Sur la diffusion des rayons γ (Ra C).

(Remarques relatives au Mémoire de M. Joh. Neukirchen: Über Streuung der γ-Strahlen des Ra C., ZS. f. Phys., *6*, 101—167, 1921.)

Par

V. TRKAL.

Note présentée le 5 février 1932.

(Avec 1 figure.)

Dans une Note présentée récemment à l'Académie[1]), j'ai dit que la détermination des coefficients de diffusion des rayons γ durs dans l'eau et dans la glycérine par M. Neukirchen ne saurait, sans doute, être correcte.

---

[1]) V. Trkal, Passage des rayons γ durs à travers une matière ne renfermant que des éléments très légers. (Remarques relatives au mémoire de M. Posejpal: Troisième contribution à l'étude de l'éther, Bulletin intern. de l'Académie des Sc. de Bohême, XXXI[e] année, 1930, pp. 140—145.) — Bulletin intern. de l'Académie des Sc. de Bohême, XXXIII[e] année, 1932. (Note présentée le 5 février 1932.) —

Note ajoutée à l'épreuve: Pendant l'impression, j'ai pris la connaissance d'un Mémoire de M. V. Posejpal („Sur le passage des rayons photoniques dans les atomes", *Journal de Physique*, sér. VII, t. III, No 9, 390—407, 1932). — M. Posejpal retrouve ici l'expression du coefficient d'absorption de M. Wentzel (1922) des rayons α et β dans le cas de la diffusion des rayons X et γ sans changement de longueur d'onde; il obtient le coefficient $\mu = N^3 \pi a^2$, N^3 étant le nombre d'atomes par unité de volume et a „la distance moyenne du noyau atomique à laquelle un photon de fréquence ν peut pénétrer". Cette formule exprimera, d'après M. Posejpal, le coefficient de diffusion par effet Compton $\mu' = Z N^3 \pi r^2$, r étant le rayon de l'électron et Z le nombre atomique du diffuseur. Il trouve donc pour le coefficient de diffusion totale par électron l'expression $\mu_e = (\pi a^2/Z) + \pi r^2$ et pour le coefficient spécifique la formule $\mu/\rho = N_0 \pi (a^2 + Z r^2)/A$, où $a = \alpha + \beta\lambda$, ($\alpha$ et β désignent des quantités constantes). — Il n'est pas utile de s'étendre longuement sur les succès qu'a remportés, d'après M. Posejpal, sa théorie; je remarquerai seulement que ces résultats de M. Posejpal sont erronés: la relation linéaire $a = \alpha + \beta\lambda$ n'est pas juste et la théorie de M. Posejpal est totalement incapable d'interpréter l'existence de l'extra-absorption du plomb de M. Chao. — *Cf.* aussi: M. de Broglie et J. Thibaud, Les rayons X et les rayons γ; J. Thibaud, L'effet Compton (*Congrès international d'électricité Paris 1932*, 1[re] Section, Rapport No 27, No 33).

Dans la Note que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui à l'Académie, je me propose de démontrer que les diverses formules obtenues par M. Neukirchen dans le Mémoire cité plus haut sont erronées.

Soit μ le coefficient global d'absorption et σ le coefficient de diffusion des rayons γ. D'après la théorie de M. Neukirchen, le rapport $k=J_0/J_d$ de l'intensité J_0 — des rayons γ en un point quelconque M, situé à la distance R de O (= centre de la sphère de faible diamètre (r_0) qui renferme la substance radioactive) — à l'intensité J_d en M après la traversée d'un corps diffusant homogène compris entre les deux sphères K_1, K_2 de rayons r et $R = r + d$, ayant pour centre le point O, sera déterminé par la relation

$$k = \frac{e^{\mu d}}{1 + \sigma d}.$$

Mais, comme on peut le vérifier, les valeurs k et d satisfont très bien à la relation approximative suivante:

$$k = e^{\dot{\alpha} d},$$

$\dot{\alpha}$ désignant une quantité constante (cf. les tableaux VI et VII) pour l'absorbant donné. On voit que cette constante empirique $\dot{\alpha}$ donne la valeur approchée du coefficient d'absorption vraie σ_a de diffusion des rayons γ.

Je me propose, dans la Note qui suit, d'obtenir la valeur véritable de σ_a; je remarquerai seulement que nous sommes ainsi conduits à la relation

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_a = \frac{1}{d}\Bigg\{&\left(1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{27}z^3\right) + \\ &+ \frac{1}{9}z^2\left(1 - \frac{2}{5}z\right)\frac{k-1}{k} + \frac{1}{18}z^2\left(1 - \frac{26}{45}z\right)\frac{(k-1)^2}{k^2}\Bigg\}\log_e k,\end{aligned}}$$

où

$$k = \frac{J_0}{J_d} = \frac{J_0}{J} > 1,$$

$$0 < z = \frac{1}{2r}\left(\sqrt{d + 2r} - \sqrt{d}\right)^2 < 1,$$

qui donne une assez grande approximation pour toutes les valeurs de z et k en question ($0 < z \ll 1$, $0 \ll 1/k < 1$).

I.

Nous résumerons en premier lieu quelques résultats obtenus en 1917 par F. W. Kohlrausch[2]) qui a montré que la filtration d'un rayonne-

[2]) K. W. F. Kohlrausch, Wiener Ber., Mitteil. Ra-Inst. Nr. **97**, **98**, **99**, **102**; 1917.

ment γ d'une source renfermant RaC dans un écran de 0·3 à 1·8 *cm* de plomb donne naissance pratiquement à deux composantes du rayonnement: l'une des deux composantes observées possède le coefficient d'absorption μ_1 et l'autre a un coefficient d'absorption un peu supérieur μ_2. Les données expérimentales de Kohlrausch nous permettent de calculer le coefficient apparent d'absorption $\bar{\mu}$ des rayons γ (Ra C) dans l'eau ($\bar{\mu} = 0{\cdot}0659$) et dans la glycérine ($\bar{\mu} = 0{\cdot}0798$). Le coefficient

$$\bar{\mu} = \frac{1}{\delta} \log_e \frac{J_0}{J_\delta} = \frac{2{\cdot}3026}{\delta} \log_{10} \frac{J_0}{J_\delta}$$

une fois obtenu, on peut trouver la relation approximative qui lie $\bar{\mu}$, μ_1, μ_2:

$$e^{-\bar{\mu}\delta} = \frac{3}{4} e^{-\mu_1\delta} + \frac{1}{4} e^{-\mu_2\delta}.$$

On obtient par un calcul facile les coefficients $\bar{\mu}$, dont les valeurs sont indiquées dans les tableaux suivants:

Tableau I.

Les intensités J_0, J_δ, d'après Kohlrausch, et le coefficient apparent d'absorption $\bar{\mu}$ pour $\delta = 2\,cm$.

Eau	J_0	3·170	2·572	2·125	1·782	1·563	1·328	1·150
	J_δ	2·750	2·240	1·868	1·569	1·368	1·169	1·015
	$\bar{\mu}$	0·07107	0·06910	0·06445	0·06365	0·06662	0·06377	0·06244

La valeur moyenne pour $\bar{\mu}$ est *0·06587*.)

Tableau II.

Les intensités J_0, J_δ et le coefficient $\bar{\mu}$ pour $\delta = 2\,cm$.

Glycérine	J_0	3·213	2·631	2·205	1·851	1·646	1·407	1·176
	J_δ	2·708	2·236	1·871	1·586	1·402	1·208	1·011
	$\bar{\mu}$	0·08549	0·08134	0·08213	0·07726	0·08022	0·07624	0·07559

La valeur moyenne pour $\bar{\mu}$ est *0·07975*.)

Kohlrausch a mesuré, avec une grande précision, les coefficients μ_1, μ_2 des deux composantes du rayonnement γ; nous signalerons seulement les résultats suivants:

K. W. F. Kohlrausch, Die Absorption der harten γ-Strahlen von Radium. (Auszug aus vier Mitteilungen, Wiener Ber.), Jahrb. d. Radioakt. *15*, 64, 1918.

K. W. F. Kohlrausch, Probleme der γ-Strahlung, Samml. Vieweg, Heft 87/88, 1927.

K. W. F. Kohlrausch, Radioaktivität, Handb. d. Experimentalphysik, Bd. 15, 1928.

Tableau III.

Substance	Densité ρ	μ_1	μ_2	μ_1/ρ	μ_2/ρ
Eau	1·00	0·0549	0·0999	0·0549	0·0999
Glycérine	1·24	0·0672	0·1174	0·0540	0·0950

Les résultats relatifs aux coefficients $\overline{\mu}$ sont mentionnés dans le tableau suivant, qui contient également les valeurs $\overline{\mu}/\rho$:

Tableau IV.

Substance	ρ	$\overline{\mu}$	$\overline{\mu}/\rho$
Eau	1·00	0·0659	0·0659
Glycérine	1·24	0·0798	0·0640

Au contraire, M. Neukirchen suppose la validité de la formule[3])

$$e^{-\mu\delta} = \frac{4}{7}\, e^{-\mu_1 \delta} + \frac{3}{7}\, e^{-\mu_2 \delta},$$

qui n'est pas juste, comme on peut aisément le vérifier, indépendamment de toute théorie.

Jusqu'ici, nous n'avons pas précisé la nature des coefficients considérés. Il convient de distinguer dans le coefficient global d'absorption μ deux parties, à savoir l'une σ correspondant à l'effet de diffusion, l'autre τ à l'absorption proprement dite:[4])

$$\mu = \tau + \sigma$$

Mais pour les éléments légers, l'affaiblissement total μ du rayonnement γ dur est dû à peu près totalement à l'effet de diffusion σ. La diffusion des rayons γ sur les substances matérielles comprend à la fois un effet classique (Thomson), sans changement de longueur d'onde, et un effet de Compton caractérisé par une augmentation de la longueur d'onde.[5]) La diffusion quantique prend ici une importance de plus en plus considérable quand la fréquence augmente, et, pour les radiations très durs, elle est à peu près seule observable. Klein et Nishina trouvent pour le coefficient massique dans l'hydrogène, correspondant à l'effet Compton, l'expression:[6])

[3]) J. Neukirchen, l. c., p. 113.

[4]) *Cf.*, entre autres, J. Thibaud, Les Rayons X, (Collection Armand Colin No 120), 1930, p. 83.

[5]) *Cf.*, par exemple, J. Thibaud, *l. c.*, p. 199.

[6]) Nature *122*, 398, 1928.

O. Klein u. Y. Nishina, Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik nach Dirac. — ZS. f. Phys. *52*, 853—868, 1929.

J. Waller, Die Streuung von Strahlung durch gebundene und freie Elektronen nach der Diracschen relativistischen Mechanik. — ZS. f. Phys. *61*, 837—851.

$$\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_H = N \cdot \frac{\pi e^4}{m^2 c^4} \cdot 2 \left[\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\left\{\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\log_e(1+2\alpha)\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\alpha}\log_e(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2}\right],$$

(N = nombre d'Avogadro, $-e$ = charge de l'électron, m = sa masse, c = vitesse de la lumière; $\alpha = h\nu/mc^2$; $h\nu$ = quantum du rayonnement γ incident, supposé monochromatique, ν = fréquence des rayons γ, h = constante de Planck.)

Le coefficient massique σ/ρ de diffusion des rayons γ durs dans le cas des combinaisons chimiques $X^{(1)}_{r_1} X^{(2)}_{r_2} X^{(3)}_{r_3} \ldots$ des éléments légers $X^{(1)}$, $X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots$ s'exprime par la formule

$$\frac{\sigma}{\rho} = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)_H \cdot \frac{\Sigma_i r_i Z_i}{\Sigma_i r_i A_i},$$

(Z_i = nombre atomique de l'élément $X^{(i)}$, A_i = poids atomique de celui-ci, ρ = densité du diffuseur, $(\sigma/\rho)_H$ = coefficient massique de diffusion dans l'hydrogène).

On constate tout d'abord la concordance remarquable des valeurs de

$$\frac{\bar{\mu}}{\rho} \cdot \frac{\Sigma_i r_i A_i}{\Sigma_i r_i Z_i}$$

dans le cas de l'eau

$$0{\cdot}0659 \times 1{\cdot}8 = 0{\cdot}1186$$

et dans le cas de la glycérine

$$0{\cdot}0640 \times 1{\cdot}84 = 0{\cdot}1178.$$

Ces résultats numériques permettent maintenant d'affirmer que

$$\bar{\mu} = \bar{\tau} + \bar{\sigma} \doteq \bar{\sigma}, \quad (\bar{\tau} \doteq 0).$$

On a de même

$$\frac{\mu_1}{\rho} \cdot \frac{\Sigma_i r_i A_i}{\Sigma_i r_i Z_i} = \begin{cases} 0{\cdot}0549 \; 1{\cdot}8 = 0{\cdot}0988 \text{ (eau)} \doteq \\ \doteq 0{\cdot}0540 \; 1{\cdot}84 = 0{\cdot}0994 \text{ (glycérine)}, \end{cases}$$
$$\frac{\mu_2}{\rho} \cdot \frac{\Sigma_i r_i A_i}{\Sigma_i r_i Z_i} = \begin{cases} 0{\cdot}0999 \; 1{\cdot}8 = 0{\cdot}1798 \text{ (eau)} \doteq \\ \doteq 0{\cdot}0950 \; 1{\cdot}84 = 0{\cdot}1748 \text{ (glycérine)}, \end{cases}$$

d'où il suit que

$$\mu_1 = \tau_1 + \sigma_1 \doteq \sigma_1, \quad (\tau_1 \doteq 0),$$
$$\mu_2 = \tau_2 + \sigma_2 \doteq \sigma_2, \quad (\tau_2 \doteq 0).$$

De là résulte:

Tableau V.

Les deux coefficients „vrais" de diffusion (σ_1, σ_2) et le coefficient „apparent" de diffusion (σ) des rayons γ durs.

Substance	Densité	σ_1	σ_2	σ	σ_1/ρ	σ_2/ρ	$\bar{\sigma}/\rho$
Eau H_2O	1·00	0·0549	0·0999	0·0659	0·0549	0·0999	0·0659
Glycérine $C_3H_8O_3$	1·24	0·0672	0·1174	0·0798	0·0540	0·0950	0·0640

Écran (filtre) de plomb de 0·3 à 1·8 *cm*.

Il devient, d'autre part, nécessaire d'envisager le coefficient de diffusion quantique σ, d'un certain élément, comme la somme des coefficients relatifs aux deux processus d'absorption et de diffusion proprement dite ($\sigma = \sigma_a + \sigma_s$). Klein et Nishina donnent, pour la partie du coefficient de diffusion, σ_s dans l'hydrogène, correspondant à l'effet de diffusion vraie, l'expression générale[7])

$$\left(\frac{\sigma_s}{\rho}\right)_H = N \cdot \frac{\pi e^4}{m^2 c^4} \left[\frac{1}{\alpha^3} \log_e (1 + 2\alpha) + \frac{2(1+\alpha)(2\alpha^2 - 2\alpha - 1)}{\alpha^2 (1 + 2\alpha)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{8\alpha^2}{3(1 + 2\alpha)^3}\right].$$

Il en résulte que le coefficient $(\sigma/\rho)_H = 0{\cdot}118\ cm^2\, g^{-1}$ se rapporte à une longueur d'onde très voisine de 0·0107 Å.

En résumé, comparons maintenant les résultats précédents aux valeurs de M. Neukirchen, contenues dans les tableaux suivants:

Tableau VI.

		Eau ($\rho = 1$); H_2O		
		1.	2.	3.
Neukirchen	d	2·95 cm	4·00 cm	5·50 cm
	μ	0·0735 cm^{-1}	0·0732 cm^{-1}	0·0730 cm^{-1}
	k	1·1190	1·1611	1·2301
	$f(d) = \sigma d$	0·1101	0·1542	0·2146
	σ	0·0373 cm^{-1}	0·0385 cm^{-1}	0·0390 cm^{-1}
	σ moyen	Moyenne des valeurs de σ: 0·0383 cm^{-1}		
Correctement	α	0·03812 cm^{-1}	0·03734 cm^{-1}	0·03765 cm^{-1}
	$\mu = \sigma$	0·0659 cm^{-1}	d'après la formule de Klein-Nishina pour $\lambda = 0{\cdot}0107$ Å	
	σ_s	0·0356 ,,		
	$\sigma_a = \sigma - \sigma_s$	0·0303 ,,		
	$\mu = \sigma$	0·0659 cm^{-1} (moyenne des valeurs de μ) d'après les mesures de Kohlrausch cf. tab. I.		

[7]) E. Rutherford - J. Chadwick - C. D. Ellis, Radiations from radioactive substances, Cambridge **1930**, p. 464.

Tableau VII.

		Glycérine ($\rho = 1{\cdot}24$); $C_3H_8O_3$		
		1.	2.	3.
Neukirchen	d	$2{\cdot}95\ cm$	$3{\cdot}90\ cm$	$5{\cdot}50\ cm$
	μ	$0{\cdot}0878\ cm^{-1}$	$0{\cdot}0875\ cm^{-1}$	$0{\cdot}0870\ cm^{-1}$
	k	$1{\cdot}1325$	$1{\cdot}1681$	$1{\cdot}2636$
	$f(d) = \sigma d$	$0{\cdot}1431$	$0{\cdot}2044$	$0{\cdot}2733$
	σ	$0{\cdot}0485\ cm^{-1}$	$0{\cdot}0524\ cm^{-1}$	$0{\cdot}0497\ cm^{-1}$
	σ moyen	Moyenne des valeurs de σ: $0{\cdot}0502\ cm^{-1}$ d'après Neukirchen		
Correctement	α	$0{\cdot}04218\ cm^{-1}$	$0{\cdot}03984\ cm^{-1}$	$0{\cdot}04254\ cm^{-1}$
	$\mu = \sigma$	$0{\cdot}0799\ cm^{-1}$	d'après la formule de Klein-Nishina pour $\lambda = 0{\cdot}0107$ Å	
	σ_s	$0{\cdot}0432$,,		
	$\sigma_a = \sigma - \sigma_s$	$0{\cdot}0367$,,		
	$\mu = \sigma$	$0{\cdot}0798\ cm^{-1}$ (moyenne des valeurs de μ) d'après les mesures de Kohlrausch cf. tab. II.		

II.

Le problème dont nous allons nous occuper peut être formulé ainsi: *On demande de trouver la formule légitime qui donne l'expression du rapport* J_d/J_0 (cf. p. 2) *dans le cas de l'arrangement expérimental de M. Neukirchen et de déduire, du résultat ainsi obtenu, le coefficient* σ_a.

D'après la loi de Lambert, on peut écrire[8])

$$d^4\,\Phi = \eta\, d\omega\, \frac{d\Omega \cos\vartheta \cos i}{x^2}\,;$$

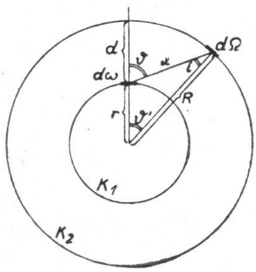

Fig. 1.

$d^4\,\Phi$ est le flux du rayonnement γ qu'envoie une „source" $d\,\omega$ à une surface $d\,\Omega$, située à une distance x, ϑ et i désignant les angles que fait la droite qui les joint avec les normales d et R aux surfaces $d\,\omega$ et $d\,\Omega$ (fig. 1). „L'éclat" η est mesuré par le flux du rayonnemment γ envoyé par l'unité de surface d'une certaine „source" (K_1) sur une surface unité située à l'unité de distance, l'une et l'autre de ces surfaces étant normales à la droite qui les joint.

[8]) *Cf.*, entre autres, P. Drude, Précis d'Optique, t. I., p. 113, (1911).

Le rapport de l'intensité J_d en un point quelconque M, situé à la distance R de O à l'intensité primaire J_0 en M, s'exprime par:

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{I_d}{I_0} = \frac{2}{(\varkappa^2 - 1)^2 \delta^2} \int_{\delta}^{\varkappa\delta} \left(\frac{\varkappa^4 \delta^4}{\xi^3} - \xi \right) e^{-\xi} \, d\,\xi$$

où

$$I_d = \eta \int_{(K)} d\,\omega \int_{\varphi=o}^{2\pi} d\,\varphi \int_{\vartheta=o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta \cos(\vartheta - \vartheta')\, d\,\vartheta'}{x^2} e^{-\mu x},$$

$$I_0 = \eta \int_{(K_1)} d\,\omega \int_{\varphi=o}^{2\pi} d\,\varphi \int_{\vartheta=o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \sin\vartheta' \cos\vartheta \cos(\vartheta - \vartheta')}{x^2} \, d\,\vartheta'.$$

Comme

$$\cos\vartheta' = \frac{1}{2\,R\,r}(R^2 + r^2 - x^2), \quad \cos\vartheta = \frac{1}{2\,r\,x}(R^2 - r^2 - x^2),$$

$$\cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2\,R\,x}, \quad \sin\vartheta'\,d\,\vartheta' = \frac{x}{R\,r}\,d\,x,$$

on a:

$$I_0 = 2\,\pi^2\,\eta \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \left\{ \frac{(R^2 - r^2)^2}{x^3} - x \right\} dx = 4\,\pi^2\,r^2\,\eta^2,$$

$$I_d = 2\,\pi^2\,\eta \int_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} \left\{ \frac{(R^2 - r^2)^2}{x^3} - x \right\} e^{-\mu x}\, d\,x. = \frac{2\,\pi^2\,\eta}{\mu^2} \int_{\delta}^{\varkappa\delta} \left(\varkappa^4 \delta^4 \,.\, \frac{1}{\xi^3} - \xi \right) e^{-\xi}\, d\,\xi$$

où

$$x = \frac{\xi}{\mu}, \quad d = R - r = \frac{\delta}{\mu}, \quad \frac{2\,r}{d} = \varkappa^2 - 1,$$

$$\xi = \mu\,x, \quad \delta = \mu\,d, \quad \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{\varkappa\,\delta}{\mu}$$

L'intégration par parties donne la formule

$$I_d = \frac{\pi^2\,\eta}{\mu^2} \left\{ \left[2\,(1 + \xi) + \varkappa^4\,\delta^4 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} \right) e^{-\xi} \right]_{\delta}^{\varkappa\delta} + \varkappa^4 \delta^4 \int_{\delta}^{\varkappa\delta} \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\,\xi \right\},$$

d'où nous pouvons tirer

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{1}{(\varkappa^2 - 1)^2\,\delta^2} \left\{ \begin{array}{l} (2 + 2\,\varkappa\,\delta - \varkappa^2\delta^2 + \varkappa^3\delta^3)\,e^{-\varkappa\delta} - (2 + \delta - \varkappa^4\,\delta^2 + \\ \quad + \varkappa^4\,\delta^3)\,e^{-\delta} + \varkappa^4\,\delta^4\,(\mathrm{Ei}\,(-\,\varkappa\,\delta) - \mathrm{Ei}\,(-\,\delta)) \end{array} \right\},$$

où

$$\varkappa = \sqrt{1 + \frac{2\,r}{d}}\,, \quad \delta = \mu\, d,$$

$$\mathrm{Ei}\,(-\,\delta) = \mathrm{li}\,(e^{-\delta}) =$$

$$= -\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, d\,x = C + \frac{1}{4}\log_e \delta^4 - \delta + \frac{1}{2}\,\frac{\delta^2}{2!} - \frac{1}{3}\,\frac{\delta^3}{3!} + \frac{1}{4}\,\frac{\delta^4}{4!} - \ldots,$$

$C = 0{\cdot}5772156649015\ldots$ désignant la constante d'Euler. On déduit aisément des relations précédentes que

$$\lim_{\varkappa \to 1} J_d/J_0 = e^{-\delta}.$$

Développement de J_d/J_0 suivant les puissances de δ. — Soient

$$\varphi\,(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \ldots + c_n\,x^n$$

et

$$e^{\lambda x}\,\varphi\,(x) = A_0 + A_1\,\frac{x}{1!} + A_2\,\frac{x^2}{2!} + A_3\,\frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

on trouve aisément[9])

$$A_0 = c_0,\; A_1 = c_0\,\lambda + c_1,\; A_2 = c_0\,\lambda^2 + 2\,c_1\,\lambda + 2\,c_2,\ldots$$

et, en général

$$A_r = c_0\,\lambda^r + r\,c_1\,\lambda^{r-1} + r\,(r-1)\,c_2\,\lambda^{r-2} + r\,(r-1)\,(r-2)\,c_3\,\lambda^{r-3} + \ldots.$$

Donc

$$(2 + 2\,\varkappa\,\delta - \varkappa^2\,\delta^2 + \varkappa^3\,\delta^3)\,e^{-\varkappa\delta} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-\,1)^{n+1}\,\frac{n^2 - n + 2}{(n-2)!\,n}\,(\varkappa\,\delta)^n,$$

$$(2 + \delta - \varkappa^4\,\delta^2 + \varkappa^4\,\delta^3)\,e^{-\delta} = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-\,1)^{n+1}\,\frac{n\,(n-1)\,\varkappa^4 + 2}{(n-2)!\,n}\,\delta^n.$$

Nous pouvons encore écrire

$$\varkappa^4\,\delta^4\,[\mathrm{Ei}\,(-\,\varkappa\,\delta) - \mathrm{Ei}\,(-\,\delta)] = \varkappa^4\,\delta^4\log_e\varkappa - \sum_{n=5}^{\infty}(-\,1)^{n+1}\,\frac{\varkappa^n - \varkappa^4}{(n-4)\,!\,(n-4)}\,\delta^n,$$

ce qui donne

$$(\varkappa^2 - 1)^2\,\frac{J_d}{J_0} = (\varkappa^2 - 1)^2 - \frac{2}{3}\,(3\,\varkappa^4 - 4\,\varkappa^3 + 1)\,\delta + \Big[\varkappa^4\log_e\varkappa - \frac{1}{4}\,(\varkappa^4 - 1)\Big]\,\delta^2 +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-\,1)^n}{n!}\cdot\frac{2}{(n+2)\,(n-2)}\,(4\,\varkappa^{n+2} - (n+2)\,\varkappa^4 + n - 2)\,\delta^n.$$

On a identiquement

$$(3\,\varkappa^4 - 4\,\varkappa^3 + 1) = (\varkappa - 1)^2\,(3\,\varkappa^2 + 2\,\varkappa - 1),$$

$$4\,\varkappa^{n+2} - (n+2)\,\varkappa^4 + n - 2 =$$

$$= (\varkappa - 1)^2\,(4\,[\varkappa^n + 2\,\varkappa^{n-1} + 3\,\varkappa^{n-2} + \ldots + (n-2)\,\varkappa^3] + (n-2)\,(3\,\varkappa^2 + 2\,\varkappa + 1))$$

---

[9]) Voir *Oeuvres de* Laguerre, t. I., p. 23 (1898).

et nous avons, sans difficultés, le développement, suivant les puissances croissantes de δ, de la fraction J_d/J_0:

$$\frac{J_d}{J_0} = 1 - \frac{2}{3}\,\frac{3\,\varkappa^2+2\,\varkappa+1}{(\varkappa+1)^2}\,\delta + \left(\frac{\varkappa^4}{(\varkappa^2-1)^2}\log_e\varkappa - \frac{1}{4}\,\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^2-1}\right)\delta^2 +$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{2}{(n+2)(n-2)}\cdot\frac{1}{(\varkappa+1)^2}\Big[(n-2)(1+2\,\varkappa+3\,\varkappa^2)+$$
$$+ 4\sum_{k=3}^{n}(n+1-k)\,\varkappa^k\Big]\,\delta^n.$$

Pour $\varkappa \longrightarrow 1$, on a

$$\lim_{\varkappa\to 1} J_d/J_0 = 1 - \frac{\delta}{1!} + \frac{\delta^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{\delta^n}{n!} + \ldots = e^{-\delta}.$$

Développement de a_n suivant les puissances croissantes de z. — Posons

$$\varkappa = \frac{1+z}{1-z};\quad \varkappa \underset{(=)}{>} 1,\quad 0 \leqq z < 1.$$

Par cette substitution,

$$a_1 = -\frac{2}{3}\,\frac{3\,\varkappa^2+2\,\varkappa+1}{(\varkappa+1)^2}$$

se transforme en

$$a_1 = -\left(1+\frac{2}{3}\,z+\frac{1}{3}\,z^2\right).$$

De même

$$a_2 = \frac{(1+z)^4}{16\,z^2}\log_e\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{8\,z}(1+z^2) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{3}\,z+\frac{1}{3}\,z^2+\frac{1}{5}\,z^3+\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{2\,m^2-2\,m-1}{(2\,m+1)(2\,m-1)(2\,m-3)}\,z^{2m-1}+\frac{m}{(2\,m-1)(2\,m+1)}\,z^{2m}+\ldots\right)$$

représentera le coefficient

$$a_2 = \frac{\varkappa^4}{(\varkappa^2-1)^2}\log\varkappa - \frac{1}{4}\,\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa^2-1} = \frac{(1+z)^4}{16\,z^2}\log_e\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{8\,z}(1+z^2),$$

car

$$\log_e\frac{1+z}{1-z} = 2\left(\frac{z}{1}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots+\frac{z^{m+1}}{2\,m+1}+\ldots\right).$$

Le coefficient général a_n, $(n \leqq 3)$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{2}{(n+2)(n-2)}\cdot\frac{4\,\varkappa^{n+2}-(n+2)\,\varkappa^n+n-2}{(\varkappa^2-1)^2}$$

peut se mettre sous la forme suivante:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{n^2-4}\cdot\frac{1}{2\,z^2}\times$$
$$\times\Big[(1+z)^{2+n}(1-z)^{2-n} - 2\,n\,(z+z^3) - (1+6\,z^2+z^4)\Big].$$

En posant, pour abréger,

$$F(z, n) = (1+z)^{2+n} (1-z)^{2-n} = (1+z)^2 (1-z)^2 \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n,$$

ou bien

$$F(z, n) = (1-z^2)^2 e^{n \log \frac{1+z}{1-z}},$$

je remarque que

$$F(z, n) = \sum_{s=0}^{\infty} (1-z^2)^2 \left(\log_e \frac{1+z}{1-z}\right)^s \frac{n^s}{s!} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (1-z^2)^2 \left(\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + \frac{z^{2m+1}}{2^{m+1}} + \ldots\right)^s \frac{(2n)^s}{s!} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} F^{(s)}(0, n) \frac{z^s}{s!},$$

où

$$F^{(s)}(0, n) = \left(\frac{\partial^s F(z, n)}{\partial z^s}\right)_{z=0}$$

sont des polynomes entiers du degré s en n.

Remplaçons, dans la fonction $F(z, n)$, z et n par les valeurs $-z$ et $-n$; il viendra

$$F(-z, -n) = F(z, n).$$

On en conclut aisément que les coefficients de toutes les puissances paires (impaires) de z, dans la fonction $F(z, n)$, sont des polynomes pairs (impairs).

En posant

$$(1-z)^{2-n} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{2-n}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j-3}{j} z^j,$$

$$(1+z)^{2+n} = \sum_{l=0}^{n+2} \binom{n+2}{l} z^l,$$

on a évidemment

$$F^{(s)}(0, n) = \sum_{j=0}^{s} \binom{n+2}{s-j} \binom{n+j-3}{j}.$$

La fonction $F(z, n)$ se réduit à un polynome du quatrième degré en z pour $n=0$, $n = \pm 1$, $n = \pm 2$ et il résulte immédiatement que le polynome $F^{(s)}(0, n)$ doit s'annuler pour $n = 0, \pm 1, \pm 2$. On déduit de là

$$F^{(s)}(0, n) = 2^5 n (n^2-1)(n^2-4) P_{s-2}(n), \qquad s \geqq 5,$$

où $P_{s-2}(n)$ désigne un polynome entier du degré $s-5$ en $2n$.

L'équation

$$F(z, n) = (1-z)^{2-n} (1+z)^{2+n}$$

peut se mettre sous la forme suivante:

$$\log_e F(z, n) = (2+n) \log_e (1+z) + (2-n) \log_e (1-z).$$

On en déduit, en prenant les dérivées des deux membres,

$$F'(z, n) = \left(\frac{2+n}{1+z} - \frac{2-n}{1-z}\right) F(z, n)$$

et, par suite,

$$(1-z^2) F'(z, n) = 2(n - 2z) F(z, n).$$

De là résulte, par la formule de Leibniz, la relation suivante:

$$(1-z^2) F^{(s+1)}(z, n) + \binom{s}{1} \cdot (-2z) \cdot F^{(s)}(z, n) + \binom{s}{2} \cdot (-2) \cdot F^{(s-1)}(z, n) =$$

$$= 2(n - 2z) \cdot F^{(s)}(z, n) + 2\binom{s}{1} \cdot (-2) F^{(s-1)}(z, n).$$

Un calcul facile donne

$$(1-z^2) F^{(s+1)}(z, n) = 2[n + (s-2) z] F^{(s)}(z, n) + s(s-5) F^{(s-1)}(z, n),$$

d'où il suit, pour $z = 0$,

$$F^{(s+1)}(0, n) = 2n F^{(s)}(0, n) + s(s-5) F^{(s-1)}(0, n)$$

et cette relation permettra d'obtenir ces polynomes par voie récurrente:

$$P_{s-1}(n) = 2n \cdot P_{s-2}(n) + s(s-5) P_{s-3}(n); \; s \geqq 6.$$

Il est clair que

$$F(0, n) = 1, \quad F'(0, n) = 2n.$$

La rélation précédente permet de calculer de proche en proche les valeurs des polynomes $P_s(n)$ pour $s = 5, 6, \ldots$ quand on connaît

$$P_3(n) = 1, \; P_4(n) = 2n.$$

On obtient sans peine le Tableau suivant:

$$P_5(n) = (2n)^2 + 6 \cdot 1$$

$$P_6(n) = (2n)^3 + [6 \cdot 1 + 7 \cdot 2] \cdot (2n),$$

$$P_7(n) = (2n)^4 + [6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3] \cdot (2n)^2 + 6 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3,$$

$$P_8(n) = (2n)^5 + [6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4] \cdot (2n)^3 + [6 \cdot 1 \cdot (8 \cdot 3 + 9 \cdot 4) + 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 4] \cdot (2n),$$

$$P_9(n) = (2n)^6 + [6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5) \cdot (2n)^4 + [6 \cdot 1 \cdot (8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5) + 7 \cdot 2 \cdot (9 \cdot 4 + 10 \cdot 5) + 8 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5] \cdot (2n)^2 + 6 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5,$$

$$P_{10}(n) = (2n)^7 + [6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 11 \cdot 6] \cdot (2n)^5 + [6 \cdot 1 (8 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 11 \cdot 6) + 7 \cdot 2 (9 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 11 \cdot 6) + 8 \cdot 3 (10 \cdot 5 + 11 \cdot 6) + 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 6] \cdot (2n)^3 + [6 \cdot 1 \cdot \{8 \cdot 3 \cdot (10 \cdot 5 + 11 \cdot 6) + 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 6\} + 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 6] \cdot (2n),$$

etc.

La loi de la construction du polynomes $P_s(n)$ est évidente.

Il résulte de ces considérations que a_n est de la forme

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{3} n z + \frac{1}{3} n^2 z^2 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{2^4 n (n^2-1) P_s(n)}{(s+2)!} z^s\right), \; n \geq 3.$$

Arrêtons-nous sur le cas où $n = 0, 1, 2$. En particulier,

pour $n = 0$ on aura $a_0 = 1$,

pour $n = 1$ on aura $a_1 = -\left(1 + \frac{2}{3} z + \frac{1}{3} z^2\right)$,

et pour $n = 2$ on aura $a_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{3} z + \frac{4}{9} z^2 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{2^4 . 2 . 3 . P_s (2)}{(s+2)!} z^s\right)$.

Si l'on pose

$$\frac{2^4 . 2 . 3 . Q_{2m+1}}{2! (2m+1)!} = \frac{2 (2 m^2 - 2 m - 1)}{(2 m + 1) (2 m - 1) (2 m - 3)},$$

$$\frac{2^4 . 2 . 3 . Q_{2m+2}}{2! (2m+2)!} = \frac{2 m}{(2 m + 1) (2 m - 1)},$$

le polynôme Q_s satisfait à la relation suivante

$$Q_{s+1} = 4 Q_s + s (s - 5) Q_{s-1},$$

d'où l'on voit que

$$Q_{s+2} = P_s (2).$$

On a donc, pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{3} n z + \frac{1}{3} n^2 z^2 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{2^4 n (n^2 - 1) P_s (n)}{(s+2)!} z^s\right),$$

$$0 \leqq z = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} < 1,$$

dans le développement de

$$\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n,$$

où

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{2}{(\varkappa^2 - 1)^2 \delta^2} \int_{\delta}^{\varkappa\delta} \left(\frac{\varkappa^4 \delta^4}{\xi^3} - \xi\right) e^{-\xi} d\xi,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante:

$$\frac{J_d}{J_0} = \frac{1}{(\varkappa^2 - 1)^2 \delta^2} \left\{ \begin{array}{c} (2 + 2 \varkappa \delta - \varkappa^2 \delta^2 + \varkappa^3 \delta^3) e^{-\varkappa\delta} - (2 + \delta - \varkappa^4 \delta^2 + \varkappa^4 \delta^3) e^{-\delta} + \\ + \varkappa \delta^4 \left(\mathrm{Ei} (-\varkappa\delta) - \mathrm{Ei} (-\delta)\right) \end{array} \right\},$$

$$\delta = \mu d, \ \varkappa = \sqrt{1 + \frac{2 r}{d}} \geqq 1,$$

On aura donc, en négligeant les termes de l'ordre de $z^4, z^5, z^6, \ldots$,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + \frac{2}{3} n z + \frac{1}{3} n^2 z^2 + \frac{2}{15} n (n^2 - 1) z^3\right);$$

en portant ces valeurs dans la formule $\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$ on obtiendra la formule approximative suivante[10]:

$$\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + n\left(\frac{2}{3} z - \frac{2}{15} z^3\right) + \frac{1}{3} n^2 z^2 + \frac{2}{15} n^3 z^3\right) \delta^n.$$

En posant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \ldots + \alpha_m n^m) \delta^n =$$
$$= (b_0 - b_1 \delta + b_2 \delta^2 + \ldots + (-1)^m b_m \delta^m) e^{-\delta},$$

on trouve aisément

$$b_0 = \alpha_0,$$

$$b_1 = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s,$$

$$b_2 = \sum_{s=1}^{m} (2^{s-1} - 1) \alpha_s,$$

$$b_3 = \frac{1}{2!} \sum_{s=1}^{m} (3^{s-1} - 2 \cdot 2^{s-1} + 1) \alpha_s,$$

$$b_4 = \frac{1}{3!} \sum_{s=1}^{m} (4^{s-1} - 3 \cdot 3^{s-1} + 3 \cdot 2^{s-1} - 1) \alpha_s,$$

. . . .

$$b_r = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{s=1}^{m} \left(r^{s-1} - \binom{r-1}{1} (r-1)^{s-1} + \binom{r-1}{2} (r-2)^{s-1} - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^p \binom{r-1}{p} (r-p)^{s-1} + \ldots + (-1)^{r-1}\right) \alpha_s$$

ou [*cf.* E. Netto, *Combinatorik*, 2. Aufl., 1927, p. 249. form. (17)]

$$b_r = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{s=r}^{m} \alpha_s \sum_{p=0}^{r-1} (-1)^p \binom{r-1}{p} (r-p)^{s-1}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, m;$$

$$\binom{0}{0} = 1; \quad b_0 = \alpha_0, \quad b_1 = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s, \quad b_m = \alpha_m.$$

---

[10]) La formule complète peut s'écrire

$$\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} [\alpha_{2r-1} n^{2r-1} + \alpha_{2r} n^{2r}]\right) \delta^n,$$

où

$$\alpha_{2r-1} = \frac{1}{2^{2r}} \frac{1+z^2}{z} - \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(2p+1)!\; 2^{2(r-p)}} \frac{(1-z^2)^2}{2z^2} \left(\log_e \frac{1+z}{1-z}\right)^{2p+1},$$

$$\alpha_{2r} = \frac{1}{2^{2r}} - \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(2p+2)!\; 2^{2(r-p)}} \frac{(1-z^2)^2}{2z^2} \left(\log_e \frac{1+z}{1-z}\right)^{2p+2}.$$

On en déduit la formule approximative suivante:

$$\frac{J_d}{J_0} = \left\{1 - \left(\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^2\right)\delta + \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{5}z^3\right)\delta^2 - \frac{2}{15}z^3\delta^3\right\}e^{-\delta}.$$

En y faisant z égal à zéro, on obtiedra pour le rapport $\frac{J_d}{J_0}$ la valeur $e^{-\delta}$ de M. Neukirchen. Mais il est à remarquer que $z \neq 0$, dans le cas de l'arrangement expérimental de M. Neukirchen.

Calcul de δ. — En désignant par y le rapport $\frac{J_d}{J_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$, $a_0 = 1$, $a_1 \neq 0$, on sait que δ est développable en série de Taylor

$$\delta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (1 - y)^n,$$

(le développement converge dans le voisinage de la valeur $y = 1$). On voit que, si $z = 0$, on a $y = e^{-\delta}$ et

$$\delta = -\log_e y = -\log_e (1 - (1 - y)).$$

Pour obtenir l'expression de δ, je considérerai une série de la forme

$$\delta = -\sum_{n=0}^{\infty} B_n (1 - y)^n \log_e (1 - (1 - y)).$$

On aura donc, en négligeant les termes de l'ordre de $(1 - y)^4$, $(1 - y)^5$, ...

$$\delta = -\sum_{n=0}^{3} B_n \tilde{\eta}^n \log (1 - \tilde{\eta}), \qquad -\log_e (1 - \tilde{\eta}) = \tilde{\eta} + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^2 + \frac{1}{3}\tilde{\eta}^3,$$

où, comme il est facile de le voir,

$$1 - y = \tilde{\eta}.$$

On en déduit

$$\delta = B_0 \tilde{\eta}\left(1 + \left[\frac{1}{2} + C_1\right]\tilde{\eta} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}C_1 + C_2\right]\tilde{\eta}^2\right),$$

$$\delta^2 = B_0^2 \tilde{\eta}^2 (1 + [1 + 2C_1]\tilde{\eta}),$$

$$\delta^3 = B_0^3 \tilde{\eta}^3,$$

où

$$B_1 = B_0 C_1, \quad B_2 = B_0 C_2, \quad B_3 = B_0 C_3.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$1 - \tilde{\eta} = y = (1 - b_1\delta + b_2\delta^2 - b_3\delta^3)\,e^{-\delta} =$$

$$= (1 - b_1\delta + b_2\delta^2 - b_3\delta^3)\left(1 - \delta + \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{6}\delta^3\right)$$

on a immédiatement

$$\tilde{\eta} = (1 + b_1)\delta - \left(\frac{1}{2} + b_1 + b_2\right)\delta^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}b_1 + b_2 + b_3\right)\delta^3.$$

On a puis, en vertu des formules pour δ, δ^2, δ^3, identiquement

$$1 = B_0 (1 + b_1) + B_0 \left[(1 + b_1)\left(\frac{1}{2} + C_1\right) - B_0 \left(\frac{1}{2} + b_1 + b_2\right)\right] \tilde{\eta} +$$
$$+ B_0 \left[(1 + b_1)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} C_1 + C_2\right) - B_0 \left(\frac{1}{2} + b_1 + b_2\right)(1 + 2\,C_1) + \right.$$
$$\left. + B_0^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} b_1 + b_2 + b_3\right)\right] \tilde{\eta}^2.$$

Ainsi, si l'on prend

$$b_1 = \frac{2}{3} z + \frac{1}{3} z^2, \quad b_2 = \frac{1}{3} z^2 \left(\frac{1}{3} z^2 + \frac{2}{5} z^3\right) + \frac{2}{5} z^3, \quad b_3 = \frac{2}{15} z^3,$$

on obtiendra

$$B_0 = 1 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{9} z^2 + \frac{4}{27} z^3, \quad C_1 = \frac{1}{9} z^2 \left(1 + \frac{4}{15} z\right),$$
$$C_2 = \frac{1}{18} z^2 \left(1 + \frac{4}{45} z\right).$$

En portant ces valeurs dans la formule

$$\delta = - B_0 (1 + C_1 \tilde{\eta} + C_2 \tilde{\eta}^2) \log_e (1 - \tilde{\eta}),$$

on obtiendra la formule approximative suivante

$$\delta = - \left[\left(1 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{9} z^2 + \frac{4}{27} z^3\right) + \frac{1}{9} z^2 \left(1 - \frac{2}{5} z\right) \tilde{\eta} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{18} z^2 \left(1 - \frac{26}{45} z\right) \tilde{\eta}^2 \right] \log_e (1 - \tilde{\eta}).$$

Le minimum du facteur

$$1 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{9} \left(1 + \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \tilde{\eta}^2\right) z^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5} \tilde{\eta} - \frac{13}{45} \tilde{\eta}^2\right) z^3,$$

correspond à

$$z_1 = 1 - \frac{2}{5^2} \tilde{\eta} - \frac{179}{3 \, . \, 5^5} \tilde{\eta}^2,$$

d'où l'on déduit le minimum de δ, c'est-à-dire:

$$\delta_1 = - \left(\frac{16}{27} + \frac{1}{15} \tilde{\eta} + \frac{403}{2 \, . \, 3^4 \, . \, 5^3} \tilde{\eta}^2\right) \log_e (1 - \tilde{\eta}).$$

Donc, quel que soit z dans l'intervalle $(z_0, 1)$, la fonction

$$\delta = - \left(1 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{9} z^2 + \frac{4}{27} z^3\right) \times$$
$$\times \left\{1 + \frac{1}{9} z^2 \left(1 + \frac{4}{15} z\right) \tilde{\eta} + \frac{1}{18} z^2 \left(1 + \frac{4}{45} z\right) \tilde{\eta}^2\right\} \log_e (1 - \tilde{\eta}),$$

sera comprise entre δ_1 et δ_0, où

$$\delta_0 = -\left[1 - \frac{2}{3} z_0 + \frac{1}{9}\left(1 + \tilde{\eta} + \frac{1}{2}\tilde{\eta}^2\right) z_0^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\tilde{\eta} - \frac{13}{45}\tilde{\eta}^2\right) z_0^3\right] \log_e (1 - \tilde{\eta}),$$

et

$$z_0 = \frac{1}{2\, r_0}\left(\sqrt{d + 2\, r_0} - \sqrt{d}\right)^2,$$

(Neukirchen: $2\, r_0 = 1{\cdot}70\, cm$), r_0 désignant le rayon de la sphère de plomb qui renferme la substance radioactive et d l'épaisseur du diffuseur.

Cette nouvelle valeur δ_0 est évidemment supérieure à toutes les autres δ dans cette intervalle $(z_0, 1)$.

Voici la formule approximative qui détermine σ_a quand on connaît k et z: [11])

$$\sigma_a = \frac{1}{d}\left\{\left(1 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{9} z^2 + \frac{4}{27} z^3\right) + \frac{1}{9} z^2 \left(1 - \frac{2}{5} z\right) \frac{k-1}{k} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{18} z^2 \left(1 - \frac{26}{45} z\right) \frac{(k-1)^2}{k^2}\right\} \log_e k\,,$$

où

$$k = \frac{J_0}{J_d} = \frac{J_0}{J} > 1, \quad 0 \ll 1/k < 1,$$

$$0 < z = \frac{1}{2\, r}\left(\sqrt{d + 2\, r} - \sqrt{d}\right)^2 \ll 1\;;$$

$$\sigma_s = \sigma - \sigma_a.$$

Mais en réalité, le Tableau de M. Neukirchen ne renferme que les valeurs k correspondant à celles de d. Il dit (p. 111, ligne 13): „Die Flüssigkeiten wurden in Kugeln von *verschiedenem* Durchmesser aus Celluloid, Pappe oder Aluminiumblech gefüllt und so zur Messung verwandt." Dans ces conditions, il est impossible de comparer les résultats précédents aux valeurs expérimentales de M. Neukirchen. Sa théorie ne permet pas d'expliquer correctement le phénomène de diffusion des rayons γ; au contraire, la théorie contenue dans cette Note interprète d'une manière extrêmement simple et rigoureuse l'affablissement des rayons γ dans le cas de l'arrangement expérimental de M. Neukirchen.

---

[11]) La formule complète pour σ_a peut s'écrire (*Cf.* C. E. Van Orstrand, Reversion of Power Series, Phil. Mag. (6), *19*, **366**, **1910**):

$$\delta = \sigma_a \,.\, d = u + \beta_1 u^2 + (\beta_2 + 2\,\beta_1^2)\, u^3 + (\beta_3 + 5\,\beta_1 \beta_2 + 5\,\beta_1^3)\, u^4 +$$
$$+ (\beta_4 + 6\,\beta_1 \beta_2 + 3\,\beta_2^2 + 21\,\beta_1^2 \beta_2 + 14\,\beta_1^4)\, u^5 + \ldots,$$

$$u = (k-1)/(-a_1 k)\,, \qquad \beta_n = -\,a_{n+1}/a_1\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

$$(J_0 - J_d)/J_0 = (k-1)/k = \sum_{n=1}^{\infty} (-\,a_n)\, \delta^n$$

Enfin, le rapport $\frac{0{\cdot}383}{0{\cdot}504} = 0{\cdot}760$ du coefficient de M. Neukirchen de diffusion des rayons γ dans l'eau à celui de la glycérine est évidemment en contradiction avec la théorie moderne, confirmée par des observations, d'après laquelle la valeur considerée doit être égale à $\frac{230}{279} = 0{\cdot}824$.

Rectification.

(Bulletin intern. de l'Académie des Sc. de Bohême, XXXIII^{e} année, Note „Passage des rayons γ durs à travers une matière ne renfermant que des éléments très légers" présentée le **5** février **1932** par V. T r k a l).

Page **4**, ligne **9** en remontant, *au lieu de* longeur *lisez* longueur.