

ZVLÁŠTNÍ OTISK.

ROČNÍK LV.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY.

REDIGUJE

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ,

při redakci spolupůsobí

KAREL PETR, FRANTIŠEK ZÁVIŠKA, AUGUST ŽÁČEK,
JAROSLAV FRIEDRICH.

VYDÁVÁ

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ
A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.



V PRAZE.

TISKEM A NÁKLADEM VLASTNÍM.

1926.

Předplatné Kč 36.—.

Analagon funkce Lagrangeovy pro Hamiltonovu funkci, závisící jediné na „účinnostních konstantách“.

Napsal V. Trkal.

$$\text{Rovnice} \quad \sum_j p_j \dot{q}_j - L = H, \quad (1)$$

kde $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ značí Lagrangeovu funkci [rozdíl kinetické a potenciální energie] a $H(q_k, p_k)$ znamená Hamiltonovu funkci nazávisící explicitě na čase (součet obou energií t. j. úhrnnou energií), platná pro libovolné obecné souřadnice q_k (a příslušné k nim rychlosti $\dot{q}_i$ resp. impulsy p_j) pozbývá platnosti v případě, jenž se vyskytuje v problémech dynamiky atomu, totiž v tom případě, že se Hamiltonova funkce dá vyjádřiti jako funkce „účinnostních konstant“ J_j , které hrají úlohu impulsů, k nimž přísluší jakožto kanonicky sdružené souřadnice t. zv. „úhlové proměnné“ $w_j = v_j t + \delta_j$ s periodou rovnou 1.

V tom případě nastupuje místo rovnice (1) rovnice

$$\text{čili} \quad \sum_j J_j \dot{w}_j - L(\dot{w}_i) = H(J_k), \quad (2)$$

$$\sum_j J_j v_j - L(v_i) = H(J_k), \quad (2')$$

kde $H(J_k)$ značí Hamiltonovu funkci rovnou energii uvažovaného problému $L(v_i)$ jest časový střed $\bar{L}$ Lagrangeovy funkce L uvažovaného problému, t. j.

$$L(v_i) = \overline{L(q_i, \dot{q}_i)} = \bar{L}. \quad (3)$$

Pak zcela podobně jako rovnici (1) přísluší vztah

$$p_k = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_k},$$

tak rovnici (2') náleží relace ¹⁾

$$J_k = \frac{\partial \bar{L}(v_i)}{\partial v_k}, \quad (4)$$

¹⁾ Tento vztah odvodil jsem již dříve ve zvláštním případě (pro případ Coulombova silového pole) v práci „Příspěvek k dynamice neutrálního atomu heliového“, (Rozpravy České akademie věd a umění za r. 1926), jež brzo vyjde tiskem. — Viz též V. Trkal: „Zur Dynamik des Heliumatoms“ ZS. f. Phys., 36, 144, (1926).

Důkaz tohoto vztahu v obecném případě podávám nyní. Pokud se relace (2') a (3) týče, viz též moji práci „Časopis pro pěst. mat. a fys.“ 51, 101, (1922) a v kratší formě v Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 21, 80, (1922.)

jež tvoří jakýsi protějšek ke známé rovnici²⁾

$$v_k = \frac{\partial H(J_j)}{\partial J_k}.$$

Odtud snadno plynou vztahy

$$\frac{\partial v_k}{\partial J_l} = \frac{\partial v_l}{\partial J_k}, \quad \frac{\partial J_k}{\partial v_l} = \frac{\partial J_l}{\partial v_k}.$$

Důkaz tvrzení (2'), (3) a (4) podávám v následujících řádcích (§ 3, § 4). Pro lepší porozumění uvádím v § 1. přechod od Hamiltonových rovnic k Lagrangeovým obráceným postupem než přechází na př. Carathéodory³⁾ od rovnic Lagrangeových k Hamiltonovým a v § 2 podávám interpretaci veličin L a H způsobem, jaký zvolil na př. Born.⁴⁾

§ 1. *Přechod od Hamiltonových rovnic k Lagrangeovým.* Budiž dána Hamiltonova funkce $H(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_n, p_n)$, anebo v krašším označení $H(q_i, p_i)$, jakožto analytická funkce obecných souřadnic q_i a kanonicky k nim sdružených obecných impulsů p_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), nezávislejší explicitě na čase t a vyhovující požadavku, že determinant

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right| \neq 0. \quad (5)$$

Tato funkce splňuje podle definice kanonický systém

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (6)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (7)$$

Vzhledem k tomu, že jest splněna podmínka (5), můžeme vypočítati z rovnic (6) veličiny $p_1, p_2, \dots, p_n$ a obdržíme

$$p_k = f_k(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_n, \dot{q}_n), \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

což budeme psáti kratěji ve tvaru

$$p_k = f_k(q_i, \dot{q}_i). \quad (8)$$

Nyní zavedeme ve funkci $L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_n, \dot{q}_n)$ anebo v kratším označení $L(q_i, \dot{q}_i)$ pomocí specialisované Legendreovy transformace tohoto tvaru:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = -H(q_k, f_k) + \sum_j f_j \dot{q}_j. \quad (9)$$

²⁾ M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, I., Berlin, 1925, p. 9. form. (15).

³⁾ C. Carathéodory v novém vydání knihy *Riemann-Weber's Differentialgleichungen der Physik*, I, Braunschweig, 1925, p. 186.

⁴⁾ M. Born, l. c. p. 19 a 20.

Derivujeme-li tuto rovnici parciálně podle $\dot{q}_i$, obdržíme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \dot{q}_j \right) \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad (10)$$

anebo vzhledem k rovnici (6):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Derivujeme-li však rovnici (9) parciálně dle $\dot{q}_i$, obdržíme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial f_j} - \dot{q}_j \right) \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + f_i, \quad (12)$$

což vzhledem k rovnicím (6) a (8) dá

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (13)$$

Derivováním podle času t rovnice (13) obdržíme vzhledem k rovnicím (7) a (11) rovnici

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (14)$$

odkudž plyne systém Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

Rovnici (9) lze psáti symetričtěji ve tvaru

$$L + H = \sum_j p_j \dot{q}_j; \quad (16)$$

jest patrné, že soustava rovnic (6), (11), (13), (16) zůstane beze změny, vyměníme-li v těchto rovnicích H za L a $\dot{q}_j$ za p_j .

Z podmínky (1) plyne analogická podmínka, že determinant

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0. \quad (17)$$

Abychom to dokázali, derivujme identitu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} H \left(q_k, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right),$$

jež plyne z rovnic (6) a (13), parciálně podle $\dot{q}_j$; jestliže ε_{ij} značí číslo, které pro $i=j$, jest rovno jednotce a pro $i \neq j$ rovná se nule, bude

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Z tohoto systému rovnic plyne pak pomocí poučky o násobení determinantů vztah

$$1 = \left| \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \right|, \quad (19)$$

čímž jest dokázáno, že podmínky (5) a (17) vyplývají jedna z druhé.

§ 2. *Interpretace funkcí L a H.* — Lagrangeovy rovnice plynou však také, jak známo, jako nutné podmínky z Hamiltonova variačního principu

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt = \text{extremum}; \quad (20)$$

jsou nezávislé, jak rovněž známo, na volbě obecných souřadnic q_i .

Tážeme-li se po interpretaci funkce L , stačí vyšetřiti význam funkce L jakožto funkce pravoúhlých souřadnic, v nichž budou rovnice Lagrangeovy míti tvar

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Tyto rovnice musí souhlasiti s pohybovými rovnicemi Newtonovými

$$\frac{d}{dt} (m_k v_k) = \mathfrak{F}_k, \quad (22)$$

kde m_k jest hmota k tého bodu, v_k jeho rychlost a $\mathfrak{F}_k$ síla na něj působící.

Zavedeme-li nyní funkci T složek rychlostí tak, že

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} &= m_k \dot{x}_k, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_k} &= m_k \dot{y}_k, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_k} &= m_k \dot{z}_k, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

a dají-li se síly $\mathfrak{F}_k$ derivovati z potenciální energie V , jež závisí jen na souřadnicích, t. j.

$$\mathfrak{F}_k x = - \frac{\partial V}{\partial x_k}, \text{ atd.}, \quad (24)$$

pak rovnice (22) jest možno psáti ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial (-V)}{\partial x_k} = 0,$$

čili

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial (T - V)}{\partial x_k} = 0, \quad (25)$$

takže porovnáním rovnic (21) a (25) najdeme

$$L = T - V. \quad (26)$$

Z rovnic (23) plyne

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

jakožto kinetická energie. Tudíž Lagrangeova funkce $L = T - V$ jest representována rozdílem kinetické a potenciální energie.

Význam funkce H vyplyne takto:

Ježto H nezávisí explicitě na čase, platí vzhledem k rovnicím (6) a (7)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] = 0,$$

tudíž

$$H = (q_i, p_i) = \text{Const.}$$

V libovolných souřadnicích klidné soustavy souřadné jest kinetická energie kvadratickou homogenní funkcí T v rychlostech $\dot{q}_i$. Podle Eulerovy věty platí tedy

$$2T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i p_i \dot{q}_i \quad (27)$$

a tudíž

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V \quad (28)$$

jest úhrnná energie uvažovaného systému.

§ 3. *Přechod od Hamiltonovy funkce $H(J_j)$, jež závisí toliko na „účinnostních konstantách“ J_j , k funkci $L(w_i)$, která závisí jen na derivacích „úhlových proměnných“ podle času.* — Rovnice (16)

$$L(q_i, \dot{q}_i) + H(q_k, p_k) = \sum_j p_j \dot{q}_j,$$

kde L je rozdíl kinetické a potenciální energie a H jest úhrnná energie uvažované soustavy, platí jistě v případě, kdy H obsahuje kromě veličin p_k aspoň jednu z veličin q_k explicitě. V případě, že H neobsahuje ani jednu z veličin q_k explicitě, jsou, jak z rovnice (7) patrné, všechna p_k konstantní, a tudíž, jak plyne z rovnice (6),

také všechna $\dot{q}_k$ jsou konstantní; tedy všechna q_k jsou lineárními funkcemi času.

V poslední rovnici jest pak $L(q_i, \dot{q}_i)$ nutně konstantou, jak ukazuje též rovnice (11), a může představovati rozdíl kinetické a potenciální energie jen v tom případě, když je tento rozdíl obou energií konstantní. Poněvadž však součet obou energií dává úhrnnou energii, která jest konstantní, musí býti každá z obou energií pro sebe konstantou.

V problémech dynamiky atomu snažíme se vyjádřiti úhrnnou energii atomu jakožto funkci $H(J_j)$ jediné veličiny J_j , t. zv. „účinnostních konstant“, jež hrají úlohu obecných impulsů, k nimž kanonicky sdružené obecné souřadnice w_j , t. zv. „úhlové proměnné“ mají periodu rovnou jednotce. Pohybové rovnice Hamiltonovy znějí v tom případě

$$\dot{J}_j = -\frac{\partial H(J_j)}{\partial w_i} = 0; \quad \dot{w}_i = \frac{d}{dt}(v_i t + \delta_i) = v_i = \frac{\partial H(J_j)}{\partial J_i} = \text{konst.} \quad (29)$$

Postup vyličený v § 1. redukuje se nyní na toto:

Za předpokladu, že determinant

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial J_i \partial J_j} \right| \neq 0, \quad (30)$$

lze vypočítati z rovnic

$$\dot{w}_i = v_i = \frac{\partial H(J_j)}{\partial J_i} \quad (29')$$

veličiny $J_1, J_2, \dots, J_n$; obdržíme

$$J_k = F_k(\dot{w}_i). \quad (31)$$

Nyní zavedeme funkci $L(\dot{w}_i)$ rovnicí

$$L(\dot{w}_i) = -H(J_k) + \sum_j F_j \dot{w}_j. \quad (32)$$

Derivujeme-li tuto rovnici parciálně podle $\dot{w}_i$, obdržíme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{w}_i} = -\sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial F_j} - \dot{w}_j \right) \frac{\partial F_j}{\partial \dot{w}_i} + F_i, \quad (33)$$

což vzhledem k rovnici (29')

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_j)}{\partial J_i}$$

dá

$$J_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{w}_i} = \frac{\partial L(v_j)}{\partial v_i}. \quad (34)$$

Nyní běží o interpretaci veličiny $L(\dot{w}_j) = L(v_j)$. Poněvadž je to veličina konstantní a, obecně vzato, problém, jenž se podařilo charakterisovati funkcí $H(J_j)$, má Lagrangeovu funkci $L = T - V$ na čase závislou, nemůže to býti v obecném případě funkce Lagrangeova, která by byla rozdílem kinetické a potenciální energie.

§ 4. Interpretace funkce L . Na případ, který zde uvažujeme, totiž ten, kdy se dá Hamiltonova funkce $H(J_j)$ vyjádřiti jediné pomocí „účinnostních konstant“, lze převéstí daný dynamický problém vždy, když se dá Hamilton-Jacobiho parciální rovnice diferenciální, příslušná k Hamiltonově funkci $H(q_i, p_i)$, řešiti separací proměnných, t. j. když se dá položit

$$p_i = \frac{\partial S_i(q_i)}{\partial q_i}, \quad (35)$$

kde $S_i(q_i)$ jest funkce závislejší pouze na jediné proměnné q_i . Pak se dají konstantní integrály vzaté podél jedné periody

$$J_i = \oint p_i dq_i \quad (36)$$

zavéstí jakožto konstantní impulsy pomocí kanonické transformace⁵⁾

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i J_i dw_i + d\{S^*(q_j, w_j)\}, \quad (37)$$

t. j.

$$\left. \begin{aligned} J_i &= -\frac{\partial}{\partial w_i} S^*(q_j, w_j), \\ -p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} S^*(q_j, w_j). \end{aligned} \right\} \quad (37')$$

Podle rovnice (27) jest

$$2T = \sum_i p_i dq_i$$

a tedy střední hodnota dvojnásobné kinetické energie za časový interval $t_1 - t_2$ bude dána vzorcem

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{T} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i dq_i = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_i J_i dw_i + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dS^*. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

⁵⁾ M. Born, l. c., p. 94.

Zvolíme-li interval časový $t_2 - t_1$ dostatečně veliký, obdržíme za časový střed kinetické energie výraz

$$2 \bar{T} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sum_i J_i v_i dt$$

čili

$$2 \bar{T} = \sum_i J_i v_i = \sum_i J_i \dot{w}_i. \quad (39)$$

Tedy z rovnice (32) plyne

$$\mathbf{L}(\dot{w}_i) = -\mathbf{H}(J_k) + 2 \bar{T} = -(T + V) + 2 \bar{T} = -(\bar{T} + \bar{V}) + 2 \bar{T} = \bar{T} - \bar{V} = \bar{L}, \quad (40)$$

tudíž $\mathbf{L}(w_i)$ má význam časového středu Lagrangeovy funkce rovné rozdílu kinetické a potenciální energie daného dynamického systému.

Z podmínky (30) plyne jako důsledek, že determinant

$$\left| \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{w}_i \partial \dot{w}_j} \right| \neq 0. \quad (41)$$

Abychom to ukázali, derivujeme identitu

$$\dot{w}_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \mathbf{H} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{w}_k} \right),$$

jež plyne z rovnic (29'), (34), (40), parciálně podle $\dot{w}_j$; značí-li ε_{ij} číslo, které pro $i = j$ jest rovno jednotce a pro $i \neq j$ rovná se nule, bude

$$\varepsilon_{ij} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial J_i \partial J_k} \cdot \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v_k \partial v_j} \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (42)$$

Z tohoto systému rovnic plyne pak pomocí poučky o násobení determinantů

$$1 = \left| \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial J_i \partial J_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v_k \partial v_j} \right|, \quad (44)$$

čímž důkaz proveden.

Poznámka. Z rovnice (34) vyplývá okamžitě vztah

$$\frac{\partial J_k}{\partial v_l} = \frac{\partial J_l}{\partial v_k} \quad (44)$$

a z rovnice (29') zcela podobná relace

$$\frac{\partial v_k}{\partial J_l} = \frac{\partial v_l}{\partial J_k}; \quad (45)$$

oba determinanty (30) a (41) jsou symetrické.

Sur une analogie de la fonction de Lagrange pour la fonction hamiltonienne ne dépendant que des „constantes d'action.“

(Extrait de l'article précédent.)

L'équation

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - L = H \quad (1)$$

où $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ désigne la fonction de Lagrange et $H(q_k, p_k)$ la fonction hamiltonienne ne dépendant pas, explicitement, du temps, valable pour des coordonnées généralisées arbitraires, perd sa validité dans un cas qui se présente dans la théorie de la dynamique de l'atome, à savoir le cas où la fonction hamiltonienne peut être exprimée en fonction des „constantes d'action“ J_j jouissant le rôle de moments, auxquels appartiennent, comme variables canoniques conjuguées, les coordonnées dites „variables angulaires“ $w_j = v_j t + \vartheta_j$ à la période égale à 1. En ce cas, l'équation (1) est remplacée par l'équation

$$\sum_j J_j \dot{w}_j - \mathbf{L}_i(\dot{w}_i) = \mathbf{H}(J_k) \quad (2)$$

ou bien

$$\sum_j J_j v_j - \mathbf{L}(v_i) = \mathbf{H}(J_k) \quad (2')$$

où $\mathbf{H}(J_k)$ désigne la fonction hamiltonienne égale à l'énergie totale du problème considéré et $\mathbf{L}(v_i)$ est la moyenne $\bar{L}$ de la fonction de Lagrange L du problème considéré, c. à d.

$$\mathbf{L}(v_i) = L(q_i, \dot{q}_i) = \bar{L}. \quad (3)$$

A l'équation (1) se rattache, comme on sait, la relation

$$p_k = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_k};$$

d'une manière analogue se rattache à l'équation (2') la relation

$$J_k = \frac{\partial \bar{L}(v_i)}{\partial v_k} \quad (4)$$

qui est, en un certain sens, le pendant de l'équation connue

$$v_k = \frac{\partial \mathbf{H}(J_j)}{\partial J_k}.$$

On en tire facilement les relations

$$\frac{\partial v_k}{\partial J_l} = \frac{\partial v_l}{\partial J_k}, \quad \frac{\partial J_k}{\partial v_l} = \frac{\partial J_l}{\partial v_k}.$$