REMARQUES SUR LE TRAVAIL DE J. NEUKIRCHEN CONCERNANT LA DIFFUSION DES RAYONS γ DURS

PAR

V. TRKAL

EXTRAIT DE
« LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM »
Novembre 1933, Série VII, T. IV, N° 11, pp. 665-676.

REMARQUES SUR LE TRAVAIL DE J. NEUKIRCHEN CONCERNANT LA DIFFUSION DES RAYONS γ DURS

Par V. TRKAL.

Sommaire. — Le lecteur y trouvera la théorie aussi rigoureuse que possible de l'arrangement expérimental de M. Neukirchen [1] qui permet de déterminer le coefficient de diffusion σ_a, correspondant à l'effet d'absorption des rayons γ durs.

Avant d'exposer certains procédés de résolution applicables à divers problèmes de la méthode de M. Neukirchen, il n'est pas inutile de signaler que la formule de M. Neukirchen $J_d = J_o(1 + \sigma d)\,e^{-\mu d}$ est inacceptable. (J_o = intensité des rayons γ durs en un point quelconque M, situé à la distance R de O [= centre de la sphère de faible diamètre qui renferme la substance radioactive], J_d = intensité après la traversée d'un corps diffusant homogène qui remplit uniformément tout l'espace compris entre les deux sphères concentriques de rayons r et $R = r + d$, ayant pour centre le point O; μ = coefficient global d'absorption, σ = coefficient de diffusion des rayons γ durs.) — Cf. figure 1.

Pour ces raisons, il faut tenir compte des lois élémentaires du rayonnement; il en résulte que la valeur J_d est donnée par la relation suivante

$$J_d = 2\,\frac{J_0}{(\varkappa^2-1)^2}\int_1^{\varkappa}\left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3}-\xi\right)e^{-\xi\delta}\,d\xi;\quad \varkappa^2 - 1 = 2r/d,\quad \varkappa > 1,\quad \delta = \sigma_a.d.$$

On obtient facilement pour J_d/J_o le développement

$$\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{I_n}{I_0}\,\delta^n,$$

I_n étant l'intégrale $I_n = \int_1^{\varkappa}(\varkappa^4\xi^{n-3} - \xi^{n+1})\,d\xi$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ D'autre part, on a

$$\frac{J_d}{J_0} = 2\,\frac{e^{-\delta}}{(\varkappa^2-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,V_n\delta^n$$

en posant

$$V_n = \int_0^{\varkappa-1} t^n\left[\frac{\varkappa^4}{(1+t)^3} - (1+t)\right]dt.$$

Il résulte donc que le coefficient σ_a peut être représenté par la série suivante

$$\sigma_a.d = \frac{I_0}{I_1}\eta + \frac{1}{2!}I_2\frac{I_0^2}{I_1^3}\eta^2 + \frac{1}{3!}(3I_2^2 - I_1I_3)\frac{I_0^3}{I_1^5}\eta^3 + \frac{1}{4!}(15I_2^3 - 10I_1I_2I_3 + I_1^2I_4)\frac{I_0^4}{I_1^7}\eta^4 + \ldots$$

avec $J_d/J_o = 1 - \eta$. On peut simplifier aisément les formules précédentes dans le voisinage de la valeur $\varkappa = 1$. (Cf. § 6).

M. Neukirchen a proposé, dans le cas du rayonnement γ dur d'une source renfermant RaC qui donne naissance pratiquement à deux composantes du rayonnement, la relation

$$J_d = J_0(1 + \sigma d)\left(\frac{4}{7}e^{-\mu' d} + \frac{3}{7}e^{-\mu'' d}\right),$$

μ' et $\mu'' > \mu'$ désignant respectivement les coefficients de deux composantes du rayonnement γ dur RaC mesurées en 1917 par M. Kohlrausch [2]. Cette relation de M. Neukirchen ne s'accorde pas avec des mesures précises.

La solution du problème considéré nécessite la connaissance de trois mesures de l'intensité J_d donnée par la formule

$$J_d = 2\,\frac{J_0}{(\varkappa^2-1)^2}\int_1^{\varkappa}\left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3}-\xi\right)\left\{(1-\omega)\,e^{-\xi\sigma'_a d} + \omega\,e^{-\xi\sigma''_a d}\right\}d\xi,\quad 0 < \omega < 1,$$

pour trois valeurs distinctes de l'épaisseur d_i du diffuseur. Le système des équations

$$I_0\eta_i = I_1Ad_i - \frac{1}{2!}I_2Bd_i^2 + \frac{1}{3!}I_3Cd_i^3 - \frac{1}{4!}I_4\left(B^2 + \frac{(C-AB)^2}{B-A^2}\right)d_i^4 + \ldots,\ (i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}),$$

(1) J. Neukirchen, Ueber Streuung der γ-Strahlen des RaC, *Z. Physik*, **6** (1921), 101-117.
(2) K. W. F. Kohlrausch, *Wien. Ber.*, *Mitteil. Ra-Inst.* (1916), Nr. **97, 98, 99, 102**.

(avec $A = (1-\tilde{\omega})\,\sigma'_a + \tilde{\omega}\sigma''_a$, $B = (1-\tilde{\omega})\,\sigma'^2_a + \tilde{\omega}\sigma''^2_a$, $C = (1-\tilde{\omega})\,\sigma'^3_a + \tilde{\omega}\sigma''^3_a$, $J_d/J_0 = 1 - \eta_i$) définit donc les valeurs A, B, C en fonctions des η_i, d_i, I_n, d'où l'on déduit les formules

$$\sigma'_a = \frac{1}{2\,(B-A^2)} \left\{ C - AB - \sqrt{(C-AB)^2 - 4\,(AC-B^2)\,(B-A^2)} \right\},$$

$$\sigma''_a = \frac{1}{2\,(B-A^2)} \left\{ C - AB + \sqrt{(C-AB)^2 - 4\,(AC-B^2)\,(B-A^2)} \right\},$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{C - AB - 2A\,(B-A^2)}{\sqrt{(C-AB)^2 - 4\,(AC-B^2)\,(B-A^2)}} \right\}.$$

1. **Position du problème.** — Le problème dont nous allons nous occuper peut être formulé ainsi :

Soit J_0 l'intensité des rayons γ durs en un point quelconque M, situé à la distance R de O (= centre de la sphère de faible diamètre qui renferme la substance radioactive) et soit *ceteris paribus* J_d l'intensité en M après la traversée d'un corps diffusant homogène qui remplit uniformément tout l'espace compris entre les deux sphères S_1. S_2 de rayons r et $R = r + d$, ayant pour centre le point O. — Quelle est la relation qui lie J_d à l'intensité J_0?

Tel est l'arrangement expérimental de M. Neukirchen [1] qui permet de *déterminer* à partir de mesures sur l'affaiblissement des rayons γ durs le *coefficient de diffusion* σ_a, correspondant à l'effet d'*absorption*.

Mais, d'après la théorie de M. Neukirchen,

$$J_d = J_0\,(1 + \sigma d)\,\mathrm{e}^{-\mu d},$$

μ désignant le coefficient global d'absorption et σ le coefficient de diffusion des rayons γ durs. Cette formule est inacceptable ; on sait bien que l'affaiblissement total $\mu = \tau + \sigma$ du rayonnement γ dur est dû à peu près totalement à l'effet de diffusion σ.

D'autre part, la formule considérée est une approximation imparfaite de la relation $J_d = J_0\,\mathrm{e}^{-(\mu-\sigma)d}$ lorsque σ diminue. Le désaccord de la formule de M. Neukirchen avec l'expérience a une cause beaucoup plus profonde ; il réside dans une faute de raisonnement : les lois élémentaires du rayonnement exigent que l'intensité J_d soit liée à l'intensité J_0 par la relation suivante

$$J_d = 2\,\frac{J_0}{(\varkappa^2-1)^2} \int_1^{\varkappa} \left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \xi\right) \mathrm{e}^{-\xi\delta}\,d\xi$$

où

$$\varkappa^2 - 1 = \frac{2r}{d}, \qquad \delta = \sigma_a . d.$$

De plus, M. Neukirchen a proposé, dans le cas du rayonnement γ dur d'une source renfermant Ra C, la relation

$$J_d = J_0\,(1 + \sigma a) \left(\frac{4}{7}\,\mathrm{e}^{-\mu' d} + \frac{3}{7}\,\mathrm{e}^{-\mu'' d} \right),$$

μ' et $\mu'' > \mu'$ désignant respectivement les coefficients de deux composantes du rayonnement γ dur (Ra C) mesurée en 1917 par M. Kohlrausch [2]. Cette relation de M. Neukirchen ne s'accorde pas avec des mesures précises [3].

(1) J. Neukirchen, *Z. Physik*, **6** (1921), 101-117.

(2) K. W. F. Kohlrausch, *Wiener Ber.*, *Mitteil. Ra-Inst.* (1917), Nr. **97**, **98**, **99**, **102**.

(3) En tout cas, il est très remarquable que M. V. Posejpal a utilisé encore en 1930 les données expérimentales de M. Neukirchen ; cf. V. Posejpal « Détermination directe du volume de l'électron », *C. R.*, **191** (1930), p. 1000. — (La théorie de M. Posejpal ne s'accorde pas alors avec l'expérience, mais ce désaccord a une cause beaucoup plus profonde qu'une utilisation des données de M. Neukirchen ; il réside dans

Dans ces conditions le problème de la composition du rayonnement consiste surtout dans le calcul de la raison $\bar{\omega}$ à partir des mesures à l'aide de la formule

$$J_d = 2\frac{J_0}{(\varkappa^2-1)^2}\int_1^{\varkappa}\left(\frac{\varkappa^4}{\xi}-\xi\right)\left\{(1-\bar{\omega})\,\mathrm{e}^{-\xi\sigma' a d}+\bar{\omega}\,\mathrm{e}^{-\xi\sigma'' a d}\right\}\mathrm{d}\xi, \qquad 0<\bar{\omega}<1.$$

I. — Rayonnement homogène (Th C'').

2. Théorie de la méthode de M. Neukirchen. — D'après la loi de Lambert, on peut écrire [1]

$$\mathrm{d}^4\Phi = \check{\eta}\,\mathrm{d}\omega\,\frac{\mathrm{d}\Omega\cos\vartheta\cos i}{x^2};$$

$\mathrm{d}^4\Phi$ est le flux du rayonnement γ qu'envoie une « source » $\mathrm{d}\omega$ à une surface $\mathrm{d}\Omega$, située

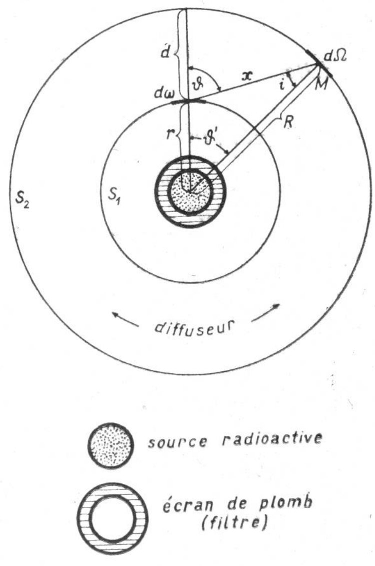

Fig. 1.

à une distance x, ϑ et i désignant les angles que fait la droite qui les joint avec les normales d et R aux surfaces $\mathrm{d}\omega$ et $\mathrm{d}\Omega$ (fig. 1). « L'éclat » $\check{\eta}$ est mesuré par le flux du rayonnement γ envoyé par l'unité de surface d'une certaine « source » (S_1) sur une surface unité située à l'unité de distance, l'une et l'autre de ces surfaces étant normales à la droite qui les joint.

Comme

$$\mathrm{d}\Omega = R^2\sin\vartheta'\,\mathrm{d}\vartheta'\,\mathrm{d}\varphi, \qquad i=\vartheta-\vartheta',$$

on a

$$\mathrm{d}^4\Phi = \check{\eta}\,\mathrm{d}\omega\,\frac{\mathrm{R}^2\sin\vartheta'\,\mathrm{d}\vartheta'\cos\vartheta\,(\vartheta-\vartheta')}{x^2}.$$

une faute de raisonnement : d'après cette théorie le coefficient massique de diffusion des rayons γ durs dans l'hydrogène serait indépendant de la fréquence du rayonnement γ incident. Ce résultat est inadmissible; au contraire, on sait depuis longtemps que les coefficients massiques de diffusion des rayons γ durs dans le cas des éléments légers diminuent quand la fréquence s'abaisse.)

[1] Cf. entre autres, P. Drude, *Précis d'optique*, t. 1 (1911), p. 113.

Le rapport de l'intensité J_d en un point quelconque M, situé à la distance R de O à 'intensité primaire J_0 en M, s'exprime par :

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{J_d^*}{J_0^*} = \frac{2}{(\varkappa^2-1)^2\delta^2}\int_\delta^{\varkappa\delta}\left(\frac{\varkappa^4\delta^4}{\xi^3}-\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{1}$$

où

$$J_d^* = \eta\int_{(S_1)}\mathrm{d}\omega\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\sin\vartheta'\cos(\vartheta-\vartheta')\,\mathrm{d}\vartheta'}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\sigma_a x},$$

$$J_0^* = \eta\int_{(S_1)}\mathrm{d}\omega\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\sin\vartheta'\cos(\vartheta-\vartheta')\,\mathrm{d}\vartheta'}{x^2}.$$

Si on prend comme variable x au lieu de ϑ', on doit considérer que

$$\cos\vartheta' = \frac{1}{2Rr}(R^2+r^2-x^2),\qquad \cos\vartheta = \frac{1}{2rx}(R^2-r^2-x^?),$$

$$\cos(\vartheta-\vartheta') = \frac{1}{2Rx}(R^2-r^2+x^2),\quad \sin\vartheta'\,\mathrm{d}\vartheta' = \frac{x}{Rr}\,\mathrm{d}x.$$

Le calcul donne

$$J_0^* = 2\pi^2\eta\int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}}\left\{\frac{(R^2-r^2)^2}{x^3}-x\right\}\mathrm{d}x = 4\pi^2 r^2\eta,$$

$$J_d^* = 2\pi^2\eta\int_{R|-r}^{\sqrt{R^2-r^2}}\left\{\frac{(R^2-r^2)^2}{x^3}-x\right\}\mathrm{e}^{-\sigma_a x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\pi^2\eta}{\sigma_a^{\,2}}\int_\delta^{\varkappa\delta}\left(\frac{\varkappa^4\delta^4}{\xi^3}-\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

où

$$r = \frac{\xi}{\sigma_a},\qquad d = R-r = \frac{\delta}{\sigma_a},\qquad \frac{2r}{d} = \varkappa^2-1,$$

$$\xi = \sigma_a . x,\qquad \delta = \sigma_a . d,\qquad \sqrt{R^2-r^2} = \frac{\varkappa\delta}{\sigma_a}.$$

L'intégration par parties donne la formule

$$J_d^* = \frac{\pi^2\eta}{\sigma_a^{\,2}}\left\{\left[2(1+\xi)+\varkappa^4\delta^4\left(\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}\right)\mathrm{e}^{-\xi}\right]_\delta^{\varkappa\delta}+\varkappa^4\delta^4\int_\delta^{\varkappa\delta}\frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\right\} \tag{2}$$

d'où nous pouvons tirer

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{1}{(\varkappa^2-1)^2\delta^2}\Big\{(2+2\varkappa\delta-\varkappa^2\delta^2+\varkappa^3\delta^3)\,\mathrm{e}^{-\varkappa\delta}-(2+\delta-\varkappa^4\delta^2+\varkappa^4\delta^3)\,\mathrm{e}^{-\delta}+$$
$$+\varkappa^4\delta^4\left(Ei(-\varkappa\delta)-Ei(-\delta)\right)\Big\} \tag{3}$$

où

$$\varkappa = \left|\sqrt{1+\frac{2r}{d}}\right|,\qquad \delta = \sigma_a . d, \tag{4}$$

$$Ei(-\delta) = li(\mathrm{e}^{-\delta}) = -\int_\delta^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = C+\frac{1}{4}\log_e\delta^4-\delta+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{2!}-\frac{1}{3}\frac{\delta^3}{3!}+\frac{1}{4}\frac{\delta^4}{4!}-\ldots,$$

$C = 0{,}5772156649015\ldots$ désignant la constante d'Euler. On déduit aisément des relations précédentes que

$$\lim_{\varkappa\to 1} J_d/J_0 = \mathrm{e}^{-\delta}.$$

3. Développement de J_d/J_0. — Proposons-nous de développer (1)

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{2}{(\varkappa^2-1)^2\delta^2}\int_{\varkappa}^{\varkappa\delta}\left(\frac{\varkappa^4\delta^4}{\xi^3}-\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

suivant les puissances de δ. En remplaçant ξ par $\xi\delta$, on peut écrire [1]

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{2}{(\varkappa^2-1)^2}\int_{1}^{\varkappa}\left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3}-\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi\delta}\,\mathrm{d}\xi, \tag{5}$$

et, en remplaçant $\mathrm{e}^{-\xi\delta}$ par la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\xi\delta)^n/n!$, on obtient pour J_d/J_0 le développement

$$\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{I_n}{I_0}\delta^n, \tag{6}$$

ce qu'on exprime par la relation symbolique :

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{1}{I_0}\mathrm{e}^{-I\delta}, \tag{7}$$

dans laquelle on a remplacé les I^n par les intégrales

$$I_n = \int_1^{\varkappa}(\varkappa^4\xi^{n-3}-\xi^{n+1})\,\mathrm{d}\xi, \qquad n = 0,\ 1.\ 2,\ \ldots \tag{8}$$

On trouve successivement

$$I_0 = \frac{1}{2}(\varkappa^2-1)^2,$$

$$I_1 = \frac{1}{3}(3\varkappa^4-4\varkappa^3-1) = \frac{1}{3}(\varkappa-1)^2(3\varkappa^2+2\varkappa+1),$$

$$I_2 = \varkappa^4\log_e\varkappa - \frac{1}{4}(\varkappa^4-1),$$

$$I_n = \frac{1}{n^2-4}\left\{4\varkappa^{n+2}-(n+2)\varkappa^4+n-2\right\}$$

$$= \frac{(\varkappa-1)^2}{(n-2)(n+2)}\left[(n-2)(1+2\varkappa+3\varkappa^2)+4\sum_{k=3}^{n}(n+1-k)\varkappa^k\right],\ n \geqq 3.$$

La formule précédente devient

$$\frac{J_d}{J_0} = 1 - \frac{2}{3}\frac{3\varkappa^2+2\varkappa+1}{(\varkappa+1)^2}\delta + \left(\frac{\varkappa^4}{(\varkappa^2-1)^2}\log_e\varkappa - \frac{1}{4}\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^2-1}\right)\delta^2$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{2}{n^2-4}\cdot\frac{1}{(\varkappa+1)^2}\left[(n-2)(1+2\varkappa+3\varkappa^2)+4\sum_{k=3}^{n}(n+1-k)\varkappa^k\right]\delta^n\ \ldots \tag{9}$$

[1] En remplaçant ξ par $\frac{\varkappa}{\xi}$, on peut écrire :

$$\int_1^{\varkappa}\left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3}-\xi\right)\mathrm{e}^{-\xi\delta}\,\mathrm{d}\xi = \varkappa^2\int_1^{\varkappa}\left(\xi-\frac{1}{\xi^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{\xi}\delta}\,\mathrm{d}\xi.$$

4. **Développement de** $\mathbf{e}^{\delta} J_d/J_0$. — L'intégrale considérée J_d/J_0 peut s'écrire aussi sous la forme

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{2\mathbf{e}^{-\delta}}{(\varkappa^2 - 1)^2} \int_1^{\varkappa} \left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \xi\right) \mathbf{e}^{-(\xi-1)\delta} \, d\xi, \tag{10}$$

ce qui donne, en substituant le développement de $\mathbf{e}^{-(\xi-1)\delta}$,

$$\frac{J_d}{J_0} = \mathbf{e}^{-\delta} \cdot \frac{2}{(\varkappa^2 - 1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} V_n \delta^n, \tag{11}$$

en posant

$$V_n = \int_0^{\varkappa - 1} t^n \left[\frac{\varkappa^4}{(1+t)^3} - (1+t)\right] dt, \qquad t = \xi - 1. \tag{12}$$

En appliquant les formules de réduction pour les intégrales de différentielles binomes bien connues, on ramènera cette intégrale au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\varkappa - 1} \frac{t^n}{1+t} \, dt.$$

On a l'identité

$$\int t^n \left[\frac{\varkappa^4}{(1+t)^3} - (1+t)\right] dt - \binom{n}{2} \varkappa^4 \int \frac{t^n}{1+t} \, dt$$
$$= - t^{n+1} \left\{ \frac{\varkappa^4}{2(1+t)^2} [n - 2 + (n-1)t] + \frac{1}{(n+1)(n+2)} [n + 2 + (n+1)t] \right\}.$$

L'intégrale précédente se calcule aisément ; on a immédiatement la valeur de cette intégrale

$$\int_0^{\varkappa - 1} \frac{t^n}{1+t} \, dt = (-1)^n \left[\log_e (1+t) - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{t^r}{r}\right]_0^{\varkappa - 1}.$$

La formule précédente permet de calculer l'intégrale définie

$$V_n = -(\varkappa - 1)^{n+1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \varkappa^2 + \frac{1}{n+2}\right)(\varkappa - 1) + \frac{n-2}{2} \varkappa^2 + \frac{1}{n+1}\right]$$
$$+ (-1)^n \binom{n}{2} \varkappa^4 \left[\log_e \varkappa - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-} \frac{(\varkappa - 1)^r}{r}\right], \tag{12'}$$

ce qui donne ensuite successivement, en faisant $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$V_0 = \frac{1}{2} (\varkappa^2 - 1)^2, \qquad V_1 = \frac{1}{6} (\varkappa - 1)^3 (3\varkappa + 1),$$

$$V_2 = \varkappa^4 \log_e \varkappa - \frac{1}{12} (\varkappa - 1)(21\varkappa^3 - 11\varkappa^2 + \varkappa + 1), \quad V_3 = \frac{4}{5}\varkappa^5 - 3\varkappa^4 \log_e \varkappa + \frac{9}{4}\varkappa^4 - 4\varkappa^3 + \varkappa^2 - \frac{1}{20},$$

etc.

D'autre part, on peut écrire

$$W = (-1)^n \left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \xi\right)(\xi - 1)^n = \left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \xi\right) \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \xi^r$$
$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \varkappa^4 \xi^{r-3} - \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \xi^{r+1},$$

ce qui donne

$$W = \left[\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \binom{n}{1}\frac{\varkappa^4}{\xi^2} + \binom{n}{2}\frac{\varkappa^4}{\xi} - \binom{n}{3}\varkappa^4 + \sum_{r=0}^{n-4}(-1)^r\left\{\binom{n}{r+4}\varkappa^4 - \binom{n}{r}\right\}\xi^{r+1}\right]$$
$$+ (-1)^n\left[\binom{n}{3}\xi^{n-2} - \binom{n}{2}\xi^{n-1} + \binom{n}{1}\xi^n - \xi^{n+1}\right].$$

L'intégrale considérée $V_n = (-1)^n \int_1^\varkappa W d\xi$ devient par conséquent :

$$V_n = (-1)^n\left[-\frac{\varkappa^4}{2\xi^2} + \binom{n}{1}\frac{\varkappa^4}{\xi} + \binom{n}{2}\varkappa^4 \log_e \xi - \binom{n}{3}\varkappa^4\xi + \sum_{r=0}^{n-4}\frac{(-1)^r}{r+2}\left\{\binom{n}{r+4}\varkappa^4 - \binom{n}{r}\right\}\xi^{r+2}\right]_1^\varkappa$$
$$+\left[\frac{1}{n-1}\binom{n}{3}\xi^{n-1} - \frac{1}{n}\binom{n}{2}\xi^n + \frac{1}{n+1}\binom{n}{1}\xi^{n+1} - \frac{1}{n+2}\xi^{n+2}\right]_1^\varkappa,$$

c'est-à-dire

$$V_n = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{n-r+2}\binom{n}{r} + (-1)^{n-1}\varkappa^2 + (-1)^n\cdot\frac{4}{3}n\varkappa^3 +$$
$$+ (-1)^n\left[\binom{n}{2}\log_e\varkappa + \frac{1}{2} - \binom{n}{1} - \frac{1}{4}\binom{n}{2} + \sum_{r=1}^{n-2}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{n}{r+2}\right]\varkappa^4 +$$
$$+ \sum_{r=1}^{n-2}(-1)^{n-r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+4}\right)\binom{n}{r+2}\varkappa^{r+4}. \qquad (12'')$$

Il est clair que V_n est divisible par le facteur $(k-1)^2$.

En égalant les coefficients de mêmes puissances dans les deux expressions (12'), (12'') pour V_n, on a, entre autres, l'identité

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{n-r+2}\binom{n}{r} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

5. **Calcul de** δ. — Pour résoudre l'équation symbolique (7)

$$\frac{J_d}{J_0} = 1 - \eta = \frac{1}{I_0}\mathbf{e}^{-I\delta},$$

dans laquelle on a remplacé les I^n par les intégrales (8)

$$I_n = \int_1^\varkappa (\varkappa^4\xi^{n-3} - \xi^{n+1})\, d\xi, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

par rapport à δ, on l'écrit

$$\frac{I_0}{I_1^2} - \varepsilon = \frac{1}{I_1^2}\mathbf{e}^{-I_1\gamma I} \qquad (13)$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{I_0}{I_1^2}\eta, \qquad \gamma = \frac{\delta}{I_1}. \qquad (14)$$

Si l'on considère dans l'équation proposée ε comme la variable indépendante et γ comme une fonction de ε, cette équation admet, d'après un théorème général sur les fonctions implicites d'une variable, une racine et une seule qui tend vers zéro avec ε, et cette racine est développable en série ordonnée suivant les puissances de ε :

$$\gamma = \frac{c_1}{1!}\varepsilon + \frac{c_2}{2!}\varepsilon^2 + \frac{c_3}{3!}\varepsilon^3 + \ldots + \frac{c_n}{n!}\varepsilon^n + \ldots \tag{15}$$

En différentiant par rapport à la variable ε les deux membres de l'équation considérée, on parvient à une suite de relations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma' \, \mathrm{e}^{-I_1\gamma I}, \\ 0 &= (\gamma'' - I_2\gamma'^2)\, \mathrm{e}^{-I_1\gamma I}, \\ 0 &= (\gamma''' - 3I_2\gamma'\gamma'' + I_1I_3\gamma'^3)\, \mathrm{e}^{-I_1\gamma I}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Remplaçons, dans les formules précédentes, ε par zéro ; il vient

$$\begin{aligned} &c_1 = 1, \\ &c_2 - I_2c_1^2 = 0, \\ &c_3 - 3I_2c_1c_2 + I_1I_3c_1^3 = 0, \\ &c_4 - I_2(3c_2^2 + 4c_1c_3) + 6I_1I_3c_1^2c_2 - I_1^4I_4c_1^4 = 0, \\ &c_5 - I_2(10c_2c_3 + 5c_1c_4) - I_1I_3(15c_1c_2^2 + 10c_1^2c_3) + 10I_1^2I_4c_1^3c_2 - I_1^3I_5c_1^5 = 0, \\ &c_6 - I_2(10c_3^2 + 15c_2c_4 + 6c_1c_5) + I_1I_3(15c_2^3 + 60c_1c_2c_3 + 15c_1^2c_4) - I_1^2I_4(45c_1^2c_2^2 + 20c_1^3c_3) \\ &\qquad + 15I_1^3I_5c_1^4c_2 - I_1^4I_6c_1^6 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$ se déterminent sans peine de proche en proche ; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} &c_1 = 1, \quad c_2 = I_2, \quad c_3 = 1.3.I_2^2 - I_1I_3, \quad c_4 = 1.3.5.I_2^3 - 2.5.I_1I_2I_3 + I_1^2I_4, \\ &c_5 = 1.3.5.7.I_2^4 - 1.3.5.7.I_1I_2^2I_3 - 1.3.5.I_1^2I_2I_4 + 2.5.I_1^2I_3^2 - I_1^3I_5, \\ &c_6 = 1.3.5.7.9.I_2^5 - 3.7.I_1^3I_2I_5 - 5.7.I_1^3I_3I_4 + 2.3.5.7.I_1^2I_2^2I_4 - 2^2.5.7.9.I_1I_2^3I_3 \\ &\qquad + 2^3.5.7.I_1^2I_2I_3^2 + I_1^4I_6, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il résulte donc que la racine δ considérée comme fonction de η et de $\varkappa$, peut être représentée par la série suivante

$$\frac{\delta}{I_1} = \mathrm{e}^{cI_0\eta/I_1^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\left(\frac{I_0}{I_1^2}\eta\right)^n \tag{16}$$

avec

$$\eta = 1 - \frac{J_d}{J_0}, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = I_2, \quad c_3 = 1.3.I_2^2 - I_1I_3,$$

$$c_4 = 1.3.5.I_2^3 - 2.5.I_1I_2I_3 + I_1^2I_4, \ \ldots, \quad I_n = \int_1^{\varkappa} (\varkappa^4\xi^{n-3} - \xi^{n+1})\, d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lorsque $\varkappa$ tend vers 1, la fonction δ tend vers $-\log_e(1-\eta) = \log_e \upsilon_0/J_d$, car on a alors $\lim\limits_{\varkappa\to 1} I_n/I_1 = 1$.

En posant $\delta = I_1\gamma$, $\eta = I_1^2\varepsilon/I_0$, on obtient :

$$\varepsilon = \eta\frac{I_0}{I_1^2} = \int_1^{\varkappa}\left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \xi\right)\frac{1 - \mathrm{e}^{-\xi I_1\gamma}}{I_1^2}\, d\xi, \tag{17}$$

ce qui donne, en substituant le développement de $\mathrm{e}^{-\xi I_1\gamma}$

$$\varepsilon = \gamma - \frac{1}{2!}I_2\gamma^2 + \frac{1}{3!}I_3I_1\gamma^3 - \frac{1}{4!}I_4I_1^2\gamma^4 + \frac{1}{5!}I_5I_1^3\gamma^5 - \ldots \tag{18}$$

ou symboliquement

$$\varepsilon = \frac{I_0 - \mathbf{e}^{-I_1\gamma I}}{I_1^2}, \tag{19}$$

il suffit de remplacer ici I^n par I_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

On déduit immédiatement de cette série pour ε, suivant la méthode de l'inversion [1], le développement de $\gamma = \delta/I_1$; on retrouve donc bien le résultat précédent (16) :

$$\sigma_a . d = \delta = \frac{I_0}{I_1}\eta + \frac{1}{2!} I_2 \frac{I_0^2}{I_1^3}\eta^2 + \frac{1}{3!}(3I_2^2 - I_1 I_3)\frac{I_0^3}{I_1^5}\eta^3 + \frac{1}{4!}(15 I_2^3 - 10 I_1 I_2 I_3 + I_1^2 I_4)\frac{I_0^4}{I_1^7}\eta^4$$
$$+ \frac{1}{5!}(105 I_2^4 - 105 I_1 I_2^2 I_3 + 15 I_1^2 I_2 I_4 + 10 I_1^2 I_3^2 - I_1^3 I_5)\frac{I_0^5}{I_1^9}\eta^5 + \ldots \tag{20}$$

6. Formules approximatives pour J_d/J_0 et σ_a [2]. — Nous allons maintenant simplifier les formules précédentes dans le voisinage de la valeur $\varkappa = 1$. Posons

$$\varkappa = \frac{1+z}{1-z} \geq 1, \qquad 0 \leq z < 1;$$

par cette substitution l'expression

$$\frac{I_n}{I_0} = 2\,\frac{4\varkappa^{n+2} - (n+2)\varkappa^4 + n - 2}{(n-2)(n+2)(\varkappa^2 - 1)^2}$$

se transforme en

$$\frac{I_n}{I_0} = \frac{1}{2(n^2-4)z^2}\left[(1+z)^{2+n}(1-z)^{2-n} - 2n(z+z^3) - (1+6z^2+z^4)\right]$$
$$= 1 + \frac{2}{3}nz + \frac{1}{3}n^2z^2 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{2^4 n(n^2-1)P_s(n)}{(s+2)!}z^s. \tag{21}$$

Il est facile de voir que la relation

$$P_{s-1}(n) = 2n P_{s-2}(n) + s(s-5)P_{s-3}(n), \qquad s \geq 6, \tag{22}$$

permet de calculer de proche en proche les valeurs des polynomes pour $s = 5, 6, 7, \ldots$ quand on connaît

$$P_3(n) = 1, \qquad P_4(n) = 2n.$$

On obtient sans peine le tableau suivant

$$P_5(n) = (2n)^2 + 6.1,$$
$$P_6(n) = (2n)^3 + [6.1 + 7.2].(2n),$$
$$P_7(n) = (2n)^4 + [6.1 + 7.2 + 8.3](2n)^2 + 6.1.8.3,$$
$$P_8(n) = (2n)^5 + [6.1 + 7.2 + 8.3 + 9.4].(2n)^3 + [6.1.(8.3 + 9.4) + 7.2.9.4].(2n),$$
$$P_9(n) = (2n)^6 + [6.1 + 7.2 + 8.3 + 9.4 + 10.5].(2n)^4$$
$$+[6.1.(8.3+9.4+10.5)+7.2.(9.4+10.5)+8.3.10.5].(2n)^2+6.1.8.3.10.5,$$
$$P_{10}(n) = (2n)^7 + [6.1 + 7.2 + 8.3 + 9.4 + 10.5 + 11.6].(2n)^5$$
$$+ [6.1.(8.3 + 9.4 + 10.5 + 11.6) + 7.2.(9.4 + 10.5 + 11.6)$$
$$+ 8.3.(10.5 + 11.6) + 9.4.11.6].(2n)^3 + [6.1.\{8.3.(10.5 + 11.6) + 9.4.11.6\}$$
$$+ 7.2.9.4.11.6].(2n), \text{ etc...}$$

[1] Cf. C. E. Van Orstrand, « Reversion of Power Series », *Phil. Mag.* (6), **19** (1910), 366.

[2] Nous ne pouvons entrer ici dans les très longs calculs qu'entraine la déduction de ces résultats et nous renvoyons le lecteur à l'article de V. Trkal, « Sur la diffusion des rayons γ (Ra*C*) » *Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême* (1932), p. 181-198.

La loi de la construction des polynomes

$$P_s(n) = \frac{(s+2)!}{2^5 n(n^2-1)(n^2-4)} \sum_{j=0}^{s+2} \binom{n+2}{s+2-j} \binom{n+j-3}{j} \tag{23}$$

est évidente.

On aura donc, en négligeant les termes de l'ordre de z^4, z^5, z^6,... la formule approximative suivante

$$\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + n\left(\frac{2}{3}z - \frac{2}{15}z^3\right) + \frac{1}{3}n^2 z^2 + \frac{2}{15}n^3 z^3\right) \delta^n \tag{24}$$

ou

$$\frac{J_d}{J_0} = \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^2\right)\delta + \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{5}z^3\right)\delta^2 - \frac{2}{15}z^3\delta^3 \right\} e^{-\delta}. \tag{25}$$

Ainsi, si l'on prend $\eta = 1 - \frac{J_d}{J_0}$, on obtiendra la formule approximative suivante

$$\delta = -\left(1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{27}z^3\right) \times$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{1}{9}z^2\left(1 + \frac{4}{15}z\right)\eta + \frac{1}{18}z^2\left(1 + \frac{4}{45}z\right)\eta^2 \right\} \log_e(1-\eta). \tag{26}$$

Voici la formule approximative qui détermine σ_a :

$$\sigma_a = \frac{1}{d}\left\{\left(1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{27}z^3\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9}z^2\left(1 - \frac{2}{5}z\right)\frac{k-1}{k} + \frac{1}{18}z^2\left(1 - \frac{26}{45}z\right)\frac{(k-1)^2}{k^2} \right\} \log_e k \tag{27}$$

quand on connaît

$$z = \frac{1}{2r}\left(\sqrt{d+2r} - \sqrt{d}\right)^2 \quad \text{et} \quad k = \frac{J_0}{J_d}. \tag{28}$$

II. — Rayonnement non homogène (Ra C).

7. **Deux composantes du rayonnement.** — La filtration d'un rayonnement γ d'une source renfermant Ra C dans un écran de plomb de 0,3 à 1,8 cm donne (d'après M. Kohlrausch) naissance pratiquement à deux composantes du rayonnement : l'une des deux composantes observées possède le coefficient de diffusion σ_a' et l'autre a un coefficient de diffusion un peu supérieur σ_a'', les deux relatifs à l'effet d'absorption. La répartition du rayonnement dépend surtout de la raison ϖ qui caractérise la répartition de l'intensité primaire $J_0 = [(1-\varpi) + \varpi)] J_0$. Le problème consiste dans le calcul de l'intensité

$$J_d = \frac{2J_0}{(\varkappa^2-1)^2} \int_1^{\varkappa} \left(\frac{\varkappa^4}{\xi^3} - \xi\right) \left\{ (1-\varpi) e^{-\xi\sigma_a' d} + \varpi e^{-\xi\sigma_a'' d} \right\} d\xi, \qquad 0 < \varpi < 1. \tag{29}$$

En substituant le développement $e^{-\xi\sigma_a' d}$ et $e^{-\xi\sigma_a'' d}$ on obtient

$$J_0\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} I_n \left\{ (1-\varpi)\sigma'^n_a + \varpi\sigma''^n_a \right\} d^n \tag{30}$$

en introduisant

$$\frac{J_d}{J_0} = 1 - \eta \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_1^{\varkappa} (\varkappa^4 \xi^{n-3} - \xi^{n+1})\, d\xi, \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Portons notre attention sur les expressions

$$\left.\begin{aligned} (1-\omega)\,\sigma_a' + \omega\sigma_a'' &= A, \\ (1-\omega)\,\sigma_a'^2 + \omega\sigma_a''^2 &= B, \\ (1-\omega)\,\sigma_a'^3 + \omega\sigma_a''^3 &= C. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

On tire de là

$$\left.\begin{aligned} B - A^2 &= \omega(1-\omega)\,(\sigma_a' - \sigma_a'')^2, \\ C - AB &= \omega(1-\omega)\,(\sigma_a' - \sigma_a'')^2\,(\sigma_a' + \sigma_a'') = (B - A^2)\,(\sigma_a' + \sigma_a''), \\ AC - B^2 &= \omega(1-\omega)\,(\sigma_a' - \sigma_a'')^2\,\sigma_a'\sigma_a'' \qquad = (B - A^2)\,\sigma_a'\sigma_a''. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Comme

$$\sigma_a' + \sigma_a'' = \frac{C - AB}{B - A^2}, \qquad \sigma_a'\sigma_a'' = \frac{AC - B^2}{B - A^2}, \tag{33}$$

on voit que

$$\left.\begin{aligned} \sigma_a' &= \frac{1}{2(B-A^2)}\left\{ C - AB - \sqrt{(C-AB)^2 - 4(AC-B^2)(B-A^2)} \right\}, \\ \sigma_a'' &= \frac{1}{2(B-A^2)}\left\{ C - AB + \sqrt{(C-AB)^2 - 4(AC-B^2)(B-A^2)} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

On voit également que

$$\omega = \frac{A - \sigma_a'}{\sigma_a'' - \sigma_a'}, \qquad 1 - \omega = \frac{\sigma_a'' - A}{\sigma_a'' - \sigma_a'},$$

ou

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{ 1 - \frac{C - AB - 2A(B-A^2)}{\sqrt{(C-AB)^2 - 4(AC-B^2)(B-A^2)}} \right\}, \tag{35}$$

$$1 - \omega = \frac{1}{2}\left\{ 1 + \frac{C - AB - 2A(B-A^2)}{\sqrt{(C-AB)^2 - 4(AC-B^2)(B-A^2)}} \right\}. \tag{36}$$

On vérifie facilement les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (C-AB)^2 - 4(AC-B^2)(B-A^2) &= 4A^3C - 3A^2B^2 - 6ABC + 4B^3 + C^2 \\ &= [(C-AB) - 2A(B-A^2)]^2 + 4(B-A^2)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D - B^2 = (1-\omega)\,\sigma_a'^4 + \omega\sigma_a''^4 - B^2 &= \omega(1-\omega)\,(\sigma_a' - \sigma_a'')^2\,(\sigma_a' + \sigma_a'')^2 \\ &= (B - A^2)\,(\sigma_a' + \sigma_a'')^2 = \frac{(C-AB)^2}{B-A^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E - BC = (1-\omega)\,\sigma_a'^5 + \omega\sigma_a''^5 - BC &= \omega(1-\omega)\,(\sigma_a' - \sigma_a'')^2\,(\sigma_a' + \sigma_a'')\,(\sigma_a'^2 + \sigma_a'\sigma_a'' + \sigma_a''^2) \\ &= (B-A^2)\,(\sigma_a' + \sigma_a'')\,[(\sigma_a' + \sigma_a'')^2 - \sigma_a'\sigma_a''] = (C - AB)\left[\frac{(C-AB)^2}{(B-A^2)^2} - \frac{AC-B^2}{B-A^2}\right], \end{aligned}$$

d'où

$$D = B^2 + \frac{(C-AB)^2}{B-A^2}, \qquad E = BC + \frac{C-AB}{(B-A^2)^2}\left\{ (C-AB)^2 - (AC-B^2)(B-A^2) \right\}, \tag{37}$$

D étant l'expression $(1-\omega)\,\sigma_a'^4 + \omega\sigma_a''^4$ et $E = (1-\omega)\,\sigma_a'^5 + \omega\sigma_a''^5$.

On peut également exprimer $(1-\omega)\,\sigma_d'^n + \omega\,\sigma_a''^n$ en fonction de trois grandeurs A, B, C d'une manière analogue.

Ceci posé, nous allons utiliser ces relations pour donner à l'équation pour $I_o\eta$ une forme plus convenable.

$$I_0\eta = I_1 A d - \frac{1}{2!} I_2 B d^2 + \frac{1}{3!} I_3 C d^3 - \frac{1}{4!} I_4 \left\{ B^2 + \frac{(C - AB)^2}{B - A^2} \right\} d^4 + \ldots \tag{38}$$

8. **Trois mesures de l'intensité diffusée (correspondant à l'effet d'absorption).** — On peut donc trouver les grandeurs A, B, C quand on connaît trois valeurs de η, c'est-à-dire η_{I}, η_{II}, η_{III}, qui correspondent à trois valeurs distinctes de d, savoir d_{I}, d_{II}, d_{III}.

Si on ne conserve que les premiers 3 termes de l'équation (38) pour $I\eta$, on a

$$\left.\begin{aligned}
I_0\eta_{\text{I}} &= I_1 d_{\text{I}} A^* - \frac{1}{2!} I_2 d_{\text{I}}^2 B^* + \frac{1}{3!} I_3 d_{\text{I}}^3 C^*, \\
I_0\eta_{\text{II}} &= I_1 d_{\text{II}} A^* - \frac{1}{2!} I_2 d_{\text{II}}^2 B^* + \frac{1}{3!} I_3 d_{\text{II}}^3 C^*, \\
I_0\eta_{\text{III}} &= I_1 d_{\text{III}} A^* - \frac{1}{2!} I_2 d_{\text{III}}^2 B^* + \frac{1}{3!} I_3 d_{\text{III}}^3 C^*,
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Un calcul facile donne

$$\left.\begin{aligned}
A^* &= -\frac{I_0}{I_1}\left\{ \frac{\eta_{\text{I}}}{d_{\text{I}}} \frac{\alpha_3}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} + \frac{\eta_{\text{II}}}{d_{\text{II}}} \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_3)(1-\alpha_1)} + \frac{\eta_{\text{III}}}{d_{\text{III}}} \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \right\}, \\
B^* &= -\frac{2!\,I_0}{I_2}\left\{ \frac{\eta_{\text{I}}}{d_{\text{I}}^2} \frac{\alpha_2\alpha_3+1}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} + \frac{\eta_{\text{II}}}{d_{\text{II}}^2} \frac{\alpha_3\alpha_1+1}{(1-\alpha_3)(1-\alpha_1)} + \frac{\eta_{\text{III}}}{d_{\text{III}}^2} \frac{\alpha_1\alpha_2+1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \right\}, \\
C^* &= -\frac{3!\,I_0}{I_3}\left\{ \frac{\eta_{\text{I}}}{d_{\text{I}}^3} \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)} + \frac{\eta_{\text{II}}}{d_{\text{II}}^3} \frac{\alpha_3}{(1-\alpha_3)(1-\alpha_1)} + \frac{\eta_{\text{III}}}{d_{\text{III}}^3} \frac{\alpha_1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} \right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

où

$$\alpha_1 = d_{\text{III}}/d_{\text{II}}, \qquad \alpha_2 = d_{\text{I}}/d_{\text{III}}, \qquad \alpha_3 = d_{\text{II}}/d_{\text{I}}.$$

Remplaçant ensuite $B^2 + \dfrac{(C - AB)^2}{B - A^2}$ par $B^{*2} + \dfrac{(C^* - A^*B^*)}{B^* - A^{*2}}$ dans (38), il vient :

$$I_0\eta_i + \frac{1}{4!} I_4 \left\{ B^{*2} + \frac{(C^* - A^*B^*)^2}{B^* - A^{*2}} \right\} d_i^4 = I_0\eta_i^* = I_1 A d_i - \frac{1}{2!} I_2 B d_i^2 + \frac{1}{3!} I_3 C d_i^3,$$
$$(i = \text{I, II, III}).$$

On en déduit les valeurs de A, B, C d'une manière analogue que dans le cas précédent [*cf.* (40)].

Le résultat final pour les inconnues A, B, C une fois obtenu, on peut trouver σ_a' et σ_a'' comme au paragraphe précédent [*cf.* (34)].

Les formules de ce paragraphe ne sont pas valables, ça va sans dire, que si $\varkappa$ ne change pas avec d_{I}, d_{II}, d_{III}. Dans le cas contraire le calcul serait analogue, quoique un peu plus compliqué.

Manuscrit reçu le 20 septembre 1933.

Paris. — Soc. Gén. d'Imp. et d'Ed., 17, rue Cassette.