Základy geometrické optiky

Eikonálová rovnice

geometrickou optiku lze chápat jako limitní případ optiky v případě, že délka vlny je velmi malá, tedy symbolicky pro $\lambda \to 0$

$$n = n(\vec{r}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$$

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\exp[ik_0 S(\vec{r})]\exp(-i\omega t)$$
$$\tilde{\vec{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}_0(\vec{r})\exp[ik_0 S(\vec{r})]\exp(-i\omega t)$$

$\vec{E}_0, \vec{H}_0$ jsou amplitudy pole, které se mění „pomalu" na vzdálenosti odpovídající vlnové délce

skalární funkce souřadnic $S(\vec{r})$ se nazývá *eikonálem*

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

($\vec{j} = 0$)

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r},t),$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mu \vec{H}(\vec{r},t).$$

$$\left(\nabla\times\vec{H}_0\right)\exp\left(i\,k_0\,S\right)+i\,k_0\left(\nabla S\times\vec{H}_0\right)\exp\left(i\,k_0\,S\right)+i\,\omega\,\varepsilon\,\vec{E}_0\,\exp\left(i\,k_0\,S\right)=0\,.$$

(protože $\nabla\times\vec{a}\,\varphi=\varphi\left(\nabla\times\vec{a}\right)+\left(\nabla\varphi\times\vec{a}\right)$)

$$\omega\,\varepsilon=c_0\,\varepsilon\,k_0\,.$$

$$\left(\nabla\times\vec{H}_0\right)\frac{1}{k_0}+i\left(\nabla S\times\vec{H}_0\right)+i\,c_0\,\varepsilon\,\vec{E}_0=0\,.$$

V limitě $\lambda\to 0$, je $k_0\to\infty$, a první člen v rovnici můžeme zanedbat.

$$\left(\nabla S\times\vec{H}_0\right)+c_0\,\varepsilon\,\vec{E}_0=0\,.$$

analogicky

$$\left(\nabla S\times\vec{E}_0\right)-c_0\,\mu\,\vec{H}_0=0\,.$$

$$\vec{H}_0=\frac{\left(\nabla S\times\vec{E}_0\right)}{c_0\,\mu}$$

$$\left(\nabla S\times\frac{\left(\nabla S\times\vec{E}_0\right)}{c_0\,\mu}\right)+c_0\,\varepsilon\,\vec{E}_0=0\,.$$

Využijeme-li výraz

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),$$

máme

$$\nabla S\left(\nabla S\cdot\vec{E}_0\right)-\vec{E}_0\left(\nabla S\cdot\nabla S\right)+c_0^2\varepsilon\,\mu\vec{E}_0=0\,.$$

$$\vec{E}_0=\frac{\left(\nabla S\times\vec{H}_0\right)}{c_0\,\varepsilon}$$

Odtud

$\vec{E}_0\cdot\nabla S=0$

a

$$\left[\left(\nabla S\right)^2-c_0^2\varepsilon\,\mu\,\right]\vec{E}_0=0$$

a pro nenulové pole

$\left(\nabla S\right)^2=n^2\,.$ *eikonálová rovnice.*

($c_0^2\varepsilon\,\mu=\varepsilon_r=n^2$)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=n^2\left(x,y,z\right).$$

Geometrické místo bodů s

$S\left(\vec{r}\right)=konst.$

určuje *vlnoplochu* (ve smyslu geometrické optiky).

Paprsek, *paprskový vektor*

$$\vec{s}=\frac{\nabla S}{n}\,.$$

Zákon lomu pro paprsky

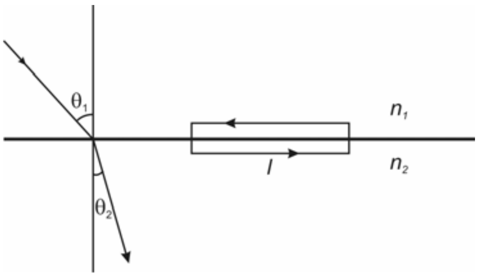
Rotace vektoru ($n\vec{s}$) je rovna nule

$$\nabla\times(n\vec{s})=\nabla\times(\nabla\vec{S})\equiv 0\,.$$

tedy

$$\oint_l n\vec{s}\cdot d\vec{l}=0\,.$$

Lagrangeův invariant



zákon lomu pro paprsek:

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\,,$$

Intenzita světla v geometrické optice

$$I=\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle=\left\langle\left|\vec{E}\times\vec{H}\right|\right\rangle\ .$$

$$\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle=\frac{1}{2}\vec{E}_0\times\vec{H}_0\,.$$

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{1}{2\mu c_0}E_0^2\,\nabla S$$

$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=\frac{n}{2\mu c_0}E_0^2\,\vec{s}\ \ ,$$

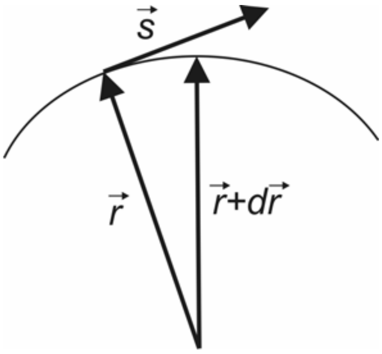
$$\left\langle\vec{S}\right\rangle=c\,\langle w\rangle\vec{s}$$

$\langle w\rangle$ … časová střední hodnota elektromagnetické hustoty energie.

Paprsková rovnice

$d\vec{r} = ds\,\vec{s}$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{s}$$



$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\,\vec{r}(s)}{ds}\right) = \nabla n\,,$$

Paprsková rovnice.

(označíme $n\vec{s} = \vec{a}$)

$$\left[\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\,\vec{r}}{ds}\right)\right]_x = (\vec{s}\cdot\nabla)(n\vec{s})_x = (\vec{s}\cdot\nabla)a_x = s_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + s_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + s_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\,.$$

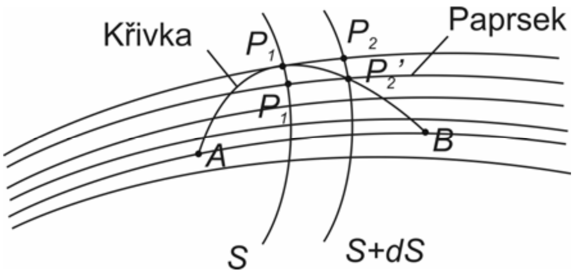
Podle eikonálové rov. je $\nabla\times\vec{a} = 0$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} = 0\,.$$

$$\left[\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\,\vec{r}}{ds}\right)\right]_x = s_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + s_y\frac{\partial a_y}{\partial x} + s_z\frac{\partial a_z}{\partial x} = \left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right)\frac{\partial n}{\partial x} = (\nabla n)_x\,,$$

paprsková rovnice pro *x*-ovou složku.

Fermatův princip



paprsky $P_1 P_2$, respektive $P_1' \ P_2'$. obecná křivka $A P_1 P_2' B$.
dvě blízké plochy konstantního eikonálu s hodnotami S a $S + dS$.

$$\oint_l n\vec{s}\cdot d\vec{l} = 0\,, \ \left(n\vec{s}\cdot d\vec{l}\right)_{P_1 P_{2'}} + \left(n\vec{s}\cdot d\vec{l}\right)_{P_{2'} P_2} - \left(n\vec{s}\cdot d\vec{l}\right)_{P_2 P_1} = 0\,.$$

Poslední člen část cirkulace po paprsku, prostřední člen (úsek $P_2 P_2'$) $\left(n\vec{s}\cdot d\vec{l}\right)_{P_{2'} P_2} = 0$, optická délka úseku křivky $P_1 P_2'$ $\left(n\,dl\right)_{P_1 P_2'} \geq \left(n\,dl\cos\alpha\right)_{P_1 P_2'}$ (libovolný úhel α). Je-li α mezi vektory $\vec{s}$ a $d\vec{l}$, je $\left(n\,dl\cos\alpha\right)_{P_1 P_{2'}} = \left(n\,\vec{s}\cdot d\vec{l}\right)_{P_1 P_2'}$

$$\left(n\,dl\right)_{P_1 P_2'} \geq \left(n\,dl\right)_{P_1 P_2} = \left(n\,dl\right)_{P_1' P_2'}\,,$$

Délka optické dráhy po úseku libovolné křivky je větší než délka optické dráhy po odpovídajícím úseku paprsku. Optická dráha po (libovolné) křivce *AB* je větší než optická dráha po paprsku $\int\limits_{\substack{LIBOVOLNÁ\\ KŘŘIVKA}} n\,dl \geq \int\limits_{PAPRSEK} n\,dl$. *Fermatův princip*

Obecnější formulace: optická dráha mezi dvěma body, kterými prochází světelný paprsek, je extremální, princip se vztahuje na křivky v blízkém okolí, nemusí jít o globální extrém.