Zvláštní otisk z Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, ročník LI.

O kvantisaci podmínečně periodických pohybů s applikací na Rutherford-Bohrův model atomu.*)

Viktor Trkal.

Úvod.

Účelem této práce jest odvoditi obecnou a — pokud mi známo — dosud neuveřejněnou podmínku (24) (variační princip), která platí pro kvantisaci podmínečně periodických pohybů, a doložiti ji na příkladech, z nichž většina se vztahuje k Rutherford-Bohrovu modelu atomu.

Pohyby podmínečně periodické**) získaly ve fysice na důležitosti od té doby, co Schwarzschild***) a Epstein†) applikovali methody nebeské mechaniky na zmíněný již model atomu. Dle Rutherforda sestává atom každého prvku — jak známo — z jádra kladně nabitého mizivě malých rozměrů a ohromné hmoty (vůči hmotě elektronu), kolem něhož krouží v normálním (neutralisovaném) stavu tolik elektronů, kolik kladných nábojů obsahuje jádro (anebo, což jest totéž, kolik udává řadové číslo prvku v periodické soustavě Mendělejevově [t. zv. atomové číslo prvku], jež jest zhruba

---

*) Předneseno ve zkrácené formě na týdenní schůzi Jednoty českých matematiků a fysiků 26. listopadu 1921.

**) Viz na př. *C. L. Charlier*, Mechanik des Himmels, Leipzig (Veit&Comp.) 1902, 1. Bd. p. 77. a násl.

***) Berl. Ber. 1916, p. 548.

†) Ann. d. Phys. *50* (1916), p. 489, *51* (1916), p. 168.

rovno polovině atomové váhy prvku). Tyto elektrony však dle Bohra krouží jen v jistých „dovolených“ drahách, kteréžto jsou zvláštním způsobem charakterisovány pomocí Planckova účinnostního kvanta h. Bohr předpokládá, že jen tyto „dovolené“ dráhy elektronu jsou „stabilní“; pohybuje-li se totiž elektron v těchto „dovolených“ drahách, nemá dle Bohra nic vyzařovati, nesmí ztráceti energii a blížiti se k jádru, což odporuje klassické theorii elektrodynamiky. Elektron může dle dalšího předpokladu Bohrova vyzářiti energii (a to jakožto jednobarevné světlo) jen tehda, když přeskočí z jedné „dovolené“ („přípustné“) dráhy do jiné „dovolené“ („přípustné“) dráhy; tu pak vyzáří přesně jedno kvantum energie

$$h\nu_0 = W_1 - W_2, \text{ (frekvenční podmínka Bohrova),}$$

kde ν_0 jest frekvence vyzářeného světla, jež se jeví jako ostrá spektrální čára ve vidmu prvku, k jehož atomu tento elektron náleží; W_1, W_2 jsou kvantisované energie elektronu na počátku a na konci skoku z „dovolené“ dráhy 1 do „dovolené“ dráhy 2. V příkladech 3. až 6. jsou počítány tyto energie W pro dráhy různých tvarů; abychom obdrželi frekvenci světla nějaké spektrální čáry, nutno výraz pro W v každém z těchto uvedených příkladů pozměniti tak, že celá čísla (čísla kvantová) označovaná tam n, n', . . . opatříme jednou indexy 1, podruhé indexy 2; tak obdržíme W_1, W_2, a hledaná frekvence bude potom

$$\nu_0 = \frac{1}{h}(W_1 - W_2).$$

Souhlas této „revoluční“ theorie s pokusem je velmi skvělý; nehledíce na četné její nynější obtíže a kontradikce s klassickou theorií musíme doufati, že v budoucnu se podaří spolehlivě překlenouti propast zející mezi klassickou a kvantovou theorií. — Podrobné poučení o otázkách sem spadajících nalezne čtenář zejména v citované níže knize Sommerfeldově (Atombau und Spektrallinien); ostatně v tomto čísle „Časopisu“ uvádím něco z další hlavní literatury těchto problémů a kromě toho, jak již v letošní výroční zprávě J. Č. M. a F. bylo oznámeno, vyjde brzo také česká knížka pojednávající o těchto a příbuzných otázkách moderní fysiky.

I. Část obecná.

Uvažujme konservativní dynamickou soustavu o s stupních volnosti a označme písmenami $q_1, q_2, \ldots, q_s$ obecné Lagrange-ovy souřadnice. Dále budeme předpokládati, že kinetický potenciál L (Lagrangeova funkce) jest dán jakožto funkce jedině Lagrangeových obecných souřadnic $q_1, q_2, \ldots, q_s$ a obecných rychlostí $\dot q_1$,

$\dot q_2, \ldots, \dot q_s$ (tečky nad písmeny značí derivace dle času) a že neobsahuje explicite čas t. Pak platí

(1) $$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^{s} \ddot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} + \sum_{r=1}^{s} \dot q_r \frac{\partial L}{\partial q_r}$$

Avšak dle Langrangeových rovnic jest

(2) $$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right);$$

tedy po dosazení (2) do (1) obdržíme

(3) $$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^{s} \ddot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} + \sum_{r=1}^{s} \dot q_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{r=1}^{s} \dot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right).$$

Integrací obdržíme odtud t. zv. integrál energie

(4) $$\sum_{r=1}^{s} \dot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - L = Const.$$

Za svrchu učiněného předpokladu, že L neobsahuje explicite čas t, jest totiž

(5) $$L = E_{kin} - E_{pot},$$

kde kinetická energie (E_{kin}) jest homogenní kvadratickou funkcí obecných rychlostí $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s$ a potenciální energie (E_{pot}) závisí pouze na obecných souřadnicích $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Tedy

(6) $$Const. = \sum_{r=1}^{s} \dot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - L = \sum_{r=1}^{s} \dot q_r \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot q_r} - E_{kin} + E_{pot} = \\ = 2E_{kin} - E_{kin} + E_{pot},$$

poněvadž E_{kin} jest homogenní kvadratickou funkcí proměnných $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s$. Tudíž ze (6) plyne

(7) $$Const. = E_{kin} + E_{pot} = W,$$

kdež W značí úhrnnou energii uvažované konservativní dynamické soustavy. Dosazením (7) do (4) obdržíme pro úhrnnou energii W vztah

(8) $$\sum_{r=1}^{s} \dot q_s \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - L = W = Const.$$

Zavedeme-li sem ještě obecné momenty (impulsy) obvyklou definicí

(9) $$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot q_r},$$

obdržíme*)

*) Viz *E. T. Whittaker*: A Treatise on the Analytical Dynamics, 2nd edition, Cambridge (University Press), 1917; p. 62.

$$(10)\qquad \sum_{r=1}^{s} p_r\,\dot q_r - L = W = Const.$$

Znásobme obě strany této rovnice časovým elementem dt, dále integrujme v mezích 0 do T, dělme pak dobou T a nechme T neomezeně vzrůstati; najdeme tak časový střed $\overline{W}$, jenž ovšem vzhledem k tomu, že $W = Const.$, bude roven W, totiž

$$(11)\qquad \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{r=1}^{s}\frac{1}{T}\int_0^T p_r\,\dot q_r\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T L\,dt\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T W\,dt = W\,.$$

Je-li pohyb „podmíněně periodický“, bude časový střed výrazu $p_r\,\dot q_r$ za dobu neomezeně dlouhou roven časovému středu téhož výrazu za jeho periodu T_r, tak že obdržíme

$$(12)\qquad \sum_{r=1}^{s}\frac{1}{T_r}\int_0^{T_r} p_r\,\dot q_r\,dt - \frac{1}{T^*}\int_0^{T^*} L\,dt = W,$$

kde T^* značí periodu kinetického potenciálu L.

Označíme-li ještě časový střed kinetického potenciálu písmenem

$$(13)\qquad \overline{L} = \frac{1}{T^*}\int_0^{T^*} L\,dt$$

a zavedeme-li frequence ν_r místo period T_r ze vztahu

$$(14)\qquad \nu_r = \frac{1}{T_r}\,,$$

obdržíme ze (12)

$$(15)\qquad \sum_{r=1}^{s}\nu_r \oint p_r\,dq_r - \overline{L} = W,$$

kde*)

$$(16)\qquad \int_0^{T_r} p_r\,\dot q_r\,dt = \oint p_r\,dq_r = I_r$$

značí „fásový integrál“. Tudíž úhrnnou energii uvažované konservativní dynamické soustavy můžeme psáti v definitivním tvaru

$$(17)\qquad W = \sum_{r=1}^{s} I_r\,\nu_r - \overline{L}.$$

*) Znak $(\int)$ značí zde totéž jako v literatuře zavedený znak integrálu, přes nějž jest narýsován kroužek; obě závorky u integrálu v našem textu třeba si doplniti na uzavřený kroužek, položený přes znak integrálu.

Mysleme si nyní $W, I_r, \nu_r, \overline{L}$ vyjádřeny jakožto funkce „strukturních“ konstant (t. j. hmot, nábojů, intensity pole elektrického neb magnetického atd.) a „geometricko-kinematických“ parametrů. Tyto „geometricko-kinematické“ parametry charakterisují nejčastěji tvar a rozměry dráhy pohybující se uvažované soustavy dynamické (jest to na př. velká poloosa a číselná výstřednost elliptické dráhy elektronu obíhajícího kolem kladného jádra), jindy opět tímto „geometricko-kinematickým“ parametrem jest na př. úhlová rychlost rotující koule kolem osy jdoucí jejím středem atd. V klassické theorii mohou nabývati tyto „geometricko-kinematické“ parametry zásadně všech možných hodnot. Jinak je tomu však v theorii kvant; tam jsou přípustné jen ty hodnoty těchto „geometricko-kinematických“ parametrů, které plynou z podmínky na př. Sommerfeldovy, že fásový integrál (16) má býti roven celistvému (a kladnému) násobku účinnostního kvanta $h = 6{,}54\,.\,10^{-27}$ *erg sec* (Planckovy konstanty).

Třeba že jsme si představili $W, I_r, \nu_r, \overline{L}$ jakožto funkce těchto „geometricko-kinematických“ parametrů, můžeme přece považovati tyto veličiny $W, I_r, \nu_r, \overline{L}$ napřed za funkce fásových integrálů $I_1, I_2, \ldots, I_s$, kteréžto ovšem jsou opět funkcemi výše zmíněných „geometricko-kinematických“ parametrů $a, \varepsilon, \ldots$

Tedy můžeme psáti:

$$(18)\qquad \frac{\partial W}{\partial a} = \sum_{r=1}^{s}\frac{\partial W}{\partial I_r}\frac{\partial I_r}{\partial a} = \sum_{r=1}^{s}\nu_r\frac{\partial I_r}{\partial a},\qquad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \sum_{r=1}^{s}\frac{\partial W}{\partial I_r}\frac{\partial I_r}{\partial \varepsilon} = \sum_{r=1}^{s}\nu_r\frac{\partial I_r}{\partial \varepsilon}$$

atd., poněvadž*)

$$(19)\qquad \frac{\partial W}{\partial I_r} = \nu_r,\qquad (r = 1, 2, \ldots, s)\,.$$

Theorie kvant připouští pouze takový pohyb uvažované dynamické soustavy, pro který je splněna podmínka na př. Sommerfeldova

$$(20)\qquad I_r = \oint p_r\,dq_r = n_r\,h,\qquad (r = 1, 2, \ldots, s)$$

kde n_r je celé kladné číslo a h výše zmíněné účinnostní kvantum Planckovo. Tedy I_r jsou konstanty nezávislé na $(a, \varepsilon, \ldots)$, tak že (17) a (18) nabudou tvaru

$$(21)\qquad W = \sum_{r=1}^{s} n_r\,h\nu_r - \overline{L},$$

$$(22)\qquad \frac{\partial W}{\partial a} = 0,\qquad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = 0, \ldots \text{ atd.},$$

*) Viz *J. M. Burgers*: Het atoommodel van Rutherford - Bohr. (Proefschrift). — Haarlem 1918; p. 43, § 10, form. (5).

N. Bohr: On the Quantum Theory of Line - Spectra. Part I. (D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. og Mathem. Afd., 8 Raekke, IV 1.) Kobenhaven 1918. Separate Copy p. 29 form. (5*).

kteréžto obě podmínky [(21) a (22)] musí býti současně splněny. Podmínky vyjádřené ve (22) lze stručněji shrnouti takto:

(23) $$\delta W = 0,$$

kde variace se vztahuje jedině na všechny „geometricko-kinematické“ parametry. Dosadíme-li do (23) za W příslušný výraz z (21), obdržíme pro kvantisaci uvažované konservativní dynamické soustavy podmínku

(24) $$\delta\left\{\sum_{r=1}^{s} n_r h\nu_r - \overline{L}\right\} = 0,$$

při čemž se variace vztahuje pouze na všechny „geometricko-kinematické“ parametry; ovšem předem již musí býti vyjádřeny všechny frekvence ν_r (jichž je na počet tolik, jako stupňů volnosti uvažované soustavy) a také časový střed $\overline{L}$ kinetického potenciálu jakožto funkce těchto „geometricko-kinematických parametrů“.

Podmínka (24) je tedy úplně rovnocenná s podmínkou Sommerfeldovou (20); nemůže dáti o nic více a o nic méně než podmínka (20) [za předpokladu, že frekvence ν_r v podmínce (24) jsou identické s výrazy $\frac{1}{h}\frac{\partial W^*}{\partial n_r}$, ($r = 1, 2, \dots s$), (kdež W^* značí kvantisovaný výraz Sommerfeldův pro energii), jestliže ovšem do výrazů pro ν_r dosadíme za „geometricko-kinematické“ parametry (a, ε, ...) kvantisované jejich hodnoty plynoucí z (20). Tento předpoklad souvisí s tím, že I_r nejsou integrálními invarianty; pouze $\sum_{r=1}^{s} I_r$ jest integrální invariant — nezávislý na volbě souřadnic]. Avšak o těchto otázkách hodlám pojednati jindy.

Vidíme, že „stacionární stavy“ soustav „podmínečně periodických“ jsou určeny — jak ukazuje (20) — podmínkou, že rozdíl mezi $\sum_{r=1}^{s} n_r h\nu_r$ a časovým středem $\overline{L}$ kinetického potenciálu má býti extremum (a to, jak z později uvedených příkladů lehce patrno, minimum).

Ve speciálně relativistické mechanice zůstanou všechny hořejší předpoklady a vývody v platnosti; pouze za kinetický potenciál L nutno dosaditi modifikovanou funkci Lagrangeovu

(25) $$L = F - E_{pot}; \quad F = -m_0 c^2 \left(\sqrt{1-\beta^2} - 1\right), \quad \beta = \frac{v}{c},$$

a za kinetickou energii výraz

(26) $$E_{kin} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

kde v značí okamžitou rychlost, c rychlost světla a m_0 „klidovou“ hmotu.

Ve speciálně relativistické mechanice platí vztah

(27) $L = F - E_{pot} = E_{kin} + F - W$, neboť $E_{kin} + E_{pot} = W$.

Znásobíme-li funkci L elementem časovým dt a integrujeme-li od 0 do T, obdržíme

(28) $$\int_0^T L\,dt = \int_0^T (E_{kin} + F)\,dt - WT.$$

Zavedeme-li sem „účinnostní funkci“

(29) $$S = \int_0^T (E_{kin} + F)\,dt,$$

obdržíme

(30) $$\frac{1}{T}\left(S - \int_0^T L\,dt\right) = W.$$

Je-li pohyb periodický, musí platiti tato relace:

(31) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(S - \int_0^T L\,dt\right) = \overline{S} - \overline{L} = W,$$

kde $\overline{S}$ a $\overline{L}$ značí časové středy funkcí S a L.

Porovnáváním relace (31) se vztahy (17) a (21) obdržíme buď

(32) $$\overline{S} = \sum_{r=1}^{s} I_r \nu_r \quad \text{(platí pro klassickou theorii)},$$

anebo

(33) $$\overline{S} = \sum_{r=1}^{s} n_r h\nu_r \quad \text{(platí pro theorii kvant)},$$

při čemž jest buď

(34) $$\overline{S} = \frac{2}{T^*}\int_0^{T^*} E_{kin}\,dt \quad \text{(platí pro obyčejnou mechaniku)}$$

anebo

(35) $$\overline{S} = \frac{1}{T^*}\int_0^{T^*} (E_{kin} + F)\,dt \quad \text{(platí pro speciálně relativistickou mechaniku)}.$$

V posledních dvou vztazích značí T^* periodu funkcí za integračním znamením.

Shrneme-li hlavní výsledky, jež jsme obdrželi, máme tyto věty:

1. Úhrnná (klassická) energie W podmínečně periodické soustavy dá se vyjádřiti takto:

$$W = \sum_{r=1}^{s} \nu_r \left(\int\right) p_r\,dq_r - \overline{L}.$$

2. *Její kvantisace plyne z tohoto variačního principu:*

$$\delta\left\{\sum_{r=1}^{s} n_r h\nu_r - \overline{L}\right\} = 0.$$

II. Příklady.

Příklad 1. *Oscillátor kmitající v přímce kolem pevné rovnovážné polohy.*

Oscillátorem dle terminologie Planckovy rozumíme hmotný bod, konající jednoduchý harmonický pohyb v přímce, jenž nastává tehdá, když tato bodová hmota m jest tažena zpět do rovnovážné polohy silou úměrnou okamžité její výchylce ξ z polohy rovnovážné. Pohyb oscillátoru jest tedy dán differenciální rovnicí

$$m\ddot{\xi} = -k\xi, \quad k > 0 \tag{36}$$

anebo

$$\ddot{\xi} + 4\pi^2\nu^2\xi = 0, \tag{37}$$

kde konstanta ν jest frekvence tohoto harmonického pohybu; integrací obdržíme

$$\xi = a\cos(2\pi\nu + \vartheta). \tag{38}$$

Úhrnná energie oscillátoru jest

$$W = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 + 2\pi^2 m\nu^2\xi^2 = 2\pi^2 m^2\nu^2 a^2, \tag{39}$$

kinetická energie

$$E_{kin} = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 = 2\pi^2 m\nu^2 a^2 \sin^2(2\pi\nu t + \vartheta) \tag{40}$$

a potenciální energie

$$E_{pot} = 2\pi^2 m\nu^2\xi^2 = 2\pi^2 m\nu^2 a^2 \cos^2(2\pi\nu t + \vartheta). \tag{41}$$

Kinetický potenciál jest

$$L = E_{kin} - E_{pot} = 2\pi^2 m\nu^2 a^2 \cos 2(2\pi\nu t + \vartheta), \tag{42}$$

jeho časový střed

$$\overline{L} = \nu\int_0^{\frac{1}{\nu}} 2\pi^2 m\nu^2 a^2 \cos 2(2\pi\nu t + \vartheta)\, dt \tag{43}$$

$$= 2\pi^2 m\nu^3 a^2 . \int_0^{\frac{1}{\nu}} \cos 2(2\pi\nu t + \vartheta)\, dt = 0.$$

Tedy dle (15)

$$W = \nu \oint pdq - \overline{L} = \nu \oint pdq \tag{44}$$

a kvantisací dle (21)

$$W = nh\nu. \tag{45}$$

Zde jediný „kinematický“ parametr jest ν; variování výrazu (45) dle vzorce (24) postrádá tu však, jak patrno, smyslu; tedy (45) jest definitivní výraz pro kvantisovanou energii a souhlasí s výrazem Planckovým *)

Příklad 2. *Rotátor otáčející se kolem pevné osy.*

Rotátorem dle terminologie Planckovy rozumíme na př. tuhou molekulu rotující kolem pevné osy. Kinetická energie takového rotátoru jest

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}J\omega^2 = \tfrac{1}{2}J(2\pi\nu)^2, \tag{46}$$

kdež značí J moment setrvačnosti rotátoru vzhledem k ose rotace, ω jeho úhlovou rychlost, ν jeho frekvenci. Ale tato kinetická energie jest zároveň úhrnnou energií W, tak že kinetický potenciál

$$L = \overline{L} = W = E_{kin} = \tfrac{1}{2}J(2\pi\nu)^2. \tag{47}$$

Naše obecná podmínka (24) přejde zde v jednoduchý tvar:

$$\delta\left\{nh\nu - \overline{L}\right\} = \delta\left\{nh\nu - \tfrac{1}{2}J(2\pi\nu)^2\right\} = 0. \tag{48}$$

Jediný „kinematický“ parametr jest zde ovšem ν. Provedeme-li ve (48) variaci dle ν, obdržíme

$$\nu = \frac{nh}{4\pi^2 J}, \quad W = \tfrac{1}{2}J(2\pi\nu)^2 = \frac{n^2h^2}{8\pi^2 J}, \tag{49}$$

což souhlasí taktéž s výrazem Planckovým,*) odvozeným jinou cestou.

Příklad 3. *Rutherford-Bohrův model atomu; elektron obíhá kolem jádra v dráze kruhové.*

Předpokládáme-li pro jednoduchost, že hmota jádra nabitého kladným nábojem elektrickým $+E$ jest nekonečně veliká, že tedy jádro pevně stojí,**) a označíme-li hmotu elektronu m_o, jeho náboj $-e$, jeho rychlost v, poloměr jeho kruhové dráhy a, periodu jeho pohybu T a frekvenci $\nu = \frac{1}{T}$, jest úhrnná energie atomu

---

*) *M. Planck:* Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 4. Aufl. Leipzig (J. A. Barth) 1921, p. 139, form. (223a) a dále p. 140, form. (231).

**) Ve skutečnosti elektron i jádro pohybují se kolem společného těžiště; pak nutno místo m_o psáti $\frac{Mm_o}{M+m_o}$, kde M jest hmota jádra. Srv. *A. Sommerfeld* Atombau u. Spektrallinien, 2. Aufl., p. 249, form. (3).

$$(50)\qquad W = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} m_o v^2 - \frac{eE}{a} = \frac{1}{2} m_o \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 - \frac{eE}{a} =$$

$$= 2\pi^2 a^2 m_o \nu^2 - \frac{eE}{a}.$$

Coulombova síla přitažlivá a síla odstředivá udržují se během pohybu vzájemně v rovnováze, tudíž

$$(51)\qquad \frac{Ee}{a^2} = \frac{m_o v^2}{a},$$

odkudž plyne

$$(52)\qquad W = -\frac{eE}{2a} = -\frac{1}{2} m_o v^2 = -2\pi^2 a^2 m_o \nu^2.$$

Porovnáním druhého a čtvrtého členu v (52) obdržíme frekvenci

$$(53)\qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Ee}{m_o}}\, a^{-\frac{3}{2}}.$$

Kinetický potenciál jest vzhledem k (51)

$$(54)\qquad L = E_{kin} - E_{pot} = \tfrac{1}{2} m_o v^2 + \frac{eE}{a} = \frac{3eE}{2a}$$

a jeho časový střed

$$(55)\qquad \bar{L} = \frac{1}{T}\int_0^T L\, dt = \frac{3eE}{2a}.$$

Podmínka (24) zní nyní

$$(56)\qquad \delta\left\{nh\nu - \bar{L}\right\} = \delta\left\{nh\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eE}{m_o}}\, a^{-\frac{3}{2}} - \frac{3eE}{2a}\right\} = 0$$

Jediným „geometrickým“ parametrem jest zde poloměr a, dle něhož nutno tedy variovati. Tím obdržíme z (56)

$$(57)\qquad a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 eE m_o}$$

a dosazením do (53)

$$(58)\qquad \nu = \frac{(2\pi)^2 e^2 E^2 m}{n^3 h^3}$$

Z (52) pak najdeme

$$(59)\qquad W = -\frac{2\pi^2 e^2 E^2 m_o}{n^2 h^2},$$

což souhlasí s hodnotou Bohrovou.*)

*) Viz na př.: *A. Sommerfeld:* Atombau und Spektrallinien. 2. Aufl. Braunschweig (Fr. Vieweg & Sohn) 1921, p. 243, form. (13). (V dalším citováno: A. Sommerfeld, l. c.)

Příklad 4. *Rutherford-Bohrův model atomu; elektron obíhá kolem jádra v dráze elliptické.*

Pro tento pohyb platí právě jako pro pohyb oběžnic kolem slunce třetí zákon Keplerův, že totiž čtverce dob oběžných dvou rozličných oběžnic mají se k sobě tak jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah: tedy doba oběžná T planety obíhající v dráze kruhové o poloměru a jest rovna době oběžné planety obíhající v dráze elliptické o velké poloose a. Tudíž máme zde právě jako v příkladě 3. frekvenci

$$(60)\qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eE}{m_o}}\, a^{-\frac{3}{2}}.$$

Jedná se tu o systém mající dva stupně volnosti, který *obecně* má dvě periody T, T'. Avšak zde perioda azimutu i průvodiče jest táž, tak že

$$(61)\qquad \nu' = \nu$$

Ze známé okolnosti, že časový střed energie kinetické, platí-li zákon Coulombův, rovná se polovině časového středu energie potenciální s opačným znaménkem,*) t. j.

$$(62)\qquad \bar{E}_{kin} = -\tfrac{1}{2}\bar{E}_{pot}$$

a ze vztahu

$$(63)\qquad \bar{E}_{kin} + \bar{E}_{pot} = \bar{W} = -\frac{eE}{2a} = W,$$

(jehož správnost vysvitne specialisací později uvedeného vzorce (116) [viz též (117)], položíme-li tam $c=\infty$, což by ostatně nebylo nesnadné ukázati přímo), obdržíme (jako dříve pro E_{kin}, E_{pot}, L) nyní pro časové středy:

$$(64)\qquad \bar{E}_{kin} = \frac{eE}{2a},\ \bar{E}_{pot} = -\frac{eE}{a},\ \bar{L} = \bar{E}_{kin} - \bar{E}_{pot} = \frac{3eE}{2a}.$$

Podmínka (24) zní vzhledem k (61)

$$(65)\qquad \delta\left\{nh\nu + n'h\nu' - \bar{L}\right\} = \delta\left\{(n+n')h\nu - \bar{L}\right\} =$$

$$= \delta\left\{(n+n')h\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eE}{m_o}}\, a^{-\frac{3}{2}} - \frac{3eE}{2a}\right\} = 0,$$

kde variace se vztahuje k jedinému „geometrickému“ parametru a (velké poloose elliptické dráhy). Odtud obdržíme

$$(66)\qquad a = \frac{(n+n')^2 h^2}{4\pi^2 eE m_o}$$

*) *A. Sommerfeld,* l. c., p. 463, form. (6). Viz ostatně vzorec (142) v této práci, který specialisací pro $c=\infty$ přejde ve výraz pro $\bar{L}$ uvedený v (64).

a dosazením do (63) úhrnnou energii (kvantisovanou)

(67) $$W = -\frac{2\pi^2 e^2 E^2 m_o}{(n+n')^2 h^2},$$

což souhlasí s výsledkem Sommerfeldovým.*)

Příklad 5. *Rutherford-Bohrův model atomu; elektron obíhá kolem jádra v „relativistické" kružnici.*

V příkladu 3. a 4. jsme předpokládali, že rychlost elektronu jest malá proti rychlosti světelné c; není-li tomu tak, nutno sáhnouti k relativistické mechanice. Nám tu postačí mechanika speciální theorie relativnosti.

Vyjádříme-li početně, že Coulombova přitažlivá síla udržuje se v rovnováze se silou odstředivou při kruhovém pohybu elektronu kolem jádra nekonečně veliké hmoty, předpokládajíce platnost mechaniky speciální theorie relativnosti, obdržíme

(68) $$\frac{eE}{a^2} = \frac{mv^2}{a} \quad \text{čili} \quad \frac{eE}{a} = m_o c^2 \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Úhrnná energie W bude vzhledem k (68) a (26)

(69) $$W = E_{kin} + E_{pot} = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) - \frac{eE}{a} =$$
$$= m_o c^2 \left\{ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 \right\}.$$

Při tom m_o značí „klidovou" hmotu pohybujícího se elektronu o hmotě m. Význam ostatních písmen jest patrný z předešlého. Ze (68) plyne

(70) $$\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{eE}{a\, m_o c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

čili

(71) $$\frac{v^2}{c^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{eE}{a\, m_o c^2}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{eE}{a\, m_o c^2}\right)^4 + \left(\frac{eE}{a\, m_o c^2}\right)^2}$$

Poněvadž $\frac{v^2}{c^2}$ jest podstatně kladná veličina, nutno vzíti při odmocnině v (71) znamení jedině kladné. Tedy

(72) $$Z = 1 + \frac{W}{m_o c^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{eE}{2a m_o c^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{eE}{2a\, m_o c^2}\right)^2},$$

kde znaménko při odmocnině nutno vzíti kladné; ze (69) jest patrno, že $W < 0$, a tedy dle (72) jest $1 > Z > 0$.

*) *A. Sommerfeld*, l. c., p. 267, form. (20).

Avšak

(73) $$v = 2\pi a \nu,$$

kde ν jest frekvence kruhového pohybu, a ze (72) plyne

(74) $$\frac{v}{c} = \sqrt{1-Z^2},$$

čili vzhledem k (73)

(75) $$\nu = \frac{c}{2\pi a}\sqrt{1-Z^2}.$$

Ze (72) plyne pak dále

(76) $$1 - Z^2 = \frac{eE}{a m_o c^2} Z.$$

Tudíž odtud obdržíme

(77) $$a = \frac{eE}{m_o c^2} \frac{Z}{1-Z^2}$$

a dosazením do (73)

(78) $$\nu = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{c^2}{eE} \frac{(1-Z^2)^{\frac{3}{2}}}{Z}.$$

Kinetický potenciál vzhledem k (25) bude

(79) $$L = F - E_{pot} = -m_o c^2 \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1\right) + \frac{eE}{a} =$$
$$= -m_o c^2 (Z-1) + m_o c^2 \frac{1-Z^2}{Z}$$

a jeho časový střed

(80) $$\bar{L} = L = m_o c^2 \left(1 + \frac{1}{Z} - 2Z\right).$$

Podmínka (24) dává tedy

(81) $$\delta \left\{ nh\nu - \bar{L} \right\} =$$
$$= \delta \left\{ nh \cdot \frac{m_o c^3}{2\pi eE} \cdot \frac{(1-Z^2)^{\frac{3}{2}}}{Z} - m_o c^2 \left(1 + \frac{1}{Z} - 2Z\right)\right\} = 0.$$

Jak ze (72) patrno, jest Z funkcí jediného „geometrického" parametru a (poloměru kruhové dráhy), dle něhož jest v (81) variovati. Ale okamžitě jest jasno, že můžeme v (81) variovati dle Z místo dle a. Provedeme-li to, obdržíme

(82) $$\sqrt{1-Z^2} = \frac{2\pi eE}{nhc},$$

a odtud najdeme pro úhrnnou energii (kvantisovanou) vztah

$$Z = 1 + \frac{W}{m_o c^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi e E}{nhc}\right)^2}, \tag{83}$$

což souhlasí s výsledkem Bohrovým.*)

Příklad 6. *Rutherford-Bohrův model atomu; elektron obíhá kolem jádra v „relativistické“ ellipse.*

A) *Výpočet úhrnné energie W.* Rovnice Keplerovy ellipsy, předpokládáme-li platnost mechaniky speciální theorie relativnosti, jest**)

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \gamma \varphi}, \quad \varepsilon < 1, \tag{84}$$

jež se liší od obvyklé rovnice polární pro ellipsu faktorem γ, jenž souvisí s postupným pohybem perihelia a jehož význam jest tento:

$$\gamma^2 = 1 - \frac{p_o^2}{p^2}, \tag{85}$$

kdež

$$p_o = \frac{eE}{c}, \quad p = mr^2\dot{\varphi} \text{ (plošná konstanta).} \tag{86}$$

Sommerfeld odvodil v 1. vyd. citované svojí knihy na str. 518 pro úhrnnou energii (klassickou) výraz

$$1 + \frac{W}{m_o c^2} = \sqrt{\frac{p^2 - p_o^2}{p^2 - \varepsilon^2 p_o^2}}, \tag{87}$$

jenž zde pro krátkost jest označován písmenem Z. Ježto však 1 vydání Sommerfeldovy knihy jest již rozebráno a v 2. vydání toto odvození jest vypuštěno (pro kvantisování energie užívá tu Sommerfeld pouze obecné methody Epsteinovy: separace differenciální rovnice parciální Hamilton-Jacobiho), dovolím si nejprve reprodukovati v krátkosti Sommerfeldovo odvození vztahu (87):

Energie potenciální bude

$$E_{pot} = -\frac{eE}{r} = -\frac{eE}{a}\,\frac{1 + \varepsilon \cos \psi}{1 - \varepsilon^2}, \tag{88}$$

kde

$$\psi = \gamma\varphi. \tag{89}$$

---

*) Viz na př. *A. Sommerfeld,* l. c., p. 330, form. (22), kde $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$.

**) *A. Sommerfeld,* l. c., p. 326, form. (6); p. 324, form. (2), (3); p. 326, form. (7). Tvarem podobá se tato „relativistická ellipsa“ růžici, která má za obálky dvě soustředné kružnice a jejíž „plátky květní“, ležící mezi těmito dvěma kružnicemi (jichž se dotýkají), mají tvar elliptických oček vzájemně se protínajících; (celá „relativistická ellipsa“ dá se ovšem narýsovati „jedním tahem“).

Energie kinetická dle (26) bude

$$E_{kin} = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{90}$$

kde

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{c^2} = \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{c^2}\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{91}$$

Užijeme-li výrazu pro p z (86), obdržíme

$$\beta^2 = \frac{p^2}{m^2 r^2 c^2}\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right], \tag{92}$$

kde proměnná hmota m souvisí s „klidovou“ hmotou m_o známým vztahem

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{93}$$

Dosadíme-li (93) do (92), vyjde po krátké úpravě

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{p^2}{m_o^2 r^2 c^2}\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{94}$$

Přičteme-li na obou stranách 1, máme

$$\frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{p^2}{m_o^2 r^2 c^2}\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{95}$$

Z (84) derivováním plyne

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\varepsilon\gamma \sin\psi}{1 + \varepsilon\cos\psi}. \tag{96}$$

Dosazením (96) do (95) budeme míti vzhledem k (84) vztah

$$\frac{1}{1-\beta^2} = 1 + \frac{p^2}{m_o^2 c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)^2}\left[(1 + \varepsilon\cos\psi)^2 + \varepsilon^2\gamma^2\sin^2\psi\right] \tag{97}$$

Tudíž energii kinetickou v (90) lze psáti, použijeme-li (97), v tomto tvaru (jakožto funkci úhlu ψ)

$$E_{kin} = m_o c^2 \left(\sqrt{A + 2B\cos\psi + C\cos^2\psi} - 1\right), \tag{98}$$

kdež zkratky A, B, C značí [viz též (85)]

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{p^2(1+\varepsilon^2\gamma^2)}{m_o^2 c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)^2} + 1 \\ B &= \frac{p^2\varepsilon}{m_o^2 c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)^2} \\ C &= \frac{p^2\varepsilon^2(1-\gamma^2)}{m_o^2 c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p_o^2\varepsilon^2}{m_o^2 c^2 a^2 (1-\varepsilon^2)^2} \end{aligned}\right. \tag{99}$$

Také potenciální energii (88) lze vyjádřiti jakožto funkci úhlu ψ takto:

(100) $$E_{pot} = - m_o c^2 (A' + B' \cos \psi),$$

kdež [viz též (86)]

(101) $$\begin{cases} A' = \dfrac{eE}{m_o c^2 a (1-\varepsilon^2)} = \dfrac{p_o}{m_o c a (1-\varepsilon^2)} \\ B' = \dfrac{eE\varepsilon}{m_o c^2 a (1-\varepsilon^2)} = \dfrac{p_o \varepsilon}{m_o c a (1-\varepsilon^2)} = \sqrt{C} \end{cases}$$

Součet obou energií musí býti roven konstantě W (úhrnné energii), musí býti tedy nezávislý na ψ, t. j.

(102) $$W = E_{kin} + E_{pot}.$$

Pohodlnější bude počítati z (98) a (100) výraz

(103) $$Z = 1 + \frac{W}{m_o c^2} = \sqrt{A + 2B \cos \psi + C \cos^2 \psi} - A' - B' \cos \psi.$$

Pravá strana může býti konstantní jen tehda, když

$$A + 2B \cos \psi + C \cos^2 \psi$$

bude úplný čtverec. A to bude tehda, když

(104) $$AC = B^2,$$

čili po dosazení z (99):

(105) $$m_o^2 a^2 c^2 (1-\varepsilon^2)^2 + p^2 (1 + \varepsilon^2 \gamma^2) = \frac{p^4}{p_o^2}.$$

Odtud plyne

(106) $$m_o a c (1-\varepsilon^2) = p \sqrt{\frac{p^2}{p_o^2} - 1 - \varepsilon^2 \gamma^2} = \sqrt{\frac{p^2 - p_o^2}{p_o^2} - \varepsilon^2 \frac{p^2 - p_o^2}{p^2}}$$

čili

(107) $$a = \frac{\sqrt{p^2 - p_o^2}\,\sqrt{p^2 - \varepsilon^2 p_o^2}}{m_o c p_o (1-\varepsilon^2)}.$$

Nyní lze ve (103) provésti odmocnění, čímž obdržíme

(108) $$Z = \sqrt{A} + \sqrt{C} \cos \psi - A' - B' \cos \psi.$$

Členy obsahující v této rovnici $\cos \psi$ se dle (101) ruší, jak to také musí býti, tak že vzhledem ke (104), (99), (101) bude

(109) $$Z = \sqrt{A} - A' = \frac{B}{\sqrt{C}} - A' = \frac{p^2 - p_o^2}{m_o c a p_o (1-\varepsilon^2)}$$

anebo, dosadíme-li sem za a ze (107),

(110) $$Z = \sqrt{\frac{p^2 - p_o^2}{p^2 - \varepsilon^2 p_o^2}},$$

jak bylo uvedeno v (87). Potud jde odvození Sommerfeldovo.

Z rovnice (107) plyne dále kvadratická rovnice pro p^2:

(111) $$p^4 - p_o^2 (1 + \varepsilon^2) p^2 + \varepsilon^2 p_o^4 - a^2 m_o^2 c^2 p_o^2 (1-\varepsilon^2)^2 = 0,$$

odkudž

(112) $$p^2 = \tfrac{1}{2} \{ p_o^2 (1 + \varepsilon^2) + p_o \sqrt{p_o^2 (1-\varepsilon^2)^2 + 4a^2 m_o^2 c^2 (1-\varepsilon^2)^2} \}.$$

Odtud máme

(113) $$p^2 - p_2 = \frac{p_o}{2} (1 - \varepsilon^2) \{ - p_o + \sqrt{p_o^2 + 4a^2 m_o^2 c^2} \}$$

Dosazením do (109) najdeme touž hodnotu jako v (72)

(114) $$Z = \frac{1}{2a m_o c} \left\{ \sqrt{p_o^2 + 4a^2 m_o^2 c^2} - p_o \right\} = \sqrt{1 + \left(\frac{p_o}{2a m_o c} \right)^2} - \frac{p_o}{2a m_o c}.$$

Rozvinutím dle binomické poučky obdržíme

(115) $$Z = 1 + \frac{W}{m_o c^2} = 1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{p_o}{2a m_o c} \right)^2 + \ldots - \frac{p_o}{2a m_o c}$$

anebo vzhledem k významu konstanty p_o ve vztahu (86)

(116) $$1 + \frac{W}{m_o c^2} = 1 - \frac{eE}{2a m_o c^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{e^2 E^2}{4 a^2 m_o^2 c^4} + \ldots$$

Položíme-li zde $c = \infty$, přejdeme k obyčejné mechanice; obdržíme

(117) $$W = - \frac{eE}{2a},$$

t. j. úhrnnou energii v příp. nerelativistickém; srvn. vzorce (52), (63).

B) *Výpočet obou frekvencí.* Plošná konstanta dle (86) a (93) jest

(118) $$p = m r^2 \dot{\varphi} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\beta^2}} r^2 \dot{\varphi}$$

Vzorec (90) můžeme pomocí vztahů (88), (27), (103) uvésti na tvar*)

(119) $$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{W}{m_o c^2} + \frac{eE}{m_o c^2} \frac{1}{r} = Z + \frac{eE}{m_o c^2} \frac{1}{r}.$$

Ze (118), dosadíme-li tam (119), obdržíme:

(120) $$\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \frac{m_o}{p} \left(Z + \frac{p_o}{m_o c} \frac{1}{r} \right) r^2 \, d\varphi.$$

Je-li T' doba oběhu elektronu počítaná od perihelia do nejbližšího perihelia, tu ze vztahu

(121) $$\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = dt$$

*) Viz též *A. Sommerfeld*: Ann. d. Phys. 51 (1916), p. 48, form. (B).

plyne

$$(122)\quad T' = \int_0^{2\pi/\gamma} \frac{d\varphi}{\dot\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\dot\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{m_o}{\gamma p}\left(Z + \frac{p_o}{m_o c}\frac{1}{r}\right) r^2\, d\psi,$$

povšimneme-li si ještě vztahu (89).

Dosadíme-li sem za r z (84) a za γ z (85), obdržíme

$$(123)\quad T' = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{p^2-p_o^2}}\left\{ a(1-\varepsilon^2)\, m_o Z \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2} + \frac{p_o}{c}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{1+\varepsilon\cos\psi}\right\}$$

Avšak dle rovnice (76), jež platí stejně pro příklad 5. jako 6,*) povšimneme-li si významu konstanty p_o uvedené v (86), máme

$$(124)\quad a = \frac{p_o}{m_o c}\,\frac{Z}{1-Z^2},$$

ze (110) pak

$$(125)\quad \sqrt{p^2 - p_o^2} = \frac{p_o Z \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-Z}}.$$

Kromě toho**)

$$(126)\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2} = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Dosadíme-li (124), (125) a (126) do (123), obdržíme po krátké úpravě

$$(127)\quad T' = \frac{2\pi p_o}{m_o c^2 (1-Z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

a zavedeme-li místo periody T' frekvenci $\nu' = 1/T'$, najdeme konečně frekvenci (radiální)

$$(128)\quad \nu' = \frac{m_o c^2}{2\pi p_o}(1-Z^2)^{\frac{3}{2}},$$

při čemž za Z jest sem dosaditi výraz (114).

Tudíž ν' jest funkcí jediného „geometrického“ parametru a; můžeme však stejně dobře považovati ν' za funkci jediné proměnné Z.

Druhá frekvence ν jest reciproká hodnota druhé periody (azimutální). — Vzroste-li úhel $\psi = \gamma\varphi$ z nully na 2π za dobu T', vzroste úhel $\varphi = \frac{\psi}{\gamma}$ z nully na 2π za dobu $T = T'\gamma$; položíme-li ještě $T = {}^1/\nu$, $T' = {}^1/\nu'$, máme vztah ${}^1/\nu = \gamma . {}^1/\nu'$, čili

$$(129)\quad \frac{\nu'}{\nu} = \gamma.$$

*) Viz vzorce (72) a (114); také (86).
**) Viz (138), (136).

Ale ze (110) plyne

$$(130)\quad \gamma^2 = \frac{Z^2(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2 Z^2},\quad 1-\gamma^2 = \frac{1-Z^2}{1-\varepsilon^2 Z^2},\quad p^2 = p_o^2\,\frac{1-\varepsilon^2 Z^2}{1-Z^2},$$

tedy

$$(131)\quad \nu = \frac{\nu'}{\gamma} = \frac{m_o c^3}{2\pi eE}\cdot\frac{(1-Z^2)^{\frac{3}{2}}}{Z\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2 Z^2},$$

kamž jest za Z dosaditi výraz (114). Tím jest vyjádřena frekvence ν jakožto funkce dvou „geometrických“ parametrů (a, ε) resp. (Z, ε). A tak jsme ve vzorcích (131) a (128) nalezli obě frekvence ν a ν' v tomto případě od sebe různé.

C) *Výpočet kinetického potenciálu.* Použijeme-li (25) a (119), (88) a (124), obdržíme

$$(132)\quad \begin{cases} F = -m_o c^2\left(\sqrt{1-\beta^2}-1\right) = \\ \qquad -m_o c^2\left\{\dfrac{(1-\varepsilon^2)Z}{(1-\varepsilon^2 Z^2)+(1-Z^2)\varepsilon\cos\psi} - 1\right\} \\ E_{pot} = \dfrac{-eE}{r} = -m_o c^2\,\dfrac{1-Z^2}{(1-\varepsilon^2)Z}(1+\varepsilon\cos\varphi) \\ L = F - E_{pot} = -m_o c^2\left\{\left(\dfrac{(1-\varepsilon^2)Z}{(1-\varepsilon^2 Z^2)+(1-Z^2)\varepsilon\cos\psi} - 1\right) + \right. \\ \qquad\left. + \dfrac{1-Z^2}{(1-\varepsilon^2)Z}(1+\varepsilon\cos\psi)\right\} \end{cases}$$

Položíme-li sem $\varepsilon = 0$, obdržíme kinetický potenciál pro „relativistickou“ kružnici:

$$(80)\quad L = m_o c^2\left(1 + \frac{1}{Z} - 2Z\right),$$

jak také musí býti.

Rovnici (123) můžeme napsati v tomto tvaru:

$$(133)\quad dt = \frac{p_o}{m_o c^2}\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-Z^2}}\left\{(1-\varepsilon^2)\frac{Z^2}{1-Z^2}\,\frac{d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2} + \frac{d\psi}{1+\varepsilon\cos\psi}\right\},$$

jestliže použijeme (124) a (125). Znásobíme-li mezi sebou (133) a poslední řádek ve (132), a integrujeme-li v mezích $t = 0$ a $t = T'$, obdržíme:

$$(134)\quad \int_0^{T'} L\,dt = -p_o\,\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-Z^2}}\left\{\frac{(1-\varepsilon^2)Z^3}{1-Z^2}.\,M - Z\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} + \right.$$
$$\left. + (1-\varepsilon^2)\,Z\,.\,N - \frac{1-Z^2}{(1-\varepsilon^2)Z}\int_0^{2\pi} d\psi\right\} + m_o c^2\, T',$$

kde

$$
(135)\quad \begin{cases} M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)^2\,[(1-\varepsilon^2 Z^2)+(1-Z^2)\,\varepsilon\cos\psi]} \\[2ex] N = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1+\varepsilon\cos\psi)\,[(1-\varepsilon^2 Z^2)+(1-Z^2)\,\varepsilon\cos\psi]} \end{cases}
$$

Nyní běží o výpočet několika omezených integrálů. Především

$$
(136)\qquad J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1+\varepsilon\cos\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},
$$

kde $\varepsilon < 1$ (viz na př. *Sommerfeld*, l. c. p. 476, form. (1), p. 477, form. (6)),

$$
(137)\qquad J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\alpha+\beta\cos\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}},
$$

kde $\alpha > \beta$. Tento integrál obdržíme z J_1, jestliže ve (136) položíme $\varepsilon = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Derivováním J_2 dle parametru α vznikne

$$
(138)\quad J_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(\alpha+\beta\cos\psi)^2} = 2\pi\alpha\,(\alpha^2-\beta^2)^{-\frac{2}{3}};\ (\alpha>\beta).
$$

Dále integrál

(139)

$$
J_4 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(\alpha+\beta\cos\psi)\,(\gamma+\delta\cos\psi)} = \frac{\beta}{\beta\gamma-\alpha\delta}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\alpha+\beta\cos\psi} -
$$

$$
-\frac{\delta}{\beta\gamma-\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\gamma+\delta\cos\psi} = \frac{2\pi}{\beta\gamma-\alpha\delta}\left[\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2-\delta^2}}\right];
$$

$$
(\alpha>\beta,\ \gamma>\delta).
$$

Derivováním tohoto integrálu dle parametru α vznikne integrál

$$
(140)\qquad J_5 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(\alpha+\beta\cos\psi)^2\,(\gamma+\delta\cos\psi)} =
$$

$$
= -\frac{2\pi\delta}{(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}\left[\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2-\delta^2}}\right]+\frac{2\pi\,\alpha\beta}{(\beta\gamma-\alpha\delta)\,(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}};
$$

$$
(\alpha>\beta,\ \gamma>\delta).
$$

Použijeme-li vzorce (140) a (139), najdeme oba integrály ve (135), a to

$$
(141)\quad \begin{cases} M = \dfrac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}\,Z^4}\left[2Z^2-1+\dfrac{(1-Z^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 Z^4}}\right] \\[2ex] N = \dfrac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\,Z^2}\left[1-\dfrac{1-Z^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 Z^4}}\right] \end{cases}
$$

Dosazením (136) a (141) do (134) obdržíme

$$
\int_0^{T'} L\,dt = -\frac{2\pi p_o}{\sqrt{1-Z^2}}\left[\frac{Z^3}{1-Z^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{1-Z^2}{Z}\right]+m_o c^2 T',
$$

kde T' jest dáno vzorcem (127). Časový střed kinetického potenciálu tedy po snadné úpravě bude

$$
(142)\qquad \bar{L} = \frac{1}{T'}\int_0^{T'} L\,dt = m_o c^2\left[1-Z^3+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{(1-Z^2)^2}{Z}\right]
$$

D) *Kvantisace energie.* Podmínka (24) nabude nyní tvaru

$$
(143)\qquad \delta\,(n h\nu + n' h\nu' - \bar{L}) = 0.
$$

Jak ukazuje (128), jest ν' funkcí jediné proměnné Z, a ze (131) patrno, že ν jest funkcí proměnných Z a ε; rovněž pak $\bar{L}$ jest, jak dokazuje (142), funcí obou proměnných Z a ε. Při tom Z jest funkcí jediné proměnné a. Variace ve (143) vztahuje se na proměnné „geometrické“ parametry a, ε, což jest však totéž jako kdybychom variovali dle Z a ε. Pro další počty bude výhodnější zavésti si nové proměnné, a to

$$
(144)\qquad x = \frac{1-Z^2}{Z^2},\quad q^2 = \frac{1}{1-\varepsilon^2}.
$$

Použijeme-li ještě označení

$$
(145)\qquad \frac{2\pi e^2}{hc} = \alpha,
$$

obdržíme ze (131), (128), (142), povšimneme-li si ještě výrazu pro p_o v (86),

$$
(146)\quad \begin{cases} \nu = \dfrac{m_o c^2 e}{\alpha E}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+q^2 x}\,; \qquad \nu' = \dfrac{m_o c^2 e}{\alpha E}\cdot\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}} \\[2ex] \bar{L} = m_o c^2\left\{1-\dfrac{1-q x^2}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right\}. \end{cases}
$$

Podmínku (143) přepíšeme nyní takto:

(147)
$$\delta\left\{\frac{m_0 c^2 e}{\alpha E}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\left[n\sqrt{1+q^2 x}+n'\right]-m_0 c^2\left[1-\frac{1-q x^2}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right]\right\}=0,$$

Ježto x jest pouze funkcí proměnné Z a Z zase funkcí pouze a, a poněvadž q jest pouze funkcí proměnné ε, můžeme variovati dle x a q místo podle a a ε.

Variace dle x dává podmínku

(148)
$$-\frac{3}{2}\frac{\alpha E}{e}(1-q x^2)+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(n\sqrt{1+q^2 x}+n')+$$
$$+q(x+1)x n\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}q}{2\sqrt{1+q^2 x}}-2\frac{\alpha E}{ne}\right]=0,$$

a variace dle q podobně

(149)
$$\frac{q^2 x}{1+q^2 x}=\left(\frac{\alpha E}{ne}\right)^2.$$

Odtud plyne

(150)
$$\sqrt{1+q^2 x}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha E}{ne}\right)^2}},\quad q=x^{-\frac{1}{2}}\frac{\frac{\alpha E}{ne}}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha E}{ne}\right)^2}},$$
$$q x^2=x^{\frac{3}{2}}\frac{\frac{\alpha E}{ne}}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha E}{ne}\right)^2}}.$$

Dosadíme-li (150) do (148), obdržíme po krátké úpravě

(151)
$$-\frac{\alpha E}{e}+\sqrt{x}\left[n\sqrt{1-\left(\frac{\alpha E}{ne}\right)^2}+n'\right]=0,$$

odkudž, všimneme-li si (144), najdeme

(152)
$$x=\frac{1}{Z^2}-1=\frac{\left(\frac{\alpha E}{e}\right)^2}{\left[n'+\sqrt{n^2-\left(\frac{\alpha E}{e}\right)^2}\right]^2}$$

a konečně

(153)
$$Z=1+\frac{W}{m_0 c^2}=\left\{1+\frac{\left(\frac{\alpha E}{e}\right)^2}{\left[n'+\sqrt{n^2-\left(\frac{\alpha E}{e}\right)^2}\right]^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

což souhlasí s výsledkem Sommerfeldovým,*) z něhož plyne detailní struktura spektrálních čar.

*) *A. Sommerfeld*, l. c, p. 330, form. (23); p. 521, form. (5).

Zcela podobným způsobem bylo by lze kvantisovati energii atomu ve Starkově a Zeemanově zjevu a ve všech dosud kvantisace schopných problémech. Doufám však, že uvedené příklady plně postačí k illustraci obecné podmínky (24). —

Ke konci pak konám milou povinnost vyslovuje vřelý dík za zvláštní zájem, pomoc a radu, kterou provázeli tuto práci pan prof. Dr. P. Ehrenfest z lejdské university v Nizozemí jakož i pan prof. Dr. F. Záviška a pan doc. Dr. J. Heyrovský z Karlovy university v Praze.

V Praze, v ústavu pro theoretickou fysiku Karlovy university, v prosinci 1921.