ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK XXXVIII. ČÍSLO 25.

L'équation de propagation des ondes dans la mécanique ondulatoire et le principe d'Hamilton.

Par
V. TRKAL.

I.

Donnons d'abord quelques indications sur les principaux résultats du célèbre Mémoire de M. Schrödinger[1]). Le lecteur reconstituera les analyses que nous esquissons.

1. L'énergie E d'un point matériel m est définie par la fonction hamiltonienne

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) = E,$$

$V(x, y, z)$ étant l'énergie potentielle et p_x, p_y, p_z les quantités du mouvement projetées. — En posant

$$E = \mp \frac{\partial S}{\partial t}, \quad p_x = \pm \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \pm \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = \pm \frac{\partial S}{\partial z},$$

on obtient l'équation de Jacobi

$$\pm \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + V(x, y, z) = 0.$$

Nous poserons, d'après Schrödinger,

$$S = \frac{h}{2\pi} \log \psi,$$

ce qui nous amène à écrire

$$F\left(x, y, z, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{h^2}{8\pi^2 m}\left\{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2\right\} - (E - V)\psi^2 = 0.$$

[1]) E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem I (Ann. d. Physik, 79, 1926, 361).

En appliquant la formule fondamentale du calcul des variations, on tire du principe de Schrödinger

$$0 = \delta \iiint F\left(x, y, z, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) d\,x\,d\,y\,d\,z =$$

$$= \delta \int \left\{ H\left(\frac{h}{2\,\pi\,\psi}\,\frac{\partial \psi}{\partial x}, \ldots, \ldots, x, \ldots, \ldots\right) - E \right\} \psi^2\,d\,\tau$$

l'équation de propagation des ondes

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\,\pi^2\,m}{h^2}(E - V)\,\psi = 0.$$

2. D'autre part, au point de vue physique, la trajectoire du point matériel m d'énergie E coïncide avec le rayon d'une onde homogène du type classique se propageant dans un milieu d'indice de réfraction défini en chaque point par la loi[2])

$$N = \frac{2\,\pi\,c}{\tilde{\omega}\,h}\sqrt{2\,m\left(\frac{\tilde{\omega}\,h}{2\,\pi} - V\right)} = \frac{c}{E}\sqrt{2\,m\,(E - V)},$$

V étant l'énergie potentielle, $\tilde{\omega}$ la fréquence $\frac{2\,\pi\,E}{h}$ et c la vitesse de la lumière; nous obtiendrons ainsi l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{N^2}{c^2}\,\Delta\,w.$$

Portons la valeur N dans cette équation: l'équation de propagation des ondes (au sens plus général du mot) est, d'après ce qui précède,

$$\Delta\,w - \frac{2\,m\,(E - V)}{E^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$E = \frac{\tilde{\omega}\,h}{2\,\pi}.$$

Écrivons la solution sous la forme $w = e^{i\tilde{\omega}t} \cdot \psi$ en posant, par abréviation, $\tilde{\omega} = 2\,\pi\,E/h$. On obtient ainsi l'équation de propagation des ondes monochromatiques suivante

$$\Delta\,\psi + \frac{8\,\pi^2\,m}{h^2}(E - V)\,\psi = 0.$$

II.

3. Jadis, la fameuse „équation des ondes" fut détuite des propriétés des milieux élastiques, étendues à cet hypothétique éther qu'on chargeait de transmettre les vibrations lumineuses et dont les singulières propriétés

[2]) E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem II (Ann. d. Physik, 79, 1926, 489). M. Planck, Einführung in die theoretische Optik, Leipzig 1927, p. 178 (J. A. Barth).

n'étaient pas à tout prendre beaucoup plus étranges que celles de nos modernes atomes[3]).

Pour obtenir l'équation des vibrations d'un milieu élastique infini, nous partons du principe d'Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,d\,t = 0,$$

où la fonction L (de Lagrange) est la différence entre l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}\iiint \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\,x\,d\,y\,d\,z$$

et l'énergie potentielle

$$\frac{1}{2}\iiint \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\,x\,d\,y\,d\,z,$$

$\varrho = \varrho\,(x, y, z)$ désignant la densité, $\mu =$ Constante la tension du milieu élastique[4]) et le domaine de l'intégration étant infini.

L'intégrale d'Hamilton, grâce à ces formules, peut s'écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,d\,t = \frac{1}{2}\iiiint \left[\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \mu\,(grad\ u)^2\right] d\,x\,d\,y\,d\,z\,d\,t,$$

où

$$L = \frac{1}{2}\iiint \left[\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \mu\,(grad\ u)^2\right] d\,x\,d\,y\,d\,z,$$

l'intégrale étant étendue à l'espace entier.

En posant

$$u = k\,S$$

où S désigne la fonction de Jacobi du point matériel et k un facteur constant, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,d\,t = \frac{k^2}{2}\iiiint \left[\varrho\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \mu\,(grad\ S)^2\right] d\,x\,d\,y\,d\,z\,d\,t =$$

$$= \frac{k^2}{2}\iiiint f\left[\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2, (grad\ S)^2\right] d\,x\,d\,y\,d\,z\,d\,t.$$

D'après l'équation de Jacobi

$$-E + \frac{1}{2\,m}(grad\ S)^2 + V = 0,\quad E = \mp\frac{\partial S}{\partial t}$$

a fonction sous le signe d'intégrale peut s'écrire

$$f\left[\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2, (grad\ S)^2\right] = f\,(E^2, 2\,m\,(E - V)) = \varrho\,E^2 - \mu\,.\,2\,m\,(E - V).$$

[3]) Voir le très intéressant Ouvrage de M. L. de Broglie, Ondes et mouvements, Paris 1926, Préface, (Gauthier-Villars).

[4]) Voir par exemple R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Berlin 1924, p. 209—211, 233, (J. Springer).

Pour rendre compte des lois empiriques des raies spectrales, je ferai l'hypothèse suivante dont l'exactitude me paraît probable:

$$f\,(E^2,\ 2\,m\,(E-V)) = \varrho\, E^2 - \mu\,.\,2\,m\,(E-V) = 0.$$

Or, il suffit de jeter un coup d'ceil sur le principe de Schrödinger,[5])

$$\delta \iiint F\,(\ldots.)\,dx\,dy\,dz = 0$$

pour voir que la fonction F sous le signe $\iiint$ est identiquement nulle, grâce à l'équation de Jacobi du point matériel.

Nous avons ainsi ramené l'étude des mouvements d'un point matériel dans un champ constant défini par l'énergie potentielle $V\ (x,\ y,\ z)$ à celle de la propagation d'une onde sinusoïdale, solution de l'équation

$$\delta \iiiint \frac{k^2}{2}\left[\varrho\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \mu\,(grad\ S)^2\right] dx\,dy\,dz\,dt = 0$$

en tenant compte des deux conditions

$$E = \mp \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2\,m}\,(grad\ S)^2 + V,$$

$$\varrho\, E^2 - \mu\, 2\,m\,(E-V) = 0,$$

Un calcul très simple permet d'écrire la dernière équation sous la forme

$$\delta \iiiint \left\{\frac{2\,m\,(E-V)}{E^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dx\,dy\,dz\,dt = 0$$

d'où, par la méthode usuelle, on trouve facilement

$$\Delta S - \frac{2\,m\,(E-V)}{E^2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0.$$

Nous retrouvons exactement l'équation de propagation des ondes au sens plus général du mot.

En posant

$$S = e^{2\pi i \frac{E}{h} t}\,.\,\psi$$

on trouve pour ψ l'équation

$$\Delta\,\psi + \frac{8\,\pi^2\,m}{h^2}\,(E-V)\,\psi = 0.$$

4. La forme relativiste de l'équation de Jacobi du point matériel de l'énergie

$$W = \mp \frac{\partial S}{\partial t}$$

[5]) On consultera le Mémoire de M. Schrödinger, cité en[1]).

s'écrit[6])

$$\frac{1}{c^2}\left(\mp \frac{\partial S}{\partial t} - V\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m_0^2\,c^2.$$

Dans le cas présent, nous poserons, d'après l'équation de Jacobi,

$$f\left[\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2,\ (grad\ S)^2\right] =$$

$$= \varrho\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \mu\,(grad\ S)^2 = \varrho\, W^2 - \mu\left\{\frac{1}{c^2}\,(W-V)^2 - m_0^2\,c^2\right\} = 0,$$

et par suite la quantité $\frac{\varrho}{\mu}$ sera définie par l'expression

$$\frac{\varrho}{\mu} = \frac{\frac{1}{c^2}\,(W-V)^2 - m_0^2\,c^2}{W^2}.$$

A l'aide de cette relation, le mouvement du mobile est déterminé par la condition que l'intégrale

$$\iiiint \left\{\frac{\frac{1}{c^2}\,(W-V)^2 - m_0^2\,c^2}{W^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (grad\ S)^2\right\} dx\,dy\,dz\,dt$$

soit stationnaire. On obtient ainsi l'équation de propagation valable dans le cas d'un seul point, si les corrections de la Relativité ne sont pas négligeables sous la forme

$$\Delta S - \frac{\frac{1}{c^2}\,(W-V)^2 - m_0^2\,c^2}{W^2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0.$$

Si nous posons

$$S = e^{2\pi i \frac{W}{h}}\,.\,\psi.$$

l'équation de propagation sera[7])

$$\Delta\,\psi + \frac{4\,\pi^2}{h^2\,c^2}\,[(W-V)^2 - m_0^2\,c^4]\,\psi = 0.$$

5. *Remarques diverses.* — Si le champ (défini par la fonction V) est fonction du temps, il faut procéder comme il suit: dans l'équation de propagation

$$\left(\Delta - \frac{2\,m\,(E-V)}{E^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) S = 0$$

[6]) Voir par exemple l'excellent livre de M. L. de Broglie, La Mécanique ondulatoire, Paris 1928, p. 21, (Gauthier-Villars).

[7]) L. de Broglie, La Mécanique ondulatoire, p. 19.

ou

$$\left(\varDelta - \frac{\frac{1}{c^2}(W-V)^2 - m_0^2 c^2}{W^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) S = 0$$

on remplacera respectivement, E ou W par le symbole

$$\mp \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$$

et on obtiendra l'équation de propagation plus générale et un peu plus compliquée. Nous parvenons à l'équation de propagation suivante, à laquelle doit satisfaire l'expression complexe de l'onde sinusoïdale[8]).

$$\varDelta S - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V S \mp \frac{4\pi m}{h} i \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

ou[9])

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - \varDelta S \mp \frac{4\pi i}{h c^2}\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{V^2}{c^2} - m_0^2 c^2\right) S = 0.$$

Cette dernière équation contient toutes celles qui ont été étudiées précédemment.

Appliquons maintenant ce procédé à l'équation de propagation

$$\left(\varDelta + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\right)\psi = 0.$$

ou

$$\left(\varDelta + \frac{4\pi^2}{h^2 c^2}\left[(W-V)^2 - m_0^2 c^4\right]\right)\psi = 0.$$

Nous retombons sur les équations précédentes.

Résumé.

Dans le présent article, j'ai montré comment le principe d'Hamilton pour un milieu élastique infini et l'équation de Jacobi d'un point matériel conduisaient à retrouver l'équation de propagation des ondes dans la mécanique ondulatoire.

Prague, 1 janvier 1929.

(*Institut de la Physique théorique de l'Université Charles IV.*)

---

[8]) E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem IV. (Ann. d. Physik 81, 1926), p. 112.

[9]) L. de Broglie, La Mécanique ondulatoire, p. 21.