О температурѣ скользящаго контакта при включеніи электрическаго тока.

В. Ткралъ.

Въ настоящей статьѣ я дѣлаю попытку теоретически опредѣлить температуру скользящаго контакта при включеніи электрическаго тока. Точное рѣшеніе этой задачи является, если не вовсе невозможнымъ, то всетаки очень труднымъ въ силу слѣдующихъ причинъ:

1) точные законы охлажденія нагрѣтаго металла въ воздухѣ, его окружающемъ, не совсѣмъ извѣстны,

2) мы пока не имѣемъ никакихъ, вполнѣ удовлетворительныхъ изслѣдованій о, такъ называемомъ, контактномъ сопротивленіи.

Освѣтить съ физической точки зрѣнія эти два вопроса я попытаюсь когда-нибудь въ будущемъ. Цѣль же настоящей статьи— вычислить температуру скользящаго контакта въ первомъ приближеніи.

I.

Представимъ себѣ, что электрическій токъ течетъ черезъ два противолежащихъ, безконечно длинныхъ и очень тонкихъ стержня, которые касаются другъ друга своими плоскими поверхностями. Мы намѣрены изслѣдовать случай, когда электрическій токъ включается такимъ образомъ, что плоскость одного стержня скользитъ по плоскости другого.

Электродвижущую силу постояннаго тока, который течетъ черезъ оба стержня, назовемъ E, а сопротивленіе системы W. На соприкасающихся плоскостяхъ обоихъ стержней образуется еще одно особое сопротивленіе, т. наз. контактное сопротивленіе R. Въ нашемъ случаѣ оно является функціей отъ времени. Это контактное сопротивленіе, какъ показываютъ наблюденія, обладаетъ почти точно такими же свойствами, какъ обыкновенное металлическое сопротивленіе. Итакъ, сила i тока будетъ

$$i = \frac{E}{W + R}$$

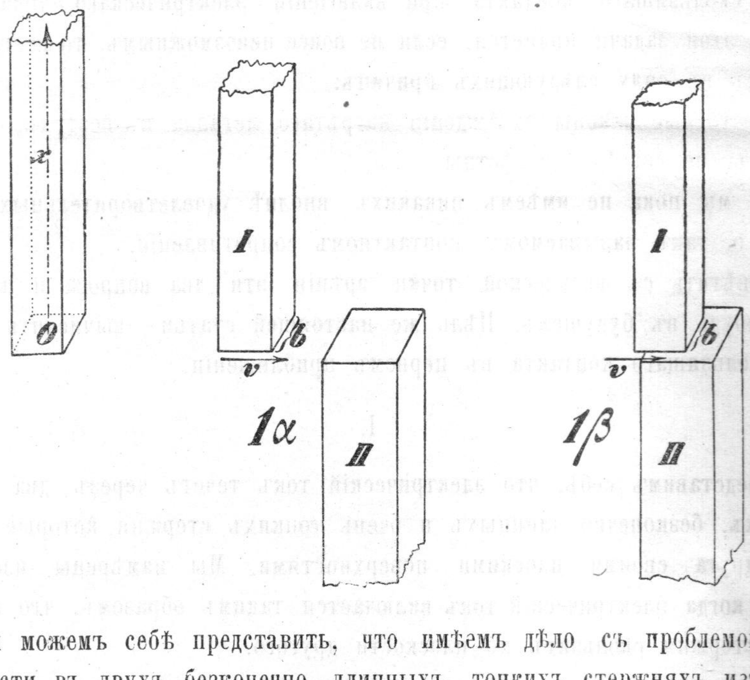
Но та же сила тока выразится формулой:

$$i = \frac{\text{контактное напряженіе}}{\text{контактное сопротивленіе}} = \frac{e}{R},$$

а Джоулево количество теплоты, которое развивается въ теченіе одной секунды въ соприкасающейся плоскости, будетъ равно

$$0{,}24\, ei = 0{,}24\, i^2 R = 0{,}24\, \frac{E^2}{(W + R)^2} \cdot R \text{ (малыхъ калорій).}$$

Въ смежныхъ параллельныхъ плоскостяхъ (которыя мы представляемъ себѣ проведенными въ металлѣ), развивается менѣе теплоты, а поэтому теплота съ мѣстъ соприкасающихся отводится въ стержни.



Мы можемъ себѣ представить, что имѣемъ дѣло съ проблемой теплопроводности въ двухъ безконечно длинныхъ, тонкихъ стержняхъ изъ одного и того же матеріала, поперечное сѣченіе которыхъ постоянно и равномѣрно возрастаетъ, при чемъ сумма теплоты, которая протекаетъ черезъ соприкасающіяся плоскости обоихъ стержней въ теченіе одной секунды, равняется Джоулеву теплу, развивающемуся на соприкасающихся плоскостяхъ обоихъ стержней въ теченіе одной секунды. При этомъ нужно принять во вниманіе, что въ стержняхъ также развивается Джоулево тепло, и что теплота, которая уходитъ въ оба стержня, отчасти поглощается окружающей средой, а именно у стержня I на передней, задней и правой стѣнкѣ уходитъ въ воздухъ, а на лѣвой сторонѣ въ металлъ, между тѣмъ какъ у стержня II на передней, задней и правой сторонѣ уходитъ вч металлъ, а на лѣвой стѣнкѣ въ воздухъ (черт. 1β).

Чтобы учесть эти потери, можно, съ извѣстнымъ приближеніемъ, примѣнить эмпирическій законъ охлажденія Ньютона. Дабы избѣжать слишкомъ сложныхъ дифференціальныхъ уравненій, сдѣлаемъ еще допущеніе, что потокъ теплоты въ металлѣ протекаетъ всегда перпендикулярно къ соприкасающимся плоскостямъ такимъ образомъ, что линія, лежащая на границѣ потока теплоты (безразлично, въ воздухѣ или въ металлѣ), можетъ быть разсматриваема, какъ источникъ новой перпендикулярной передачи теплоты, которую можно выразить съ помощью закона охлажденія Ньютона. (На границѣ металлъ—воздухъ примѣняемъ „внѣшній“, а внутри металла „внутренній“ коэффиціентъ теплопроводности.)

При равномѣрномъ скольженіи контакта площадь соприкосновенія поперечнаго сѣченія стержней будетъ:

$$f=b(vt),$$

а периметръ этой площади будетъ:

$$g=b+(b+2vt),$$

гдѣ v обозначаетъ равномѣрную скорость движенія стержня I, а t—время.

Дифференціальное уравненіе теплопроводности въ стержнѣ въ томъ случаѣ, когда внутри стержня развивается еще теплота за счетъ пребразованія энергіи, имѣетъ форму *)

$$fc\delta\frac{\partial u}{\partial t}=Af+\frac{\partial fk\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}-hg\,(u-U),$$

гдѣ A обозначаетъ количество теплоты, развиваемое въ единицу времени въ единицѣ объема стержня, имѣющаго поперечное сѣченіе f; c обозначаетъ теплоемкость металла, k коэффиціентъ внутренней теплопроводности металла, δ плотность металла, h коэффиціентъ внѣшней теплопроводности воздуха, u температуру мѣста x въ моментъ t, U температуру окружающей среды. Ось стержня представляетъ собою ось x.

*) Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, 5, Aufl. 1912, II. Bd. S. 89, Form. V a.

Это уравненіе въ нашемъ случаѣ приметъ слѣдующую, нѣсколько различную отъ предыдущей, форму:

1) для стержня I:

$$fc\delta\frac{\partial u}{\partial t}=Af+fk\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(b+2vt)(u-U)-lb(u-U),$$

гдѣ $b+2vt$ предстевляетъ изъ себя сумму передней, задней и правой стороны, b—лѣвую сторону поперечнаго сѣченія f; теплота уходитъ по лѣвой сторонѣ стержня I въ металлъ, „внѣшній" коэффиціентъ теплспроводности котораго есть l*);

2) для стержня II:

$$fc\delta\frac{\partial u}{\partial t}=Af+fk\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-l(b+2vt)(u-U)-hb(u-U),$$

такъ какъ теплота уходитъ по передней, задней и правой сторонѣ въ металлъ, „внѣшній" коэффиціентъ теплопроводности котораго есть l*).

Такъ какъ стержень I движется, то новые и новые слои металла и воздуха постепенно приходятъ въ соприкосновеніе съ нагрѣтыми частицами металла; слѣдовательно, можно разсматривать температуту окружающей среды въ теченіе всего движенія, какъ постоянную, и подставить $u-U=V$; если подставимъ еще $f=bvt$ и $\frac{k}{c\delta}=\omega^2$, то получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

для стержня I:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{A(t)}{c\delta}+\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{h}{c\delta}\left(\frac{b+2vt}{bvt}\right)V-\frac{l}{c\delta}\,\frac{b}{bvt}V;$$

для стержня II:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{A(t)}{c\delta}+\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{l}{c\delta}\left(\frac{b+2vt}{bvt}\right)V-\frac{h}{c\delta}\,\frac{b}{bvt}V,$$

или, если примѣнимъ еще слѣдующія обозначенія:

$$\frac{A(t)}{c\delta}=B(t),\quad \frac{2h}{bc\delta}=\varepsilon_1^2,\ \frac{b}{2v}\left(1+\frac{l}{h}\right)=\eta_1^2;\quad \frac{2l}{bc\delta}=\varepsilon_2^2,\ \frac{b}{2v}\left(1+\frac{h}{l}\right)=\eta_2^2,$$

---

*) Коэффиціентъ l численно равняется „внутреннему" коэффиціенту металла k, его же размѣрность равна размѣрности коэффицента h, въ чемъ не трудно убѣдиться. Теплота $A=0{,}24i^2\omega=0{,}24E^2\omega:(W+R)^2$, гдѣ ω—сопротивленіе единицы объема металла.

то получимъ:

для стержня I:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = B(t) + \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \varepsilon_1^2 \left(1 + \frac{\eta_1^2}{t}\right) V,$$

для стержня II:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = B(t) + \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \varepsilon_2^2 \left(1 + \frac{\eta_2^2}{t}\right) V.$$

Добавочныя условія для того и другого случая будутъ

$$V = 0 \text{ для } t = 0,$$
$$V = P(t) \text{ для } x = 0.$$

Наша окончательная задача состоитъ въ опредѣленіи температуры $P(t)$ па основаніи того условія, что сумма теплоты, проходящей черезъ обѣ плоскости соприкосновенія обоихъ стержней въ единицу времени, равняется количеству теплоты Джоуля, развиваемому, благодаря контактному сопротивленію, на мѣстахъ соприкосновенія обоихъ стержней.

Математическая сторона вопроса сводится къ тому, что мы должны:

1) рѣшить дифф. уравненіе (I) и (II) при данныхъ добавочныхъ условіяхъ, т. е. выразить температуру V черезъ $P(t)$.

2) опредѣлить $P(t)$ изъ условія, только-что упомянутаго, а именно изъ равенства:

$$-fk \left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{x=o} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)_{x=o} \right] = 0{,}24 \frac{E^2}{(W+R)^2} \cdot R,$$

гдѣ V_1, V_2 обозначаютъ температуры стержней I и II, а выраженіе на правой сторонѣ равенства—Джоулево тепло, развиваемое въ единицу времени, благодаря контактному сопротивленію. Впрочемъ, подробный выводъ послѣдняго уравненія будетъ данъ ниже. Сначала обратимся къ рѣшенію уравненій (I) и (II).

II.

Наша ближайшая задача—рѣшить дифференціальное уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial t} = B(t) + \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{t}\right) V,$$

при слѣдующихъ добавочныхъ условіяхъ:

$$V = 0 \text{ для } t = 0$$
$$V = P(t) \text{ для } x = 0.$$

1) Чтобы найти это рѣшеніе, вспомнимъ сначала, что рѣшеніе дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

которое удовлетворяетъ добавочнымъ условіямъ $V=0$ для $t=0$, $V=\varphi(t)$ для $x=0$, можно, какъ извѣстно, написать въ слѣдующемъ видѣ: *)

$$V = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

2) Уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \varepsilon^2 V$$

при добавочныхъ условіяхъ $V=0$ для $t=0$, $V=\Phi(t)$ для $x=0$ можно подстановкою $V=e^{-\varepsilon^2 t}\, V^*$ привести къ предыдущему случаю; такимъ образомъ его рѣшеніе будетъ имѣть слѣдующую форму:

$$V = e^{-\varepsilon^2 t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Для $t=0$ дѣйствительно $V=0$, а для $x=0$ имѣемъ

$$V = e^{-\varepsilon^2 t} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \varphi(t) \cdot e^{-\varepsilon^2 t} = \Phi(t),$$

откуда:

$$\varphi(t) = e^{\varepsilon^2 t}\, \Phi(t),$$

$$\varphi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) = e^{\varepsilon^2\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)}\, \Phi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right);$$

слѣдовательно

$$V = e^{-\varepsilon^2 t} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} e^{\varepsilon^2\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)}\, \Phi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

*) Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Physik, Bd. II., S. 105. Form. 7.

или окончательно:

$$V = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} \Phi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\varepsilon^2 x^2}{4\omega^2\alpha^2} - \alpha^2} d\alpha.$$

3) Уравненіе:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \omega^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{t}\right) V$$

при добавочныхъ условіяхъ $V=0$ для $t=0$, $V=F(t)$ для $x=0$ можно подстановкою

$$V = e^{-\varepsilon^2 (t + \eta^2 log t)} V^{**} = \frac{1}{t^{\varepsilon^2\eta^2}} e^{-\varepsilon^2 t} V^{**},$$

привести къ случаю 2-му, такъ что его рѣшеніе будетъ:

$$V = \frac{2}{t^{\varepsilon^2\eta^2} \sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} \Phi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2} - \alpha^2} d\alpha.$$

Для $x=0$ получимъ:

$$\frac{\Phi(t)}{t^{\varepsilon^2\eta^2}} = F(t),$$

такъ что:

$$\Phi\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) = \left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)^{\varepsilon^2\eta^2} F\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right).$$

Слѣдовательно окончательно:

$$V = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, t^{\varepsilon^2\eta^2}} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} \left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) F\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\varepsilon^2 x^2}{4\omega^2\alpha^2} - \alpha^2} d\alpha.$$

Можно безъ труда убѣдиться въ томъ, что при $t=0$ получимъ $V=0$. Въ самомъ дѣлѣ для $t=0$ получимъ $V=\frac{0}{0}$; раскрывая по общему правилу эту неопредѣленность, получимъ слѣдующее равенство:

$$V(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lim_{t=o} \frac{1}{\varepsilon^2\eta^2 t^{\varepsilon^2\eta^2 - 1}} \int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty} G\left(t - \frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\varepsilon^2 x^2}{4\omega^2\alpha^2} - \alpha^2} d\alpha.$$

Тотъ же самый процессъ можно повторять до тѣхъ поръ, пока t или не исчезнетъ въ знаменателѣ вслѣдствіе дифференцированія (въ случаѣ, если $\varepsilon^2\eta^2$ = цѣлому числу), или пока не появится въ числителѣ (что должно обязательно имѣть мѣсто послѣ конечнаго числа операцій); въ обоихъ случаяхъ будемъ имѣть $V=0$ для $t=0$.

4) Данное уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial t}=B(t)+\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\varepsilon^2\left(1+\frac{\eta^2}{t}\right)V$$

при добавочныхъ условіяхъ $V=0$ для $t=0$, $V=P(t)$ для $x=0$ можно рѣшить, если сдѣлать подстановку $V=V_0+y(t)$, гдѣ V_0 представляетъ рѣшеніе уравненія 3-го и $y(t)$ функцію отъ одной единственной перемѣнной t. Выполняя указанную подстановку будемъ имѣть:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}+\frac{dy}{dt}=B(t)+\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\varepsilon^2\left(1+\frac{\eta^2}{t}\right)V_0-\varepsilon^2\left(1+\frac{\eta^2}{t}\right)y,$$

или:

$$\frac{dy}{dt}+\varepsilon^2\left(1+\frac{\eta^2}{t}\right)y-B(t)=0,$$

откуда:

$$y=e^{-\varepsilon^2\int\left(1+\frac{\eta^2}{t}\right)dt}\left\{C+\int_0^t B(t)\,e^{+\varepsilon^2\int\left(1+\frac{\eta^2}{t}\right)dt}\right\},$$

Можно, слѣдовательно написать:

$$y=\frac{1}{t^{\varepsilon^2\eta^2}}\,e^{-\varepsilon^2 t}\left\{C+\int_0^t B(t)\,e^{+\varepsilon^2 t}\cdot t^{\varepsilon^2\eta^2}\,dt\right\},$$

или:

$$y=Ct^{-\varepsilon^2\eta^2}e^{-\varepsilon^2 t}+t\int_0^t B(s)e^{-\varepsilon^2(t-s)}\left(\frac{s}{t}\right)^{\varepsilon^2\eta^2}d\left(\frac{s}{t}\right).$$

Если принять $s=\lambda t$, то получимъ:

$$y=Ct^{-\varepsilon^2\eta^2}\,e^{-\varepsilon^2 t}+t\int_0^1 B(\lambda t)e^{-\varepsilon^2 t(1-\lambda)}\,\lambda^{\varepsilon^2\eta^2}\,d\lambda.$$

Для $t=0$ должно быть $y=0$, что возможно только въ томъ случаѣ, если C тождественно равно нулю, ибо $B(\lambda t)$ приближается къ конечному значенію при $lim\ t=0$.

Итакъ, рѣшеніе нашего уравненія, которое удовлетворяетъ данному условію ($V=0$ для $t=0$), выразится слѣдующимъ равенствомъ:

$$V=\frac{2}{\sqrt{\pi}\, t^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty}\left(t-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)^{\varepsilon^2\eta^2} F\left(t-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{4\omega^2\alpha^2}-\alpha^2}d\alpha+$$

$$+\frac{e^{-\varepsilon^2 t}}{t^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_0^t B(t)\, t^{\varepsilon^2\eta^2}\, e^{\varepsilon^2 t}\, dt.$$

Но для $x=0$ должно быть $V=P(t)$; слѣдовательно:

$$F(t)+\frac{e^{-\varepsilon^2 t}}{t^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_0^t B(t)\, t^{\varepsilon^2\eta^2}\, e^{\varepsilon^2 t}\, dt=P(t),$$

откуда:

$$F(t)=P(t)-\frac{e^{-\varepsilon^2 t}}{t^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_0^t B(t)\, t^{\varepsilon^2\eta^2}\, e^{\varepsilon^2 t}\, dt.$$

III.

Количество теплоты, которое протекаетъ черезъ сѣченіе $x=0$ въ единицу времени, равно:

$$-fk\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=o}=-bvkt\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=o}.$$

Но:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,.\, t^{\varepsilon^2\eta^2}}\Bigg\{-\frac{1}{2\omega\sqrt{t}}.0+$$

$$+\int_{\frac{\omega}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty}\left[\left(t-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)^{\varepsilon^2\eta^2} F\left(t-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)\right]'\cdot\frac{-2x}{4\omega^2\alpha^2}\, e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{4\omega^2\alpha^2}-\alpha^2}d\alpha+$$

$$+\int_{\frac{x}{2\omega\sqrt{t}}}^{\infty}\left(t-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)^{\varepsilon^2\eta^2} F\left(t-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}\right)\cdot\frac{-2x\varepsilon^2}{4\omega^2\alpha^2}\, e^{-\frac{\varepsilon^2x^2}{4\omega^2\alpha^2}-\alpha^2}d\alpha\Bigg\}.$$

Если ввести перемѣнное λ подстановкой $\frac{x}{2\omega\alpha}=\lambda$, то получимъ:

$$-\frac{x}{2\omega\alpha^2}\,d\alpha=d\lambda,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,t^{\varepsilon^2\eta^2}}\left[\int_{\sqrt{t}}^{0}\left[(t-\lambda^2)^{\varepsilon^2\eta^2}F(t-\lambda^2)\right]'e^{-\varepsilon^2\lambda^2-\frac{x}{4\omega^2\lambda^2}}\cdot\frac{d\lambda}{\omega}+\right.$$

$$\left.+\int_{\sqrt{t}}^{0}(t-\lambda^2)^{\varepsilon^2\eta^2}F(t-\lambda^2)\frac{\varepsilon^2}{\omega}e^{-\varepsilon^2\lambda^2-\frac{x^2}{4\omega^2\alpha^2}}\,d\lambda\right],$$

и

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=o}=-\frac{2}{\omega\sqrt{\pi}\,t^{\varepsilon^2\eta^2}}\left\{\int_0^{\sqrt{t}}\left[(t-\lambda^2)^{\varepsilon^2\eta^2}F(t-\lambda^2)\right]'e^{-\varepsilon^2\lambda^2}\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2\int_0^{\sqrt{t}}(t-\lambda^2)^{\varepsilon^2\eta^2}F(t-\lambda^2)\,e^{-\varepsilon^2\eta^2}\,d\lambda\right\}.$$

Если сюда подставить еще $t-\lambda^2=s$, то легко найдемъ:

$$\lambda=\sqrt{t-s},\quad d\lambda=-\frac{ds}{2\sqrt{t-s}},$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=o}=-\frac{2}{\omega\sqrt{\pi}\,t^{\varepsilon^2\eta^2}}\left\{\int_t^0\left[s^{\varepsilon^2\eta^2}F(s)\right]'e^{-\varepsilon^2(t-s)}\frac{-ds}{2\sqrt{t-s}}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^2\int_t^0 s^{\varepsilon^2\eta^2}F(s)e^{-\varepsilon^2(t-s)}\frac{-ds}{2\sqrt{t-s}}\right\},$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=o}=-\frac{e^{-\varepsilon^2 t}}{\omega\sqrt{\pi}\,t^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_0^t\frac{\left[s^{\varepsilon^2\eta^2}F(s)e^{\varepsilon^2 s}\right]'}{\sqrt{t-s}}\,ds.$$

Принимая во вниманіе, что

$$F(s)=P(s)-\frac{e^{-\varepsilon^2 s}}{s^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_0^s B(s)s^{\varepsilon^2\eta^2}e^{\varepsilon^2 s}\,ds,$$

получимъ слѣдующую формулу:

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=o}=-\frac{e^{-\varepsilon^2 t}}{\omega\sqrt{\pi}\,t^{\varepsilon^2\eta^2}}\left[\int_0^t\frac{\left[s^{\varepsilon^2\eta^2}P(s)e^{\varepsilon^2 s}\right]'}{\sqrt{t-s}}\,ds-\int_0^t\frac{s^{\varepsilon^2\eta^2}B(s)e^{\varepsilon^2 s}}{\sqrt{t-s}}\,ds.\right]$$

Эта формула дѣйствительна какъ для стержня I, такъ и для стержня II; нужно только къ буквамъ ε^2, η^2 приписать соотвѣтственно значки 1, 2. Но $\varepsilon_1^2\eta_1^2=\varepsilon_2^2\eta_2^2=\varepsilon^2\eta^2=\frac{h+l}{v}$, такъ что достаточно различать только $e^{\varepsilon_1^2 t}$ отъ $e^{\varepsilon_2^2 t}$.

Если теперь выразимъ, что сумма теплоты, которая протекаетъ въ единицу времени сквозь поперечное сѣченіе $x=0$, равняется Джоулеву теплу, которое развивается на площади f, то получимъ уравненіе:

$$-bvtk\left\{\left[\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]_{x=o}+\left[\frac{\partial V_2}{\partial x}\right]_{x=o}\right\}=0{,}24\;\frac{E^2}{(W+R)^2}\cdot R,$$

или

$$(*)\left\{\begin{aligned}&e^{\varepsilon_1{}^2 t}\left[\int_0^t \frac{\left[s^{\varepsilon^2\eta^2}P(s)e^{\varepsilon_1{}^2 s}\right]'}{\sqrt{t-s}}\,ds-\int_0^t \frac{s^{\varepsilon^2\eta^2}B(s)e^{\varepsilon_1^2 s}}{\sqrt{t-s}}\,ds\right]+\\&+e^{-\varepsilon_2{}^2 t}\left[\int_0^t \frac{\left[s^{\varepsilon^2\eta^2}P(s)e^{\varepsilon_2^2 s}\right]'}{\sqrt{t-s}}\,ds-\int_0^t \frac{s^{\varepsilon^2\eta^2}B(s)e^{\varepsilon_2^2 s}}{\sqrt{t-s}}\,ds\right]=T(t),\end{aligned}\right.$$

гдѣ:

$$T(t)=0{,}24\,\frac{\sqrt{\pi}\,\omega\,E^2R}{bvtk(W+R)^2},\quad R=R(t).$$

IV.

Теперь надо рѣшить послѣднее уравненіе (*), т. е. найти неизвѣстную функцію $P(s)$.

Въ лѣвой части этого уравненія имѣемъ суммы выраженій слѣдующей формы:

$$e^{-\varepsilon^2 t}\int_0^t \frac{H(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds.$$

Примѣнимъ къ этимъ выраженіямъ слѣдующія операціи:

1) замѣнимъ букву t буквой x, затѣмъ умножимъ все на $\dfrac{dx}{\sqrt{t-x}}$ и интегрируемъ отъ 0 до t,

2) дифференцируемъ результатъ по t.

Операція 1-я:

$$\int_0^t \frac{e^{-\varepsilon^2 x}}{\sqrt{t-x}}\,dx\int_0^x \frac{H(s)}{\sqrt{x-s}}\,ds$$

дастъ, если примѣнить извѣстную формулу Dirichlet:

$$\int_0^t H(s)ds\left[\int_s^t \frac{e^{-\varepsilon^2 x}\,dx}{\sqrt{(x-s)(t-x)}}\right]=\int_0^t H(s)ds\,.\,K(t,s),$$

гдѣ:

$$K(t,s)=\int_s^t \frac{e^{-\varepsilon^2 x}\,dx}{\sqrt{(x-s)(t-x)}};$$

если подставить $x=s+(t-s)\,z$, то можно будетъ написать:

$$K(t,s)=\int_0^1 \frac{e^{-\varepsilon^2 s-\varepsilon^2(t-s)z}}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz.$$

Операція 2-я дасть возможность написать слѣдующее равенство:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t H(s)ds\,.\,K(t,s)=H(t)\,.\,K(t,t)+\int_0^t\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}H(s)ds=$$

$$=H(t)e^{-\varepsilon^2 t}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}+\int_0^t H(s)ds\left[\int_0^1\frac{-\varepsilon^2 z\,.\,e^{-\varepsilon^2 s-\varepsilon^2(t-s)z}}{\sqrt{z(1-z)}}dz\right].$$

Какъ легко можно убѣдиться, интегралъ:

$$\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}=\pi;$$

итакъ результатъ операціи 2-й будетъ:

$$\pi H(t)e^{-\varepsilon^2 t}-\varepsilon^2\int_0^t H(s)e^{-\varepsilon^2 s}ds\left[\int_0^1\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,e^{-\varepsilon^2(t-s)z}dz\right]$$

Если примѣнить эти двѣ операціи къ уравненію (*) и обозначить $t^{\varepsilon^2\eta^2}P(t)=$ $=Q(t)$, то безъ труда получимъ:

$$(**)\,Q'(t)=-\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}Q(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^t\Big\{N_0(t,s)Q(s)+N_1(t,s)Q'(s)\Big\}ds+M(t),$$

гдѣ:

$$K_1(t,s)=\int_0^1\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,e^{-\varepsilon_1^2(s-t)z}dz$$

$$K_2(t,s)=\int_0^1\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,e^{-\varepsilon_2^2(t-s)z}dz$$

$$\varepsilon_1^2K_1(t,s)+\varepsilon_2^2K_2(t,s)=N_1(t,s)$$

$$\varepsilon_1^4K_1(t,s)+\varepsilon_2^4K_2(t,s)=N_0(t,s)$$

$$M(t)=t^{\varepsilon^2\eta^2}B(t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^t N_1(t,s)s^{\varepsilon^2\eta^2}B(s)ds+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t\frac{T(x)}{\sqrt{t-x}}dx\right].$$

Уравненіе (**) представляетъ собою интегро-дифференціальное уравненіе *Volterra* съ неизвѣстной функціей $Q(t)$, рѣшеніе котораго можно привести къ рѣшенію обыкновеннаго интегральнаго уравненія *Volterra* второго рода.

Для этой цѣли пусть функція $\varphi(t)=Q'(t)$ будетъ представлять для насъ неизвѣстную функцію; тогда:

$$Q(t)=\int_0^t\varphi(s)ds,$$

будетъ $=0$ для $t=0$, что вполнѣ согласно съ опредѣленіемъ функціи $P(t)$ (разность температуры между контактомъ и окружающей средою, которая для $t=0$ должна быть $=0$). Подставивъ вмѣсто $Q'(t)$ и $Q(t)$ надлежащія выраженія, легко найдемъ:

$$\varphi(t) = -\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{2}\int_0^t \varphi(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^t N_0(t,s)ds\int_0^s \varphi(x)dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t N_1(t,s)\varphi(s)ds + M(t).$$

Если примѣнимъ еще разъ формулу Dirichlet, то безъ труда получимъ:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left\{ N_1(t,x) + \int_t^x N_0(t,s)ds - \pi(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\right\}\varphi(x)dx + M(t);$$

это—обыкновенное интегральное уравненіе *Volterra* второго рода съ ядромъ $\mathcal{K}(t, x)$, гдѣ

$$2\pi\mathcal{K}(t,x) = N_1(t,x) + \int_t^x N_0(t,s)ds - \pi(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2).$$

Рѣшеніе уравненія:

$$(*_*^*) \qquad \varphi(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t,x)\varphi(x)dx + M(t),$$

при извѣстныхъ общихъ условіяхъ существуетъ и является единственнымъ; какъ извѣстно, оно можетъ быть дано выраженіемъ:

$$\varphi(t) = M(t) + \int_0^t \Gamma(t,x)M(x)dx,$$

гдѣ:

$$\Gamma(t,x) = \mathcal{K}(t,x) + \mathcal{K}^{(2)}(t,x) + \ldots + \mathcal{K}^{(n)}(t,x) + \ldots,$$

при чемъ $\mathcal{K}^{(n)}(t, x)$ обозначаетъ итерированное (iterier) ядро, которое опредѣляется рекуррентною формулою:

$$\mathcal{K}^{(n)}(t,s) = \int_s^t \mathcal{K}(t,x)\mathcal{K}^{(n-1)}(x,s)dx.$$

Опредѣливъ функцію $\varphi(t)$, получимъ съ помощью квадратуры:

$$Q(t) = t^{\varepsilon^2\eta^2}P(t) = \int_0^t \varphi(s)ds,$$

откуда искомая разность температуры контакта и окружающей среды получится въ качествѣ функціи отъ времени въ слѣдующей формѣ:

$$P(t) = \frac{1}{t^{\varepsilon^2\eta^2}}\int_0^t \varphi(s)ds.$$

V.

Для опредѣленія ядра $\mathcal{K}(t, x)$ найдемъ интегралъ

$$K(t,s) = \int_0^1 \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, e^{-\varepsilon^2(t-s)z}dz;\quad t \geqq s.$$

Интегралъ:

$$K(\alpha)=\int_0^1\sqrt{\frac{z}{z-1}}\,e^{-\alpha z}dz,\ \ \alpha\geqq 0,$$

мы можемъ получить дифференцированіемъ по параметру α слѣдующаго интеграла:

$$L(\alpha)=\int_0^1\frac{e^{-\alpha z}}{\sqrt{z(1-z)}}\,dz.$$

ибо:

$$\frac{dL(\alpha)}{d\alpha}=-K(\alpha).$$

Если подставить сюда $1-z=u$, то получимъ:

$$L(\alpha)=\int_0^1\frac{e^{-\alpha(1-u)}}{\sqrt{u(1-n)}}\,du=e^{-\alpha}\int_0^1\frac{e^{\alpha u}}{\sqrt{u(1-u)}}\,du$$

или

$$L(\alpha)=e^{-\alpha}L(-\alpha).$$

Но *)

$$L(-\alpha)=\int_0^1\frac{e^{\alpha u}}{\sqrt{u(1-u)}}du=\pi e^{\frac{\alpha}{2}}J_0\left(-\frac{i\alpha}{2}\right),$$

гдѣ $J_0(x)$ представляетъ собою Бесселеву функцію перваго рода и нулевого порядка, т. е.

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(2\,.\,4)^2}-\frac{x_6}{(2\,.\,4\,.\,6)^2}+\ldots$$

это есть рядъ сходящійся для каждаго значенія x.

Подобнымъ же образомъ, какъ и для $L(-\alpha)$, получимъ для $L(\alpha)$ выраженіе:

$$L(\alpha)=\int_0^1\frac{e^{-\alpha u}}{\sqrt{u(1-u)}}du=\pi e^{-\frac{\alpha}{2}}J_0\left(-\frac{i\alpha}{2}\right),$$

гдѣ:

$$J_0\left(-\frac{i\alpha}{2}\right)=J_0\left(\frac{i\alpha}{2}\right)=1+\frac{\alpha^2}{2^2.\,2^2}+\frac{\alpha^4}{2^4(2.4)^2}+\frac{\alpha^6}{2^6.\,(2.4.6)^2}+\ldots$$

Интегралъ

$$K(\alpha)=-\frac{dL(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{d}{d\alpha}\left(\pi e^{-\frac{\alpha}{2}}J_0\left(\frac{i\alpha}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{z}e^{-\frac{\alpha}{2}}\left[J_0\left(\frac{i\alpha}{2}\right)+iJ^{0\prime}\left(\frac{i\alpha}{2}\right)\right],$$

*) Riemann-Weber, l. c., Bd. I, S. 176. Form. (3), (5-te Aufl., 1910).

гдѣ

$$J_0'(x) = \frac{dJ_0(x)}{dx},\ J_0'\left(\frac{i\alpha}{2}\right) = \left[\frac{dJ_0(x)}{dx}\right]_{x=\frac{i\alpha}{2}},$$

приводится, такимъ образомъ, къ функціямъ Бесселя. Ядро интегральнаго уравненія ($*_{*}*$) послѣ простыхъ вычисленій приметъ слѣдующій видъ:

$$\mathcal{K}(t,x) = \frac{\varepsilon_1^2}{2}\left[\frac{3}{2}\,e^{-\frac{\alpha_1}{2}}J_0\left(\frac{\alpha_1}{2i}\right) - e^{-\frac{\alpha_1}{2}}\frac{dJ_0\left(\frac{\alpha_1}{2i}\right)}{d\alpha_1} - 2\right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon_2^2}{2}\left[\frac{3}{2}\,e^{-\frac{\alpha_2}{2}}J_0\left(\frac{\alpha_2}{2i}\right) - e^{-\frac{\alpha_2}{2}}\frac{dJ_0\left(\frac{\alpha_2}{2i}\right)}{d\alpha_2} - 2\right],$$

гдѣ:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1^2(t-x),\quad \alpha_2 = \varepsilon_2^2(t-x).$$

Подставляя ряды для Бесселевыхъ функцій въ $\mathcal{K}(t,x)$, получимъ

$$\mathcal{K}(t,x) = \frac{\varepsilon_1^2}{2}\left\{\left[\sum_{n=o}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\alpha_1}{4}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{(n!)^2}\left(\frac{\alpha_1}{4}\right)^{2n-1}\right]e^{-\frac{\alpha_1}{2}} - 2\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_2^2}{2}\left\{\left[\sum_{n=o}^{\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\alpha_2}{4}\right)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{(n!)^2}\left(\frac{\alpha_2}{4}\right)^{2n-1}\right]e^{-\frac{\alpha_2}{2}} - 2\right\}.$$

Ряды въ скобкахъ представляютъ собою ряды абсолютно сходящіеся, слѣдовательно можно писать:

$$\mathcal{K}(t,x) = \sum_{i=1}^{2}\frac{\varepsilon_i^2}{4}\left\{e^{-\frac{\alpha_i}{2}}\sum_{n=o}^{\infty}\left(\frac{3}{(n!)^2}\left(\frac{\alpha_i}{4}\right)^{2n} - \frac{n+1}{((n+1)!)^2}\left(\frac{\alpha_i}{4}\right)^{2n+1}\right) - 4\right\}$$

Всѣ эти формулы и разложенія въ ряды для ядра $\mathcal{K}(t,x)$ а тѣмъ болѣе для итерированныхъ ядеръ $\mathcal{K}^{(n)}(t,x)$ даютъ слишкомъ громоздкіе результаты, такъ что на практикѣ необходимо ввести нѣкоторыя дальнѣйшія упрощенія, а главнымъ образомъ принять во вниманіе то, что время t и, слѣдовательно, также $t-x$ величины очень малые. Подробности этихъ упрощеній, равно какъ и maximum найденной въ § IV температуры $P(t)$ и вытекающія оттуда слѣдствія для размѣровъ контакта я намѣренъ сообщить въ одной изъ дальнѣйшихъ работъ.

VI.

Разсмотримъ въ заключеніе случай, когда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, т. е. когда можемъ пренебречь передачей теплоты окружающей средѣ. Этимъ пріемомъ мы получимъ во всякомъ случаѣ верхній предѣлъ искомой температуры.

Изъ уравненія (**) найдемъ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$:

$$M(t) = Q'(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{T(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx,$$

откуда:

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{T(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx,$$

а при $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$$P(t) = Q(t).$$

Такимъ образомъ мы получимъ верхній предѣлъ для искомой температуры $P(t)$: а именно

$$P(t) < \frac{1}{2\pi}\int_0^t \frac{T(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx,$$

гдѣ

$$T(x) = 0{,}24\ \frac{\sqrt{\pi}\,\omega E^2 R}{bvxk(W+R)^2},\quad R = R(x).$$

Этотъ предѣлъ можетъ оказаться полезнымъ при экспериментальной провѣркѣ приведенной выше теоріи.

Приступить къ вычисленію послѣдняго интеграла, равно какъ и функціи $P(t)$ (въ концѣ § IV) можно будетъ тогда, когда будемъ знать математическое выраженіе для контактнаго сопротивленія R, которое пока въ литературѣ неизвѣстно и выводъ котораго послужитъ предметомъ одной изъ дальнѣйшихъ моихъ работъ. Первыя точныя измѣренія, хотя не совсѣмъ исчерпывающія, производили F. Streintz и A. Wesely *).

Оттискъ изъ I выпуска журнала Физико-Математическаго Общества при Пермскомъ Государственномъ Университетѣ.

---

*) Phys. Ztschr. *14*, 1913, p. 489.

Viktor Trkal.

ÜBER DIE TEMPERATUR DES GLEITKONTAKTES BEIM EINSCHALTEN DES ELEKTRISCHEN STROMES.

(*R é s u m é.*)

In der vorliegenden Arbeit berechnet der Verfasser die Temperatur der Gleitkontakte beim Einschalten des elektrischen Stromes. Er setzt vor, dass man durch zwei gegenüberliegende rechteckige unendlich lange sehr dünne Stäbe, welche sich mit ebenen Flächen berühren, den elektrischen Strom durchfliessen lässt, und studiert dann den Fall, wo man den Strom durch das parallele Gleiten der Berührungsfläche des einen auf der des anderen Stabes einschaltet. Auf den Berührungsflächen der beiden Stäbe entsteht noch ein besonderer Widerstand, d. sogen. Kontaktwiderstand R. Die Inteusität i des Stromes ist

$$i = \frac{E}{W+R},$$

wo E die elektromotorische Kraft und W den Widerstand des Systems bezeichnet. Zuerst berechnet der Verfasser die Joule'sche Wärme, die in einer Sekunde in der Berührungsebene der beiden Stäbe entwickelt wird und das ganze Problem führt er dann auf ein Problem der Wärteleitung zurück Am Ende des § I bekommt er die entsprechenden Differentialgleichungen für beide Stäbe. Im § II löst er diese Differentialgleichungen unter den gegebenen Nebenbedingungen. Im § III drückt er mathematisch aus, dass die Summe der Wärme, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt $x=0$ durchfliesst, gleich der Joule'schen Wärme ist, die auf der Kontaktflä he erzeugt wird; so erhält er neue Gleichung, deren Lösung er da:n auf Lösung einer Integro-differentialgleichung *Volterra*'s (siehe § IV) der zweiten Art zurückführt. Diese Integrodifferentialgleich ıng wird dann weiter auf eine gewöhnliche Differentialgleichung Volterra's zurückgeführt, deren Kern man im § V durch die *Bessel*'schen Funktionen ausdrückt. Dadurch erhält man den allgemeinen Ausdruck für die gesuchte Temperatur.

Zum Schluss zeigt der Verfasser noch eine gewisse obere Grenze für die gesuchte Temperatur, die auch bei den experimentellen Untersuchungen nützlich sein kann.