

Ohyb světla:

Oblast dalekého pole (rovinné vlny): Fraunhoferova difrakce

Štěrbina, řada štěrbin, kruhová clona

Oblast blízkého pole (kulové vlny): Fresnelova difrakce

Kruhová clona – metoda Fresnelových zón

DIFRAKCE SVĚTLA

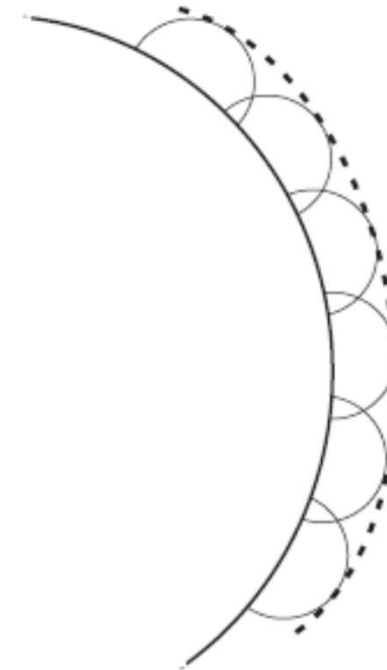
(OHYB)

1665 Grimaldi

frangere (lámat) a dis- (opak)

17. století Huygens

Huygensův princip



Obr. 8.1 Huygensův princip.
Sekundární Huygensovy vlny
vytvářejí vlnoplochu v dalším
okamžiku

Huygens – Fresnelův princip

Interference sekundárních vlněk, směr šíření

skalární teorie difrakce

Kirchhoffova okrajová podmínka

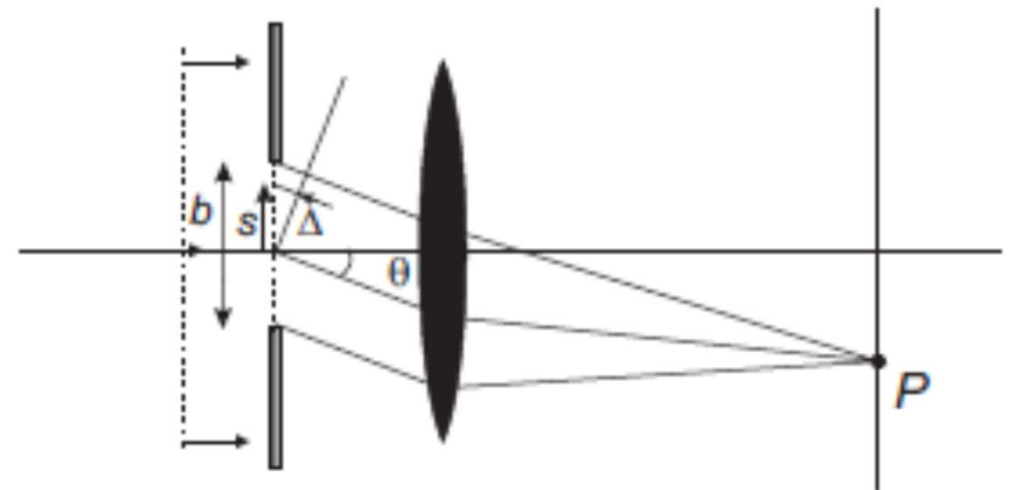
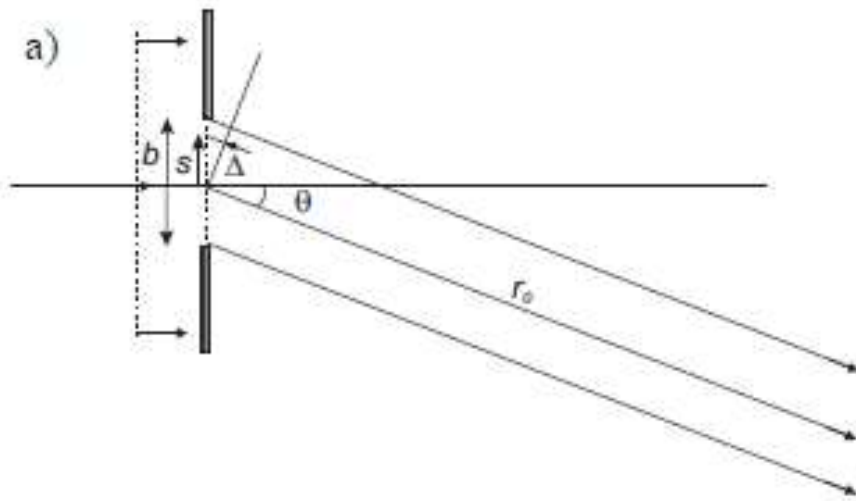
Kirchhoffův–Fresnelův integrál

dvě důležité aproximace: *Fresnelova difrakce*
Fraunhoferova difrakce

Fraunhoferova difrakce

(rovinné vlny, daleké pole)

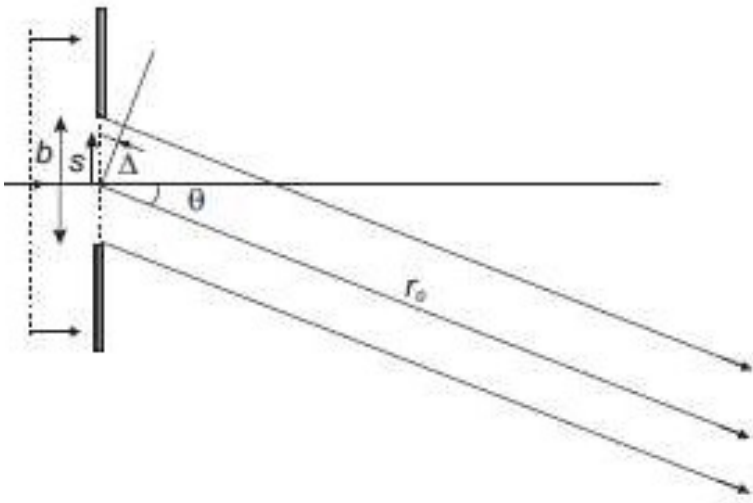
Fraunhoferova difrakce na štěrbíně



$$d \tilde{E}_p = \frac{E_A dS}{r} \exp[-i(\omega t - k r)]$$

$$r(s) = r_0 + \Delta(s)$$

$$\Delta(s) = s \sin \theta$$



$$d \tilde{E}_P = \frac{E_A dS}{r} \exp[-i(\omega t - k r)]$$

$$\tilde{E}_P = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{E_L}{r_0 + \Delta(s)} \exp(-i\{\omega t - k[r_0 + \Delta(s)]\}) ds$$

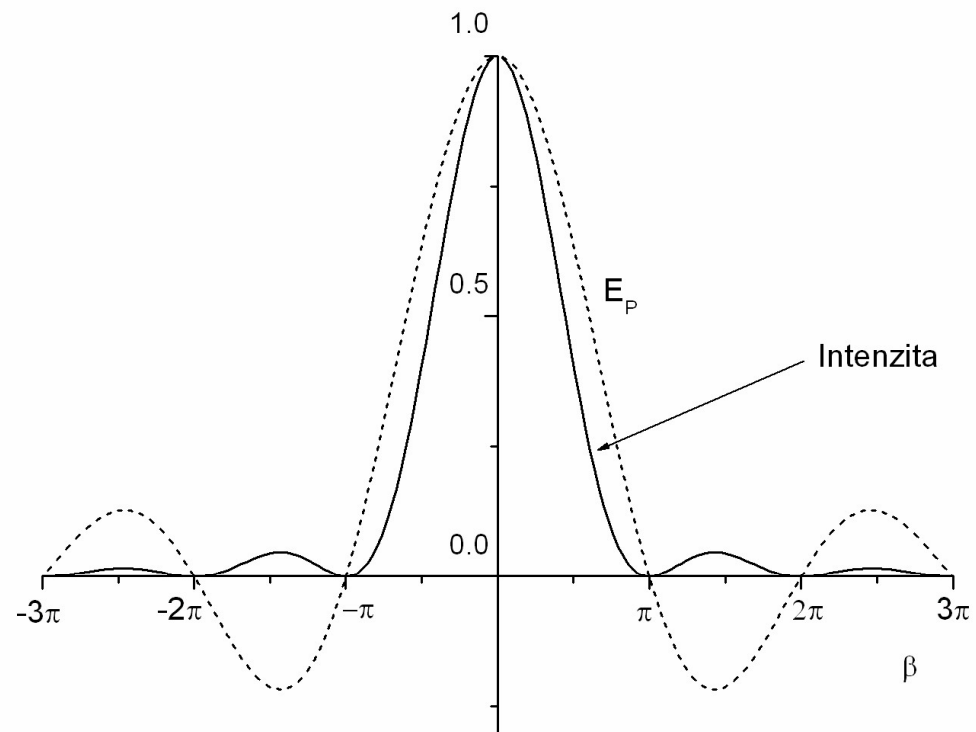
$$r_0 + \Delta \approx r_0 \quad \text{pro } \Delta \ll r_0$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \exp[-i(\omega t - k r_0)] \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp(i k s \sin \theta) ds.$$

$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L b}{r_0} \exp[-i(\omega t - k r_0)] \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$I_P = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$



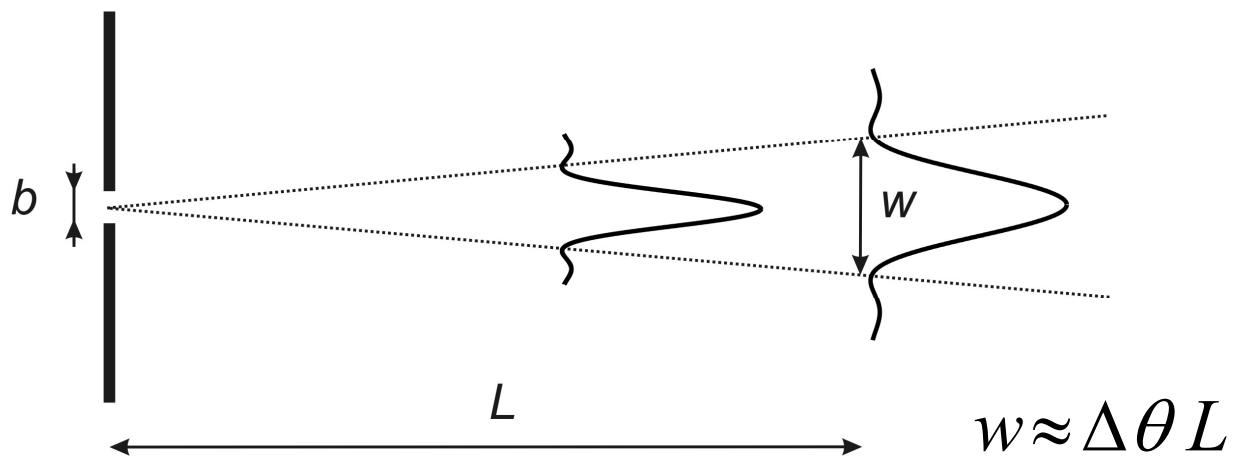
Nuly $\sin \beta = 0 \quad \beta = m \pi$

Maxima $\sin \beta / \beta \quad \beta = \text{tg } \beta \quad 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi$
 $\beta \neq 0$

První minima intenzity určují úhlovou „šířku štěrbinu“ $\beta_1 = -\pi$ $\beta_2 = +\pi$

$$\Delta\theta \approx \frac{2\lambda}{b}$$

$$\beta = \frac{1}{2} k b \sin \theta$$



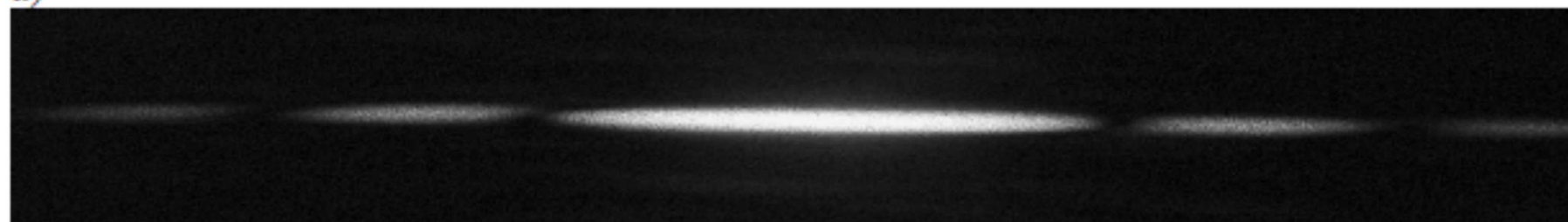
$$w \geq b$$

$$L \geq \frac{b^2}{2\lambda}$$

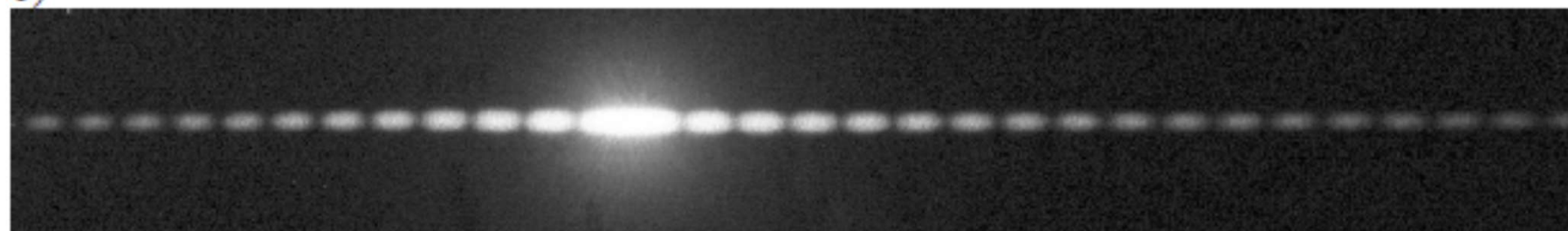
Oblast dalekého pole

$$L \gg \frac{b^2}{\lambda}$$

a)



b)



Obr. 8.3 Difrakční obrazec při Fraunhoferově difrakci na štěrbinách šířky a) $b=20 \mu m$ a b) $b=100 \mu m$, štěrbininy byly osvětleny kolimovaným svazkem helium-neonového laseru o vlnové délce 594 nm

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

Obdélníková štěrbina

Difrakce na kruhovém otvoru

$$\tilde{E}_P = \frac{E_A}{r_0} \exp[-i(\omega t - k r_0)] \iint_A \exp(iks \sin \theta) dA$$

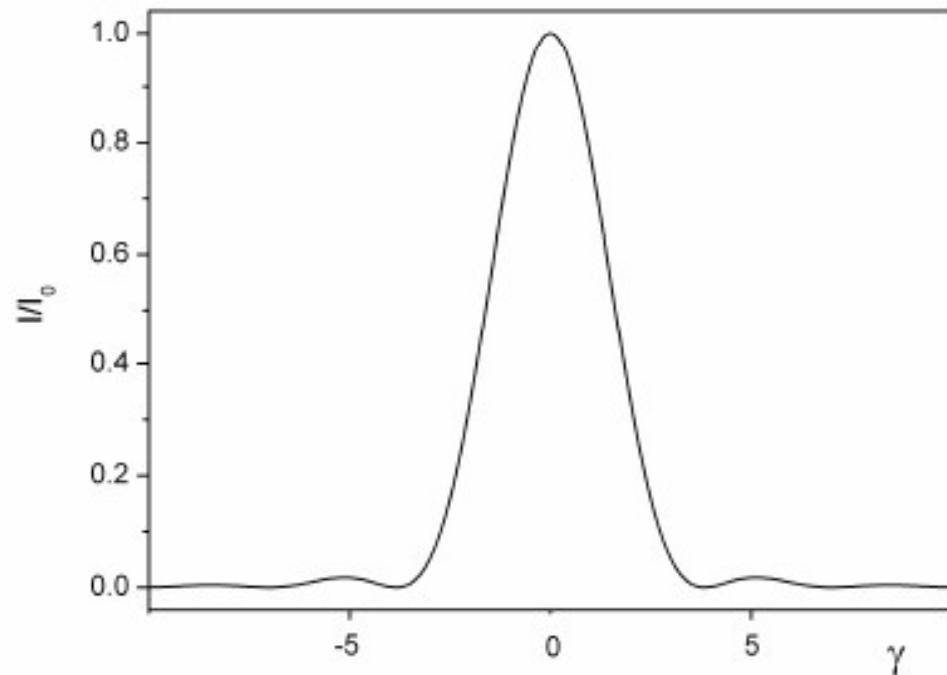
$$dA = x ds \quad x = 2\sqrt{R^2 - s^2}$$

$$\iint_A \exp(iks \sin \theta) dA = \int_{-R}^R \exp(ik s \sin \theta) 2\sqrt{R^2 - s^2} ds = \int_{-1}^1 \exp(i\gamma v) R^2 \sqrt{1 - v^2} dv$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{R} \\ \gamma &= k R \sin \theta \end{aligned} \quad \int_{-1}^1 \exp(i\gamma v) \sqrt{1 - v^2} dv = \frac{\pi J_1(\gamma)}{\gamma}$$

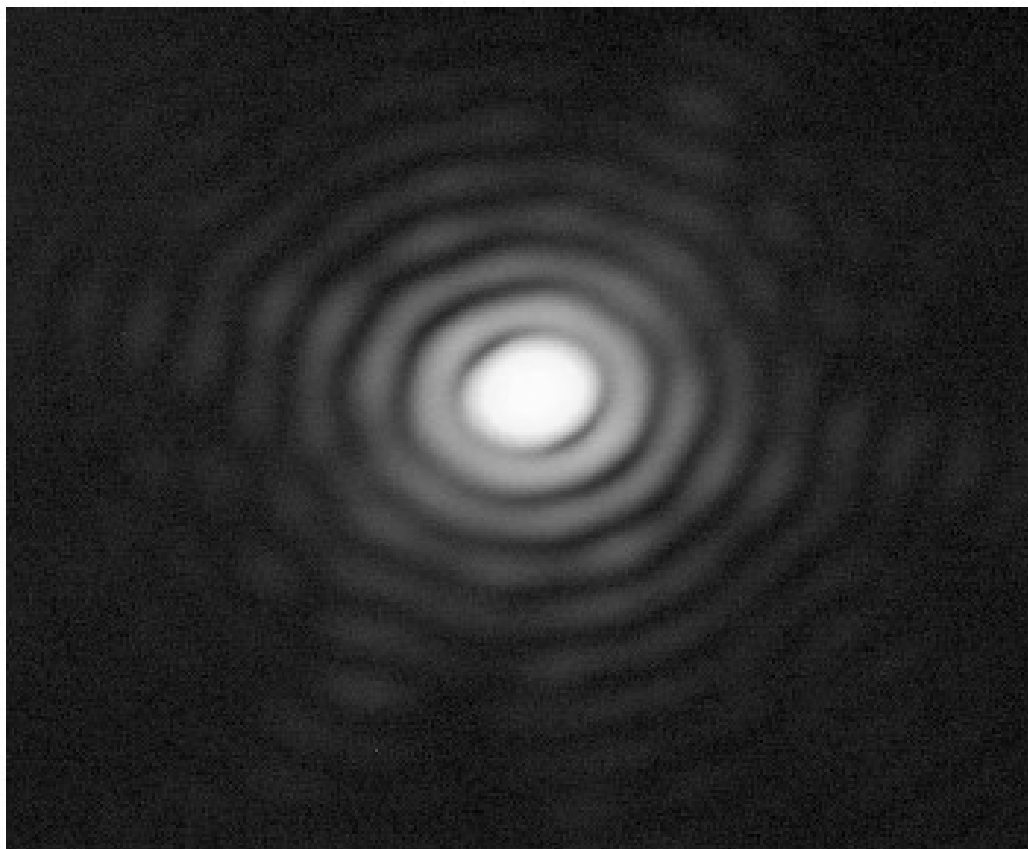
$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} = 0.5$$

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(\gamma)}{\gamma} \right]^2$$

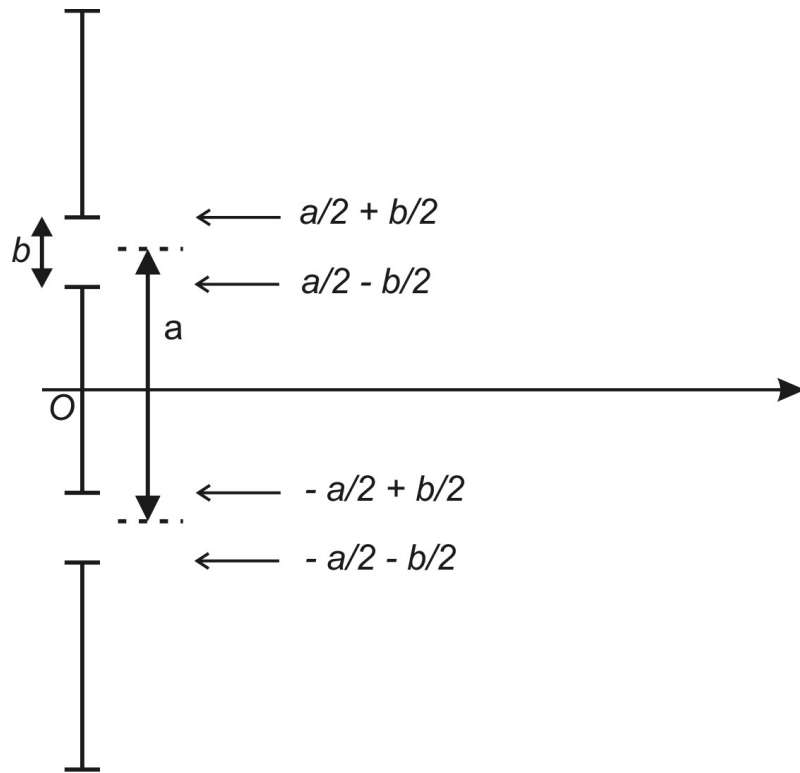


první nula Besselovy funkce

$$\gamma = 1.22\pi$$



Fraunhoferova difrakce na řadě štěrbin



$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\frac{(2j-1)a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{(2j-1)a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(i s k \sin \theta) ds + \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\frac{-(2j-1)a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{-(2j-1)a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(i s k \sin \theta) ds$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\frac{(2j-1)a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{(2j-1)a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(i s k \sin \theta) ds + \frac{E_L}{r_0} \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\frac{-(2j-1)a}{2} - \frac{b}{2}}^{\frac{-(2j-1)a}{2} + \frac{b}{2}} \exp(i s k \sin \theta) ds$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \frac{1}{ik \sin \theta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] [\exp(i\beta) - \exp(-i\beta)] + \exp[-i(2j-1)\alpha] [\exp(i\beta) - \exp(-i\beta)] \}$$

$$\alpha = k \frac{a}{2} \sin \theta \quad \beta = k \frac{b}{2} \sin \theta$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \frac{b}{2i\beta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp(i(2j-1)\alpha) (2i \sin \beta) + \exp[-i(2j-1)\alpha] (2i \sin \beta) \}$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] + \exp[-i(2j-1)\alpha] \}$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} \sum_{j=1}^{N/2} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] + \exp[-i(2j-1)\alpha] \}$$

$$\tilde{E}_P = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} \sum_{j=1}^{N/2} [2 \operatorname{Re} \{ \exp[i(2j-1)\alpha] \}] = \frac{E_L}{r_0} \frac{b \sin \beta}{\beta} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{N/2} \exp[i(2j-1)\alpha] \right\}$$

$$\sum_{j=1}^{N/2} \exp[i(2j-1)\alpha] = \exp(i\alpha) \sum_{l=0}^{N/2-1} \exp(i2l\alpha) = \frac{1 - \exp(i\alpha N)}{\exp(-i\alpha) - \exp(i\alpha)} = \frac{\sin N\alpha + i(1 - \cos N\alpha)}{2 \sin \alpha}$$

$$E_P = b \frac{E_L}{r_0} \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \times \exp[-i(\omega t - k r_0)]$$

$$I_P = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

$$I_P = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2$$

Hlavní maxima $\alpha = m \pi$ $\lim_{\alpha \rightarrow m\pi} \frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} = \pm N$

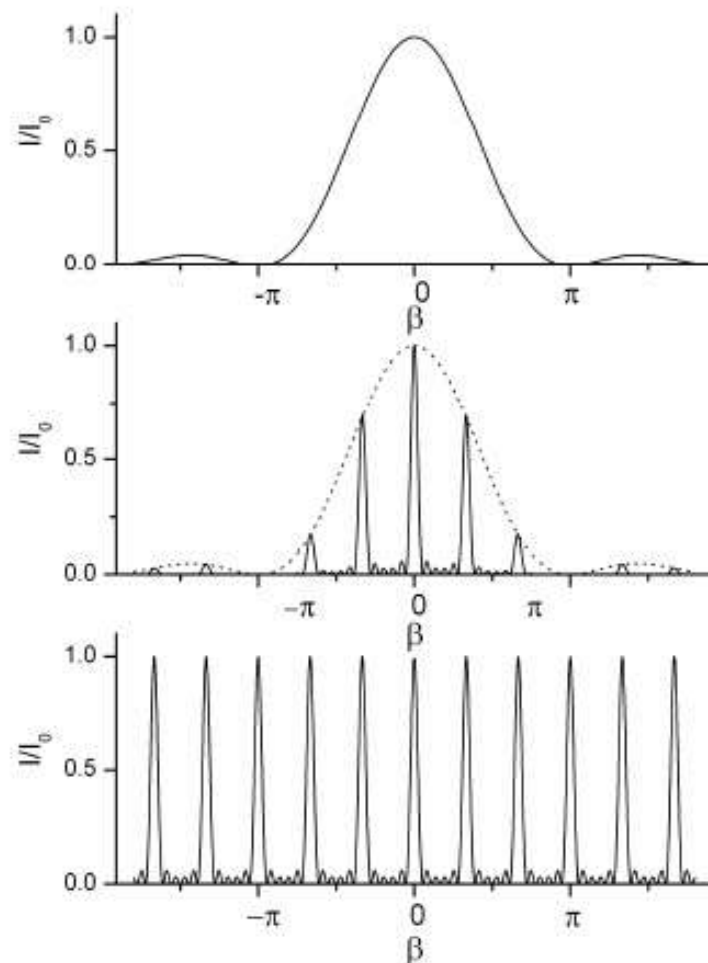
$$\alpha = k \frac{a}{2} \sin \theta$$

$$a \sin \theta = \lambda m$$

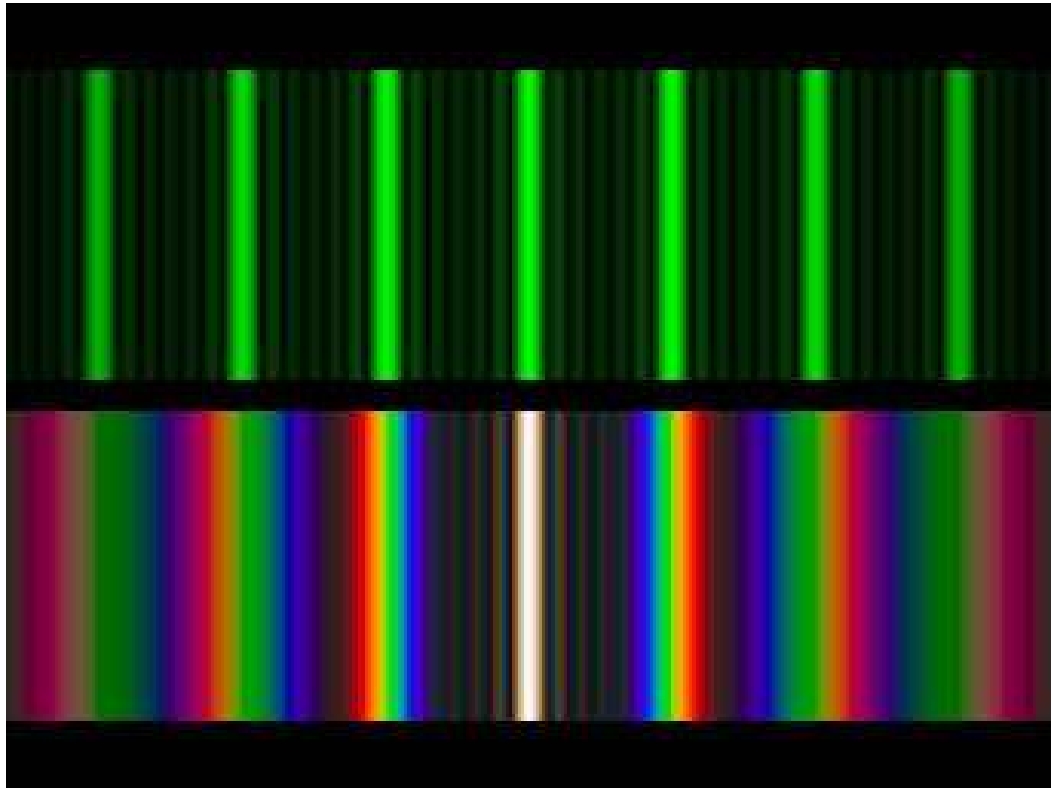
Tzv. mřížková rovnice

Nuly: $N\alpha = p\pi$
 $\alpha = \frac{p}{N}\pi$

s výjimkou $\frac{p}{N}$ celé číslo $p = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$

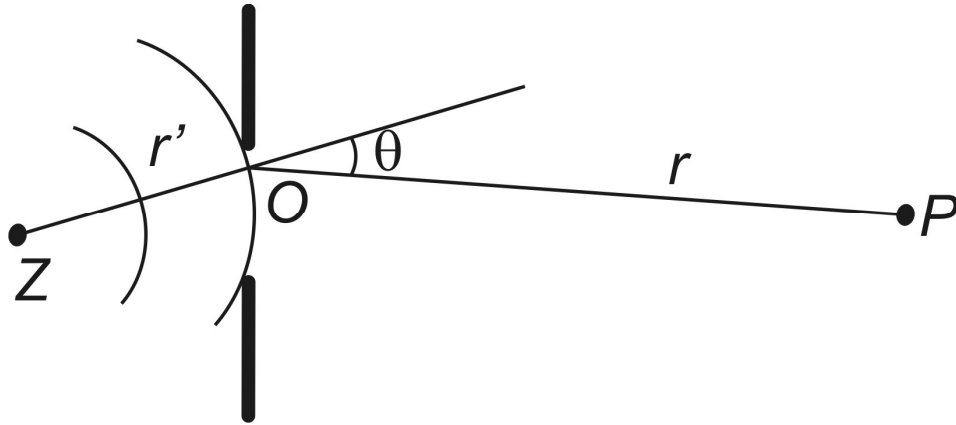


Obr. 8.7 Difrakce světla na 6 štěrbinách, jejichž vzdálenost je rovna trojnásobku jejich šířky ($N=6$, $\alpha=3\beta$). Výsledná intenzita jako funkce β je uprostřed (rov. 8.34). Je výsledkem součinu funkcí $\left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2$ (horní graf) a $\left[\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right]^2$ (dolní graf).



Běžný kompaktní disk (CD) má spirálovou dráhu, na níž jsou umístěny prohlubně, pomocí nichž je zaznamenána informace. (Spirála „se hraje“ od středu ke kraji CD, začíná na průměru přibližně 50 mm a končí nejdále na průměru 160 mm, nepočítaje 4 mm zaváděcí oblasti a 1 mm zakončovací oblasti). Vzdálenost sousedních drah spirály je 1,6 μm (šířka prohlubně je 0,5 μm , délka 0,9–3,3 μm). Na disku je možné dobře pozorovat difrakci světla, mřížková konstanta 1,6 μm odpovídá 625 „vrypům“ na 1 mm.

Fresnelova difrakce



$$\tilde{E}(O) = \frac{A}{r'} \exp(ikr') \quad d\tilde{E}(P) = \frac{\tilde{E}(O) dS}{r} \exp(ikr)$$

$$d\tilde{E}(P) = \frac{A dS}{r r'} \exp[ik(r+r')]$$

$$\tilde{E}(P) = A \int_{\text{APERTURA}} \frac{1}{r r'} \exp[ik(r+r')] dS$$

$$\tilde{E}(P) = A \int_{APERTURA} \frac{1}{r r'} \exp[i k (r + r')] dS$$

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \text{Faktor sklonu} \quad + \quad \text{činitel } \frac{-i}{\lambda}$$

$$\tilde{E}(P) = \frac{-i}{\lambda} A \int_{APERTURA} F(\theta) \frac{1}{r r'} \exp[i k (r + r')] dS$$

Fresnel-Kirchhoffův integrál

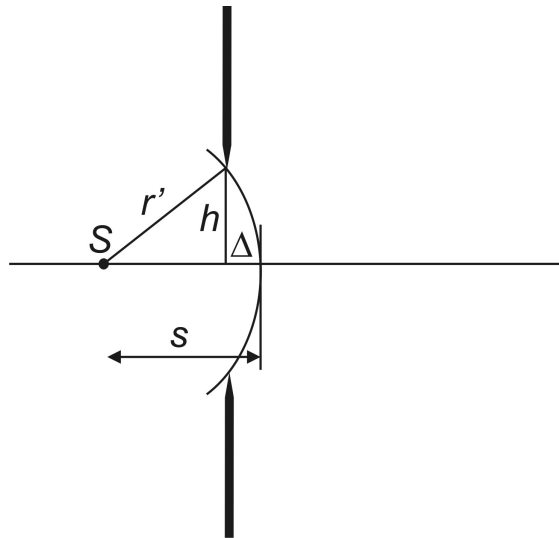
Paraxiální aproximace ... r, r' nahrazeny osovými z, z' **Fresnelova difrakce**

Babinetův princip

$$\tilde{E}_A(P) + \tilde{E}_B(P) = \tilde{E}(P)$$

Linearita integrace

Názorná formulace rozdílu mezi Fraunhoferovou a Fresnelovou difrakcí



$$\Delta = r' - r' \sqrt{1 - \frac{h^2}{r'^2}} \quad \Delta = \frac{h^2}{2r'}$$

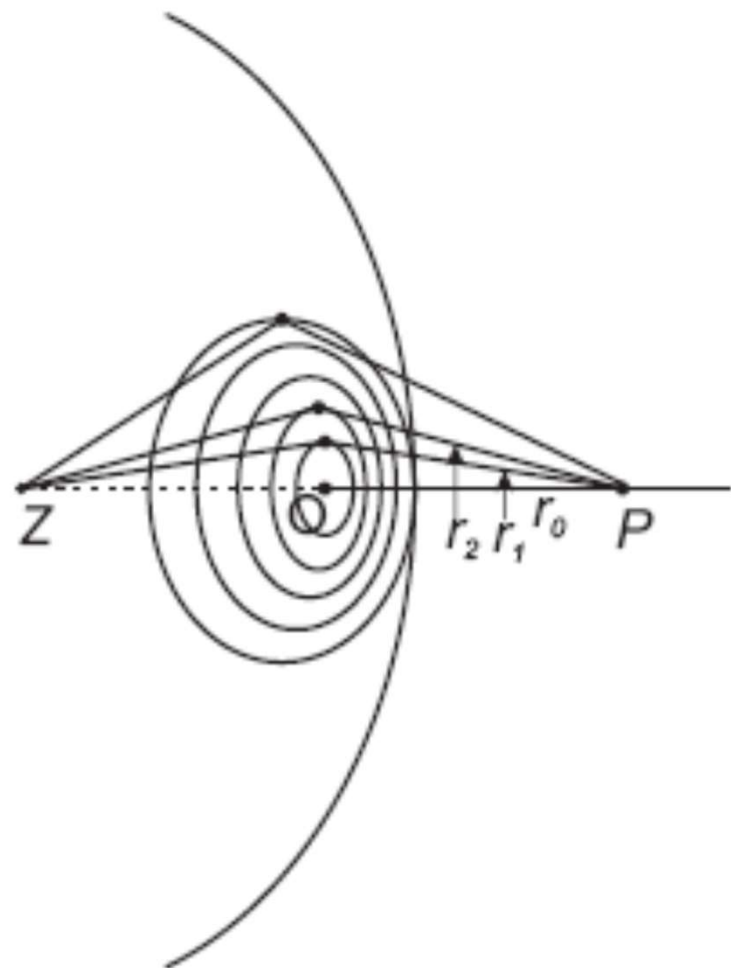
$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}$$

$$\Delta > \lambda$$

Oblast Fresnelovy difrakce $L < \frac{S}{\lambda}$

Fraunhoferova aproximace $L \gg \frac{S}{\lambda}$

Metoda Fresnelových zón

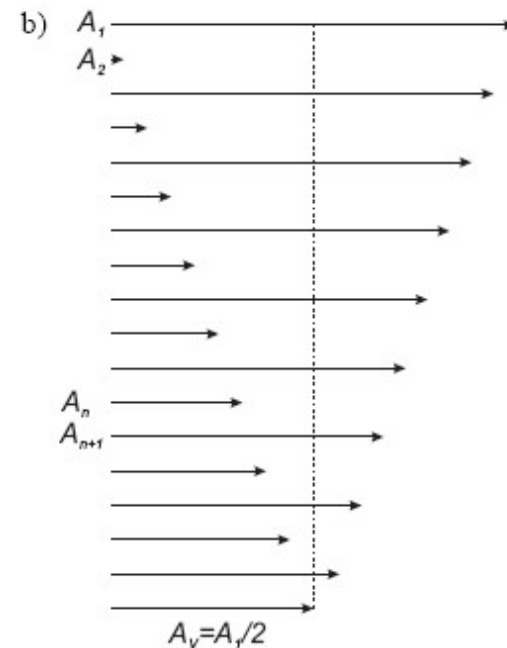
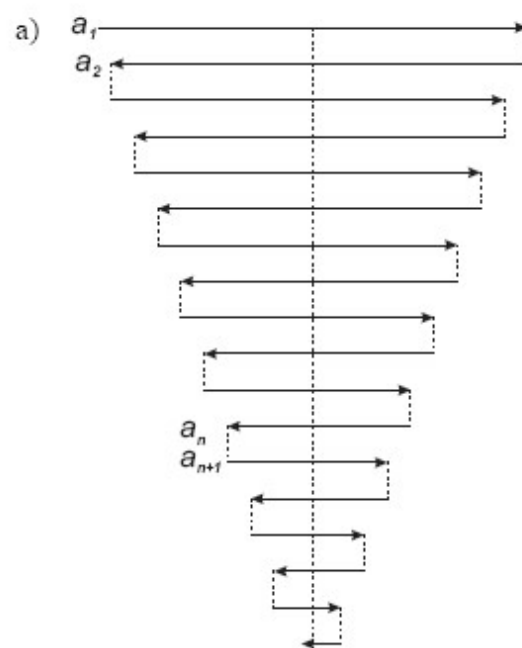


$$r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$$

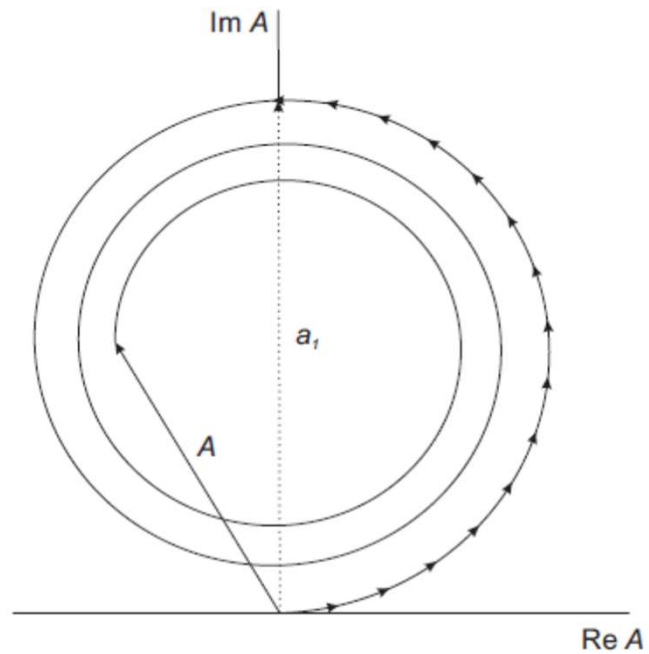
$$r_2 = r_0 + 2 \frac{\lambda}{2}$$

$$\vdots$$

$$r_n = r_0 + n \frac{\lambda}{2}$$



Obr. 8.13 a) Příspěvky jednotlivých Fresnelových zón (dva následující příspěvky se liší ve fázi vždy o π), b) výsledná amplituda, která vzniká sčítáním příspěvků uvedených v obr. 8.13a.

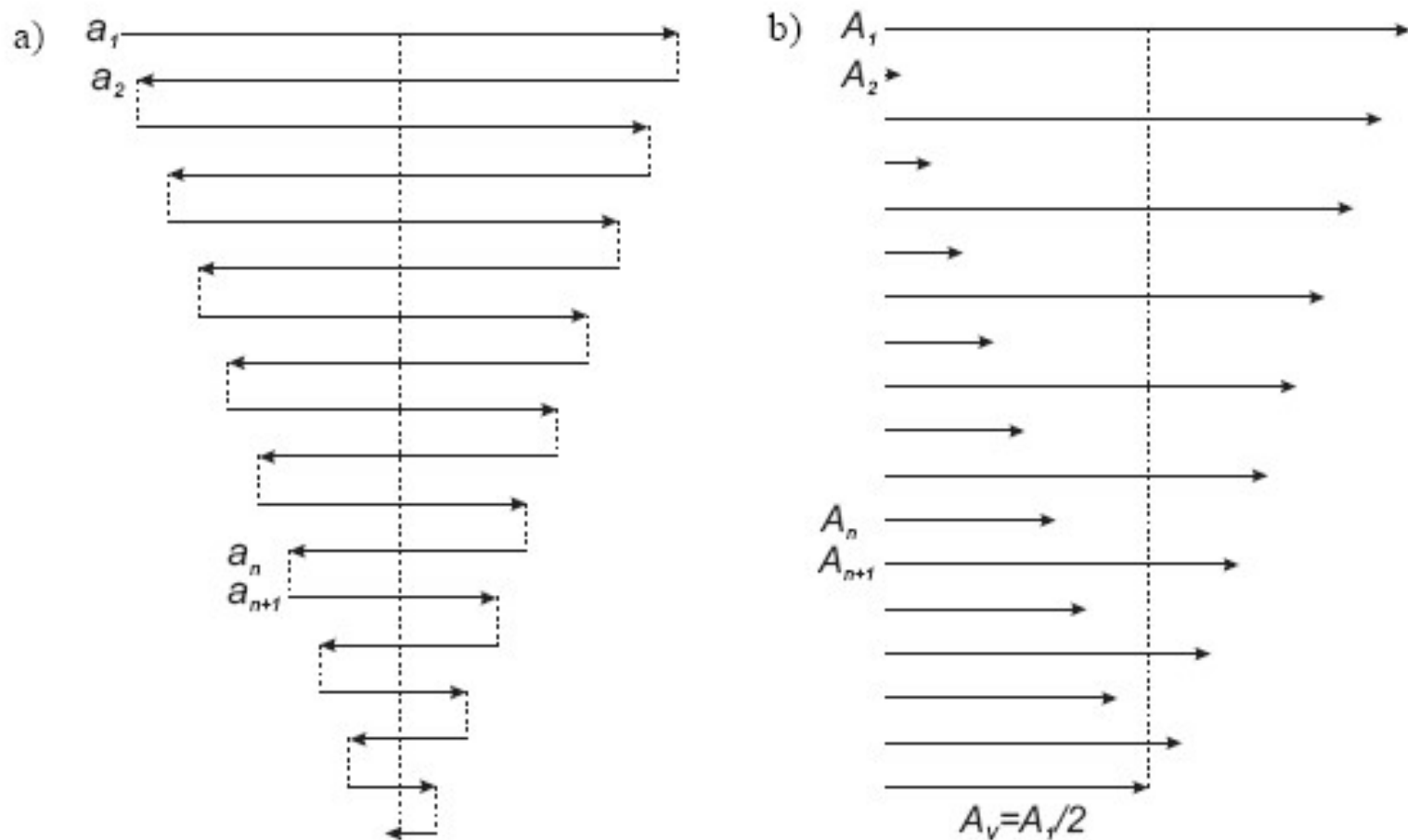


Obr. 8.12 Příspěvek první Fresnelovy zóny a_1 rozdělený na dílčí příspěvky 15 podzón a výsledná amplituda pole A (pro případ difrakce na kruhovém otvoru, když zůstává 5,5 zón nezakrytých)

Pokles amplitudy s faktorem sklonu a s rostoucí vzdáleností r_n

Nárůst s plochou zóny

$$S_n = \frac{\pi r'_0 r_0^2}{r'_0 + r_0} \left[\frac{\lambda}{r_0} + (2n-1) \frac{\lambda^2}{4 r_0^2} \right]$$

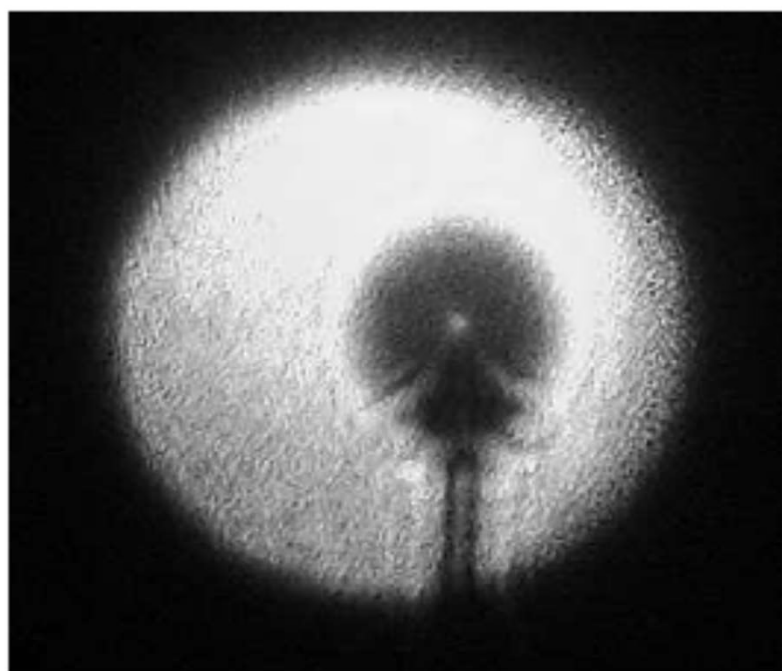


Obr. 8.13 a) Příspěvky jednotlivých Fresnelových zón (dva následující příspěvky se liší ve fázi vždy o π), b) výsledná amplituda, která vzniká sčítáním příspěvků uvedených v obr. 8.13a.

Vše odkryto, všechny zóny : $A_1/2$

Jen 1. zóna odkryta: : A_1

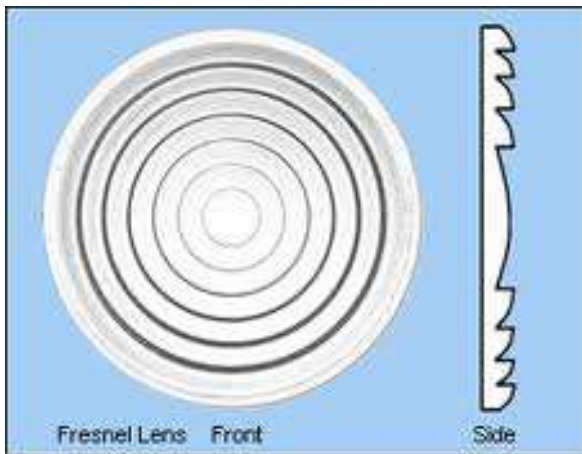
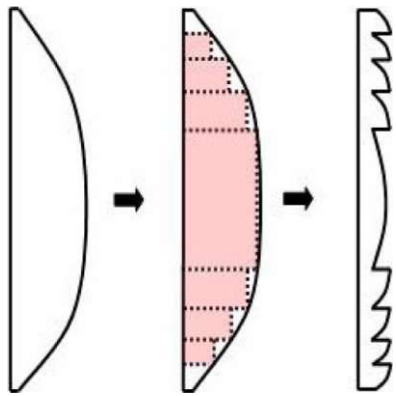
4 x větší intenzita!!



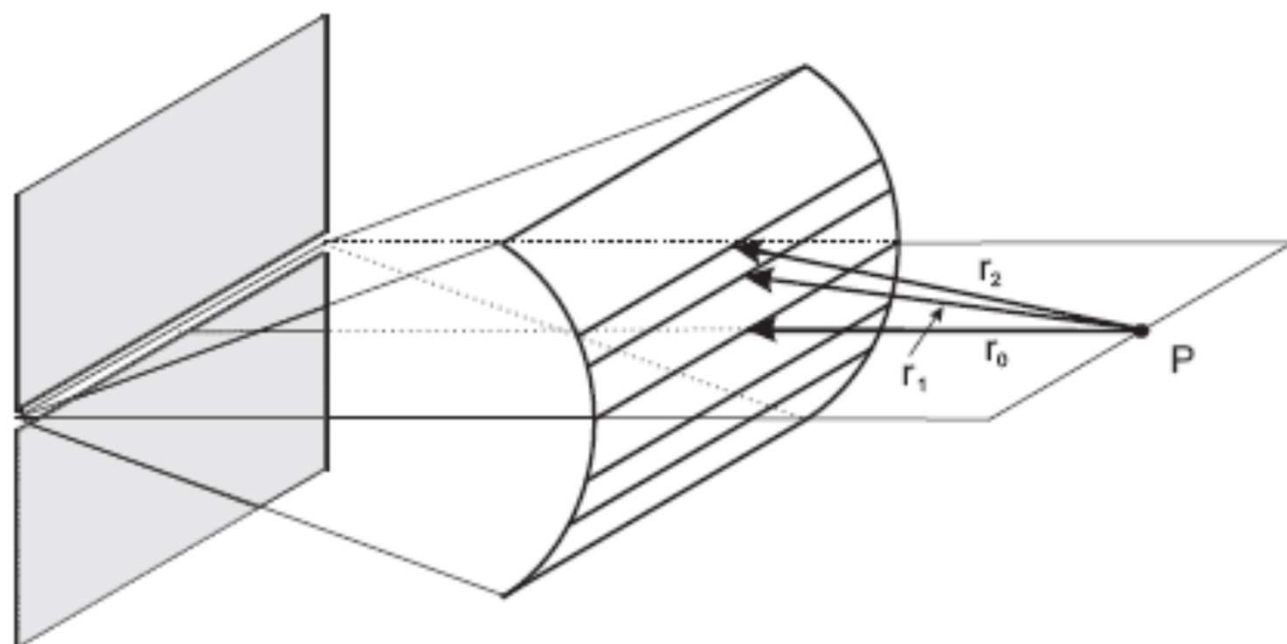
Obr. 8.14 Pozorování Poissonovy skvrny (difrakční obrazec, který vzniká při osvětlení kuličky na tyčce, osvětlení helium-neonovým laserem na vlnové délce 594 nm)

Fresnelova zónová deska

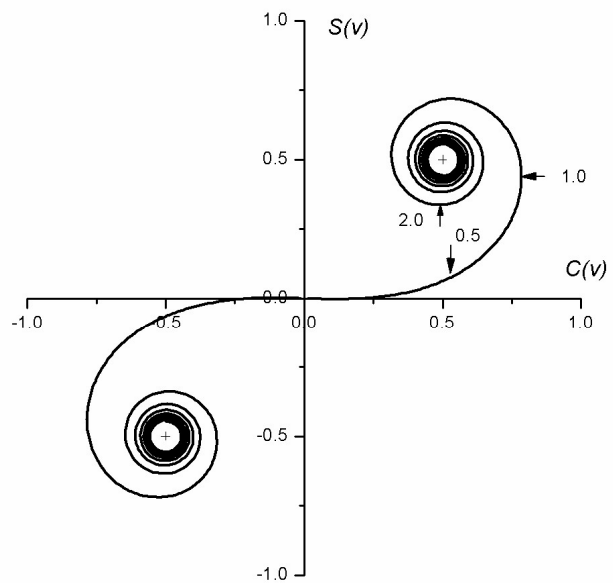
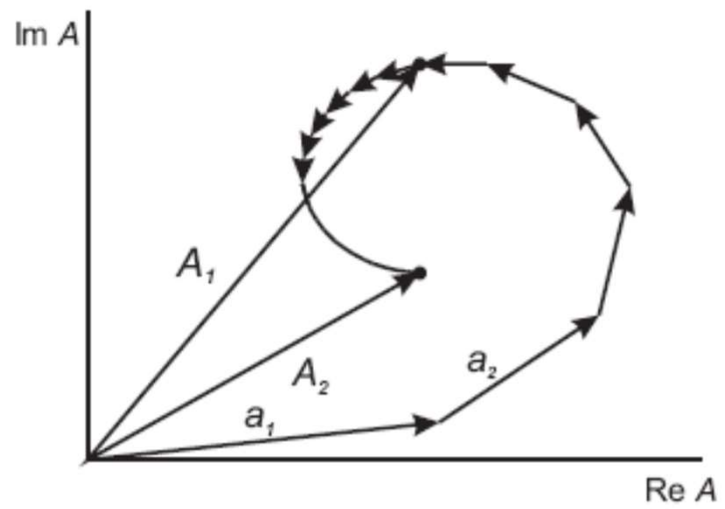




Fresnelova difrakce v případě válcových vln



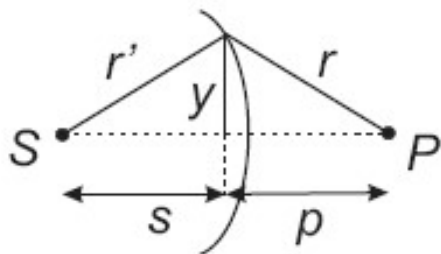
Obr. 8.16 Fresnelovy zóny na válcové vlnoploše odpovídající bodu pozorování P



Cornuova spirála

$$\tilde{E}_p = K \iint_{\text{APERTURA}} \exp[i k (r + r')] dS$$

Zjednodušený difrakční integrál – není faktor sklonu, úbytek $1/r$



$$r'^2 = s^2 + y^2$$

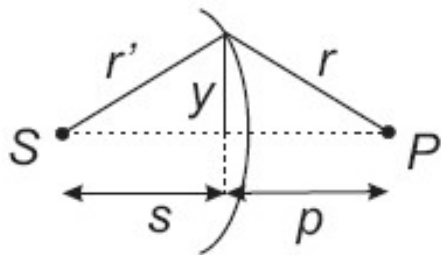
$$r' = s \left(1 + \frac{y^2}{2s^2} \right)$$

$$r = p \left(1 + \frac{y^2}{2p^2} \right)$$

$$r + r' = s + p + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{p} \right)$$

$$\tilde{E}_p = K \iint_{\text{APERTURA}} \exp[i k (r + r')] dS$$

Zjednodušený difrakční integrál – není faktor sklonu, úbytek 1/r



$$r'^2 = s^2 + y^2$$

$$r' = s \left(1 + \frac{y^2}{2s^2} \right)$$

$$r = p \left(1 + \frac{y^2}{2p^2} \right)$$

$$r + r' = \underbrace{s + p}_{\text{Konstantní}} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{p} \right)$$

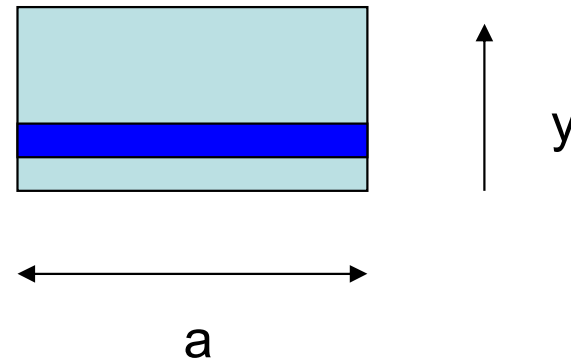
Konstantní, lze dát před integrál

$$\tilde{E}_p = K \iint_{\text{APERTURA}} \exp[i k (r + r')] dS$$

$$r + r' = \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{p} \right)$$

$$dS = a dy$$

APERTURA



Nová proměnná

$$v^2 = \frac{2 y^2}{\lambda L}$$

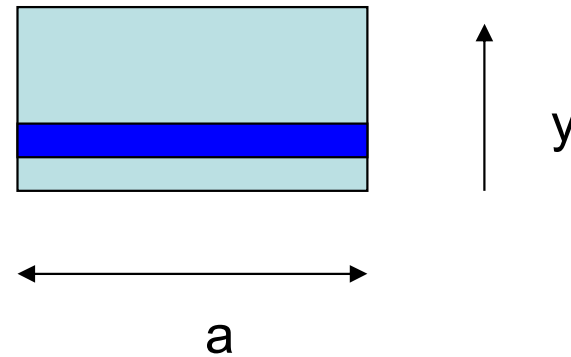
$$\frac{1}{L} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p}$$

$$\tilde{E}_p = K \iint_{\text{APERTURA}} \exp[i k (r + r')] dS$$

$$r + r' = \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{p} \right)$$

$$dS = a dy$$

APERTURA



Nová proměnná

$$v^2 = \frac{2 y^2}{\lambda L} \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p} \quad \tilde{E}_p = K \int \exp \left[i \pi \frac{v^2}{2} \right] dv$$

$$\tilde{E}_p = K \int \exp \left[i \pi \frac{v^2}{2} \right] dv$$

$$\tilde{E}_p = K [C(v) + i S(v)]$$

$$C(v) = \int_0^v \cos \left(\pi \frac{v'^2}{2} \right) dv'$$

Fresnelovy integrály

Sinový, kosinový

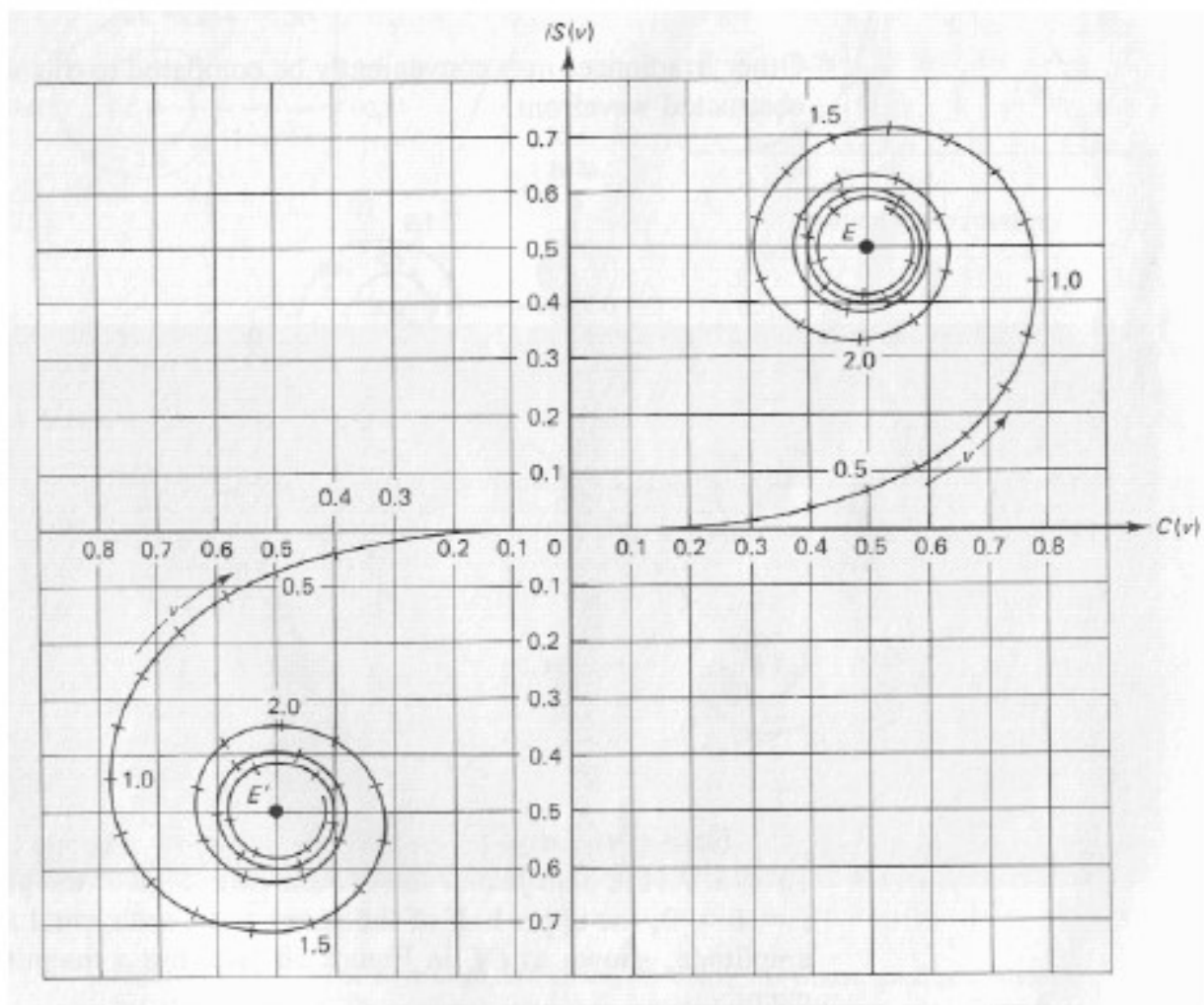
$$S(v) = \int_0^v \sin \left(\pi \frac{v'^2}{2} \right) dv' .$$

Délka křivky po spirále odpovídá proměnné v

Obecně:
$$dl^2 = dX^2 + dY^2$$

V našem případě
$$dl^2 = \left[\cos^2 \left(\pi \frac{v^2}{2} \right) + \sin^2 \left(\pi \frac{v^2}{2} \right) \right] dv^2$$

Tedy
$$dl = dv$$

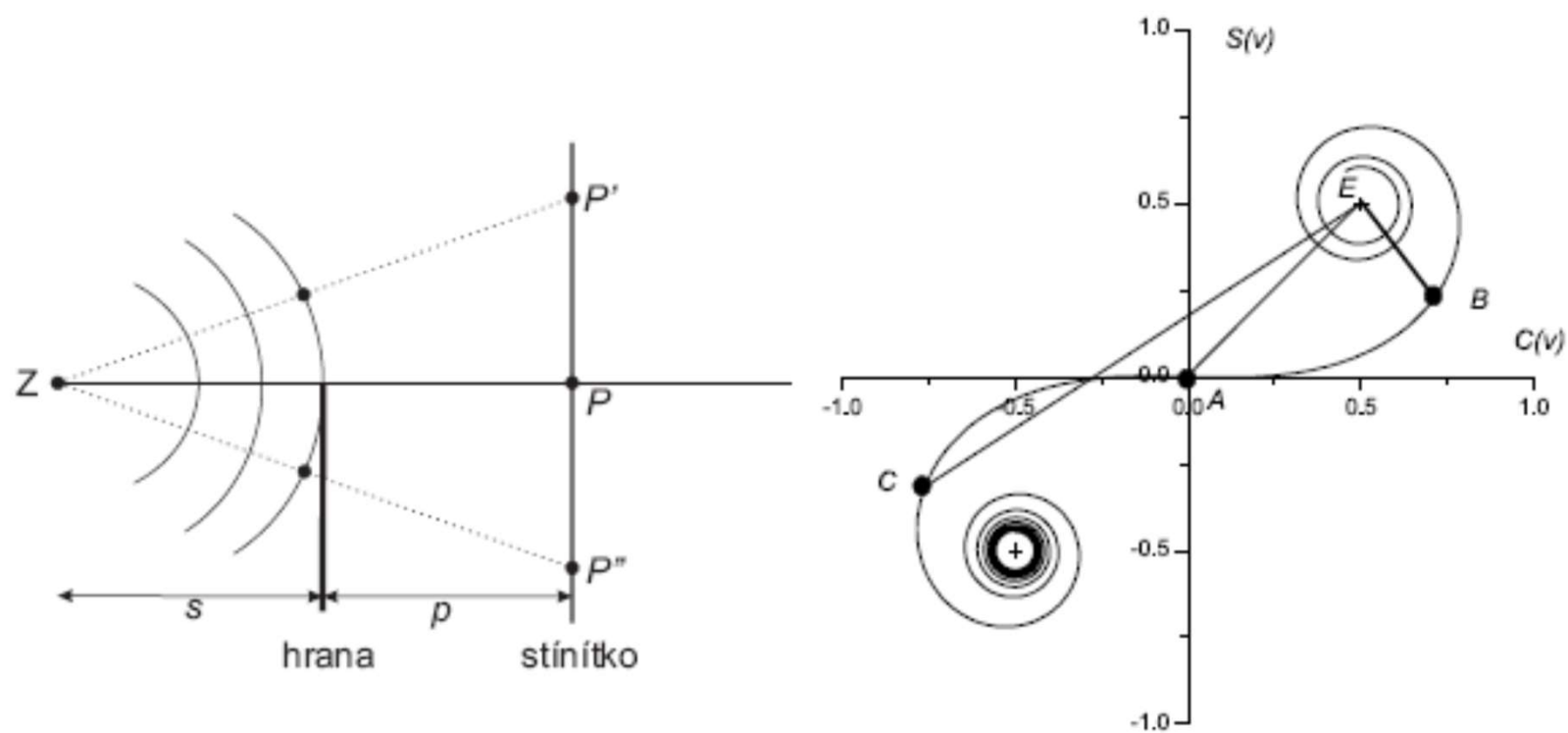


Obr. 15 Cornuova spirála, délka měřená po křivce odpovídá proměnné v .

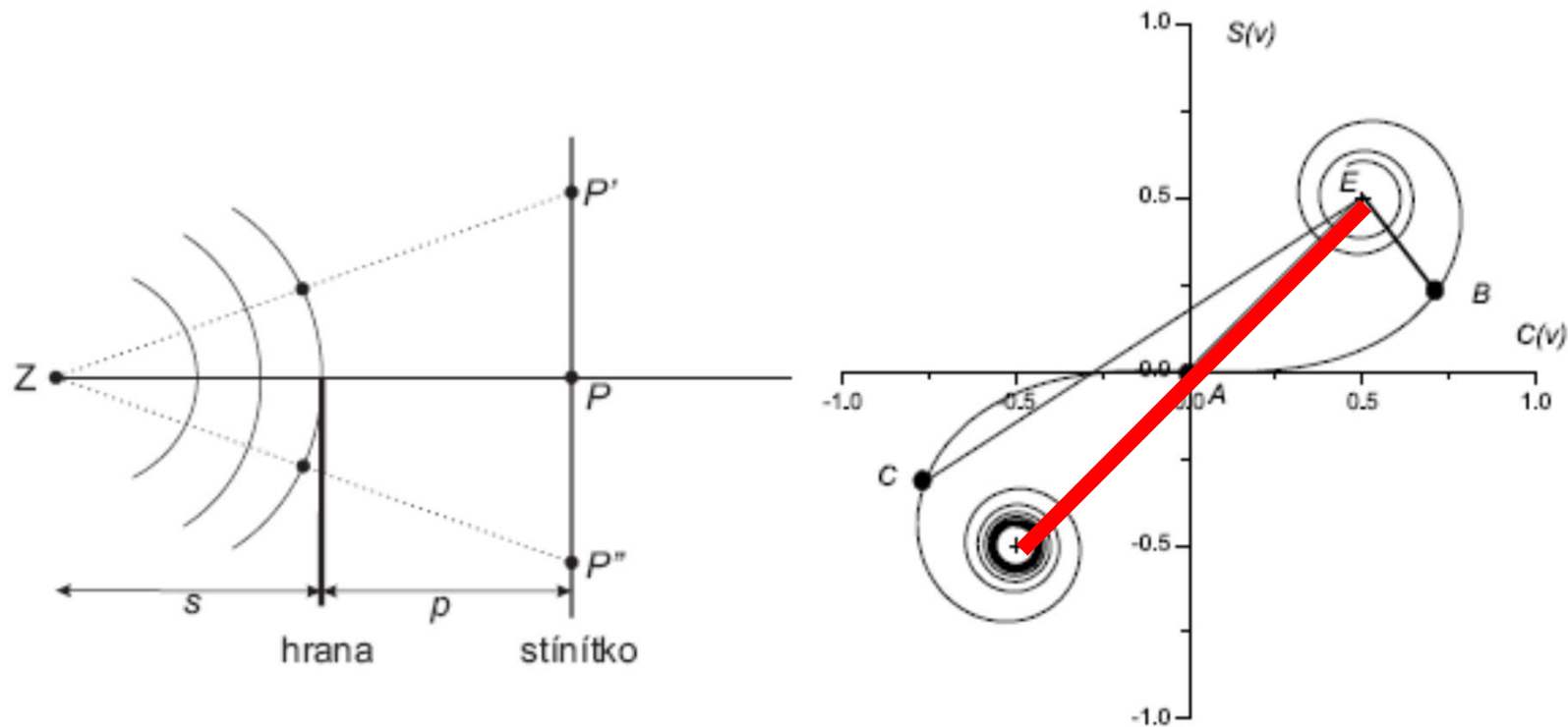
$$I_p \propto |E_p|^2 \quad \tilde{E}_p = K [C(v) + i S(v)]$$

$$I_p = I_0 (C^2 + S^2)$$

Fresnelova difrakce na hraně



Fresnelova difrakce na hraně

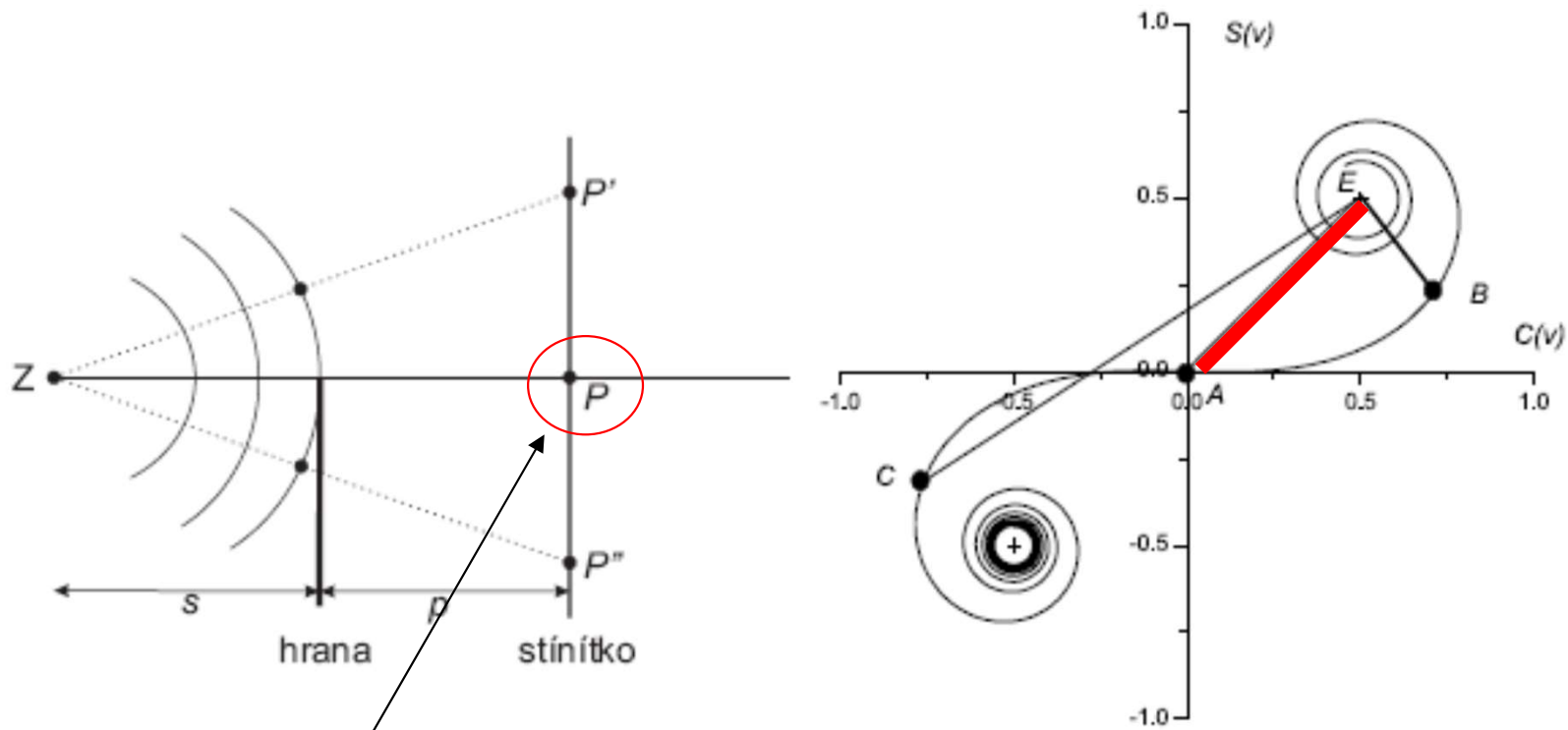


NENÍ HRANA: OD NEKONEČNA DO NEKONEČNA = OKO - OKO

$$AE = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 AE = \sqrt{2} \quad I_{\infty} = I_0 (C^2 + S^2) = 2 I_0$$

Fresnelova difrakce na hraně

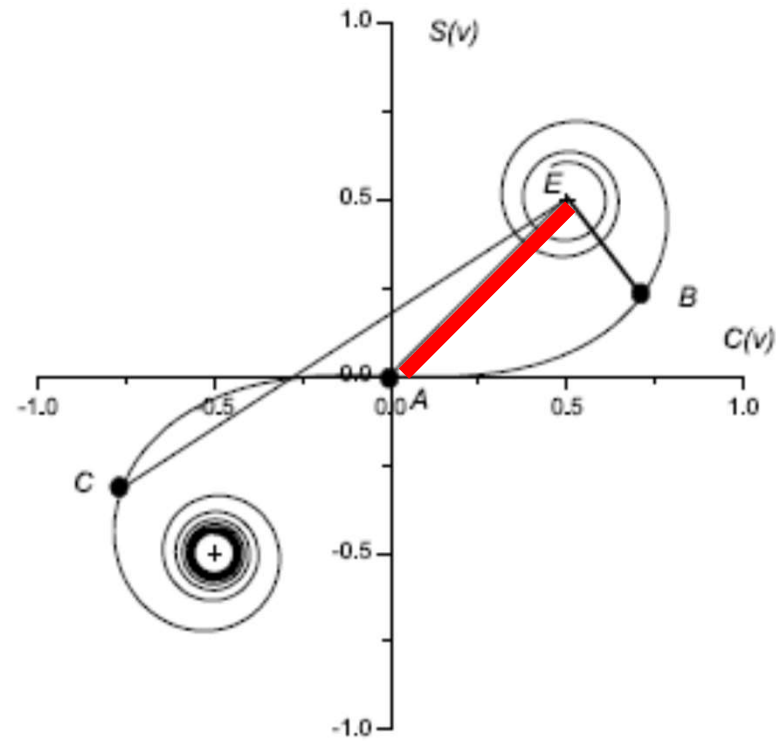
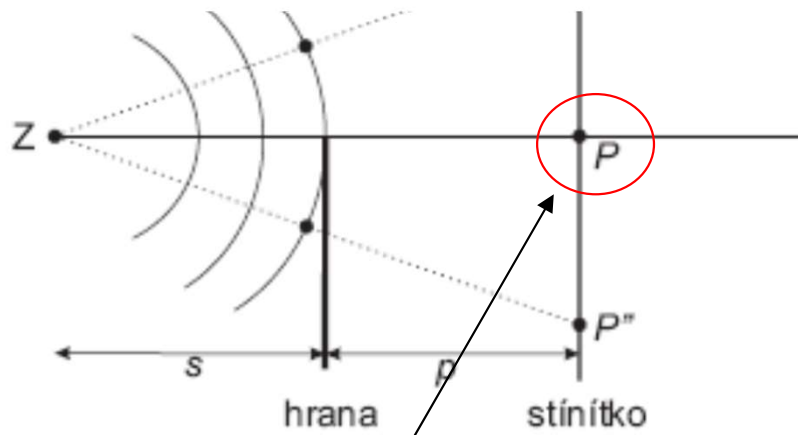
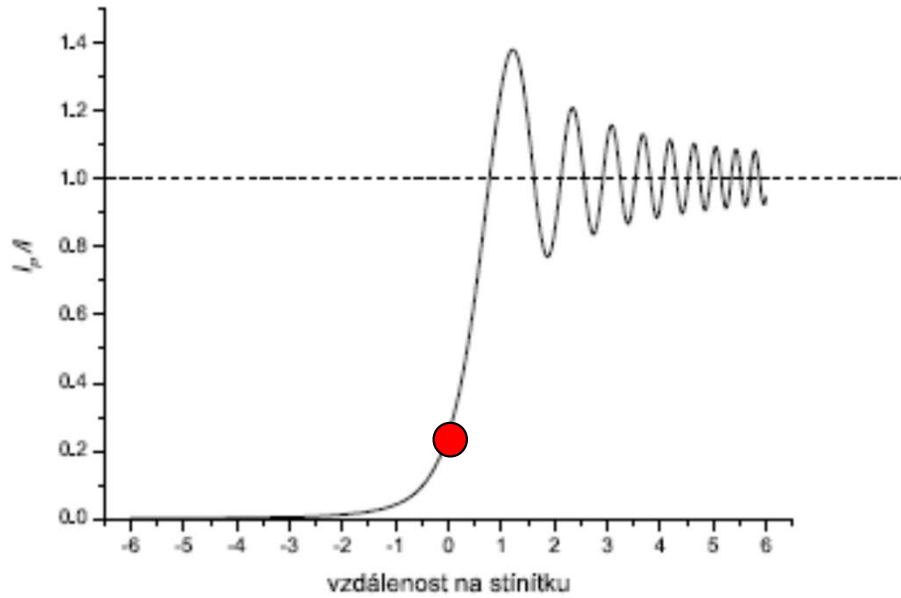


BOD P
Y = 0

$$I_P = I_0 (C^2 + S^2) = \frac{1}{2} I_0$$

$$I_P = \frac{1}{4} I_\infty$$

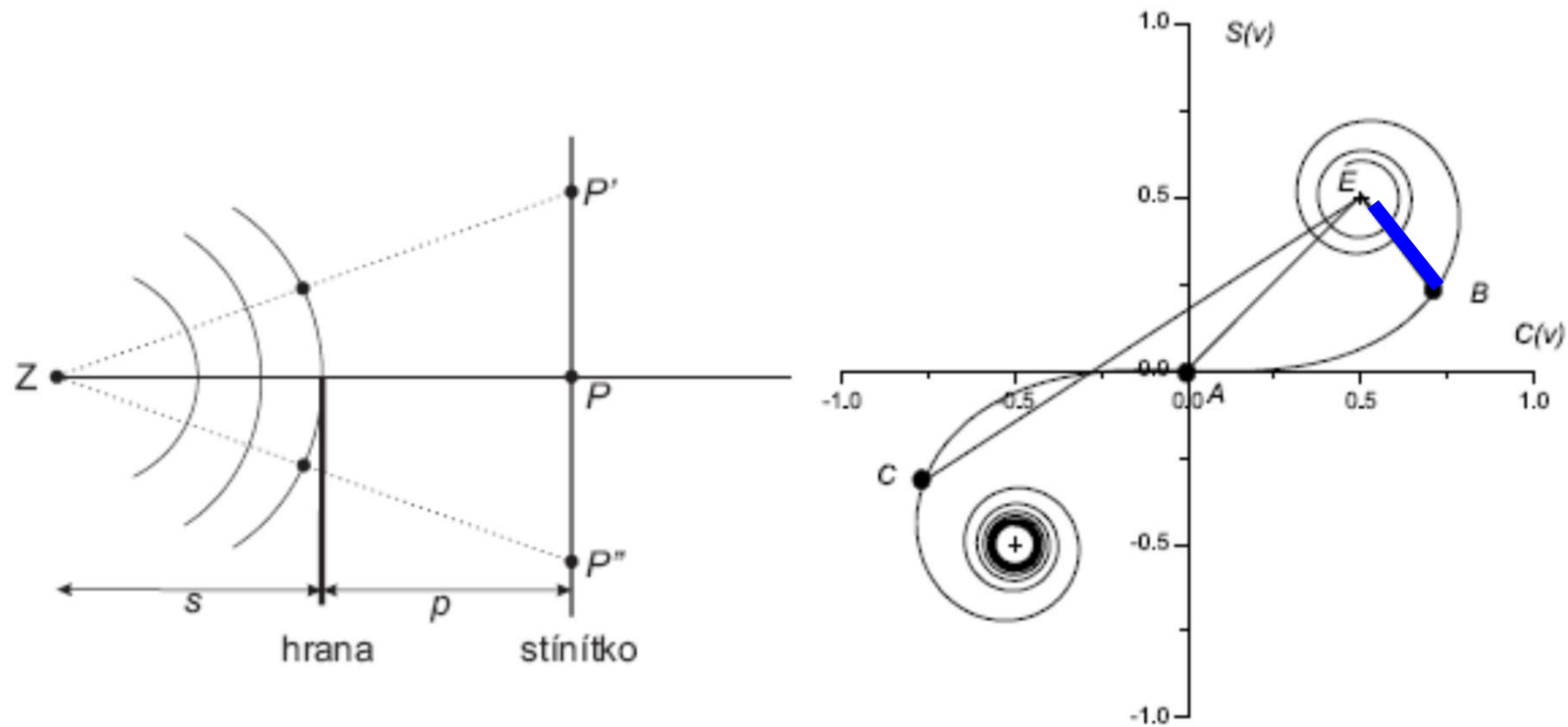
Intenzity na hraně



BOD P $I_P = I_0 (C^2 + S^2) = \frac{1}{2} I_0$

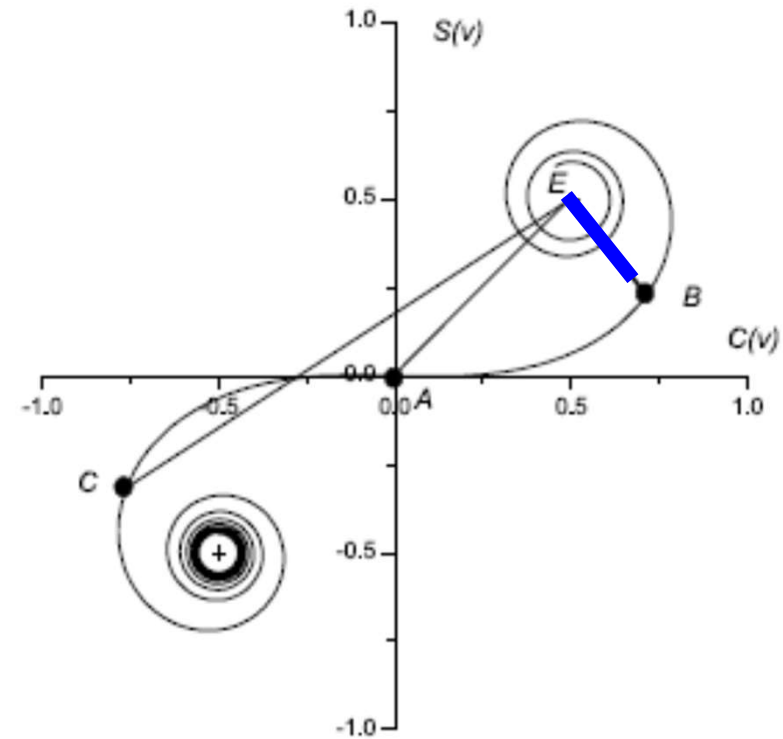
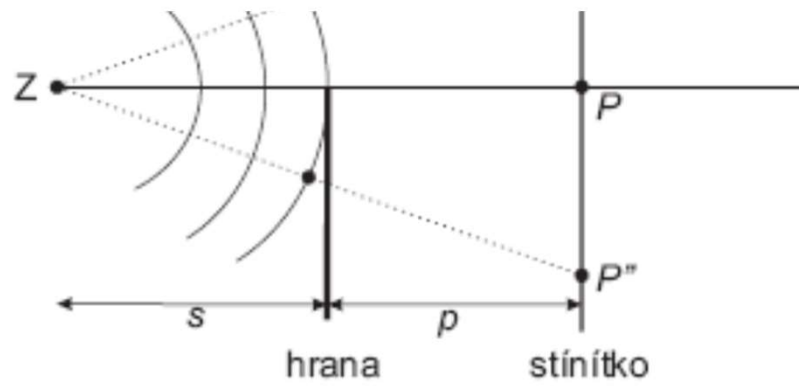
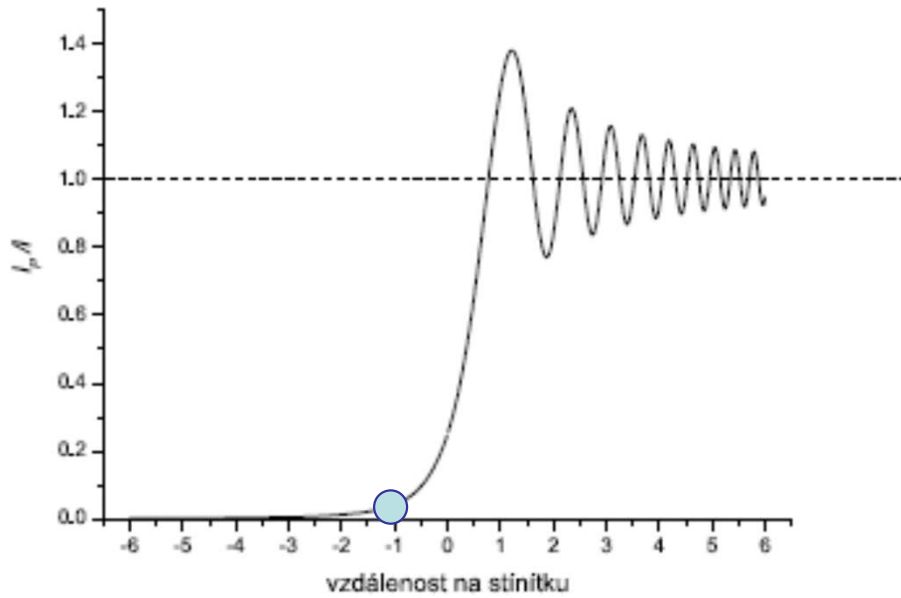
$I_P = \frac{1}{4} I_\infty$

Fresnelova difrakce na hraně



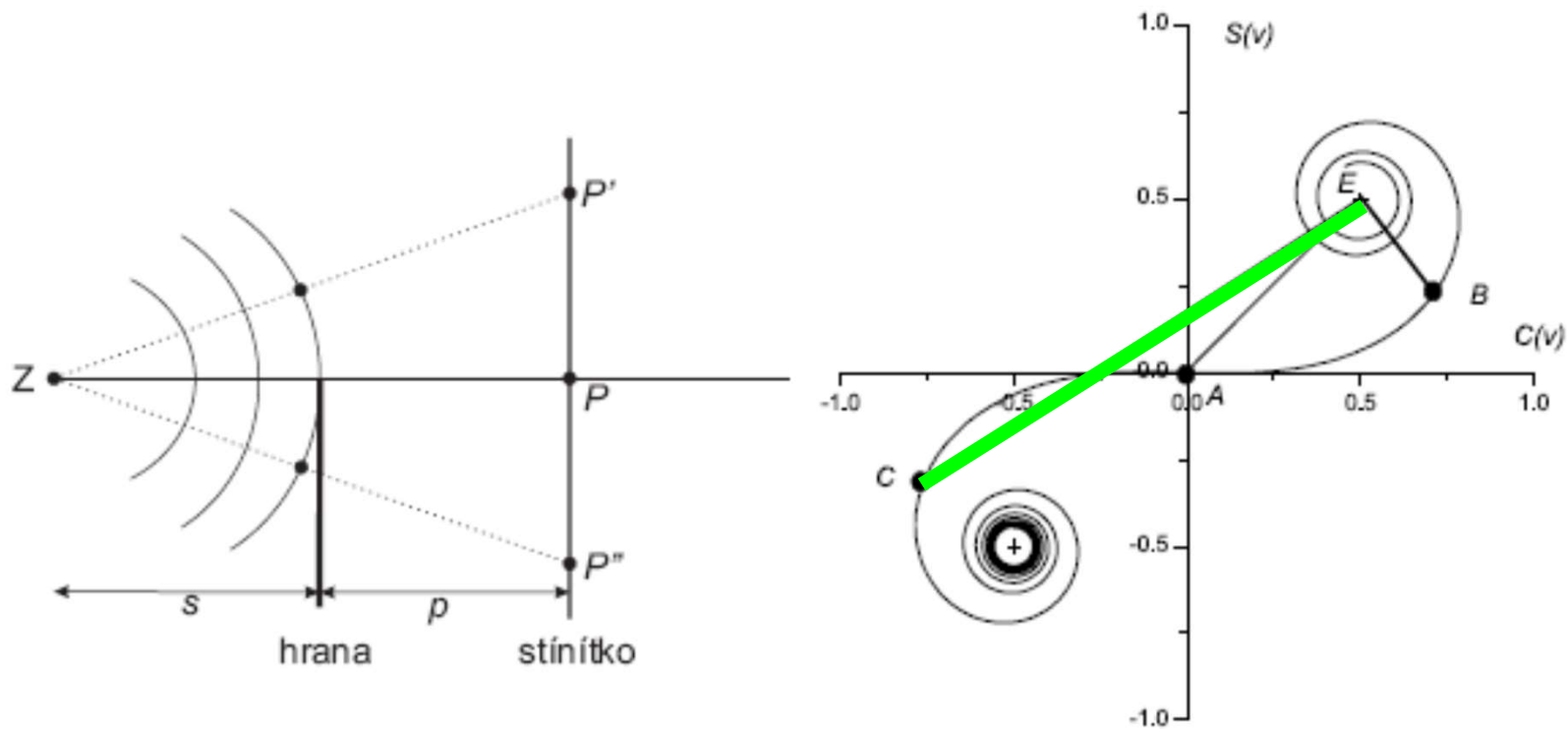
BOD P'' (VE STÍNU) Viz Bod B

akce na hraně

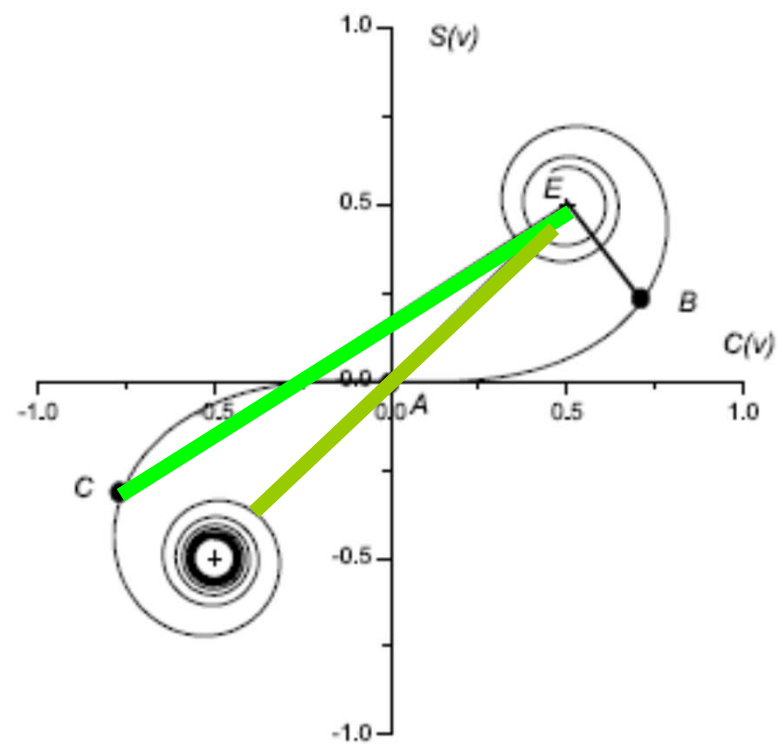
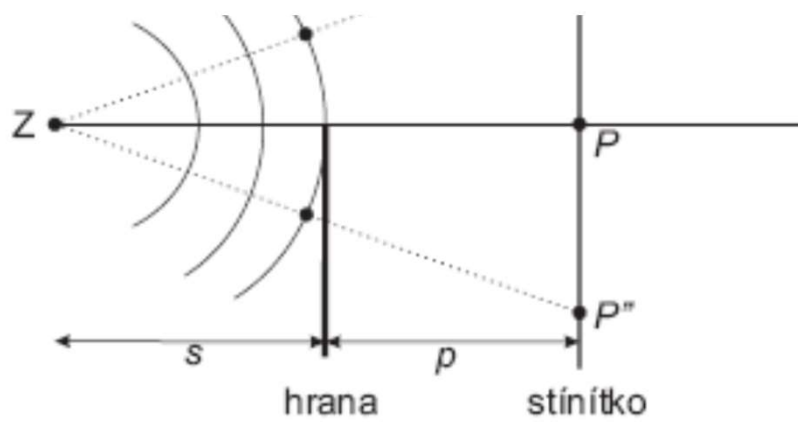
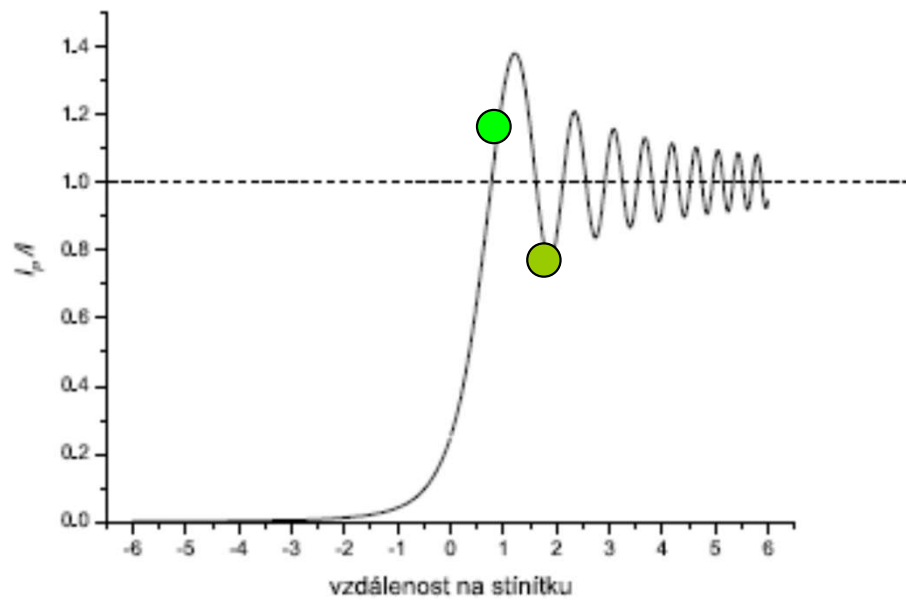


BOD P'' (VE STÍNU) Viz Bod B

Fresnelova difrakce na hraně



BOD P' V OBLASTI SVĚTLA Viz bod C , **OSCILACE!**



BOD P' V OBLASTI SVĚTLA Viz bod C , **OSCILACE!**

