzhledem k nerovnostem mezi relaxačními konstantami můžeme vyloučit i rovnici pro inverzi a k řešení zbude pouze jedna diferenciální rovnice pro pole.

Uvedené Maxwell-Blochovy rovnice se dají také přepsat zavedením normovaných veličin, které nabývají stacionárních hodnot rovných jedné. V rovnicích (6.107)–(6.109) je tak možné zavést veličiny normované na stacionární hodnoty,

$$\mathcal{E}^s = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{stac}}}, \quad (6.111)$$

$$\mathcal{P}^s = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_{\text{stac}}}, \quad (6.112)$$

$$\mathcal{D}^s = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}_{\text{stac}}}. \quad (6.113)$$

Uvážíme-li, že z rovnice (6.107), resp. (6.108), máme $\mathcal{E}_{\text{stac}} = \frac{g}{\kappa} \mathcal{P}_{\text{stac}}$, resp. $\mathcal{P}_{\text{stac}} = \frac{g}{\gamma_{\perp}} \mathcal{E}_{\text{stac}} \mathcal{D}_0$ a zavedeme-li parametr čerpání

$$\Lambda = \frac{\mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_{\text{stac}}}{\mathcal{D}_{\text{stac}}}, \quad (6.114)$$

můžeme přepsat rovnice (6.107)–(6.109) do tvaru

$$\dot{\mathcal{E}}^s = -\kappa \mathcal{E}^s + \kappa \mathcal{P}^s, \quad (6.115)$$

$$\dot{\mathcal{P}}^s = -\gamma_{\perp} \mathcal{P}^s + \gamma_{\perp} \mathcal{E}^s \mathcal{D}^s, \quad (6.116)$$

$$\dot{\mathcal{D}}^s = -\gamma_{\parallel} \mathcal{D}^s + \gamma_{\parallel} (\Lambda + 1) - \gamma_{\parallel} \Lambda \mathcal{P}^s \mathcal{E}^s. \quad (6.117)$$

Tři diferenciální rovnice popisující laser jsou nelineární a obsahují ztráty, disipaci. V takových fyzikálních systémech může docházet k situaci, kdy jejich chování není ani stabilní ani periodické. Důležitým a jedním z prvních studovaných nelineárních disipativních systémů je dynamika proudění tekutin, jak ji vyšetřoval v roce 1963 v souvislosti s modelováním atmosféry E. N. Lorenz [22]. Po řadě aproximací dospěl k soustavě tří nelineárních diferenciálních rovnic

$$\dot{X} = \sigma Y - \sigma X, \quad (6.118)$$

$$\dot{Y} = X(r - Z) - Y, \quad (6.119)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \quad (6.120)$$

Proměnné X, Y, Z popisují stav tekutiny (X souvisí s rychlostí, Y, Z s teplotou). σ, r, b jsou parametry vztahující se k popisu proudění tekutin. Rovnice jsou poměrně jednoduché, obsahují jen první časové derivace a pouze dva nelineární členy. Při numerickém řešení rovnic však Lorenz zjistil, že pro široký interval hodnot parametrů a počátečních podmínek dostává řešení, které není stabilní ani periodické. Disipativní členy v rovnicích ($-\sigma X$, $-Y$ a $-bZ$) vedou k tomu, že řešení ve fázovém prostoru je přitaheno do určité konečné oblasti fázového prostoru, *atraktoru*, ve kterém setrvává a dále se vyvíjí tak, že není stabilní ani periodické. Odpovídá spirále, která se vzdaluje od pevného bodu, v náhodných intervalech je přerušena a pohyb pokračuje spirálově kolem symetrického pevného bodu. Řešení je velmi citlivé na počáteční podmínky v tom smyslu, že libovolně malá změna v počátečních podmínkách vede po určité době k velké divergenci trajektorií. Dynamika, která je tak výrazně závislá na počátečních podmínkách, se říká chaotická dynamika. Objevuje se i přes omezený počet stupňů volnosti systému (který ovšem musí být aspoň 3), v rovnicích, které neobsahují žádné šumové členy. Proto se mluví o *deterministickém chaosu*. Lorenzův systém je dnes považován za jeden ze základních modelů deterministického chaosu.

V roce 1975 ukázal H. Haken, že Lorenzovy rovnice odpovídají laserovým Maxwell-Blochovým rovnicím a že tedy lze očekávat podobné chaotické chování u laseru. Lorentzovy rovnice jsou „podobné“ Maxwell-Blochovým rovnicím, ekvivalenci ukážeme postupem, který navrhl Haken [15]. Nejprve

upravíme tvar Lorenzových rovnic zavedením nových proměnných

$$\xi = X, \quad (6.121)$$

$$\eta = Y, \quad (6.122)$$

$$\zeta = r - Z \quad (6.123)$$

a přímým dosazením na tvar

$$\dot{\xi} = \sigma\eta - \sigma\xi, \quad (6.124)$$

$$\dot{\eta} = \xi\zeta - \eta, \quad (6.125)$$

$$\dot{\zeta} = -b\zeta - \xi\eta + br. \quad (6.126)$$

Na tento tvar rovnic přejdou rovnice (6.115-6.117), když do nich dosadíme

$$t = \tilde{t} \frac{\sigma}{\kappa}, \quad (6.127)$$

$$\mathcal{E}^s = \alpha\xi, \quad (6.128)$$

$$\mathcal{P}^s = \alpha\eta, \quad (6.129)$$

$$D^s = \zeta, \quad (6.130)$$

$$\gamma_{\parallel} = \frac{\kappa b}{\sigma}, \quad (6.131)$$

$$\gamma_{\perp} = \frac{\kappa}{\sigma}, \quad (6.132)$$

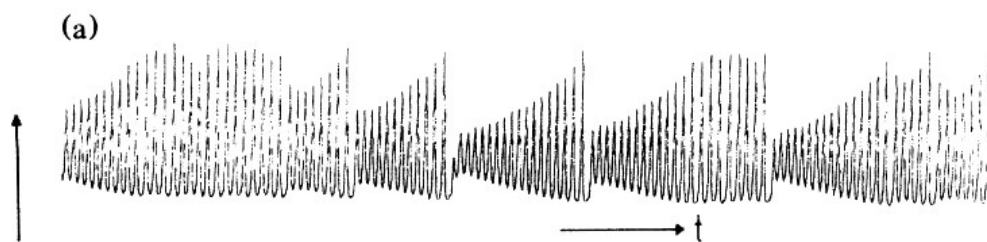
$$\Lambda = r - 1, \quad (6.133)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{b(r-1)}}, \quad r > 1. \quad (6.134)$$

Pro $r < 1$ je $\Lambda < 0$, což znamená, že $\mathcal{D}_0 < \mathcal{D}_{\text{stac}}$, tedy inverze nedosahuje prahové hodnoty a laser nesvítí. Pro $r \geq 1$ je laser nad prahem a pro stacionární čerpání svítí kontinuálně. Z analýzy Lorenzových rovnic ovšem vyplývá, že pro určité hodnoty parametrů dochází k neuspořádanému, chaotickému „řešení“ rovnic, tedy výstupní laserové intenzity. Tyto podmínky pro laserové parametry jsou

$$\kappa > \gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp}, \quad (6.135)$$

$$\Lambda > \frac{(\gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp} + \kappa)(\gamma_{\perp} + \kappa)}{(\kappa - \gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp})\gamma_{\perp}}. \quad (6.136)$$

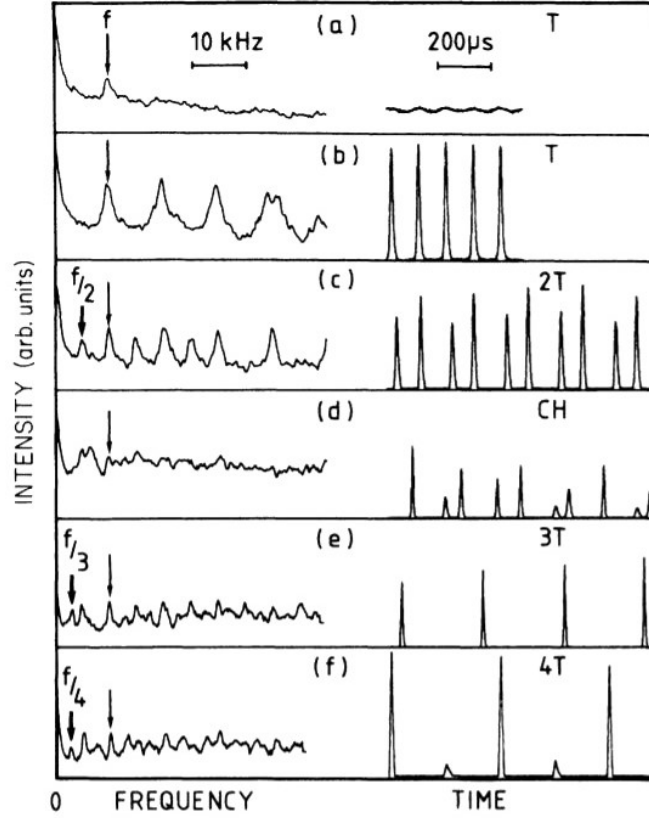


Obrázek 6.3: Chaotické chování laseru. Časová závislost výstupu laseru NH_3 , který generoval záření na $81\ \mu m$ [23] odpovídající chaotickému chování Lorenzova typu

První podmínka se nazývá *podmínkou špatné dutiny (rezonátoru)*, protože rychlost tlumení pole v rezonátoru musí převyšovat rychlost tlumení inverze a polarizace, což je v běžných laserech neobvyklé. Druhá podmínka souvisí se silným čerpáním (vysoko nad práh laseru – záleží na parametrech, ale například 10krát nad práh). Pozorování chaosu v laseru Lorenzova typu proto není běžné, ale chaotické chování bylo experimentálně prokázáno. Poprvé byl chaos demonstrován v infračerveném laseru NH_3 , který generoval záření na $81\ \mu m$ [23], viz obr. 6.3.

Pro běžné lasery ovšem zmíněné podmínky pro chaotické chování Lorenzova typu nejsou splněny. Přesto je možné chaotické chování pozorovat i například v laserech třídy B. Pro tyto lasery je dynamika popsána pouze dvěma rovnicemi, ale třetí dimenzi nutnou pro existenci bohatého, chaotického chování je možné dodat například vnější modulací ztrát nebo čerpání. Příklad dynamiky laseru třídy B ($Co : MgF_2$) s periodickou modulací čerpání je uveden na obr. 6.4.

Pro chaotickou dynamiku je charakteristická velká citlivost chování (řešení) na počátečních podmínkách, široké a hladké spektrum frekvencí. V literatuře lze nalézt přesná kritéria pro ověření a klasifikaci chaotického chování. Má totiž stejné rysy pro celou řadu systémů (nelineární mechanické, elektrické systémy, lasery, chemické reakce, evoluce generací v zoologii, společenské jevy). Přejít chování systému od uspořádaného k chaotickému zpravidla závisí na hodnotě jednoho parametru, který se nazývá bifurkační parametr. Bifurkací se rozumí skoková kvalitativní změna chování systému (jako na obrázku 6.4, bifurkačním parametrem je hloubka modulace, bifurkací je například změna dynamiky $T \rightarrow 2T$ mezi panely b) a c)). Posloupnost bifurkací závislá na souvislé změně bifurkačního parametru, která vede k chaotickému chování, se nazývá cestou k chaosu.



Obrázek 6.4: Intenzita laseru $Co : MgF_2$ v závislosti na frekvenci a čase. Laser byl opticky čerpán, čerpací svazek byl periodicky modulován. Jednotlivé panely odpovídají různé hloubce modulace (od 0,015 (a) do 0,47 (f)). T je modulační perioda na obrázku je vyznačen charakter dynamiky (CH odpovídá chaosu) [24]

Je zajímavé, že existuje několik univerzálních cest k chaosu, velmi časté je *zdvojování period* a *intermitence*. U zdvojování period se se změnou bifurkačního parametru mění perioda $T \rightarrow 2T \rightarrow 4T \rightarrow \dots \rightarrow \infty$ (*chaos*). Bez ohledu na sledovaný systém, hodnoty bifurkačního parametru μ , při kterých dochází k bifurkacím, jsou pro větší pořadí bifurkací „hustší“ (rozdíl hodnot bifurkačního parametru pro dvě následující bifurkace se zmenšuje s pořadovým číslem bifurkace)

$$\mu_\infty - \mu_p = \frac{C}{\delta^p}, \quad \delta > 1, \quad (6.137)$$

zde C je konstanta, p je pořadové číslo bifurkace, $\delta > 1$ je parametr. Přímým dosazením můžeme vyčíslit

$$\frac{\mu_p - \mu_{p-1}}{\mu_{p+1} - \mu_p} = \delta. \quad (6.138)$$

Ukazuje se, že konstanta δ je univerzální, $\delta = 4,669\dots$, nazývá se *Feigenbaumova konstanta* (1975). Zdvojování frekvencí bylo pozorováno v řadě systémů s chaotickým chováním. Bylo pozorováno i v laserech s modulací čerpání nebo ztrát, jak ilustruje i náš případ uvedený výše.

V osmdesátých letech 20. století se zdálo, že teorie chaosu představuje univerzální přístup, kterým bude možné sjednotit popis zdánlivě nesouvisejících systémů. Její postupy se s úspěchem aplikovaly a publikovaly v řadě výzkumných odvětví. Nicméně ukázalo se, že přístup „teorie chaosu“ přináší ve skutečnosti zanedbatelný přínos pro výzkum jednotlivých systémů. Podobně je tomu i v laserové fyzice, kde dynamické chování laseru je možné velmi dobře klasifikovat a popsat obecnými přístupy pro analýzu dynamiky nelineárního disipativního systému, ale na druhé straně je laser velmi dobře popsán laserovou semiklasickou nebo kvantovou teorií. Proto je v současné době výzkumná i publikační aktivita v oblasti chaosu poměrně nevýrazná.