3) *Plocha f* bude také větší, na př. u ploch klínovitě do sebe zapadajících, než u ploch rovných při jinak stejných rozměrech.

4) *Rovnoměrného rozdělení tlaku* docílíme

*a*) přesným přihlazením ploch,

*b*) pokud možná rozdělením doléhající plochy na mnoho částí a značnou svobodou jednotlivých částí (kartáč),

*c*) pérovým zařízením, jímž tlačíme obě plochy k sobě,

*d*) vyrovnáním ploch rozmáčknutím. Užijeme li příliš velikého tlaku, přilehnou na sebe plochy následkem rozmáčknutí nerovností a hrbolků obou tlačených ploch.

Odpověď na otázku dimensování posuvného kontaktu dá nám vyšetření stupně jeho zahřátí při zapnutí neb vypnutí proudu, kterýžto výpočet, vedoucí k řešení jisté integrodifferenciální rovnice Volterrovy, v hlavních rysech byl předmětem mého pojednání v „Časopise fysicko-mathematické společnosti při Permské státní universitě“ pod záhlavím „O temperatuře posuvného kontaktu při zapnutí elektrického proudu“ r. 1918.*)

---

# Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin.

**Viktor Trkal.**

## I.

Navier-Poissonovy hydrodynamické rovnice v případě vazké stlačitelné tekutiny mají tvar **)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta u\\
\frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta v\\
\frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta w\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

*) Журналъ Физико-Математическаго Общества при Пермскомъ Государственномъ Университетѣ, I вып., 1918: »О температурѣ скользящаго контакта при вилюченіи электрическаго тока«.

**) H. Lamb, Hydrodynamics, 3. ed. (1906), p. 538.



kdež

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z}, \quad \Delta q = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}.$$

Při tom veličiny, vyskytující se v těchto rovnicích, mají tento fysikální význam: $u$, $v$, $w$ jsou komponenty rychlosti $q$ bodu $(x, y, z)$ v čase $t$ ve směru tří pravoúhlých os anglického systému souřadnic, $X$, $Y$, $Z$ komponenty vnějších sil, $\varrho$ konstantní hustota tekutiny, $p$ hydrodynamický tlak $\nu$ poměr koefficientu vnitřního tření tekutiny k její hustotě.

Jsou-li síly $X$, $Y$, $Z$ konservativni, t. j. mají-li potenciál $\Omega$, výše uvedené rovnice (1) lze napsati ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 2v\zeta + 2w\eta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial x} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta u\\
\frac{\partial v}{\partial t} - 2w\xi + 2u\zeta &= -\frac{\partial \chi'}{\partial y} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \nu\Delta v\\
\frac{\partial w}{\partial t} - 2u\eta + 2v\xi &= -\frac{\partial \chi'}{\partial z} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \nu\Delta w\\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kdež

$$\chi' = \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega, \qquad q^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Při tom

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3}$$

jsou komponenty okamžité úhlové rychlosti $\bar{\omega}$ elementu $d\tau$ naší tekutiny.

Derivujeme-li druhou rovnici systému (2) podle $z$ a třetí rovnici téhož systému podle $y$ a pak výsledky od sebe odečteme, (vyloučíme-li tak $\chi'$), obdržíme prvou rovnici následujícího systému (a zcela podobně další dvě rov.):

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{D\xi}{Dt} &= \xi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \Theta\right) + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\Delta\xi \\
\frac{D\eta}{Dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \Theta\right) + \xi\frac{\partial v}{\partial z} + \nu\Delta\eta \\
\frac{D\zeta}{Dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \Theta\right) + \nu\Delta\zeta \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial y} = \Theta,\quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{4}
$$

Jestliže sem položíme $\Theta = 0$, obdržíme systém pro vazkou tekutinu nestlačitelnou. V případě $v\zeta = w\eta$, $w\xi = u\zeta$, $u\eta = v\xi$ nabudou tyto rovnice (4), povšimneme-li se okolnosti, že

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

velmi jednoduchého tvaru:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu\Delta\xi,\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \nu\Delta\eta,\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu\Delta\zeta,\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta. \tag{5}$$

Položme pro krátkost ještě

$$\psi = \chi' - \frac{1}{3}\nu\Theta. \tag{6}$$

Pak lze přepsati naše rovnice (2) ve vektorovém označení (za účelem jednoduššího psaní) takto:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2\,[\bar{\omega}, q] = \nu\Delta q - \operatorname{grad}\psi, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} q = \Theta = \frac{3}{\nu}(\chi' - \psi), \tag{8}$$

kde vírová rychlost $\bar{\omega}$ o komponentách $\xi$, $\eta$, $\zeta$ jest spiata s proudovou rychlostí $q$ o komponentách $u$, $v$, $w$ pomocí vztahů (3) t. j.

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} q, \tag{9}$$

a zavedeme-li ještě nové označení pro vektorový součin $[\bar{\omega}, q]$, totiž

$$[\bar{\omega}, q] = \frac{\alpha}{2}, \tag{10}$$

lze napsati kratčeji

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha = \nu\Delta q - \operatorname{grad}\psi. \tag{11}$$



Pomocí vztahů (9) a (10) snadno se přesvědčíme, že skalární součiny

$$(\alpha q) = 0, \tag{12}$$

$$(\alpha\bar{\omega}) = 0, \tag{13}$$

což znamená, že vektor $\alpha$ stojí kolmo k rovině určené vektory $q$, $\bar{\omega}$. Zmizí-li vektor $\bar{\omega}$ anebo splynou-li oba vektory $q$, $\bar{\omega}$ co do směru, zmizí i vektor $\alpha$.

Snadno odvodíme některé další vztahy. Tak na př. z rov. (9) plyne již dříve nalezený vztah

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{div}\operatorname{rot} q = 0 \tag{14}$$

a dále
$$\operatorname{rot}\bar{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot} q = \frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\operatorname{div} q - \Delta q\right] \tag{15}$$

odkudž dostaneme

$$\Delta q = \operatorname{grad}\operatorname{div} q - 2\operatorname{rot}\bar{\omega}. \tag{16}$$

## II.

Zmizí-li identicky vektor $\alpha$ a je-li znám potenciál $\Omega$ konservativních sil $X$, $Y$, $Z$, můžeme najíti tlak $p$; naopak, je-li znám zase tlak $p$, můžeme za uvedeného předpokladu o vektoru $\alpha$ najíti potenciál $\Omega$.

Vektor $\alpha$ identicky zmizí, je-li $\bar{\omega} = cq$, jak dokazuje rovnice (10). Při tom $c$ je skalár, po př. nulla.

Je-li $c = 0$, zmizí identicky vírová rychlost $\bar{\omega}$; potom z rovnice (9) obdržíme $\operatorname{rot} q = 0$, odkudž plyne $q = -\operatorname{grad}\varphi$, t. j. v tomto případě existuje potenciál $\varphi$ rychlosti $q$, což plně souhlasí s předpokladem, že se tu jedná o pohyb bezvířivý.

Je-li $c \neq 0$ skalár, pak vírové čáry splývají s proudovými čarami.*)

*) Že takový pohyb, při kterém vírové čáry splývají s proudovými, je vůbec možný jak v tekutině omezené nějakou konvexní plochou tak i v tekutině sahající do nekonečna, přesvědčí nás tento jednoduchý příklad:

Differenciální rovnice našeho problému ve vazké nestlačitelné tekutině jsou:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 2cu,\ 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2cv,\ 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2cw,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu\Delta\xi,\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \nu\Delta\eta,\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu\Delta\zeta \qquad \text{(viz 5))}.$$

Vyplňuje-li tekutina kouli o středu (0, 0, 0) a poloměru $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

V případě prvém, kdy rychlost má potenciál $\varphi$, t. j.

$$q = -\operatorname{grad} \varphi,$$

obdržíme z rovnice (11), která nabude tvaru

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nu \Delta q - \operatorname{grad} \psi, \tag{11'}$$

vztah

$$-\operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nu \operatorname{grad} \Delta\varphi - \operatorname{grad} \psi$$

a dále

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \Delta\varphi + \psi - T(t),$$

kde $T(t)$ jest libovolná funkce času. Odtud najdeme

$$\psi = \chi' + \frac{\nu}{3} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + T(t),$$

a poněvadž

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi,$$

bude

$$\chi' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + T(t) - \frac{4}{3}\nu\Delta\varphi$$

a potenciál

$$\Omega = \chi' - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2} q^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + T(t) - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \varphi)^2 - \frac{4}{3}\nu\Delta\varphi,$$

odkud snadno najdeme tlak $p$.

---

a nabývá-li složka rychlosti ve směru normály $n$ na povrchu koule hodnoty

$$u \cos(nx) + v \cos(ny) + w \cos(nz) = q e^{-4\nu c^2 t} \frac{x \sin 2cz + y \cos 2cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

kde $c =$ konst., pak řešením daného problému jest

$$u = q e^{-4\nu c^2 t} \sin 2cz, \; v = q e^{-4\nu c^2 t} \cos 2cz, \; w = 0.$$

To bude zároveň také řešením téže úlohy v případě, že tekutina sahá do nekonečna, neklademe-li žádných hraničných podmínek. Pro $\nu = 0$ obdržíme případ tekutiny dokonalé. V každé rovině rovnoběžné k rovině $xy$ je pak rychlost proudu $= q$; v různých rovinách $\parallel$ k $xy$ jest však směr proudu různý (nehledíme-li k tomu, že se periodicky opakuje). Tento směr je však zároveň vždy osou víru. Poněvadž pak v každém bodě směr proudu splývá s osou víru, jedná se tu o šroubový pohyb tekutiny v každém bodě.

Tímto problémem, pokud je mi známo, zabýval se poprvé *T. Graig* v »American Journal of Mathematics,« III (1880), p. 276; přesný důkaz existence jeho řešení za velmi obecných podmínek podal *W. Stekloff* v »Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse«, II. sér. *10* (1908), p. 320. Specielní případ tohoto problému řeší též *G. M. Minchin* v knize »Uniplanar kinematics of solids and fluids«, Oxford 1882, p. 244.



V případě dokonalé tekutiny $\nu = 0$ a tu odpadne poslední člen.

Týž výsledek obdržíme však i pro vazkou tekutinu nestlačitelnou. V tomto případě jest totiž

$$\operatorname{div} q = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi = 0,$$

takže obdržíme pro tlak $p$ jednodušší rovnici

$$\Omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + T(t) - \frac{p}{\varrho} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \varphi)^2.$$

V případě druhém, kdy vírové čáry splývají s proudovými, obdržíme, jak již výše bylo uvedeno, vztah

$$\bar{\omega} = cq, \tag{17}$$

kde $c$ jest skalár. Odtud vyplývá vzhledem k rovnici (14)

$$\operatorname{div} \bar{\omega} = \operatorname{div} cq = c \operatorname{div} q + (q, \operatorname{grad} c) = 0; \tag{18}$$

porovnáním rovnice (9) a (17) obdržíme v našem specielním případě relaci

$$\operatorname{rot} q = 2cq. \tag{19}$$

Vzpomeneme-li ještě, že

$$\operatorname{rot} \bar{\omega} = \operatorname{rot} cq = c \operatorname{rot} q + [\operatorname{grad} c, q] = 2c^2 q - [q, \operatorname{grad} c], \tag{20}$$

kdež $(\ldots)$ značí skalární a $[\ldots]$ vektorový součin, tu budeme míti z rovnice (16)

$$\Delta q = -4c^2 q + \operatorname{grad} \operatorname{div} q + 2[q, \operatorname{grad} c], \tag{21}$$

Takto nalezené $\Delta q$ dosaďme do rovnice (11'); obdržíme

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -4\nu c^2 q - \operatorname{grad} \psi + \nu \operatorname{grad} \operatorname{div} q + 2\nu [q, \operatorname{grad} c]. \tag{22}$$

Rovnice (4) pro případ $\bar{\omega} : q = c$ čili $v\xi = w\eta$, $w\xi = u\xi$, $u\eta = v\xi$ nabudou tvaru (5), totiž

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \bar{\omega}, \tag{23}$$

a dosadíme-li sem (17), najdeme

$$q \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial t} = \nu\Delta(cq) = \nu c \Delta q + \nu q \Delta c + 2\nu (\operatorname{grad} c, \operatorname{grad}) q;$$

odtud plyne

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \nu\Delta q + \frac{q}{c}\left(\nu\Delta c - \frac{\partial c}{\partial t}\right) + \frac{2\nu}{c}(\operatorname{grad} c, \operatorname{grad}) q$$

anebo vzhledem k (21)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(4\nu c^2 + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial t}\right) q + \nu \text{ grad div } q + 2\nu \,[q, \text{ grad } c] +$$

$$+ \frac{\nu q}{c} \Delta c + \frac{2\nu}{c} (\text{grad } c, \text{ grad})\, q. \tag{24}$$

Nyní bylo by nutno z rovnice (18) najíti na př. za pomoci rovnic proudových čar aspoň partikulární řešení pro $c$ a tento výsledek dosaditi do (24), načež bychom měli rovnici (24) integrovati a takto nalezené $q$ dosaditi do rovnic (21) a (22), jež poslouží k bližšímu určení funkce $c$; tím blíže určíme funkci $q$, která musí splňovati rovnici (23), totiž

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ rot } q = \nu \Delta \text{ rot } q. \tag{23'}$$

Dosadíme-li takto nalezené $q$ do (22), najdeme tvar funkce $\psi$, z rovnice (8) pak určíme funkci $\chi'$, tak že obdržíme i potenciál $\Omega$ a odtud tlak $p$.

Ovšem tyto integrace provésti prakticky podaří se jenom v některém zcela zvláštním případě.

Tak na př., je-li tekutina nestlačitelná, t. j. div $q = 0$, obdržíme z rovnice (18)

$$(q, \text{ grad } c) = 0$$

čili

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \tag{18''}$$

Avšak vzhledem k významu symbolu $\frac{Dc}{Dt}$ rovnici (18″) můžeme psáti ve tvaru

$$\frac{Dc}{Dt} - \frac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

odkudž patrno, že $c$ jest funkcí jediné proměnné $t$, není-li ani jedna z komponent $u$, $v$, $w$ identicky rovna nulle. Z rovnic (20), (21), (22), (24) vyplývá

$$\text{rot } \bar{\omega} = 2c^2 q \tag{20'}$$

$$\Delta q = 4c^2 q \tag{21'}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -4\nu c^2 q - \text{grad } \chi' \tag{22'}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\left(4\nu c^2 + \frac{1}{c}\frac{dc}{dt}\right) q. \tag{24'}$$



Odtud najdeme

$$q = \frac{1}{c} f(x, y, z)\, e^{-\int 4\nu c^2 dt}$$

a dosazením do (21′)

$$\Delta f = -4c^2 f,$$

odkudž patrno, že $c$ jakožto funkce jediné proměnné $t$ se musí redukovati na konstantu, tak že

$$q = g\,(x, y, z)\, e^{-4\nu c^2 t}.$$

Funkce $q$ musí vyhovovati rovnici (23′), t. j. $g$ musí splňovati rovnici

$$\Delta \text{ rot } g = -4c^2 \text{ rot } g$$

čili

$$\text{rot } (\Delta g) = \text{rot } (-4c^2 g). \tag{23''}$$

Jsou-li $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ vesměs ohraničené funkce připouštějící všude v oboru $(D)$ (prostoru vyplněném tekutinou) derivace prvého, druhého a třetího řádu dle všech tří proměnných a splňující podmínky

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 2cU, \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 2cV, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 2cW,$$

pak splňují i podmínky

$$\Delta U = -4c^2 U, \quad \Delta V = -4c^2 V, \quad \Delta W = -4c^2 W.$$

Můžeme je tudíž považovati za komponenty vektoru $g(x, y, z)$, neboť vyhovují rovnici (23″). Existenci těchto funkcí pro případ tekutiny vyplňující uzavřenou konvexní plochu $(S)$, na jejímž povrchu komponenta rychlosti ve směru vnitřní normály nabývá předepsané hodnoty $F(x, y, z)$, dokázal W. Stekloff *) a našel, že se dají takto vyjádřiti:

$$U = u_0 + 2cu_1 + (2c)^2\left(S_1 + \frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

$$V = v_0 + 2cv_1 + (2c)^2\left(S_2 + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

$$W = w_0 + 2cw_1 + (2c)^2\left(S_3 + \frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

---

*) W. Stekloff, l. c. pp. 320. 332.

kdež $u_0$, $v_0$, $w_0$, $u_1$, $v_1$, $w_1$ jsou funkce známé, definované rovnicemi

$$\frac{\partial w_0}{\partial y}-\frac{\partial v_0}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u_0}{\partial z}-\frac{\partial w_0}{\partial x}=0,\ \frac{\partial r_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y}-\frac{\partial v_1}{\partial z}=u_0,\ \frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial \omega_1}{\partial x}=v_0,\ \frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=w_0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0,$$

norm. komponenta

$u_0 \cos(nx)+v_0 \cos(ny)+w_0 \cos(nz)=F(x, y, z)$ na ploše $(S)$,

$u_1 \cos(nx)+v_1 \cos(ny)+w_1 \cos(nz)=0$ „ „ „

Dále pak

$$S_1=\frac{1}{4\pi}\int W_1 \frac{\eta-y}{r^3}\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int V_1 \frac{\zeta-z}{r^3}\,d\tau,$$

$$S_2=\frac{1}{4\pi}\int U_1 \frac{\zeta-z}{r^3}\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int W_1 \frac{\xi-x}{r^3}\,d\tau,$$

$$S_3=\frac{1}{4\pi}\int V_1 \frac{\xi-x}{r^3}\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\int W_1 \frac{\eta-y}{r^3}\,d\tau,$$

kde $(\xi, \eta, \zeta)$ probíhá všechny body oblasti $(D)$, $d\tau=d\xi d\eta d\zeta$, integrály vztahují se k celé oblasti $(D)$,

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2.$$

Při tom řady $U_1$, $V_1$, $W_1$ konvergují absolutně a stejnoměrně v oblasti $(D)$ pro všechny hodnoty paramentu $2c$ menší než určité konečné číslo $\frac{1}{K}$, které bude tím větší, čím menší jsou rozměry oblasti $(D)$. Jest pak

$$U_1=\sum_{k=1}^{\infty}(2c)^{k-1}u_k,\ V_1=\sum_{k=1}^{\infty}(2c)^{k-1}v_k,\ W_1=\sum_{k=1}^{\infty}(2c)^{k-1}w_k,$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial y}-\frac{\partial v_k}{\partial z}=u_{k-1},\ \frac{\partial u_k}{\partial z}-\frac{\partial w_k}{\partial x}=v_{k-1},\ \frac{\partial v_k}{\partial x}-\frac{\partial u_k}{\partial y}=w_{k-1},$$

$u_k \cos(nx)+v_k \cos(ny)+w_k \cos(nz)=0$ na ploše $(S)$

$$k=2,\ 3, \ldots \infty.$$

Konečně pak $P$ jest harmonická funkce splňující podmínky:

$\Delta P=0$ uvnitř $(D)$



a komponenta dle vnitřní normály

$$\frac{\partial P_i}{\partial n}=\frac{\partial P}{\partial x}=\cos(nx)+\frac{\partial P}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial P}{\partial z}\cos(nz)=$$

$$=-(S_1\cos(nx)+S_2\cos(ny)+S_3\cos(nz)) \text{ na ploše } (S).$$

Tudíž komponenty rychlosti $q$ budou

$$u=Ue^{-4\nu c^2 t},\ v=Ve^{-\nu 4c^2 t},\ w=We^{-4\nu c^2 t}$$

v tekutině omezené uzavřenou plochou $(S)$, na jejímž povrchu komponenta rychlosti ve směru vnitřní normály nabývá předepsané hodnoty $e^{-4\nu c^2 t}F(x, y, z)$, je-li ovšem $|2c|<\frac{1}{K}$, kde $K$ jest kladná stálá veličina závislá pouze na vlastnostech plochy $(S)$.

Dosazením do (22′) najdeme, že

$$\chi'=\Phi(t)$$

závisí pouze na čase; odtud pak potenciál

$$\Omega=\chi'-\frac{p}{\varrho}-\frac{1}{2}q^2=\Phi(t)-\frac{p}{\varrho}-\frac{1}{2}(U^2+V^2+W^2)e^{-8\nu c^2},$$

jenž dovoluje vypočísti tlak $p$.

Dospěli jsme tak k výsledku, že ve vazké nestlačitelné tekutině, není-li ani jedna z komponent rychlosti identicky rovna nulle, musí býti $c$ konstantou a $u$, $v$, $w$ jsou dány vzorci (25).

Ale i naopak: je-li $c=\text{konst.}$, obdržíme z rovnice (18) jakožto důsledek div $q=0$; tekutina je tedy nutně nestlačitelná.

V nestlačitelné tekutině dokonalé obdržíme z rovnice (23) (položíme-li $\nu=0$) $\partial\bar{\omega}/\partial t=0$, t. j. vírová rychlost nemůže záviseti na čase, a tudíž ani $c$ ani $q$ nezávisí na $t$. Kdyby jedna z komponent $u$, $v$, $w$ na př. $w=0$ identicky, pak $c$ bude obecně funkcí proměnné $z$. Jsou-li dvě z komponent $u$, $v$, $w$ identicky rovny nulle, je nullou i třetí z nich.

Za cenná upozornění vyslovuji tuto panu univ. prof. Dru F. Záviškovi vřelý dík.

---