ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK LIX. ČÍSLO 32.

LORENTZOVA obecná transformace DIRACOVY vlnové funkce

České akademii věd a umění k uctění památky zesnulého prof. dr F. Záviška u příležitosti 70. výročí jeho narození věnuje

V. TRKAL

Předloženo 18. listopadu 1949

Pan dr Miroslav BRDIČKA[1]) za svého pobytu v Institute for Advanced Studies v Dublině ukázal, jak se transformují čtyři složky ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 DIRACOVY vlnové funkce ψ, přejdeme-li od původních souřadnic x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$ k novým souřadnicím x_1', x_2', x_3', x_4' pomocí vlastní obecné transformace LORENTZOVY $x_k = a_{ik}x_i'$. Udal explicitní vyjádření transformační matice Λ, jež uvádí v souvislost transformovanou funkci ψ' s původní funkcí ψ vztahem $\psi' = \Lambda\psi$, a to v případě, že DIRACOVY matice $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$, vyhovující relacím $\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i = 2\delta^{ik}$, mají zcela specielní tvar.[2])

Tento problém byl považován za velmi složitý;[3]) v literatuře, pokud je mi známo, nenajdeme explicitního vyjádření matice Λ pomocí koeficientů a_{ik} obecné transformace LORENTZOVY[4]).

[1]) M. BRDIČKA, Poznámka k vlastní Lorentzově transformaci. Vyjde v Rozpravách II. třídy České akademie, roč. LX, čís. 12 (1950).

[2]) Viz tuto moji práci na str. 18.

[3]) W. PAULI, Contributions mathématiques à la théorie Dirac, Annales de l'Institut Henri Poincaré, VI, p. 124, 14. ř. shora (1936).

[4]) P. A. M. DIRAC, Applications of Quaternions to Lorentz Transformations, Proceedings of the Royal Irish Academy, Dublin, L, sect. A, No 16, p. 261 (1945).

Snaha podati systematické řešení tohoto problému bez ohledu na volbu matic $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ vedla mě k nalezení poměrně jednoduchého způsobu, jak získati explicite hledanou matici Λ. Ukázalo se, že existuje nesčíslné množství vzájemně ekvivalentních řešení, z nichž některá vynikají poměrnou jednoduchostí; jedno z nich je právě řešení Brdičkovo.

1. *Problém.* Lineární orthogonální transformace

$$x_k = a_{ik} x_i', \quad x_i' = a_{ik} x_k, \quad i,\ k = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

nazývá se obecnou transformací Lorentzovou v případě, že x_1, x_2, x_3 jsou kartézské souřadnice prostorové a $x_4 = \sqrt{-1}\, ct$ je imaginární souřadnice časová, takže koeficienty a_{ik} mající jen jeden index $= 4$ jsou ryze imaginární, kdežto ostatní jsou reálné.

Touto transformací se nezmění tvar Diracovy rovnice

$$\{\gamma^k p_k + p_0\}\psi = 0, \quad p_0 = \mp i m_0 c, \tag{2}$$

kde γ^k $(k = 1, 2, 3, 4)$ vyhovují relaci $\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k = 2\delta^{kl}$. Přejde totiž v rovnici

$$\{\gamma^i p_i' + p_0\}\psi' = 0, \tag{3}$$

kde se p_k resp. p_i' transformují zcela stejně jako x_k resp. x_i' podle vztahů (1) a γ^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ resp. γ^k $(k = 1, 2, 3, 4)$ se při tom netransformují; vlnová funkce Diracova ψ resp. ψ' se transformuje takto:

$$\psi' = \Lambda\psi, \quad \psi = \Lambda^{-1}\psi', \tag{4}$$

kde $\Lambda^{-1}\Lambda = 1$.

Úkolem je najíti Λ jako funkci koeficientů a_{ik} Lorentzovy transformace a Diracových matic γ^k.

2. *Určovací rovnice pro Λ.* Poněvadž se p_k transformuje stejně jako x_k, přejde rovnice (2) nejprve ve tvar

$$\{\gamma^k a_{ik} p_i' + p_0\}\,\psi = 0. \tag{5}$$

Dosadíme-li za ψ' z rovnice (4) do rovnice (3), obdržíme

$$\{\gamma^i p_i' + p_0\}\,\Lambda\psi = 0. \tag{6}$$

Provedeme-li na této rovnici operaci Λ^{-1}, tu vzhledem ke vztahu $\Lambda^{-1}\Lambda = 1$ obdržíme

$$\{\Lambda^{-1}\gamma^i\Lambda p_i' + p_0\}\,\psi = 0. \tag{7}$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (2) plyne

$$\gamma^k p_k = \Lambda^{-1}\gamma^i\Lambda p_i'. \tag{8}$$

Stejný vztah platí i pro souřadnice x_k, x_i', takže obecná transformace Lorentzova se dá psáti také takto:[5])

$$\gamma^k x_k = \Lambda^{-1}\gamma^i x_i'\Lambda, \quad \gamma^i x_i' = \Lambda\gamma^k x_k\Lambda^{-1}. \tag{9}$$

[5]) Srovn. na př. A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien, II. Bd., p. 811, rov. (29), (1939).

Iterací odtud totiž plyne $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i'^2 = \sum\limits_{k=1}^{4} x_k^2$, což značí, že (1) je transformace orthogonální. Dosadíme-li do levých stran rovnic (9) za x_k resp. x_i' z rovnic (1), tu porovnáním koeficientů stojících u x_i' resp. x_k obdržíme[6])

$$a_{ik}\gamma^k = \Lambda^{-1}\gamma^i\Lambda = {}'\gamma^i, \quad a_{ik}\gamma^i = \Lambda\gamma^k\Lambda^{-1} = {}''\gamma^k, \tag{10}$$

což jsou dva sobě ekvivalentní vztahy, z nichž každý může sloužiti k určení Λ. Z rovnic (10) plyne vzhledem k zaměňovacím vztahům

$${}'\gamma^i\,{}'\gamma^j + {}'\gamma^j\,{}'\gamma^i = \Lambda^{-1}(\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i)\Lambda = 2\delta^{ij} = 2\sum_k a_{ik}a_{jk},$$

což jsou známé podmínky pro orthogonální transformaci. Vyhovuje-li Λ vztahu

$$a_{ik}\gamma^k = \Lambda^{-1}\gamma^i\Lambda,$$

vyhovuje témuž vztahu $L_1 = \pm\Lambda$, $L_1^{-1} = \pm\Lambda^{-1}$ a $L_2 = \pm i\Lambda$, $L_2^{-1} = \mp i\Lambda^{-1}$, ale jen jedna z těchto čtyř možností může v sobě obsahovati identickou transformaci funkce ψ pro identickou transformaci souřadnic x_k, $k = 1, 2, 3, 4$.

3. *Hyperkomplexní číslo Λ.* Abychom nemuseli sáhnouti k specielní volbě matic pro $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$, budeme je pokládati za (Cliffordova) hyperkomplexní čísla. Z těchto čtyř základních hyperkomplexních čísel obdržíme 16 prvků grupy hyperkomplexních čísel

$$\begin{gathered} 1 \\ \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \\ \gamma^{23}, \gamma^{31}, \gamma^{12}, \gamma^{14}, \gamma^{24}, \gamma^{34}, \\ \gamma^{234}, \gamma^{314}, \gamma^{124}, \gamma^{123}, \\ \gamma^{1234}, \end{gathered} \tag{11}$$

při čemž γ^{ijkl} značí součin $\gamma^i\gamma^j\gamma^k\gamma^l$. Každé hyperkomplexní číslo této grupy se dá vyjádřiti jako lineární agregát těchto 16 prvků s komplexními koeficienty. Tudíž také Λ, které nyní považujeme za hyperkomplexní číslo této grupy lze takto vyjádřiti. Avšak z (10) plyne důležitý vztah

$${}'\gamma^{1234} = \Lambda^{-1}\gamma^{1234}\Lambda = \{\text{det.}\ |a_{ik}|\}\,\gamma^{1234}. \tag{12}$$

Poněvadž determinant orthogonální transformace je roven ± 1, máme pro hyperkomplexní číslo Λ velmi důležitý vztah[7])

$$\Lambda\gamma^{1234} = \pm\,\gamma^{1234}\Lambda; \tag{13}$$

znamení $+$ platí pro kladný determinant (vlastní Lorentzova grupa) znamení $-$ platí pro záporný determinant. Vzhledem k antikomutativnosti hyperkomplexních čísel $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ může však Λ obsahovati jen prvky stojící v 1., 3., a 5. řádku ve schematu (11), je-li $\{\text{det.}\ |a_{ik}|\} = 1$, kdežto v opač-

[6]) Srovn. na př. W. Pauli, l. c., p. 124, rovnice (24) nebo A. Sommerfeld, l. c., p. 258, rov. (15).

[7]) Srovn. W. Pauli, l. c., p. 126, rov. (28).

ném případě, t. j. je-li {det. $|a_{ik}|\} = -1$, může Λ obsahovati jen prvky stojící ve 2. a 4. řádku.

Tedy pro {det. $|a_{ik}|\} = +1$ je

$$\Lambda^{(+)} = C_0 + C\gamma + C_{23}\gamma^{23} + C_{31}\gamma^{31} + C_{12}\gamma^{12} + C_{14}\gamma^{14} + C_{24}\gamma^{24} + C_{34}\gamma^{34},$$
$$\gamma = -\gamma^{1234}; \tag{14}$$

pro {det. $|a_{ik}|\} = -1$ je

$$\Lambda^{(-)} = C_1\gamma^1 + C_2\gamma^2 + C_3\gamma^3 + C_4\gamma^4 + C_{234}\gamma^{234} + C_{314}\gamma^{314} + C_{124}\gamma^{124} + \\ + C_{123}\gamma^{123}. \tag{15}$$

Tím se rozpadá 16 prvků grupy hyperkomplexních čísel ve dvě části, z nichž každá obsahuje 8 prvků. První část, příslušná k determinantu $+1$, sestává z prvků

$$1, \gamma, \gamma^{23}, \gamma^{31}, \gamma^{12}, \gamma^{14}, \gamma^{24}, \gamma^{34}$$

a tvoří podgrupu původní grupy. Druhá část, příslušná k determinantu -1, obsahuje prvky

$$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^{234}, \gamma^{314}, \gamma^{124}, \gamma^{123},$$

které však, jak ihned patrno, grupu netvoří.

Násobíme-li prvky první části některým prvkem téže části, prvky první části se reprodukují až na znamení a na pořádek prvků. Násobíme-li naproti tomu prvky prvé části kterýmkoli prvkem druhé části, obdržíme až na znamení a pořádek prvků všechny prvky druhé části. Značí-li tedy γ^A kterýkoli prvek druhé části, pak lze psáti

buď

$$\Lambda^{(-)} = \pm\Lambda^{(+)}\gamma^A, \quad \{\Lambda^{(-)}\}^{-1} = \pm\{\gamma^A\}^{-1}\{\Lambda^{(+)}\}^{-1}$$

nebo

$$\Lambda^{(-)} = \pm i\Lambda^{(+)}\gamma^A, \quad \{\Lambda^{(-)}\}^{-1} = \mp i\{\gamma^A\}^{-1}\{\Lambda^{(+)}\}^{-1},$$

takže

$$a_{ik}^{(-)}\gamma^k = \{\gamma^A\}^{-1}\{\Lambda^{(+)}\}^{-1}\gamma^i\Lambda^{(+)}\gamma^A.$$

Poněvadž však

$$a_{ik}^{(+)}\gamma^k = \{\Lambda^{(+)}\}^{-1}\gamma^i\Lambda^{(+)},$$

máme vztah

$$a_{ik}^{(-)}\gamma^k = a_{ik}^{(+)}\{\gamma^A\}^{-1}\gamma^k\gamma^A,$$

odkudž plynou jednoduché relace mezi koeficienty $a_{ik}^{(-)}$ a $a_{ik}^{(+)}$.

Stejným právem bychom však mohli položiti buď

$$\Lambda^{(-)} = \pm\gamma^A\Lambda^{(+)}, \quad \{\Lambda^{(-)}\}^{-1} = \pm\{\Lambda^{(+)}\}^{-1}\{\gamma^A\}^{-1}$$

nebo

$$\Lambda^{(-)} = \pm i\gamma^A\Lambda^{(+)}, \quad \{\Lambda^{(-)}\}^{-1} = \mp i\{\Lambda^{(+)}\}^{-1}\{\gamma^A\}^{-1},$$

takže

$$a_{ik}^{(-)}\gamma^k = \{\Lambda^{(+)}\}^{-1}\{\gamma^A\}^{-1}\gamma^i\gamma^A\Lambda^{(+)},$$

odkud rovněž plynou jednoduché relace mezi koeficienty $a_{ik}^{(-)}$ a $a_{ik}^{(+)}$.

Z toho všeho je patrno, že postačí vyšetřiti případ, kdy determinant transformace Lorentzovy je $+1$. A k tomu se tedy nyní obrátíme.

4. *Těleso bikvaternionů Λ v případě* {det. $|a_{ik}|\} = 1$. Vzorec (14) se dá psáti souměrněji, zavedeme-li označení $u^{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma)$, kde $\gamma = -\gamma^{1234}$. Pak totiž

$$u^+ + u^- = 1, \ (u^{\pm})^2 = u^{\pm},$$
$$u^+ - u^- = \gamma, \ u^{\pm}u^{\mp} = 0; \tag{16}$$

lze tudíž psáti Λ resp. Λ^{-1} jako součet dvou těles kvaternionů[8]) o jednotkách $u^{\pm}$ a třech kvaternionech $\gamma^{23}u^{\pm}$, cykl.

$$\Lambda = (c_1\gamma^{23} + c_2\gamma^{31} + c_3\gamma^{12} + c_4)u^+ + (c_1'\gamma^{23} + c_2'\gamma^{31} + c_3'\gamma^{12} + c_4')u^-, \tag{17}$$
$$\Lambda^{-1} = (c_1\gamma^{32} + c_2\gamma^{13} + c_3\gamma^{21} + c_4)u^+ + (c_1'\gamma^{32} + c_2'\gamma^{13} + c_3'\gamma^{21} + c_4')u^-.$$

Jest totiž možno těleso bikvaternionů Λ v případě {det. $|a_{ik}|\} = 1$ psáti ve tvaru

$$\Lambda = (C_0 + C_{32}\gamma^{32} + C_{13}\gamma^{13} + C_{21}\gamma^{21})(u^+ + u^-) + \\ + (C + C_{41}\gamma^{32} + C_{42}\gamma^{13} + C_{43}\gamma^{21})(u^+ - u^-), \tag{18}$$

neboť

$$C_{ik} = -C_{ki},$$

$$\gamma^{21}u^{\pm} = u^{\pm}\gamma^{21}, \text{ cykl.}; \ \gamma^{43} = \gamma^{21}(u^+ - u^-) = (u^+ - u^-)\gamma^{21}, \text{ cykl.}$$
$$u^{\pm}\gamma^i = \gamma^i u^{\mp}, \ i = 1, 2, 3, 4, \ \gamma^i\gamma^{1234} = -\gamma^{1234}\gamma^i. \tag{19}$$

Souvislost koeficientů C_{ij}, C_0, C s koeficienty c_k je takováto:

$$\begin{aligned} C_{23} &= \tfrac{1}{2}(c_1 + c_1'), \\ C_{14} &= \tfrac{1}{2}(c_1 - c_1'), \end{aligned} \ \text{cykl.,} \ \begin{aligned} C_0 &= \tfrac{1}{2}(c_4 + c_4'), \\ C &= \tfrac{1}{2}(c_4 - c_4'). \end{aligned} \tag{20}$$

Z rovnic (17) plyne

$$\Lambda^{-1}\Lambda = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2)u^+ + (c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 + c_4'^2)u^- = 1,$$

t. j.

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 1 = c_1'^2 + c_2'^2 + c_2'^2 + c_4'^2. \tag{21}$$ c_3'

Dvě relace (21) přepíší se pomocí vztahů (20) v tomto tvaru

$$C_0^2 + C^2 + C_{23}^2 + C_{31}^2 + C_{12}^2 + C_{14}^2 + C_{24}^2 + C_{34}^2 = 1$$
$$C_0C + C_{23}C_{14} + C_{31}C_{24} + C_{12}C_{34} = 0. \tag{22}$$

Zavedeme-li ještě 8 jiných parametrů vztahy

$$s_j = c_j + c_j', \ s_j' = i(c_j - c_j'), \ j = 1, 2, 3, 4, \tag{23}$$

přejdou oba vztahy (21) ve tvar

[8]) Srovn. W. Franz, Zur Methodik der Dirac-Gleichung, Sitzungsberichte der Akademie München, 1935, p. 390.

$$\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}(s_j^2 - s_j'^2) = 1, \quad \sum_{j=1}^{4} s_j s_j' = 0. \tag{24}$$

Konečně zavedeme-li 8 dalších parametrů $\varkappa$, λ, μ, ν, $\varkappa'$, λ', μ', ν' těmito vztahy

$$\begin{aligned}
\varkappa &= \tfrac{1}{2}i(c_3 + c_3') + \tfrac{1}{2}(c_4 + c_4'), & \varkappa' &= \tfrac{1}{2}i(c_3 - c_3') + \tfrac{1}{2}(c_4 - c_4'),\\
\lambda &= \tfrac{1}{2}i(c_1 + c_1') - \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'), & \lambda' &= \tfrac{1}{2}i(c_1 - c_1') - \tfrac{1}{2}(c_2 - c_2'),\\
\mu &= \tfrac{1}{2}i(c_1 + c_1') + \tfrac{1}{2}(c_2 + c_2'), & \mu' &= \tfrac{1}{2}i(c_1 - c_1') + \tfrac{1}{2}(c_2 - c_2'),\\
\nu &= -\tfrac{1}{2}i(c_3 + c_3') + \tfrac{1}{2}(c_4 + c_4'), & \nu' &= -\tfrac{1}{2}i(c_3 - c_3') + \tfrac{1}{2}(c_4 - c_4'),
\end{aligned} \tag{25}$$

nabudou obě relace (21) tohoto tvaru:

$$\begin{aligned}
\varkappa\nu - \lambda\mu + \varkappa'\nu' - \lambda'\mu' &= 1\\
\varkappa\nu' + \varkappa'\nu - \lambda\mu' - \lambda'\mu &= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Substituce (20), (23), (25) jsou však jen zvláštní případy obecné lineární substituce

$$r_j = \beta_{j\rho} c_\rho, \quad c_k' = c_{4+k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{27}$$

kde j, ϱ probíhá hodnoty od 1 do 8 a sčítáme podle dvakrát se vyskytujícího indexu; při tom předpokládáme, že determinant D této substituce není roven nule, t. j.

$$D = \{\text{det. } |\beta_{j\rho}|\} \neq 0.$$

Pak lze vypočítati z rovnic (27)

$$c_\nu = B_{j\nu} r_j, \tag{28}$$

kde

$$B_{j\nu} = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \beta_{j\nu}}. \tag{29}$$

Od vypisování relací, které vzniknou z (21), dosadíme-li tam (28), upouštím. Položíme-li

$$r_j' = \beta_{j\rho}' c_\rho \tag{30}$$

a dosadíme-li sem (28), obdržíme

$$r_j' = \beta_{j\rho}' B_{k\rho} r_k.$$

Nejsouměrnější a nejjednodušší jsou ovšem relace (21). Proto se budeme nejprve zabývati rovnicemi (17), (21) a (10). Poněvadž platí vztahy (srovn. (16), (19))

$$u^{\pm}\gamma^i u^{\pm} = u^{\pm}u^{\mp}\gamma^i = 0, \; u^{\pm}\gamma^i u^{\mp} = u^{\pm}u^{\pm}\gamma^i = u^{\pm}\gamma^i = \gamma^i u^{\mp}, \tag{31}$$

zjednoduší se určovací rovnice (10) takto:

$$\begin{aligned}
&\Lambda^{-1}\gamma^i\Lambda =\\
&= (c_1'\gamma^{32i} + c_2'\gamma^{13i} + c_3'\gamma^{21i} + c_4'\gamma^i)(c_1\gamma^{23} + c_2\gamma^{31} + c_3\gamma^{12} + c_4)u^+ +\\
&+ (c_1\gamma^{32i} + c_2\gamma^{13i} + c_3\gamma^{21i} + c_4\gamma^i)(c_1'\gamma^{23} + c_2'\gamma^{31} + c_3'\gamma^{12} + c_4')u^- =\\
&= a_{ik}\gamma^k.
\end{aligned} \tag{32}$$

5. *Příprava k řešení určovací rovnice pro Λ.* Porovnáním koeficientů u γ^k na obou stranách této rovnice obdržíme, položíme-li $c_{ik} = c_i c_k'$, tyto rovnice:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= c_{11} - c_{22} - c_{33} + c_{44}, && \{3\}\\
a_{44} &= c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}, && \{1\}\\
a_{41} &= c_{41} - c_{14} - c_{32} + c_{23}, && \{3\}\\
a_{14} &= -c_{41} + c_{14} - c_{32} + c_{23}, && \{3\}\\
a_{32} &= -c_{41} - c_{14} + c_{32} + c_{23}, && \{3\}\\
a_{23} &= c_{41} + c_{14} + c_{32} + c_{23}. && \{3\}
\end{aligned} \tag{33}$$

Je to soustava 16 rovnic — čísla v závorkách udávají počet rovnic vzniklých cyklickou záměnou mezi indexy 1, 2, 3 — o 16 neznámých c_{ik}, které lze snadno najíti. Důsledkem soustavy (33) je soustava 16 rovnic

$$\begin{aligned}
4c_{11} &= a_{11} - a_{22} - a_{33} + a_{44}, && \{3\}\\
4c_{44} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}, && \{1\}\\
4c_{41} &= a_{41} - a_{14} - a_{32} + a_{23}, && \{3\}\\
4c_{14} &= -a_{41} + a_{14} - a_{32} + a_{23}, && \{3\}\\
4c_{32} &= -a_{41} - a_{14} + a_{32} + a_{23}, && \{3\}\\
4c_{23} &= a_{41} + a_{14} + a_{32} + a_{23}, && \{3\}
\end{aligned} \tag{34}$$

velmi podobná soustavě (33). Záměna obou indexů na levé straně rovnic (33), (34) má za následek změnu znamení na jejich pravé straně u těch veličin, které mají jen jeden index $= 4$.
Užijeme-li vztahů (20), nabude soustava 16 rovnic (33) tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11} &= C_0^2 - C^2 + C_{23}^2 - C_{31}^2 - C_{12}^2 - C_{14}^2 + C_{24}^2 + C_{34}^2, && \{3\}\\
a_{44} &= C_0^2 - C^2 + C_{23}^2 + C_{31}^2 + C_{12}^2 - C_{14}^2 - C_{24}^2 - C_{34}^2, && \{1\}\\
a_{23} &= 2[\;\;(C_0C_{23} - CC_{14}) + (C_{31}C_{12} - C_{24}C_{34})], && \{3\}\\
a_{32} &= 2[-(C_0C_{23} - CC_{14}) + (C_{31}C_{12} - C_{24}C_{34})], && \{3\}\\
a_{14} &= 2[\;\;(C_0C_{14} - CC_{23}) + (C_{24}C_{12} - C_{31}C_{34})], && \{3\}\\
a_{41} &= 2[-(C_0C_{14} - CC_{23}) + (C_{24}C_{12} - C_{31}C_{34})], && \{3\}
\end{aligned} \tag{35}$$

Podobně užitím vztahů (25) obdržíme z rovnic (33) rovnice

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \tfrac{1}{2}(\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 - \varkappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 - \nu'^2),\\
a_{21} &= \tfrac{1}{2}i(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \varkappa'^2 - \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2)\;,\\
a_{31} &= -\varkappa\lambda + \mu\nu + \varkappa'\lambda' - \mu'\nu',\\
a_{41} &= i(\varkappa\lambda' + \mu'\nu - \varkappa'\lambda - \mu\nu'),\\[4pt]
a_{12} &= \tfrac{1}{2}i(-\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 + \varkappa'^2 - \lambda'^2 + \mu'^2 - \nu'^2),\\
a_{22} &= \tfrac{1}{2}(\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \varkappa'^2 - \lambda'^2 - \mu'^2 - \nu'^2),\\
a_{32} &= i(\varkappa\lambda + \mu\nu - \varkappa'\lambda' - \mu'\nu'),\\
a_{42} &= \varkappa\lambda' + \mu\nu' - \varkappa'\lambda - \mu'\nu,\\[4pt]
a_{13} &= -\varkappa\mu + \lambda\nu + \varkappa'\mu' - \lambda'\nu',\\
a_{23} &= i(-\varkappa\mu - \lambda\nu + \varkappa'\mu' + \lambda'\nu').\\
a_{33} &= \varkappa\nu + \lambda\mu - \varkappa'\nu' - \lambda'\mu'.\\
a_{43} &= i(\varkappa'\nu - \lambda'\mu - \varkappa\nu' + \lambda\mu'),
\end{aligned} \tag{36}$$

$$
\begin{aligned}
a_{14} &= i(-\varkappa\mu' + \lambda\nu' + \varkappa'\mu - \lambda'\nu),\\
a_{24} &= \varkappa\mu' + \lambda\nu' - \varkappa'\mu - \lambda'\nu,\\
a_{34} &= i(\varkappa\nu' + \lambda\mu' - \varkappa'\nu - \lambda'\mu),\\
a_{44} &= \varkappa\nu - \lambda\mu - \varkappa'\nu' + \lambda'\mu'.
\end{aligned}
$$

Od vypisování vzorců pro a_{ik} jakožto funkcí parametrů s_j, s_j' upouštím. Rovnice (33) jsou daleko přehlednější než (35) a (36) a dovolují snadno získati rovnice (34), které tvoří základ k určení koeficientů c_k, c_k'; C, C_0, C_{ij}; s_j, s_j'; $\varkappa, \ldots, \nu'$.

Než přistoupíme k jejich určení, připomeneme si vyjádření koeficientů $c_1, \ldots, c_4'$ pomocí zobecněných Eulerových úhlů. Je totiž možno položiti

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \sin\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \varphi), & c_2 &= \sin\tfrac{1}{2}\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \varphi),\\
c_3 &= \cos\tfrac{1}{2}\Theta\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \varphi), & c_4 &= \cos\tfrac{1}{2}\Theta\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \varphi),\\
c_1' &= \sin\tfrac{1}{2}\Theta'\cos\tfrac{1}{2}(\omega' - \varphi'), & c_2' &= \sin\tfrac{1}{2}\Theta'\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \varphi'),\\
c_3' &= \cos\tfrac{1}{2}\Theta'\sin\tfrac{1}{2}(\omega' + \varphi'), & c_4' &= \cos\tfrac{1}{2}\Theta'\cos\tfrac{1}{2}(\omega' + \varphi').
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Rovnice (21) jsou pak identicky splněny. Pomocí těchto výrazů pro $c_1, \ldots, c_4'$ můžeme užitím rovnic (33) najíti tyto vzorce, které vyjadřují transformaci (1) pomocí zobecněných Eulerových úhlů Θ, ω, φ, Θ', ω', φ' takto:

$$
\begin{aligned}
a_{11} = {}& \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') -\\
& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{21} = {}& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') -\\
& - \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{31} = {}& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{41} = {}& - \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') -\\
& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{12} = {}& \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{22} = {}& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{32} = {}& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') -\\
& - \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{42} = {}& - \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{13} = {}& - \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{23} = {}& \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{33} = {}& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{43} = {}& - \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') -\\
& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{14} = {}& \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{24} = {}& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\sin\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{34} = {}& \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') +\\
& + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta'),\\
a_{44} = {}& \cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta - \Theta') -\\
& - \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta').
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Vraťme se však k rovnicím (34); ty vyjadřují 16 veličin $c_{ik} = c_i c_k'$, $(i, k = 1, 2, 3, 4)$, pomocí 16 koeficientů a_{ik}. Z nich máme určit 8 čísel $c_1, \ldots, c_4'$ splňujících 2 relace (21), takže máme k disposici 18 rovnic pro 8 neznámých. Ale z 16 koeficientů a_{ik} je jenom 6 na sobě nezávislých, ostatních 10 je určeno 10 vztahy mezi koeficienty a_{ik} (relace orthogonality). Tudíž mezi 18 rovnicemi pro 8 veličin $c_1, \ldots, c_4'$ je 10 vztahů, takže nezávislých rovnic je 8, které jsou nutné a také postačí k určení 8 neznámých. Nebylo by obtížné vyjádřiti na př. c_1', c_2' c_3', c_4' pomocí c_1 a pak ze vztahu $\sum\limits_{k=1}^{4} c_k'^2 = 1$ určiti c_1, takže c_1', c_2', c_3', c_4' budou určeny úplně koeficienty a_{ik}. Tím se dostane do jmenovatele těchto zlomků vyjadřujících c_1', c_2', c_3', c_4' odmocnina z jistého výrazu. Provedeme-li totéž obdobně pro c_1, c_2, c_3, c_4 pomocí c_1' a pak najdeme z rovnice $\sum\limits_{k=1}^{4} c_k^2 = 1$ číslo c_1', určíme c_1, c_2, c_3, c_4 úplně koeficienty a_{ik}, ale ve jmenovateli zlomků vyjadřujících c_1, c_2, c_3, c_4 bude jiná odmocnina než prve. Proto toto počítání koeficientů $c_1, \ldots, c_4'$ je nevýhodné. Zvolíme tedy jiný způsob, který dá vhodnější výsledky. Vypočteme totiž ještě součiny

$$
c_i c_k = \sum_{j=1}^{4} c_{ij} c_{kj}, \quad c_i' c_k' = \sum_{j=1}^{4} c_{ji} c_{jk}, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{39}
$$

Platnost těchto vztahů snadno nahlédneme, vzpomeneme-li vztahů (21).

Dříve však, než se obrátíme k těmto výpočtům, probereme speciální případ, na němž aspoň částečně vysvitne další postup, jehož užijeme pak v případě obecné Lorentzovy transformace s determinantem $= 1$.

6. *Speciální případ* $a_{i4} = a_{4i} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Zvolíme případ Lorentzovy transformace s determinantem $= +1$ charakterisovaný šesti podmínkami, z nichž dvě znějí

$$
\begin{aligned}
0 = a_{14} &= -c_{41} + c_{14} - c_{32} + c_{23},\\
0 = a_{41} &= c_{41} - c_{14} - c_{32} + c_{23},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

a ostatní čtyři obdržíme odtud cyklickou záměnou indexů 1, 2, 3; index 4 se nemění.

Sečtením a odečtením těchto rovnic obdržíme

$$
c_{32} = c_{23}, \quad c_{41} = c_{14}, \quad \text{cykl.},
$$

čili

$$c_3c_2' = c_2c_3', \quad c_4c_1' = c_1c_4', \quad \text{cykl.}; \tag{41}$$

těmto rovnicím lze vyhověti jedině tak, že ($\lambda \neq 0$)

$$c_k' = \lambda c_k, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Pak bude $\sum_{k=1}^{4} c_k'^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^{4} c_k^2$, čili vzhledem k (21)

$$\lambda^2 = 1; \tag{42}$$

tudíž

$$c_k' = \pm c_k, \quad a_{44} = \sum_{k=1}^{4} c_k c_k' = \pm \sum_{k=1}^{4} c_k^2 = \pm 1. \tag{43}$$

Rovnice (34) se pak zredukují; je-li $a_{44} = 1$, je nutno voliti všude svrchní znamení, je-li $a_{44} = -1$, spodní znamení:

$$\begin{aligned}
4c_1^2 &= \pm (a_{11} - a_{22} - a_{33}) + 1, & 4c_2c_1 &= \pm (a_{21} + a_{12}), \\
4c_1c_2 &= \pm (a_{21} + a_{12}), & 4c_2^2 &= \pm (-a_{11} + a_{22} - a_{33}) + 1, \\
4c_1c_3 &= \pm (a_{31} + a_{13}), & 4c_2c_3 &= \pm (a_{23} + a_{32}), \\
4c_1c_4 &= \pm (a_{23} - a_{32}), & 4c_2c_4 &= \pm (a_{31} - a_{13}), \\
4c_3c_1 &= \pm (a_{31} + a_{13}), & 4c_4c_1 &= \pm (a_{23} - a_{32}), \\
4c_3c_2 &= \pm (a_{23} + a_{32}), & 4c_4c_2 &= \pm (a_{31} - a_{13}), \\
4c_3^2 &= \pm (-a_{11} - a_{22} + a_{33}) + 1, & 4c_4c_3 &= \pm (a_{12} - a_{21}), \\
4c_3c_4 &= \pm (a_{12} - a_{21}), & 4c_4 &= \pm (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1.
\end{aligned} \tag{44}$$

Z horní poloviny prvního sloupce pak plyne

$$\begin{aligned}
c_1 &= k_{\mathrm{I}}\, [\pm(a_{11} - a_{22} - a_{33}) + 1], & c_2 &= \pm\, k_{\mathrm{I}}(a_{21} + a_{12}), \\
c_3 &= \pm\, k_{\mathrm{I}}\, (a_{31} + a_{13}), & c_4 &= \pm\, k_{\mathrm{I}}(a_{23} - a_{32}),
\end{aligned} \tag{I}$$

kde

$$(k_{\mathrm{I}})^{-2} = 4[\pm(a_{11} - a_{22} - a_{33}) + 1].$$

Z horní poloviny druhého sloupce plyne podobně

$$\begin{aligned}
c_1 &= \pm\, k_{\mathrm{II}}(a_{21} + a_{12}), & c_2 &= k_{\mathrm{II}}[\pm(-a_{11} + a_{22} - a_{33}) + 1], \\
c_3 &= \pm\, k_{\mathrm{II}}(a_{23} + a_{32}), & c_4 &= \pm k_{\mathrm{II}}\, (a_{31} - a_{13}),
\end{aligned} \tag{II}$$

kde

$$(k_{\mathrm{II}})^{-2} = 4[\pm(-a_{11} + a_{22} - a_{33}) + 1].$$

Ze spodní poloviny sloupce prvního obdržíme

$$\begin{aligned}
c_1 &= \pm\, k_{\mathrm{III}}(a_{31} + a_{13}), & c_2 &= \pm\, k_{\mathrm{III}}(a_{23} + a_{32}), \\
c_3 &= k_{\mathrm{III}}[\pm(-a_{11} - a_{22} + a_{33}) + 1], & c_4 &= \pm\, k_{\mathrm{III}}(a_{12} - a_{21}),
\end{aligned} \tag{III}$$

kde

$$(k_{\mathrm{III}})^{-2} = 4[\pm(-a_{11} - a_{22} + a_{33}) + 1].$$

A konečně ze spodní poloviny druhého sloupce vychází

$$\begin{aligned}
c_1 &= \pm\, k_{\mathrm{IV}}(a_{23} - a_{32}), & c_2 &= \pm\, k_{\mathrm{IV}}(a_{31} - a_{13}), \\
c_3 &= \pm\, k_{\mathrm{IV}}(a_{12} - a_{21}), & c_4 &= k_{\mathrm{IV}}[\pm(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1],
\end{aligned} \tag{IV}$$

kde

$$(k_{\mathrm{IV}})^{-2} = 4[\pm(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1].$$

Poněvadž $(k_j)^{-1}$, $j = \mathrm{I, II, III, IV}$, má dvě hodnoty lišící se znamením, obdržíme odtud pro c_1, c_2, c_3, c_4 celkem 2×4 možnosti vhodného vyjádření pomocí elementů determinantu $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, 3$, jehož hodnota je $+1$ pro $a_{44} = +1$ a tolikéž možností pro $a_{44} = -1$, kdy hodnota tohoto determinantu je -1. Identickou transformaci vlnové funkce pro identickou transformaci souřadnic dostáváme ovšem jen v jednom případě a to ve (IV), když zvolíme svrchní znamení a $(k_{\mathrm{IV}})^{-1}$ zvolíme kladně; ostatní vzorce pro ten případ selhávají, neboť $(k_{\mathrm{I}})^{-2}$, $(k_{\mathrm{II}})^{-2}$, $(k_{\mathrm{III}})^{-2}$ pro $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ dávají nulu. Ježto však nikdy nemohou současně zmizeti $(k_j)^{-2}$ pro všechna čtyři $j = \mathrm{I, II, III, IV}$, máme vždy možnost vyjádřiti c_1, c_2, c_3, c_4 pomocí daných koeficientů transformace a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Pro případ, že $(k_j)^{-2} \neq \neq 0$, $j = \mathrm{I, II, III, IV}$, jsou vzorce (I), (II), (III), (IV) vzájemně ekvivalentní až na znamení. Možnost (IV), která s kladným znamením výrazu $(k_{\mathrm{IV}})^{-1}$ a se svrchním znamením dává identickou transformaci vlnové funkce pro identickou transformaci souřadnic, selhává v případě rotace o úhel π kolem osy x, resp. y, resp. z ($a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = -1$, $a_{ik} = 0$, $i \neq k$, resp. $a_{11} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -1$, $a_{ik} = 0$, $i \neq k$, resp. $a_{11} = -1$, $a_{22} = = -1$, $a_{33} = 1$, $a_{ik} = 0$, $i \neq k$), kdy se zase hodí možnost (I) resp. (II) resp. (III).

Dosud jsme vycházeli z tělesa kvaternionů

$$\Lambda = c_1\gamma^{23} + c_2\gamma^{31} + c_3\gamma^{12} + c_4.$$

Stejně dobře jsme však mohli vyjíti z tělesa kvaternionů

$$L_1 = \gamma^{23}\Lambda \ \text{ resp. } \ L_2 = \gamma^{31}\Lambda \ \text{ resp. } \ L_3 = \gamma^{12}\Lambda.$$

Pak bude

$$L_1^{-1} = \Lambda^{-1}\gamma^{32} \ \text{ resp. } \ L_2^{-1} = \Lambda^{-1}\gamma^{13} \ \text{ resp. } \ L_3^{-1} = \Lambda^{-1}\gamma^{21},$$

takže

$$L_j^{-1}L_j = 1, \quad j = 1, 2, 3 \ \text{(nesčítat!)}$$

za podmínky

$$\sum_{k=1}^{4} c_k^2 = 1.$$

Užijeme-li transformace

$$x_k = \alpha_{ik}x_i', \quad x_i' = \alpha_{ik}x_k,$$

bude

$$\alpha_{ik}\gamma^k = L_j^{-1}\gamma^i L_j,$$

takže

$$\begin{aligned}
&\alpha_{ik}\gamma^k = \Lambda^{-1}\gamma^{32i23}\Lambda = \pm\, a_{ik}\gamma^k, \quad \begin{array}{l}\text{znaménko } + \text{ pro } i = 1,\\ \text{znaménko } - \text{ pro } i = 2, 3\end{array} \\
&\text{resp.} \\
&\alpha_{ik}\gamma^k = \Lambda^{-1}\gamma^{13i31}\Lambda = \pm\, a_{ik}\gamma^k, \quad \begin{array}{l}\text{znaménko } + \text{ pro } i = 2,\\ \text{znaménko } - \text{ pro } i = 3, 1\end{array} \\
&\text{resp.} \\
&\alpha_{ik}\gamma^k = \Lambda^{-1}\gamma^{21i12}\Lambda = \pm\, a_{ik}\gamma^k, \quad \begin{array}{l}\text{znaménko } + \text{ pro } i = 3,\\ \text{znaménko } - \text{ pro } i = 1, 2.\end{array}
\end{aligned} \tag{45}$$

Tudíž ze vzorce

$$\Lambda = c_1\gamma^{23} + c_2\gamma^{31} + c_3\gamma^{12} + c_4,\quad \Lambda^{-1} = c_1\gamma^{32} + c_2\gamma^{13} + c_3\gamma^{21} + c_4$$

plyne

$$L_1 = \gamma^{23}\Lambda = \quad c_4\gamma^{23} + c_3\gamma^{31} - c_2\gamma^{12} - c_1,\quad L_1^{-1} = \quad c_4\gamma^{32} + c_3\gamma^{13} - c_2\gamma^{21} - c_1$$

resp.

$$L_2 = \gamma^{31}\Lambda = -c_3\gamma^{23} + c_4\gamma^{31} + c_1\gamma^{12} - c_2,\quad L_2^{-1} = -c_3\gamma^{32} + c_4\gamma^{13} + c_1\gamma^{21} - c_2$$

resp.

$$L_3 = \gamma^{12}\Lambda = \quad c_2\gamma^{23} - c_1\gamma^{31} + c_4\gamma^{12} - c_3,\quad L_3^{-1} = \quad c_2\gamma^{32} - c_1\gamma^{13} + c_4\gamma^{21} - c_3.$$

Jest tudíž vzhledem k (45) provésti ve vzorcích pro c_1, c_2, c_3, c_4 tyto změny:

Λ	c_1	c_2	c_3	c_4	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}	a_{4k}	(I)	(II)	(III)	(IV)
L_1	c_4	c_3	$-c_2$	$-c_1$	a_{1k}	$-a_{2k}$	$-a_{3k}$	a_{4k}	(IV)	(III)	—(II)	—(I)
L_2	$-c_3$	c_4	c_1	$-c_2$	$-a_{1k}$	a_{2k}	$-a_{3k}$	a_{4k}	—(III)	—(IV)	(I)	(II)
L_3	c_2	$-c_1$	c_4	$-c_3$	$-a_{1k}$	$-a_{2k}$	a_{3k}	a_{4k}	(II)	—(I)	(IV)	—(III)

Při tom (I), (II), (III), (IV) značí čtyři možnosti pro čtveřici c_1, c_2, c_3, c_4, —(I) atd. značí (I) s opačným znaménkem; $k = 1, 2, 3$. Jak viděti, přechází jedna možnost prakticky v jinou; podstatně nových možností nedostáváme (nepřihlížíme-li k možnosti násobení výrazu pro Λ faktorem $\pm i$).

Ale, jak víme z odstavce 4, není to, co jsme právě seznali, jediná volba pro hledaná čísla c_1, c_2, c_3, c_4.

Zavedeme-li totiž pro případ $a_{44} = 1$ na př. z rovnic (25) čtyři parametry $\varkappa$, λ, μ, ν specialisací těchto rovnic (další čtyři $\varkappa'$, λ', μ', ν' zmizí), bude

$$\begin{aligned} \varkappa &= ic_3 + c_4, & \lambda &= \quad ic_1 - c_2, \\ \mu &= ic_1 + c_2, & \nu &= -ic_3 + c_4; \end{aligned} \tag{46}$$

pak relace (26) přejdou v jedinou

$$\varkappa\nu - \lambda\mu = 1, \tag{47}$$

z čehož usuzujeme na známé Cayley-Kleinovy parametry $\varkappa$, λ, μ, ν, neboť specialisací (43) provedenou v rovnicích (25) a (36) obdržíme známé vzorce

$$\begin{gathered} a_{11} = \tfrac{1}{2}\,(\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2),\quad a_{12} = \tfrac{1}{2}i(-\,\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2), \\ a_{13} = -\,\varkappa\mu + \lambda\nu, \\ a_{21} = \tfrac{1}{2}i(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2),\quad a_{22} = \tfrac{1}{2}i(\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2), \\ a_{23} = -\,i(\varkappa\mu + \lambda\nu), \\ a_{31} = -\,\varkappa\lambda + \mu\nu, \qquad a_{32} = i(\varkappa\lambda + \mu\nu), \qquad a_{33} = \varkappa\nu + \lambda\mu. \end{gathered} \tag{48}$$

Z těchto 9 rovnic a z rovnice (47) lze snadno vypočísti 10 výrazů $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, ν^2, $\varkappa\lambda$, $\mu\nu$, $\varkappa\mu$, $\lambda\nu$, $\varkappa\nu$, $\lambda\mu$. Ale ty se dají též počítati z rovnic (46) a (44). Vypočteme-li tedy z rovnic (46) a (44) těchto 10 výrazů, můžeme je seřaditi takto:

$$\begin{aligned} 2\varkappa^2 &= \quad a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21}), & 2\lambda\varkappa &= -a_{31} - ia_{32}, \\ 2\varkappa\lambda &= -a_{31} - ia_{32}, & 2\lambda^2 &= -a_{11} + a_{22} - i(a_{12} + a_{21}), \\ 2\varkappa\mu &= -a_{13} + ia_{23}, & 2\lambda\mu &= \quad a_{33} - 1, \\ 2\varkappa\nu &= \quad a_{33} + 1, & 2\lambda\nu &= \quad a_{13} + ia_{23}, \\ 2\mu\varkappa &= -a_{13} + ia_{23}, & 2\nu\varkappa &= \quad a_{33} + 1, \\ 2\mu\lambda &= \quad a_{33} - 1, & 2\nu\lambda &= \quad a_{13} + ia_{23}, \\ 2\mu^2 &= -a_{11} + a_{22} + i(a_{12} + a_{21}), & 2\nu\mu &= \quad a_{31} - ia_{32}, \\ 2\mu\nu &= \quad a_{31} - ia_{32}, & 2\nu^2 &= \quad a_{11} + a_{22} - i(a_{12} - a_{21}). \end{aligned} \tag{49}$$

Odtud máme rovněž čtyři ekvivalentní možnosti, z nichž vypíši jen první:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})}{\sqrt{2}\sqrt{a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})}}, \\ \lambda &= \frac{-a_{31} - ia_{32}}{\sqrt{2}\sqrt{a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})}}, \\ \mu &= \frac{-a_{13} + ia_{23}}{\sqrt{2}\sqrt{a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{12})}}, \\ \nu &= \frac{a_{33} + 1}{\sqrt{2}\sqrt{a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})}}. \end{aligned} \tag{50}$$

Odmocnina ve jmenovateli má dvojí znamení; volíme-li znamení ve jmenovateli kladné, obdržíme odtud též identickou transformaci vlnové funkce pro identickou transformaci souřadnic.

Můžeme však užitím (44) a (46) udati další čtyři možnosti mezi sebou a s (50) ekvivalentní, z nichž vypíši rovněž jen první:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{i(a_{31} + a_{13}) + (a_{23} - a_{32})}{2\sqrt{a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1}}, \\ \lambda &= \frac{i(a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1) - (a_{21} + a_{12})}{2\sqrt{a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1}}, \\ \mu &= \frac{i(a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1) + (a_{21} + a_{12})}{2\sqrt{a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1}}, \\ \nu &= \frac{-i(a_{31} + a_{13}) + (a_{23} - a_{32})}{2\sqrt{a_{11} - a_{22} - a_{33} + 1}}. \end{aligned} \tag{51}$$

Podobně jako je $2 \times 4 = 8$ ekvivalentních možností pro $\varkappa$, λ, μ, ν, můžeme užitím (46) najíti ke 4 dosavadním výsledkům pro c_1, c_2, c_3, c_4 další 4 jiné ekvivalentní možnosti pro c_1, c_2, c_3, c_4; od vypisování jejich upouštím.

O tom, že osm zde uvedených možností pro $\varkappa$, λ, μ, ν resp. c_1, c_2, c_3, c_4 je vskutku osm ekvivalentních možností, přesvědčíme se na př. na prostorové rotaci, vyjádříme-li a_{ik} pomocí Eulerových úhlů, t. j. specialisujeme-li rovnice (38) tím, že položíme $\Theta' = \Theta$, $\varphi' = \varphi$, $\omega' = \omega$. Obdržíme známé vyjádření

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\varphi\cos\omega - \sin\varphi\sin\omega\cos\Theta,\\
a_{21} &= -\sin\varphi\cos\omega - \cos\varphi\sin\omega\cos\Theta,\\
a_{31} &= \sin\omega\sin\Theta,\\
a_{12} &= \cos\varphi\sin\omega + \sin\varphi\cos\omega\cos\Theta,\\
a_{22} &= -\sin\varphi\sin\omega + \cos\varphi\cos\omega\cos\Theta,\\
a_{32} &= -\cos\omega\sin\Theta,\\
a_{13} &= \sin\varphi\sin\Theta,\\
a_{23} &= \cos\varphi\sin\Theta,\\
a_{33} &= \cos\Theta.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Pro případ $a_{44} = -1$ plynou ze (43) druhé čtyři parametry $\varkappa'$, λ', μ', ν' specialisací rovnic (25) (první čtyři $\varkappa$, λ, μ, ν zmizí) takto:

$$
\begin{aligned}
\varkappa' &= ic_3 + c_4, & \lambda' &= ic_1 - c_2,\\
\mu' &= ic_1 + c_2, & \nu' &= -ic_3 + c_4;
\end{aligned}
$$

pak relace (26) přejdou v jedinou

$$\varkappa'\nu' - \lambda'\mu' = 1.$$

Tím obdržíme specialisací rovnic (36)

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\tfrac{1}{2}(\varkappa'^2 - \lambda'^2 - \mu'^2 + \nu'^2), \quad a_{12} = -\tfrac{1}{2}i(-\varkappa'^2 + \lambda'^2 - \mu'^2 + \nu'^2),\\
a_{13} &= -(-\varkappa'\mu' + \lambda'\nu'),\\
a_{21} &= -\tfrac{1}{2}i(\varkappa'^2 + \lambda'^2 - \mu'^2 - \nu'^2), \quad a_{22} = -\tfrac{1}{2}(\varkappa'^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2),\\
a_{23} &= i(\varkappa'\mu' + \lambda'\nu'),\\
a_{31} &= -(-\varkappa'\lambda' + \mu'\nu'), \quad a_{32} = -i(\varkappa'\lambda' + \mu'\nu'), \quad a_{33} = -(\varkappa'\nu' + \lambda'\mu'),
\end{aligned}
$$

t. j. totéž jako (48) až na to, že a_{ik} mají opačná znamení než v rovnicích (48) a že parametry jsou očárkovány. Další postup je zcela týž jako u rovnic (48), takže není třeba jej opakovati.

Další možnosti vyjádření hledaných čísel c_1, c_2, c_3, c_4 lze získati specialisací postupu vycházejícího od rovnic (27) až do (30); proto od podrobného vypisování příslušných vzorců upouštím.

7. Lorentzova *obecná transformace s determinantem* $+1$. Užijeme-li (39) a (34) pro $c_{ik} = c_i c_k'$, obdržíme po snadné úpravě

$$
\begin{aligned}
4c_1^2 &= A^{23}_{23} - A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1 + A^{23}_{14} - A^{31}_{24} - A^{12}_{34} = \\
&= A^{14}_{14} - A^{24}_{24} - A^{34}_{34} + 1 + A^{14}_{23} - A^{24}_{31} - A^{34}_{12}, \qquad \{3\}\\
4c_4^2 &= A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1 + A^{23}_{14} + A^{31}_{24} + A^{12}_{34} = \\
&= A^{14}_{14} + A^{24}_{24} + A^{34}_{34} + 1 + A^{14}_{23} + A^{24}_{31} + A^{34}_{12}, \qquad \{1\}\\
4c_2c_3 &= A^{31}_{12} + A^{12}_{31} + A^{31}_{34} + A^{12}_{24} = \\
&= A^{24}_{34} + A^{34}_{24} + A^{24}_{12} + A^{34}_{31}, \qquad \{3\}\\
4c_1c_4 &= A^{31}_{12} - A^{12}_{31} + A^{31}_{34} - A^{12}_{24} = \\
&= A^{24}_{34} - A^{34}_{24} + A^{24}_{12} - A^{34}_{31}. \qquad \{3\}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Při tom

$$A^{mr}_{ns} = a_{mn}a_{rs} - a_{ms}a_{rn}; \tag{54}$$

poněvadž {det. $|a_{ik}|$} $= +1$, je determinant A^{mr}_{ns} roven svému algebraickému doplňku vybranému z matice prvků a_{ik}.

Obdobné výrazy pro $4c_1'^2$, $4c_4'^2$, $4c_2'c_3'$, $4c_1'c_4'$ obdržíme z (53) tak, že změníme znaménko u determinantu A^{mr}_{ns}, jenž obsahuje index 4 pouze jedenkrát.

Odtud, přihlédneme-li ještě k rovnicím (34), máme 8 ekvivalentních možností pro 8 veličin c_k, c_k', $k = 1, 2, 3, 4$.

Obecněji položíme jako v rovnicích (27)

$$r_j = \beta_{j\rho}c_\rho, \quad (c_1' = c_5,\ c_2' = c_6,\ c_3' = c_7,\ c_4' = c_8), \tag{55}$$

za předpokladu, že $D = \{\text{det. } |\beta_{j\rho}|\} \neq 0$, takže

$$r_j r_k = \tfrac{1}{2}(\beta_{j\rho}\beta_{k\sigma} + \beta_{j\sigma}\beta_{k\rho})c_\rho c_\sigma, \tag{56}$$

odkudž plyne pro

$$r_k = \frac{(\beta_{j\varrho}\beta_{k\sigma} + \beta_{j\sigma}\beta_{k\varrho})c_\varrho c_\sigma}{2\sqrt{\beta_{j\varrho}\beta_{j\sigma}c_\varrho c_\sigma}} \tag{57}$$

8 úplně ekvivalentních možností, které vedou k nesčíslnému množství dalších ekvivalentních možností, měníme-li koeficienty $\beta_{j\rho}$. Položíme-li dále ještě

$$r_j' = \beta_{j\rho}' c_\rho \tag{58}$$

a dosadíme-li sem z rovnic (28) a (29)

$$c_\varrho = B_{k\varrho}r_k, \quad B_{k\varrho} = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial \beta_{k\varrho}}, \tag{59}$$

obdržíme vzhledem k (57)

$$r_j' = \beta_{j\varrho}' B_{k\varrho}\frac{(\beta_{j\varrho}\beta_{k\sigma} + \beta_{j\sigma}\beta_{k\varrho})c_\varrho c_\sigma}{2\sqrt{\beta_{j\varrho}\beta_{j\sigma}c_\varrho c_\sigma}} = \frac{(\beta_{j\varrho}'\beta_{k\sigma}' + \beta_{j\sigma}'\beta_{k\varrho}')c_\varrho c_\sigma}{2\sqrt{\beta_{k\varrho}'\beta_{k\sigma}'c_\varrho c_\sigma}}; \tag{60}$$

vzroste tedy možnost vyjádření r_j' při proměnných koeficientech $\beta_{j\rho}$ $\beta_{j\rho}'$ zase nekonečně mnohokrát — avšak všechna tato vyjádření jsou navzájem ekvivalentní.

8. *Některé jednoduché ekvivalentní možnosti pro výpočet koeficientů* $c_1, \ldots, c_4'$ *atd.* Užijeme-li vzorců odstavce 7, obdržíme především tyto vzorce:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(A^{23}_{23} - A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1 + A^{23}_{14} - A^{31}_{24} - A^{12}_{34}),\\
c_2 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(A^{23}_{31} + A^{31}_{23} + A^{23}_{24} + A^{31}_{14}),\\
c_3 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(A^{12}_{23} + A^{23}_{12} + A^{12}_{14} + A^{23}_{34}),\\
c_4 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(A^{31}_{12} - A^{12}_{31} + A^{31}_{34} - A^{12}_{24}),\\
c_1' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(a_{11} - a_{22} - a_{33} + a_{44}),\\
c_2' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(a_{12} + a_{21} + a_{34} + a_{43}),\\
c_3' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(a_{31} + a_{13} - a_{24} - a_{42}),\\
c_4' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{I}}(a_{23} - a_{32} + a_{14} - a_{41}),\\
(K_{\mathrm{I}})^{-2} &= A^{23}_{23} - A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1 + A^{23}_{14} - A^{31}_{24} - A^{12}_{34}.
\end{aligned}
$$

Další 2 možnosti obdržíme odtud cyklickou záměnou indexů 1, 2, 3 a indexů I, II, III.
Čtvrtá možnost je tato:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(A^{31}_{12} - A^{12}_{31} + A^{31}_{34} - A^{12}_{24}),\\
c_2 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(A^{12}_{23} - A^{23}_{12} + A^{12}_{14} - A^{23}_{34}),\\
c_3 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(A^{23}_{31} - A^{31}_{23} + A^{23}_{24} - A^{31}_{14}),\\
c_4 &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1 + A^{23}_{14} + A^{31}_{24} + A^{12}_{34}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(a_{23} - a_{32} + a_{41} - a_{14}),\\
c_2' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(a_{31} - a_{13} + a_{42} - a_{24}),\\
c_3' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(a_{12} - a_{21} + a_{43} - a_{34}),\\
c_4' &= \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{IV}}(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}),
\end{aligned}
$$

$$(K_{\mathrm{IV}})^{-2} = A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1 + A^{23}_{14} + A^{31}_{24} + A^{12}_{34}.$$

Z těchto čtyř možností obdržíme další čtyři, když na levých stranách v tomto odstavci uvedených rovnic nečárkovaná písmena očárkujeme a čárkovaná písmena zbavíme čárky a současně na pravých stranách změníme znaménko u determinantů A^{mr}_{ns}, které obsahují index 4 pouze jedenkrát. Tak jsme získali 8 ekvivalentních možností pro koeficienty $c_1, \ldots, c_4'$.

Podobně se dají získati vzorce pro koeficienty C_0, C, C_{23}, C_{31}, C_{12}, C_{14}, C_{24}, C_{34} a vzorce pro $\varkappa$, λ, μ, ν, $\varkappa'$, λ', μ', ν' jakož i pro s_1, s_2, s_3, s_4, s_1', s_2', s_3', s_4'. Platí totiž definice (20), (23), (25). Vypočteme-li pomocí těchto definicí osm čtverců (osmi) veličin C_0, C, C_{ik} resp. $\varkappa, \lambda, \ldots, \varkappa', \lambda', \ldots$ resp. $s_1, s_2, \ldots, s_1', s_2', \ldots$ a 28 součinů vždy dvou z těchto uvedených veličin, máme možnost pohodlného vyjádření těchto hledaných veličin pomocí koeficientů dané transformace a_{ik}.

Uvedu zde nejprve výsledky pro čtverce a součiny čísel s:

$$
\begin{aligned}
2s_1^2 &= A^{23}_{23} - A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1 + a_{11} - a_{22} - a_{33} + a_{44},\\
2s_1s_2 &= A^{23}_{31} + A^{31}_{23} + a_{12} + a_{21},\\
2s_1s_3 &= A^{12}_{23} + A^{23}_{12} + a_{31} + a_{13},\\
2s_1s_4 &= A^{31}_{12} - A^{12}_{31} + a_{23} - a_{32}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_1s_1' &= i(A^{23}_{14} - A^{31}_{24} - A^{12}_{34}),\\
2s_1s_2' &= i(A^{23}_{24} + A^{31}_{14} - a_{34} - a_{43}),\\
2s_1s_3' &= i(A^{12}_{14} + A^{23}_{34} + a_{24} + a_{42}),\\
2s_1s_4' &= i(A^{31}_{34} - A^{12}_{24} + a_{41} - a_{14}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_2^2 &= - A^{23}_{23} + A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1 - a_{11} + a_{22} - a_{33} + a_{44},\\
2s_2s_3 &= A^{31}_{12} + A^{12}_{31} + a_{23} + a_{32},\\
2s_2s_4 &= A^{12}_{23} - A^{23}_{12} + a_{31} - a_{13}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_2s_1' &= i\ (A^{23}_{24} + A^{31}_{14} + a_{34} + a_{43}),\\
2s_2s_2' &= i(-A^{23}_{14} + A^{31}_{24} - A^{12}_{34})\\
2s_2s_3' &= i\ (A^{31}_{34} + A^{12}_{24} - a_{14} - a_{41}),\\
2s_2s_4' &= i\ (A^{12}_{14} - A^{23}_{34} + a_{42} - a_{24}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_3^2 &= - A^{23}_{23} - A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1 - a_{11} - a_{22} + a_{33} + a_{44},\\
2s_3s_4 &= A^{23}_{31} - A^{31}_{23} + a_{12} - a_{21}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_3s_1' &= i\ (A^{12}_{14} + A^{23}_{34} - a_{24} - a_{42}),\\
2s_3s_2' &= i\ (A^{31}_{34} + A^{12}_{24} + a_{14} + a_{41}),\\
2s_3s_3' &= i(-A^{23}_{14} - A^{31}_{24} + A^{12}_{34}),\\
2s_3s_4' &= i\ (A^{23}_{24} - A^{31}_{14} + a_{43} - a_{34}).
\end{aligned}
$$

$$2s_4^2 = A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1 + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}.$$

$$
\begin{aligned}
2s_4s_1' &= i(A^{31}_{34} - A^{12}_{24} + a_{14} - a_{41}),\\
2s_4s_2' &= i(A^{12}_{14} - A^{23}_{34} + a_{24} - a_{42}),\\
2s_4s_3' &= i(A^{23}_{24} - A^{31}_{14} + a_{34} - a_{43}),\\
2s_4s_4' &= i(A^{23}_{14} + A^{31}_{24} + A^{12}_{34}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_1'^2 &= - (A^{23}_{23} - A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1) + a_{11} - a_{22} - a_{33} + a_{44},\\
2s_1's_2' &= - (A^{23}_{31} + A^{31}_{23}) + a_{12} + a_{21},\\
2s_1's_3' &= - (A^{12}_{23} + A^{23}_{12}) + a_{31} + a_{13},\\
2s_1's_4' &= - (A^{31}_{12} - A^{12}_{31}) + a_{23} - a_{32}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_2'^2 &= - (- A^{23}_{23} + A^{31}_{31} - A^{12}_{12} + 1) - a_{11} + a_{22} - a_{33} + a_{44},\\
2s_2's_3' &= - (A^{31}_{12} + A^{12}_{31}) + a_{23} + a_{32},\\
2s_2's_4' &= - (A^{12}_{23} - A^{23}_{12}) + a_{31} - a_{13}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2s_3'^2 &= - (- A^{23}_{23} - A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1) - a_{11} - a_{22} + a_{33} + a_{44},\\
2s_3's_4' &= - (A^{23}_{31} - A^{31}_{23}) + a_{12} - a_{21}.
\end{aligned}
$$

$$2s_4'^2 = - (A^{23}_{23} + A^{31}_{31} + A^{12}_{12} + 1) + a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}.$$

Odtud snadno plyne 8 ekvivalentních možností pro s_1, s_2, s_3, s_4, s_1', s_2', s_3', s_4' docela podobně jako tomu bylo ve speciálním případě odst. 6.

Zcela podobně plynou hledané hodnoty parametrů $\varkappa$, λ, μ, ν, $\varkappa'$, λ', μ', ν' z tabulky těchto výsledků:

$$
\begin{aligned}
4\varkappa^2 &= \{(a_{11} + A^{23}_{23}) + (a_{22} + A^{31}_{31})\} + i\,\{(a_{12} + A^{23}_{31}) - (a_{21} + A^{31}_{23})\},\\
4\varkappa\lambda &= -(a_{31} + A^{12}_{23}) - i(a_{32} + A^{12}_{31}),\\
4\varkappa\mu &= -(a_{13} + A^{23}_{12}) + i(a_{23} + A^{31}_{12}),\\
4\varkappa\nu &= (a_{33} + A^{12}_{12}) + (a_{44} + 1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\varkappa\varkappa' &= (A^{23}_{14} + A^{31}_{24}) - i(A^{31}_{14} - A^{23}_{24}),\\
4\varkappa\lambda' &= (a_{42} - A^{12}_{14}) - i(a_{41} + A^{12}_{24}),\\
4\varkappa\mu' &= (a_{24} - A^{23}_{34}) + i(a_{14} + A^{31}_{34}),\\
4\varkappa\nu' &= A^{12}_{34} - i(a_{34} - a_{43}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\lambda^2 &= \{-(a_{11} + A^{23}_{23}) + (a_{22} + A^{31}_{31})\} - i\{(a_{12} + A^{23}_{31}) + (a_{21} + A^{31}_{23})\},\\
4\lambda\mu &= (a_{33} + A^{12}_{12}) - (a_{44} + 1),\\
4\lambda\nu &= (a_{13} + A^{23}_{12}) + i(a_{23} + A^{31}_{12}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\lambda\varkappa' &= -(a_{42} + A^{12}_{14}) + i(a_{41} - A^{12}_{24}),\\
4\lambda\lambda' &= -(A^{23}_{14} - A^{31}_{24}) - i(A^{31}_{14} + A^{23}_{24}),\\
4\lambda\mu' &= A^{12}_{34} - i(a_{34} + a_{43}),\\
4\lambda\nu' &= (a_{24} + A^{23}_{34}) - i(a_{14} - A^{31}_{34}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\mu^2 &= \{-(a_{11} + A^{23}_{23}) + (a_{22} + A^{31}_{31})\} + i\{(a_{12} + A^{23}_{31}) + (a_{21} + A^{31}_{23})\},\\
4\mu\nu &= (a_{31} + A^{12}_{23}) - i(a_{32} + A^{12}_{31}).\\
4\mu\varkappa' &= -(a_{24} + A^{23}_{34}) - i(a_{14} - A^{31}_{34}),\\
4\mu\lambda' &= A^{12}_{34} + i(a_{34} + a_{43}),\\
4\mu\mu' &= -(A^{23}_{14} - A^{31}_{24}) + i(A^{31}_{14} + A^{23}_{24}),\\
4\mu\nu' &= (a_{42} + A^{12}_{14}) + i(a_{41} - A^{12}_{24}).\\
4\nu^2 &= \{(a_{11} + A^{23}_{23}) + (a_{22} + A^{31}_{31})\} - i\{(a_{12} + A^{23}_{31}) - (a_{21} + A^{31}_{23})\}.\\
4\nu\varkappa' &= A^{12}_{34} + i(a_{34} - a_{43}),\\
4\nu\lambda' &= -(a_{24} - A^{23}_{34}) + i(a_{14} + A^{31}_{34}),\\
4\nu\mu' &= -(a_{42} - A^{12}_{14}) - i(a_{41} + A^{12}_{24}),\\
4\nu\nu' &= (A^{23}_{14} + A^{31}_{24}) + i(A^{31}_{14} - A^{23}_{24}).\\
4\varkappa'^2 &= -\{(a_{11} - A^{23}_{23}) + (a_{22} - A^{31}_{31})\} - i\{(a_{12} - A^{23}_{31}) - (a_{21} - A^{31}_{23})\},\\
4\varkappa'\lambda' &= (a_{31} - A^{12}_{23}) + i(a_{32} - A^{12}_{31}),\\
4\varkappa'\mu' &= (a_{13} - A^{23}_{12}) - i(a_{23} - A^{31}_{12}),\\
4\varkappa'\nu' &= -(a_{33} - A^{12}_{12}) - (a_{44} - 1).\\
4\lambda'^2 &= \{(a_{11} - A^{23}_{23}) - (a_{22} - A^{31}_{31})\} + i\{(a_{12} - A^{23}_{31}) + (a_{21} - A^{31}_{23})\},\\
4\lambda'\mu' &= -(a_{33} - A^{12}_{12}) + (a_{44} - 1),\\
4\lambda'\nu' &= -(a_{13} - A^{23}_{12}) - i(a_{23} - A^{31}_{12}).\\
4\mu'^2 &= \{(a_{11} - A^{23}_{23}) - (a_{22} - A^{31}_{31})\} - i\{(a_{12} - A^{23}_{31}) + (a_{21} - A^{31}_{28})\},\\
4\mu'\nu' &= -(a_{31} - A^{12}_{23}) + i(a_{32} - A^{12}_{31}).\\
4\nu'^2 &= -\{(a_{11} - A^{23}_{23}) + (a_{22} - A^{31}_{31})\} + i\{(a_{12} - A^{23}_{31}) - (a_{21} - A^{31}_{23})\}.
\end{aligned}
$$

Prvních 8 vztahů této tabulky je výsledek, který nalezl pan dr M. Brdička užívaje tohoto zobrazení matic $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$:

$$
\gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -i \\ \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & i & \cdot & \cdot \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & i \\ i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ \gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}.
$$

Od vypisování obdobné tabulky pro C_0^2, C_0C, C_0C_{23}, atd. upouštím.

Ústav pro theoretickou fysiku university Karlovy.

STŘEDOČESKÉ TISKÁRNY n. p., ZÁVOD 07 (PROMETHEUS), PRAHA VIII.