ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.

ROČNÍK XLVIII. ČÍSLO 20.

Základní rovnice teorie elektronu.

Podává

V. Trkal.

(Předloženo dne 20. května 1938.)

Vrcholným výtvorem moderní teoretické fysiky jest bez nadsázky Diracova teorie elektronu. Byly sice učiněny pokusy zdokonaliti tuto teorii nebo nahraditi ji jinou, dokonalejší, avšak dosud nelze mluviti o tom, že by se to bylo podařilo, takže dodnes nemáme nic lepšího.

V této práci kladu si za úkol sestaviti rovnice, které by byly invariantní vůči Lorentzově grupě tak, aby se vlnové funkce v rovnicích se vyskytující transformovaly jako složky tensorů (podobně jako u rovnic Maxwellových) a nikoli jako spinory v rovnicích Diracových. Mimo to rovnice, které jsem se snažil sestaviti, měly míti současně s charakterem vlnovým též *dynamický* charakter korpuskulární, odpovídající dualismu vlna — korpuskule. V rovnicích Diracových jeví se tento korpuskulární charakter pouze *staticky* přítomností členu $m_0 c$, kde m_0 jest „klidová" vlastní hmota elektronu a c rychlost světla ve vakuu. Rozumí se samo sebou, že navrhované rovnice — nemají-li býti hned zavrženy — musí míti za důsledek platnost rovnice kontinuity a že musí z nich plynouti t. zv. čtyřproud, docela podobně jako u rovnic Diracových, jen ve tvaru poněkud složitějším. Tomu tak také vskutku jest.

V nejjednodušším případě, kdy není pole, vyhovuje Hamiltonova funkce $H = -icp_4$ vztahu

$$m_0^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 0$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou (reálné) složky impulsu uvažovaného elektronu.

Pro jiné hodnoty složek p_1, p_2, p_3, p_4, které tvoří čtyřvektor, t. j. pro P_1, P_2, P_3, P_4 musí býti také splněn vztah

$$m_0^2 c^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = 0.$$

Odečtením obou těchto vztahů najdeme relaci

$$(p_1^2 - P_1^2) + (p_2^2 - P_2^2) + (p_3^2 - P_3^2) + (p_4^2 - P_4^2) = 0,$$

kterou přepíšeme ve tvar

$$(p_1 - P_1)(p_1 + P_1) + (p_2 - P_2)(p_2 + P_2) + (p_3 - P_3)(p_3 + P_3) + \\ + (p_4 - P_4)(p_4 + P_4) = 0;$$

ten se dá uvésti v souvislost s determinantem osmiřádkové a osmisloupcové matice tohoto tvaru:

$$\begin{array}{cccccccc}
0, & +(p_3-P_3), & -(p_2-P_2), & 0, & -(p_4-P_4), & 0, & 0, & -(p_1+P_1) \\
-(p_3-P_3), & 0, & +(p_1-P_1), & 0, & 0, & -(p_4-P_4), & 0, & -(p_2+P_2) \\
+(p_2-P_2), & -(p_1-P_1), & 0, & 0, & 0, & 0, & -(p_4-P_4), & -(p_3+P_3) \\
0, & 0, & 0, & 0, & -(p_1-P_1), & -(p_2-P_2), & -(p_3-P_3), & +(p_4+P_4) \\
+(p_4+P_4), & 0, & 0, & +(p_1-P_1), & 0, & -(p_3+P_3), & +(p_2+P_2), & 0 \\
0, & +(p_4+P_4), & 0, & +(p_2-P_2), & +(p_3+P_3), & 0, & -(p_1+P_1), & 0 \\
0, & 0, & +(p_4+P_4), & +(p_3-P_3), & -(p_2+P_2), & +(p_1+P_1), & 0, & 0 \\
+(p_1+P_1), & +(p_2+P_2), & +(p_3+P_3), & -(p_4-P_4), & 0, & 0, & 0, & 0
\end{array}$$

Determinant této matice má hodnotu

$$\{(p_1 - P_1)(p_1 + P_1) + (p_2 - P_2)(p_2 + P_2) + (p_3 - P_3)(p_3 + P_3) + \\ + (p_4 - P_4)(p_4 + P_4)\}^4.$$

Utvoříme-li součin této osmiřádkové a osmisloupcové matice s jednosloupcovou a osmiřádkovou maticí, jejíž elementy jsou po řadě tyto:

$$(-iu_x),\ (-iu_y),\ (-iu_z),\ v_s,\ v_x,\ v_y,\ v_z,\ (-iu_s),$$

a to tak, že tato jednosloupcová matice jest postfaktor, obdržíme novou jednosloupcovou a osmiřádkovou matici; její elementy se shodují s levými stranami následujících rovnic, které nevyjadřují nic jiného než to, že právě zmíněný součin obou matic rovná se nule.

Takto získané rovnice

$$\begin{array}{llllr}
(p_3 - P_3)(-iu_y) & -(p_2 - P_2)(-iu_z) & -(p_4 - P_4)\,v_x & -(p_1 + P_1)(-iu_s) & =0 \\
-(p_3 - P_3)(-iu_x) & +(p_1 - P_1)(-iu_z) & -(p_4 - P_4)\,v_y & -(p_2 + P_2)(-iu_s) & =0 \\
(p_2 - P_2)(-iu_x) & -(p_1 - P_1)(-iu_y) & -(p_4 - P_4)\,v_z & -(p_3 + P_3)(-iu_s) & =0 \\
-(p_1 - P_1)\,v_x & -(p_2 - P_2)\,v_y & -(p_3 - P_3)\,v_z & +(p_4 + P_4)(-iu_s) & =0 \\
(p_4 + P_4)(-iu_x) & +(p_1 - P_1)\,v_s & -(p_3 + P_3)\,v_y & +(p_2 + P_2)\,v_z & =0 \\
(p_4 + P_4)(-iu_y) & +(p_2 - P_2)\,v_s & +(p_3 + P_3)\,v_x & -(p_1 + P_1)\,v_z & =0 \\
(p_4 + P_4)(-iu_z) & +(p_3 - P_3)\,v_s & -(p_2 + P_2)\,v_x & +(p_1 + P_1)\,v_y & =0 \\
(p_1 + P_1)(-iu_x) & +(p_2 + P_2)(-iu_y) & +(p_3 + P_3)(-iu_z) & -(p_4 - P_4)\,v_s & =0
\end{array}$$

jsou relativistické rovnice elektronu v případě, že písmena p_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ značí operátory níže definované, kdežto písmena P_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ znamenají čísla na proměnných x_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, k nimž se operátory vztahují, nezávislá.

Při tom v případě pole definovaného pomocí čtyřvektoru, jehož složky jsou komponenty $A_x = A_1$, $A_y = A_2$, $A_z = A_3$ vektorového potenciálu $\mathfrak{A}$ a skalární potenciál $A_s = -iA_4$, jest

$$p_j = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{e}{c}A_j : j = 1, 2, 3, 4;$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = is = ict;$$

$0 = m_0^2 c^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2$; $P_4 = iP_0$; P_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ nezávisejí na x_k $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Vektorově (symbolicky) lze psáti tyto rovnice elektronu takto:

$$\begin{aligned}
&\{p_4 - P_4\}\,\mathfrak{v} + [\mathfrak{p} - \mathfrak{P},\ -i\mathfrak{v}] + \{\mathfrak{p} + \mathfrak{P}\}\{-iu_s\} = 0 \\
&\{p_4 + P_4\}\{-iu_s\} - (\mathfrak{p} - \mathfrak{P},\ \mathfrak{v}) = 0 \\
&\{p_4 + P_4\}\{-i\mathfrak{u}\} + [\mathfrak{p} + \mathfrak{P},\ \mathfrak{v}] + \{\mathfrak{p} - \mathfrak{P}\}\,v_s = 0 \\
&\{p_4 - P_4\}\,v_s - (\mathfrak{p} + \mathfrak{P},\ -i\mathfrak{u}) = 0.
\end{aligned}$$

Důkaz invariance těchto rovnic vůči Lorentzově grupě, odvození rovnice kontinuity a složek čtyřproudu jakož i souvislost s rovnicemi Diracovými a fysikální interpretaci těchto rovnic podám obšírněji na jiném místě.
