SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE.

Číslo XII.

Č. STROUHALA

MECHANIKA.

DRUHÉ VYDÁNÍ.

V PRAZE.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

2026.
Mch. 60

MECHANIKA.

DRUHÉ VYDÁNÍ.

Sepsal

~~C. k.~~ dvorní rada
DR. ČENĚK STROUHAL,
professor exp. fysiky na české universitě K. F.

Spolupracovník vydání druhého:

DR. BOHUMIL KUČERA,
professor exp. fysiky na české universitě K. F.

B 83/362

SPOLEK POSLUCHAČŮ ELEKTROTECHNICKÉHO INŽENÝRSTVÍ V PRAZE
ZRUŠENO

V PRAZE 1910.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Xb 22

KABINET PRO DĚJINY PŘÍRODNÍCH VĚD

232/63

Knihtiskárna B. Stýbla v Praze

Předmluva

k vydání prvému.

Mechanika jest, vedle nauky o elektřině, nejrozsáhlejším oborem fysiky. Z bohatého obsahu, majícího veliké pozadí historické, učiniti výběr věcí hlavních a při tom pamatovati, aby kniha nenabyla rozměrů velkých, není úkolem snadným. Proto každý autor řeší úkol ten dle své individuální povahy vědecké; nejsa vázán instrukcemi probírá mimovolně s větší obšírností a zálibou otázky, jež na př. sám více ovládá, v nichž sám více pracoval aneb jež dle soudu svého pokládá za důležitější neb zajímavější. Jsem si toho vědom, že takovou individuálnost bude jeviti též spis, který naší veřejnosti vědecké tuto předkládám. Zanášeje se již dávno úmyslem, sepsati experimentální fysiku, jež by repraesentovala niveau škol vysokých a byla i před cizinou svědectvím vědeckých snah našich, podobně, jak to své doby zamýšleli autorové K. V. Zenger a F. Čecháč, chtěl jsem, aby kniha byla základem studia hlavně studujícím mathematiky a fysiky na universitě i technice, budoucím odborníkům na školách středních; vedle toho však, aby byla přístupnou i širším kruhům intelligence naší, nejen v oborech spřízněných, v chemii, meteorologii, přírodopisu, lékařství, ale i v oborech vzdálenějších, v nichž všady fysika mívá své přátele. V souhlasu s tím založil jsem výklad celkově na mathematice nižší, a jen výjimečně, v několika málo odstavcích, užil jsem mathematiky vyšší k řešení úkolů, jež mají zvláštní důležitost ve fysice. Omezení na mathematiku nižší bylo již proto možno, že mechanika theoretická jest v literatuře naší zastoupena spisem Dra. A. Seydlera (Theoretické fysiky díl I.). Také otázka obrazců řešena vzhledem k onomu rozšíření programmovému. Kdyby kniha byla jenom pro

studující, bylo by se mohlo přestati na obrazcích schematických, poněvadž studující mají v přednáškách příležitost, fysikální apparáty v originálech poznávati. Čtenáři však kruhů širších má obrazec nahraditi přímý názor. Bylo tudíž uznáno za nutné, připojiti také obrazy apparátů, a to, pokud možno, dle originálů na výši doby stojících. Originály tyto poskytly sbírky c. k. ústavu fysikálního české university. Při tom pomýšleno původně na dřevoryty, kteréž i pro podrobnosti i pro celkový pohled jsou nejlepšími; k účelu tomu provedl mnohé přípravné nákresy dřívější assistent můj, prof. *J. Vykruta*. Z důvodů finančních ustoupeno však později od tohoto úmyslu a rozhodnuto, aby apparáty byly fotografovány a pak zinkograficky reprodukovány. Způsob tento, jehož zde, pokud mi známo, ve fysice ponejprv užito, má své výhody i své vady. V podrobnostech uspokojují obrazce měrou menší; v celkovém pohledu působí však dojmem dobrým, dávajíce daleko lépe obraz skutečnosti než dřevoryty. Zejména v těch případech, kde byl, abych tak řekl, fotografován experiment, anebo kde momentní fotografií podařilo se zobraziti zjevy na apparátech v pohyb uvedených, působí obrazce tak zjednané dojmem podobným jako pokus skutečný. Obrazce takové, jako na př. 158, 183, 185, 186, 190, anebo zase obr. 323, 332 a j. (v novém vydání: 360., 374.) jsou unika, jichž dosud nemá žádná kniha cizojazyčná. Jen u skleněných přístrojů nebylo lze fotografie užiti, poněvadž četnými reflexy a neurčitostí kontur (i proti tmavému pozadí) fotografické reprodukce (jako na př. obrazce 20 a 21, v novém vydání vynechané) se ukázaly býti nevýhodnými. Proto byly později dle fotografií takových raději pořízeny výkresy.

Práce fotografické prováděl assistent fysik. ústavu Dr. *Vlad. Novák* za pomoci druhého assistenta p. *K. Pecháčka*. Obrazce dle fotografií kreslil některé p. assistent *O. Brychta*; ostatní, jakož i všechny obrazce schematické i geometrické provedl dle mých náčrtků pečlivě p. Ing. C. *K. Friedl*. Reprodukci zinkografickou obstaral závod osvědčený *Unie-Vilím*. Všem zde jmenovaným vzdávám díky za péči, kterou práci té věnovali. Rovněž p. prof. *Aug. Pánkovi*, jenž s přátelskou ochotou mi při korrektuře byl nápomocen a ze své bohaté zkušenosti mnohými návrhy k formální dokonalosti díla přispěl, vzdávám díky srdečné.

Co se obsahu knihy týče, který bude předmětem kritiky vědecké, nebudu šířiti slov. Čtenář nalezne nejen po stránce formální ale i meritorní mnoho nového; sezná četné nové apparáty a pokusy, k nimž mne vedla dlouholetá zkušenost experimentální; nalezne též mnoho nových diagrammů, jež jsem konstruoval, a tabulek, jež jsem propočítal. Kniha se vyznačuje také tím, že zde důsledně provedena absolutní soustava měr. Všechny vzorce jsou psány a propočítány v duchu této soustavy, při čemž ovšem přihlíženo všude také k měrám starším, jak toho žádá kontinuita vědeckých prací. Také postup výkladu byl uspořádán dle přirozeného rozvoje pojmů a definic, jak plyne z absolutní soustavy měr. Dvojím tiskem, garmondem a borgisem, mělo býti docíleno, jednak úspory místa, jednak lepšího přehledu, aby věci hlavní se i oku rozlišovaly od věcí podřízenějších a od podrobností, jež při prvém studiu mohou býti vynechány.

Že pak jsem na mnohých místech s jistou zálibou přihlížel k astronomii a meteorologii, budiž na účet individuality dříve zmíněné vysvětleno tím, že jsem v mladších letech na hvězdárně Pražské i ve Würzburku vědami těmito se zanášel a že z let těchto jsem pro ně zachoval své sympathie.

Ke konci budiž mi dovoleno vysloviti díky především *Jednotě českých mathematiků*, kteráž obětavě, nelekajíc se finančních ztrát, jež s vydáním díla vědeckého u nás zpravidla jsou spojeny, náklad přejala, jakož i *Akademii císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění*, kteráž Jednotě na vydání tohoto díla pěti sty zl. přispěla.

V SEČI, dne 9. září 1900.

Dr. **Č. Strouhal.**

Předmluva

k vydání druhému.

Při druhém vydání Mechaniky provedena důkladná revise textu, kterýž byl ve všech směrech dle nejnovějšího stavu vědy doplněn a kde bylo třeba místy zkrácen a jinde zase rozšířen. Práce této zúčastnil se k mému přání též p. professor Dr. *Bohumil Kučera*, dřívější můj assistent, jenž zejména nově a zcela samostatně jak v textu tak v obrazcích zpracoval část XX., jednající o mechanice molekulové, kteráž byla v prvém vydání podána jen v hlavních rysech. Nové obrazce schematické, zvláště v této části hojné, kreslil dle udání p. prof. Dra. *Kučery* p. inženýr *Vojtěch Pařízek*, nyní assistent ústavu elektrotechnického na české technice v Praze; reprodukce zinkografické obstaral jako při prvém vydání závod *Unie*. Čtení korrektury zúčastnil se též můj assistent p. *Ladislav Štětka*. Všem těmto jmenovaným, kteří ke zdaru díla prací svou přispěli, vzdávám díky upřímné.

Vzpomínám vděčně též vzácné ochoty a obezřelosti, s jakou vedl tisk pan *V. Seidl*, faktor knihtiskárny *B. Stýbla*. Konečně — last not least — vzdávám díky srdečné *Jednotě českých mathematiků* v Praze, kteráž na nové vydání Mechaniky vedla náklad, jakož i všem členům *Výboru Jednoty*, kteří o knihu vždy jevili zájem co nejlaskavější.

V PRAZE, dne 24. září 1909.

Dr. **Čeněk Strouhal.**

Kapitola XX., k jejíž úpravě jsem byl koncem června t. r. vyzván, podává místy — zvláště v theoretických vývodech — zkrácený, místy rozšířený obsah mých universitních výkladů o vyšších partiích experimentální fysiky, část I. z r. 1904—5 a 1908—9, pokud spadají v rámec mechaniky. Na tomto místě musím vděčně vzpomenouti znamenité podpory, jíž skytly mě při zpracování theoretické stránky látky přednášky učitele mého, prof. Dra. *Fr. Koláčka* o mechanice a theorii pružnosti, jichž vlastní mé přepisy z r. 1894 a 1893, resp. 1896 mně byly k disposici. Jinak užil jsem veškeré knižní literatury, pokud mi byla přístupnou. Vedle knih v textu citovaných uvádím zejména Winkelmannův Handbuch der Physik I., 1. a 2. (II. vydání 1908), kde zvláště některé odstavce, jako kapillarita (Pockels) a diffuse (Waitz) vynikají výborným zpracováním: zvláště však byla mně rozdělením a rozsahem látky vzorem kniha Thomson-Poyntingova: Textbook of Physics I.: Properties of matter (1903).

Při citování různých prací uvádím vedle jména autorova pouze rok; časopis, v němž vyšly, snadno se nalezne u prací starších pomocí Poggendorffova: Biographisch-litterarisches Handwörterbuch, u novějších ve Fortschritte der Physik nebo u prací od r. 1901 počínaje v českých »Přehledech pokroků fysiky«, které společně s pány: Maškem, Nachtikalem, Novákem, Petírou a Záviškou vydáváme ve Věstníku České Akademie i samostatně. Vůbec tvoří tyto systematicky spořádané »Pokroky fysiky« doplněk ke každé obšírnější knize učebné, uvádějíce v příslušných kapitolách nejnovější práce, o dotyčných otázkách pojednávající.

Za čtení korrektur, v části mnou zpracované, jest mi vzdáti nejvřelejší díky milému příteli prof. Dru. *V. Posejpalovi.*

V PRAZE, v září 1909.

B. Kučera.

OBSAH.

Úvod.

Postavení a úkol fysiky mezi vědami přírodními.

Stránka

§ 1. Roztřídění věd přírodních 1
§ 2. Úkol fysiky v širším i užším smyslu 2

Methody badání fysikálního.

§ 3. Pozorování fysikální 4
§ 4. Příčinnost a účelnost 5
§ 5. Fysikální zákon 6
§ 6. Řešení numerické 7
§ 7. Řešení grafické 8
§ 8. Řešení mathematické 9
§ 9. Přednosti znázornění grafického 10
§ 10. Formule interpolační 11
§ 11. Záznamy autografické 12
§ 12. Rozdělení fysiky 14

I. O prostoru.

§ 13. Výklad úvodní 17

Měření úhlu.

§ 14. Jednotka úhlová 17
§ 15. Goniometry 18
§ 16. Libelly 19

Měření délky.

§ 17. Definice metru 23
§ 18. Realisace metru; první prototyp 24
§ 19. Organisace internacionální; nové prototypy 28

Stránka

§ 20. Násobky a díly metru; označení 30
§ 21. Délkové jednotky metrické a starofrancouzské 30
§ 22. Délkové jednotky metrické a anglické 32
§ 23. Rozměry naší země 34
§ 24. Jiné míry starší 36
§ 25. Dělicí stroj délkový 37
§ 26. Dělicí stroj kruhový 41
§ 27. Měřítka 42
§ 28. Nonius (vernier) 43
§ 29. Měřítko kalibrové 46
§ 30. Kontaktní měřítko pákové 47
§ 31. Sférometr 48
§ 32. Kontaktní měřítko šroubové 51
§ 33. Komparátor 52
§ 34. Kathetometr 54

Měření plochy.

§ 35. Stanovení jednotek plošných vůbec 57

Měření objemu.

§ 36. Stanovení jednotek objemových vůbec 58
§ 37. Určování objemu 60

II. O času.

§ 38. Úvahy předběžné 62
§ 39. Vzájemná velikost a odlehlost slunce, oběžnic a stálic . . 63
§ 40. Základní pojmy a definice astronomické 66
§ 41. Čas hvězdný 68
§ 42. Čas sluneční pravý 69
§ 43. Rozdíl mezi časem hvězdným a časem slunečním pravým . 69
§ 44. Čas sluneční střední 71
§ 45. Rozdíl slunečního času středního a pravého; rovnice časojevná 73
§ 46. Vliv rovnice časojevné na rozdělení dne 75
§ 47. Hodiny sluneční 76
§ 48. Čas pásmový 78
§ 49. Oprava a chod hodin 80
§ 50. Akustické a grafické označování sekundy 82
§ 51. Ladička chronoskopem 84
§ 52. Rok siderický tropický a anomalistický 84
§ 53. Obíhání země na dráze elliptické a čtvero ročních počasí . 86

Stránka

III. O hmotě.

§ 54. Vlastnosti hmoty 88
§ 55. Měřitelnost hmoty 92
§ 56. Definice kilogrammu 93
§ 57. Realisace kilogrammu 95
§ 58. Nové prototypy 96
§ 59. Násobky a díly grammu; označení 97
§ 60. Závaží, uspořádání, materiál 98
§ 61. Litr a krychlový decimetr; poměr 100
§ 62. Specifická hmota a hustota 102
§ 63. Vliv tlaku a teploty 103
§ 64. Hutnost plynů a par 103
§ 65. Specifický objem 104
§ 66. Tělesa stejnorodá a různorodá 104
§ 67. Tělesa isotropní a anisotropní 105
§ 68. Theorie atomická 106
§ 69. Gramm-atom a gramm-molekula 109
§ 70. Rozvoj theorie atomické 110

IV. Absolutní soustava měr.

§ 71. Výklad úvodní 112
§ 72. Jednotky základní a odvozené 113
§ 73. Označení jednotek základních 116
§ 74. Rozměr jednotek odvozených 117
§ 75. Význam rozměrových výrazů 118
§ 76. Označení rozměrů jednotek odvozených 119
§ 77. Jednotky praktické 120

V. Rychlost a urychlení.

§ 78. Pohyb relativní a absolutní 121
§ 79. Pohyb hmotného bodu 122

Pohyb bodu přímočarý.

§ 80. Diagramm pohybu 122
§ 81. Pohyb rovnoměrný; pojem rychlosti 123
§ 82. Pohyb nerovnoměrný; rychlost průměrná a okamžitá . . 124
§ 83. Pohyb rovnoměrně urychlený; pojem urychlení 126
§ 84. Pohyb nerovnoměrně urychlený; urychlení průměrné a okamžité 127
§ 85. Úplný diagramm pohybu 128
§ 86. Širší význam pojmů rychlosti a urychlení 129

Stránka

Pohyb bodu křivočarý.

§ 87. Skládání pohybů přímočarých v rovině 129
§ 88. Rozkládání pohybu v rovině ve dva pohyby přímočaré . . 130
§ 89. Skládání rychlostí 131
§ 90. Vznik pohybu křivočarého 132
§ 91. Urychlení tangenciální a normální 133
§ 92. Rychlost úhlová a urychlení úhlové 135

Pohyb tělesa.

§ 93. Translace a rotace 136

VI. Síla, práce, energie.

§ 94. Pojem síly 138
§ 95. Účinek síly statický 139
§ 96. Jednotka síly statická 139
§ 97. Účinek síly dynamický 140
§ 98. Setrvačnost 141
§ 99. Stanovení síly na základě účinku dynamického 143
§ 100. Jednotka síly dynamická 144
§ 101. Poměr obou jednotek sil, starší statické a nové dynamické 145
§ 102. Znázorňování síly 146
§ 103. Moment síly 147
§ 104. Práce 149
§ 105. Jednotka práce 150
§ 106. Starší jednotka práce a její poměr k novější 151
§ 107. Effekt pracovní 151
§ 108. Jednotka effektu pracovního 152
§ 109. Starší jednotka effektu a její poměr k novější 153
§ 110. Práce síly a živá síla 154
§ 111. Popud síly a hybnost hmoty 155
§ 112. Energie 157
§ 113. Princip zachování energie 157

VII. Rovnomocnost soustav sil jednotlivých a podvojných.

§ 114. Úkol všeobecný 162

Síly v bodě.

§ 115. Síly dvě, trojúhelník (rovnoběžník) sil 163
§ 116. Rovnováha tří sil v témže bodě působících 164
§ 117. Důkaz experimentální 165

Stránka

§ 118. Rozkládání síly ve dvě složky 166
§ 119. Síly v počtu libovolném; mnohoúhelník sil 167
§ 120. Věta o momentech 168

Síly v přímce.

§ 121. Síly dvě; přímkový útvar neproměnný 171
§ 122. Síly v počtu libovolném 172

Síly v rovině.

§ 123. Dvě síly různoběžné v rovině 173
§ 124. Dvě síly rovnoběžné v rovině 174
§ 125. Střed rovnoběžných sil 177
§ 126. Střed rovnoběžných sil a věta momentová 177
§ 127. Rovnováha tří rovnoběžných sil 179
§ 128. Důkaz experimentální 180
§ 129. Rozkládání síly ve dvě složky rovnoběžné 181
§ 130. Dvojice sil 182
§ 131. Rovnomocnost dvojic 183
§ 132. Geometrické znázornění dvojice 186
§ 133. Skládání dvojic o osách rovnoběžných 187
§ 134. Skládání dvojic o osách různoběžných 188
§ 135. Rovnoběžné pošinutí síly jest kompensováno dvojicí . . . 189
§ 136. Síly v rovině v počtu libovolném 190

Síly v prostoru.

§ 137. Skládání sil různoběžných 191
§ 138. Skládání sil rovnoběžných 193
§ 139. Rovnomocnost sil, výsledky závěrečné 194

VIII. Tíže zemská.

§ 140. Úkazy základní 195
§ 141. Střed hmotný 195
§ 142. Stanovení těžiště počtem 196
§ 143. Stanovení těžiště konstrukcí 199
§ 144. Rovnováha tuhého tělesa těžkého 200
§ 145. Míra stálosti polohy 202
§ 146. Empirické stanovení těžiště 203

IX. Jednoduché stroje.

§ 147. Úvahy všeobecné 205
§ 148. Princip virtuálních posunutí 206
§ 149. Páka 210

Stránka

§ 150. Kladka pevná a volná 213
§ 151. Kladkostroje 216
§ 152. Kolo na hřídeli 218
§ 153. Nakloněná rovina 218
§ 154. Klín 223
§ 155. Šroub 224
§ 156. Kombinace jednoduchých strojů 226
§ 157. Úvahy závěrečné 227

X. Váhy a vážení.

§ 158. Úvahy základní 229
§ 159. Citlivost vážení 232
§ 160. Doba kyvu vah 234
§ 161. Rozbor rovnice o citlivosti vah a době kyvu 235
§ 162. Zařízení vahadla 237
§ 163. Úprava vah 238
§ 164. Methoda pozorovací 243
§ 165. Zkouška vah 248
§ 166. Jak se stanoví citlivost vah 249
§ 167. Příklady citlivosti vah 250
§ 168. Methoda vážení 251
§ 169. Jak se zkoumá správnost vah 251
§ 170. Jak lze vážiti správně na vahách nesprávných 254
§ 171. Kdy není nerovnoramennost vah na závadu 257
§ 172. Účinek vzduchu při vážení absolutním i relativním . . . 258
§ 173. Kontrola závaží 258
§ 174. Jak lze pozorováním číselně stanoviti konstanty vah . . 262

XI. Tíže všeobecná.

Gravitační pole.

§ 175. Rozvoj historický 266
§ 176. Základní výraz zákona gravitačního 268
§ 177. Intensita pole gravitačního 268
§ 178. Gravitační pole homogenní kulové vrstvy 269
§ 179. Gravitační pole koule z homogenních kulových vrstev složené 272
§ 180. Průměrná hustota země 273
§ 181. Gravitační jednotka hmoty 275
§ 182. Gravitační jednotka času 276
§ 183. Hustota jednotlivých vrstev zemských 277
§ 184. Gravitační pole uvnitř země 277
§ 185. Řešení numerické a grafické 278

Stránka

§ 186. Gravitační pole vně země 280
§ 187. Gravitační pole v malé výšce nad povrchem země . . . 281
§ 188. Gravitační pole koule homogenní 283
§ 189. Gravitační pole slunce 283
§ 190. Gravitační pole měsíce 285

Příliv a odliv.

§ 191. Různosti gravit. pole slunce a měsíce na povrchu zemském 286
§ 192. Příliv a odliv 288
§ 193. Podrobnosti o rovnici přístavní 291

Stanovení konstanty gravitační čili průměrné hustoty země naší.

§ 194. Srovnávání polí gravitačních 296
§ 195. Měření na základě odchylky svislice 298
§ 196. Měření z přibývání intensity gravitační do hloubky . . 300
§ 197. Měření vážením na jemných vahách pákových 306
§ 198. Měření na jemných vážkách točných 309
§ 199. Výsledek závěrečný 315

XII. Pád volný a po šikmé rovině.

§ 200. Úvod 318
§ 201. Pád volný 318
§ 202. Pád po šikmé rovině 320
§ 203. Zákon o rychlostech 321
§ 204. Zákon o tětivách 321
§ 205. Padostroje 323
§ 206. Padostroj Galileův 324
§ 207. Padostroj Atwoodův 326
§ 208. Úprava padostroje Atwoodova 327
§ 209. Padostroj Poggendorffův 331

XIII. Pohyb vrhem způsobený.

§ 210. Roztřídění úkolů 335
§ 211. Vrh svislý 336
§ 212. Vrh šikmý 337
§ 213. Konstrukce vrcholů 338
§ 214. Ellipsa vrcholů 339
§ 215. Dálka vrhu 340
§ 216. Parabola dráhy 341
§ 217. Parabola ochranná 342
§ 218. Vliv vzduchu 344

Stránka

XIV. Pohyb středoběžný.

§ 219. Vznik pohybu středoběžného 345
§ 220. Pohyb kruhový 346
§ 221. Zjevy reakční při pohybu středoběžném 347
§ 222. Příklady početní 348
§ 223. Příklady pokusné 349
§ 224. Příklady z přírody 354
§ 225. Sploštění země 357
§ 226. Šířka geocentrická a geografická 357
§ 227. Umenšení tíže na rovníku 360
§ 228. Umenšení tíže v různých šířkách 360
§ 229. Sploštění jiných oběžnic 364
§ 230. Umenšení tíže na rovníku jiných oběžnic 365

XV. Zákony oběhu těles nebeských kolem slunce.

§ 231. Úvod historický 367
§ 232. První zákon Keplerův 370
§ 233. Druhý zákon Keplerův 372
§ 234. Třetí zákon Keplerův 375
§ 235. Spojení zákonů Keplerových 378

XVI. Energie pohybu rotačního.

§ 236. Analogie translace a rotace 382
§ 237. Moment setrvačnosti 385
§ 238. Poloměr setrvačnosti 385
§ 239. Moment setrvačnosti pro osu položenou středem hmotným 386
§ 240. Momenty setrvačnosti pro osy libovolné 387
§ 241. Ellipsoid setrvačnosti 389
§ 242. Ellipsoid centrální 390
§ 243. Příklady o momentech setrvačnosti 390
§ 244. Osa volná 393
§ 245. Setrvačníky Schmidtovy 395
§ 246. Výklad 397
§ 247. Pravidlo ruky pravé 399
§ 248. Apparát Fesselův 401
§ 249. Praecesse a nutace 403
§ 250. Nutoskop Zengerův 407
§ 251. Přístroj Bohnenbergerův 408
§ 252. Napodobení pohybu dvojhvězd 409

Stránka

XVII. Pohyb periodický vůbec, harmonický a kyvadlový zvlášť.

§ 253. Pohyb periodický 411
§ 254. Pohyb harmonický 411
§ 255. Příklady pohybu harmonického 413
§ 256. Rozbor pohybu harmonického 415
§ 257. Grafické znázornění pohybu harmonického 417
§ 258. Pohyb kyvadlový 417
§ 259. Kyvadlo mathematické 418
§ 260. Pohyb kyvadla mathematického při amplitudě velmi malé 419
§ 261. Pohyb kyvadla mathematického při amplitudě libovolné . 420
§ 262. Řešení mathematické 421
§ 263. Redukce doby kyvu na amplitudu nekonečně malou . . 423
§ 264. Kyvadlo fysické 425
§ 265. Redukovaná délka kyvadla fysického stanovena pokusem 426
§ 266. Redukovaná délka kyvadla fysického stanovena počtem . 427
§ 267. Body sdružené 429
§ 268. Minimum doby kyvu 430
§ 269. Sdružené kruhy 431
§ 270. Početní příklad 431
§ 271. Kyvadlo převratné 434
§ 272. Účinek urychlení 436
§ 273. Měření intensity tíže kyvadlem 437
§ 274. Délka kyvadla sekundového 440
§ 275. Chod hodin v různých šířkách geografických 442
§ 276. Kyvadlo přístrojem geognostickým 443
§ 277. Kyvadlo jako indikátor rotace zemské 445
§ 278. Kyvadlo differenciální 446
§ 279. Metronom 447
§ 280. Empirické stanovení momentu setrvačnosti 448
§ 281. Kyvadlo regulátorem hodin 449
§ 282. Kyvadlo sférické 451
§ 283. Pohyb kyvadla v prostředí odporujícím 451

XVIII. Úkazy rovnováhy a pohybu kapalin.

§ 284. Význačné vlastnosti kapalin 459
§ 285. Všestranné šíření se tlaku v kapalinách 460
§ 286. Hydraulický lis 461
§ 287. Tlak hydrostatický 462
§ 288. Tlak na vodorovné dno 464
§ 289. Tlak na stěny 465
§ 290. Spojité nádoby 467
§ 291. Tlak v kapalině 468
§ 292. Zákon Archimedův 469

Stránka

§ 293. Experimenty o zákonu Archimedově 471
§ 294. Mathematická formulace 472
§ 295. Plování tělesa 473
§ 296. Poloha tělesa plovoucího 475

Redukce vážení na prostor vzduchoprázdný.

§ 297. Odvození rovnice 476
§ 298. Tabulka početní 479
§ 299. Redukce při vážení relativním 480

Stanovení hmoty specifické.

§ 300. Výklad všeobecný 481

Tělesa tuhá.

§ 301. Vážení ve vzduchu a měření objemu 483
§ 302. Vážení ve vzduchu a ve vodě 485
§ 303. Vážení ve vzduchu a v pyknometru 487
§ 304. Methoda suspensační 490
§ 305. Araeometr Nicholsonův 491

Kapaliny.

§ 306. Měření objemu a vážení ve vzduchu 492
§ 307. Určení pyknometrem 492
§ 308. Určení tělískem ponorným 494
§ 309. Vážky Mohrovy 496
§ 310. Araeometry 498

Pohyb kapalin.

§ 311. Energie proudění 500
§ 312. Výtok kapaliny malým otvorem ve vodorovném tenkém dně nádoby 502
§ 313. Časový průběh výtoku 504
§ 314. Výtok otvorem v postranní tenké stěně nádoby 506
§ 315. Pokusy 506
§ 316. Příčiny neshody mezi pozorováním a počtem 507
§ 317. Dráha paprsku vytryskujícího 510
§ 318. Proudění kapalin v trubicích 512
§ 319. Reakce výtoku kapalin 518
§ 320. Využitkování energie vodní 518

XIX. Úkazy rovnováhy a pohybu plynů.

§ 321. Význačné vlastnosti plynů 521

Stránka

Tlak vzduchu.

§ 322. Pokus Torricelliho 522
§ 323. Základy tlakoměrů 524
§ 324. Normální tlakoměr Regnaultův 526
§ 325. Tlakoměr Fortinův 527
§ 326. Tlakoměr násoskový 528
§ 327. Tlakoměr Gay-Lussacův 529
§ 328. Normální tlakoměr dvouramenný 531
§ 329. Barometr variační 532
§ 330. Přesnost odčítání a přesnost výsledku 533
§ 331. Redukce odečtení barometrického na normální teplotu . . 537
§ 332. Redukce odečtení tlakoměrného na normální intensitu tíže zemské 540
§ 333. Tlak vzduchu v míře absolutní 542
§ 334. Aneroidy 543
§ 335. Hypsothermometr 545
§ 336. Barografy 546
§ 337. Variace tlaku vzduchového 547
§ 338. Normální tlak atmosférický 549

Rozpínavost plynů.

§ 339. Přehled úkolů 551
§ 340. Zákon Boyle-Mariottův 553
§ 341. Zkouška experimentální 554
§ 342. Zákon Gay-Lussacův 557
§ 343. Spojený zákon 558
§ 344. Specifická hmota vzduchu 559
§ 345. Stanovení rozdílů výškových na základě barometrickém . 563
§ 346. Redukce tlaku barometrického na hladinu mořskou . . 569
§ 347. Výsledky orientační. Grafické znázornění 570
§ 348. Zkouška zákona Boyle-Mariottova 574
§ 349. Stereometr 581

Vývěvy.

§ 350. Úvod historický 582
§ 351. Vývěva příruční 585
§ 352. Postup zřeďování 587
§ 353. Příklady početní 589
§ 354. Manometry 590
§ 355. Vývěvy dvojčinné 591
§ 356. Vývěva Deleuilova 593
§ 357. Vývěva Staudingerova 598
§ 358. Vývěva olejová 598
§ 359. Vývěvy rtuťové 602
§ 360. Vývěva Töplerova v úpravě Bessel-Hagenově 603
§ 361. Vývěvy vodní 606

Stránka

§ 362. Rotační rtuťová vývěva Gaedeho 607
§ 363. Pokusy vývěvou 610
§ 364. Vývěvy zhušťovací 613
§ 365. Postup zhušťování 614
§ 366. Manometry při zhušťování 616
§ 367. Pokusy vývěvami zhušťovacími 618

Pohyb plynů.

§ 368. Výtok plynu malým otvorem nádoby 618
§ 369. Methoda Bunsenova, kterak lze stanoviti hutnost plynů . 621
§ 370. Další analogie proudění plynů a kapalin 622
§ 371. Proudy vzduchové v atmosféře 624

XX. Úkazy působením sil molekulových vznikající.

§ 372. Síly molekulové 629

Pružnost těles tuhých.

§ 373. Úkazy pružnosti 630
§ 374. Některé věty o deformacích 631
§ 375. O střihu 633
§ 376. O napětí 637
§ 377. Hookeův zákon. Vztah mezi deformacemi a napětími . . 641
§ 378. Energie tělesa deformovaného 642
§ 379. Pružnost v tahu (tlaku) 643
§ 380. Příčná kontrakce 645
§ 381. Číselné hodnoty E a σ 648
§ 382. Tepelné změny deformacemi vznikající 650
§ 383. Všeobecný případ hranolu podrobeného silám normálním. Vztahy mezi moduly a koefficienty 651
§ 384. Kubická dilatace 654
§ 385. Torse 657
§ 386. Měření modulu střižného a Poissonova poměru torsí . . 661
§ 387. Ohýbání 663
§ 388. Měření Youngova modulu ohýbáním 668
§ 389. Spirály 670
§ 390. Dopružování 672

Ráz tuhých těles.

§ 391. Vymezení úkolu 676
§ 392. Přímý ráz koulí nepružných 677
§ 393. Přímý ráz koulí pružných 679
§ 394. Zákon o živých silách 680

Stránka

§ 395. Ráz koule na pevnou stěnu 682
§ 396. Přímý ráz koulí nedokonale pružných 683
§ 397. Poznámky historické a methodické 684
§ 398. Kyvadlo ballistické 686

Úkazy soudržnosti těles tuhých.

§ 399. Deformace permanentní. Elastické diagrammy 687
§ 400. Pevnost 688
§ 401. Tvrdost 691
§ 402. Plastičnost 692
§ 403. Přilnavost 694

Vnější tření tuhých těles.

§ 404. Tření vlečné 696
§ 405. Rovnováha na šikmé rovině vzhledem ke tření vlečnému . 698
§ 406. Pád tělesa po šikmé rovině vzhledem ke tření vlečnému . 698
§ 407. Tření valné 700
§ 408. Pád těles po šikmé rovině se valících 702

Obecné vlastnosti kapalin.

§ 409. Pružnost kapalin 704
§ 410. Soudržnost a přilnavost u kapalin 706

Kapillarita.

§ 411. Úvod a črta historická 708
§ 412. Tlak povrchový při vodorovném povrchu kapaliny . . . 710
§ 413. Napětí povrchové při vodorovném povrchu kapaliny . . 712
§ 414. Povrchová energie 714
§ 415. Tlak povrchový při zakřiveném povrchu kapaliny . . . 715
§ 416. Některé pokusy 719
§ 417. Systémy laminární 721
§ 418. Šíření se kapaliny na povrchu kapaliny jiné 724
§ 419. Úhel krajní 726
§ 420. Elevace a depresse v trubičkách kapillárních 728
§ 421. Elevace a depresse u rovnoběžných desk 731
§ 422. Výstup kapaliny podél nekonečné stěny, tvar kapek a bublin 733
§ 423. Elementární odvození vzorců pro kapky a bubliny . . . 735
§ 424. Některé další methody k určování povrchového napětí . 737
§ 425. Pohyby podmíněné kapillaritou 743
§ 426. Kapillární konstanty 745
§ 427. Některé výsledky číselné 746
§ 428. Povrchy anomální. Tloušťka blan 748

Stránka

Vnitřní tření kapalin.

§ 429. Pojem vnitřního tření 750
§ 430. Proudění kapaliny kapillárou 753
§ 431. Jiné methody k měření vnitřního tření 757
§ 432. Užívání mazadel. Stav turbulentní 760
§ 433. Vnější tření kapalin 761
§ 434. Některé výsledky číselné 762

Diffuse a osmosa kapalin.

§ 435. Vymezení úkolu. Koncentrace 763
§ 436. Diffuse kapalin 765
§ 437. Methody k stanovení diffuse 768
§ 438. Něco z číselných výsledků 770
§ 439. Osmosa kapalin 772
§ 440. Blány polopropustné. Osmotický tlak 774
§ 441. Dialysa 779

Vnitřní tření plynů.

§ 442. Definice koefficientu vnitřního tření a methody měrné . 779
§ 443. Vnitřní tření plynů dle kinetické theorie 782
§ 444. Něco z výsledků měření 784

Diffuse a osmosa plynů.

§ 445. Diffuse plynů. Zákon Daltonův 788
§ 446. Pozorovací methody a výsledky 792
§ 447. Diffuse par 793
§ 448. Osmosa plynů 794

Absorpce a adsorpce plynů.

§ 449. Absorpce plynů 801
§ 450. Měření a číselné výsledky 803
§ 451. Adsorpce a okkluse plynů 807

Úvod.

Postavení a úkol fysiky mezi vědami přírodními.

§ 1. Roztřídění věd přírodních.

Fysika *) náleží mezi *vědy přírodní*, t. j. vědy, jichž všeobecným úkolem jest poznání přírody. Základem tohoto poznávání jest zkušenost, empirie. Jsou tudíž vědy přírodní *vědami empirickými* a liší se tím podstatně od *věd exaktních*, jichž základem jest rozumování, spekulace.

Zkušenost seznamuje nás s jednotlivými předměty přírodními.

Studujíce tyto předměty hledíme především seznávati jich vlastnosti, vytknouti jich znaky, dle těchto pak rozmanité předměty přírodní k sobě přirovnávajíce, seřaďujeme je dle jich stejnosti neb podobnosti neb různosti v jednotlivé skupiny, tvoříme třídy nižší a vyšší, budujeme systém, klassifikujeme. Tímto směrem jdou vědy přírodní *popisné*, *systematické*, jde *přírodopis*.

Souhrn všech vlastností a znaků, jakéž na nějakém předmětu přírodním pozorujeme, podmiňuje jeho stav. Avšak zkušenost učí, že stav tento není vždy stejný, ani dle místa ani dle času; pozorujeme, že předměty přírodní stav svůj mění. Každou takovouto změnu zoveme přírodním úkazem; studium pak úkazů přírodních kladou sobě za úkol vědy *přírodozpytné exaktní* **), *přírodozpyt*.

---

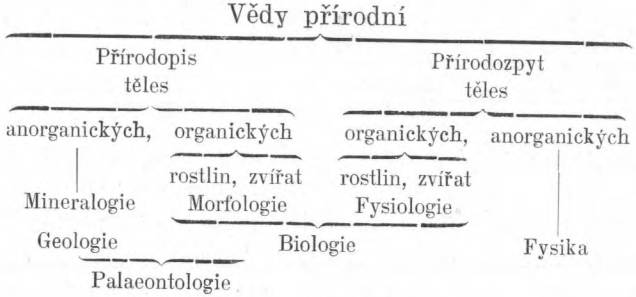
*) *φύσις ἡ* příroda; tudíž fysika ve smyslu původním a nejširším věda, jejíž úkolem bylo studium přírody vůbec.

**) Označení: vědy přírodní »exaktní« klade se proti vědám přírodním »systematickým« vzhledem k mathematické methodě, kteréž se u oněch věd užívá, když se badání experimentální má theoreticky zpracovati; význam slova jest zde ovšem jiný než nahoře v označování věd exaktních.

Oba uvedené hlavní směry badání přírodního nejsou však protiběžné, nýbrž souběžné; proto se často vespolek stýkají, proto se badání přírodní ve směru jednom často doplňuje a zdokonaluje badáním ve směru druhém.

Přírodozpytec musí všímati si vlastností předmětů přírodních, aby poznati mohl, kdy a jak se mění; na druhé straně i přírodopisec zkoumá velmi často úkazy přírodní, aby dle toho zjistiti mohl, které vlastnosti předmětů přírodních pro jich klassifikaci jakožto vlastnosti stabilní jsou rozhodujícími. Vzhledem k tomuto častému stýkání se obou směrů badání přírodního jest velmi nesnadno, ba nemožno, rozdíly obou vystihnouti formulací krátkou a stručnou. Formulace zde podaná souhlasí s věcí aspoň ve svém jádru. Vůbec lze říci, že přírodopis byl vědou čistě popisnou v prvních dobách svého rozvoje; za dob nynějších jest systematika zakončena; co zbývá, jest jen doplňování a dovršování; úkol se rozšiřuje, vědy přírodopisné osvojují sobě methody a prostředky fysikální a přibližují se tím fysice.

Další roztřídění věd přírodních dáno jest oněmi dvěma velikými skupinami předmětů přírodních, jež obsahují tělesa *organická* a *anorganická*. Tím utváří se rozdělení věd přírodních v obraze následujícím:



Do tohoto schematického rozdělení nejsou ovšem přijaty vědy přírodní takové, jež bychom mohli zváti praktickými — oproti oněm theoretickým — jako vědy lékařské, technické a j.

§ 2. Úkol fysiky v širším i užším smyslu.

Dle tohoto roztřídění byla by tudíž *fysika* vědou zkoumající úkazy přírodní, jež se jeví na *tělesích anorganických*. Úkol tento náležel v skutku fysice v prvních dobách jejího rozvoje. Za dnů našich sledují tento úkol nikoli již fysika sama, v nynějším užším slova smyslu, nýbrž četné vědy spřízněné, jež bychom mohli tudíž zváti *vědami fysikálními*. Postupem času přejaly totiž část onoho

úkolu vědy zvláštní, jež se staly znenáhla zcela samostatnými, rozvíjejíce se mohutně způsobem vlastním. Nehledíc k *astronomii*, kteráž již od dob nejdávnějších svou vlastní cestou se brala, jsouc dle povahy své vědou spíše mathematickou, jest to *astrofysika* a *geofysika*, od dob nedávných *elektrotechnika*, zejména pak jest to *chemie*. První dvě vědy, astrofysika a geofysika (tato obsahujíc též meteorologii a klimatologii), jsou charakterisovány speciálním svým předmětem, zkoumáním totiž fysikálních zjevů na tělesích nebeských a na zemi naší. Elektrotechnika vznikla z nauky o elektřině, kteráž jest částí fysiky, vzhledem k důležitému významu této nauky pro účely praktické. Process, kterýž se dál před čtvrtstoletím s elektrotechnikou, opakuje se za dnů našich s *optotechnikou*, kteráž se začíná samostatně rozvíjeti na základě theoretických poznatků Abbeových a Helmholtzových a technické applikace v dílnách Jenských.

Všechny tyto vědy užívají method v podstatě fysikálních a jsou tím fysice, jak jí nyní v užším slova smyslu rozumíme, velice blízkými; možno říci, že jsou applikací fysiky jednak na zvláštní předmět zkoumání, jednak na zvláštní účel. Podobného něco nelze však říci o chemii. I předmětem i účelem svým jest chemie právě tak jako fysika vědou obsahující celou přírodu neústrojnou; obě vědy jeví se býti přidruženými, jedna doplňuje druhou, jedna zasahá do druhé a není žádného určitého rozhraní mezi oběma, jak zejména rozvoj obou věd v dobách našich ukazuje. Jediný jen úkol jest chemii vlastní: studovati a realisovati podmínky, za kterýchžto nastává změna látky (slučování, synthese; rozklad, analyse). Jinak zkoumá fysik i chemik úkazy na hmotách, pokud nejsou žijícími organismy, jakož ovšem i vlastnosti s oněmi úkazy souvisící, při čemž fysik pracuje více povšechně, ve smyslu generelním, chemik pak více jednotlivě, ve smyslu specifickém.

Hustota těles jest na př. pojem fysikální; o jejím významu jedná se ve fysice povšechně a stanoví se methody jejího určování; chemik pak, užívaje method těchto, určuje hustotu rozmanitých látek jednotlivě a soudí pak z hustoty na chemickou zvláštnost, po případě i na chemické složení látek. Změna skupenství těles jest rovněž úkaz, kterýž dle povšechného významu svého náleží do fysiky; ale i chemik studuje úkaz tento a jeho podmínky u látek jednotlivých a odvozuje z podmínek těchto důsledky chemické. Elektrolysa jest pochod fysikální i chemický zároveň; fysik stanoví povšechné zákony elektrolytické, chemik pak používá jich v případech jednotlivých ke studiu chemické povahy látek. Z příkladů uvedených jest viděti, jak velice obě vědy, fysika i chemie, do sebe zasahují, sebe doplňují. Proto musí moderní chemik býti fysikem

právě jako i fysik chemikem, tak dalece ovšem, jak to při velikém obsahu i rozsahu obou věd vůbec jest možno. Odtud i důležitý význam chemie fysikální, vědy to v dobách našich vznikající a se rozvíjející, kteráž již dnes významem svým vyniká jakožto třetí souřaděná věda vedle fysiky i chemie nynější.

Také na tělesích organických lze experimentovati. Zkoumá se na př., jaký účinek na vzrůst rostlin má gravitace nebo osvětlení, elektrisace a j. Experimenty takové provádí ovšem odborník, ale užívá při tom method i prostředků fysikálních.

Methody badání fysikálního.

§ 3. **Pozorování fysikální.**

Fysika jest vědou empirickou. V tom velkolepém rozvoji, jak se jeví za dnů našich, jest výsledkem dlouholetých zkušeností, výsledkem úsilovné píle a práce. Rozvoj ten nedál se však soustavně, naopak, poznání fysikální vzmáhalo se zkušenostmi, kteréž učiněny byly velice porůznu, brzy v tom, brzy v onom oboru, mnohdy bez souvislosti, často náhodou. Část těchto zkušeností byla čerpána z úkazů, jakéž přímo v přírodě můžeme pozorovati; avšak část nepoměrně větší čerpána ze zdroje bohatšího, z badání experimentálního.

Fysika (incl. chemie) jest vědou experimentální *κατ' ἐξοχήν*; v tom spočívá její mohutnost, v tom základ jejího rychlého rozvoje. Experimentem klade fysik přírodě určité otázky a pozoruje, jak na ně odpovídá. K otázkám takovým bývá veden úkazy přírodními, nikoliv pouhým se na ně díváním, nýbrž jich bedlivým stopováním; toto budi v jeho mysli jakési o věci myšlenky, domněnky, o jichž pravděpodobnosti se snaží experimentem se poučiti. Jeho zrak nesmí ovšem býti zkalen nějakým míněním předpojatým; neboť příroda odpovídá svým způsobem zvláštním, velmi zřídka přímo, často na záhadu nějakou zase záhadou novou; někdy vězí odpověď v úkazu zdánlivě nepatrném, kterýž pozornosti povrchní ujde. Klassickým toho příkladem jest Hertzův objev elektrických vln. Nutno tedy stopovati experiment do podrobností nejmenších, a co hlavním jest, nesmí se přestávati na poznání kvalitativním, kteréž jest při experimentování stupněm prvým, nýbrž musí se pozorování vésti na stupeň vyšší, kvantitativní, musí se konati fysikální měření. Experimenty takové, ať již jen kvalitativní anebo též kvantitativní,

provádějí se zvláštními fysikálními přístroji. Jde-li jen o první orientaci o průběhu nějakého úkazu, lze přístroje takové improvisovati; v dalším však postupu zkoumání vyžaduje se již přístrojů zvláštních pečlivě a vhodně sestrojených, po případě přístrojů velice jemných a přesných. V dokonalosti konstrukce praecisních přístrojů fysikálních učinil se zejména v letech posledních pokrok neobyčejný.

§ 4. **Příčinnost a účelnost.**

Předmětem badání fysikálního, pravili jsme, jsou přírodní úkazy na hmotě neústrojné; jich podstata změna stavu. Pozorujíce změnu takovou, tážeme se, proč aneb k čemu nastává. Otázky takové kladouce díváme se na úkazy přírodní týmž okem jako v životě obecném na jednání lidské. Toto buď plyne z minulosti nebo hledí k budoucnosti; zde má svůj účel, tam svou příčinu. Obě stanoviska, jak příčinnosti (kausalita) tak účelnosti (finalita) jsou také při posuzování úkazů přírodních stejně oprávněna, aneb, jak raději řekneme, stejně neoprávněna. Neboť co vlastně v přírodě neústrojné objektivně lze konstatovati, jest jediné závislost úkazů a tato jest vždy vzájemná; co do závislosti této vkládáme, zdali účelnost nebo příčinnost, jest kusem naší vlastní povahy, jest subjektivní. Nicméně,není třeba, tuto stránku subjektivní příkře zavrhovati; zejména stanovisko příčinnosti jest povaze naší přirozené a může jen za jiný výraz toho býti pokládáno, co objektivně zoveme závislostí neb podmíněností úkazů přírodních.

Mění-li se objem plynu, mění se teplota, ale též naopak, mění-li se teplota, mění se i objem. Zahřejeme-li anebo ochladíme-li stykové místo dvou různých kovů, vznikne v uzavřeném kruhu proud; když naopak proud zavedeme, způsobí se na onom místě změna teploty. Co v těchto a v četných podobných případech zveme příčinou a co účinkem, záleží na tom, jak experimentujeme.

Rozhodnouti o tom, zdali dva úkazy přírodní A a B vespolek jsou závislé, zdali tedy na př. úkaz B jest podmíněn úkazem A, čili, jak říkáme, zdali úkaz A jest příčinou úkazu B, vyžaduje vedle bedlivého pozorování též značnou míru opatrnosti a kritičnosti. Východištěm jest poznání, že, kdykoli nastane A, nastane též B (koincidence). Avšak positivní tento výsledek musí býti kontrolován též negativním, že totiž přestává úkaz B, kdykoli přestane úkaz A (opposice). Když pak obojím pozorováním se stává na nejvýš pravdě podobným, že úkaz B jest podmíněn úkazem A, zjedná se

rozhodnutí definitivní a zároveň vnitřní názor do způsobu vzájemné závislosti postupem kvantitativním. K cíli tomu zavádíme pro oba úkazy určité fysikální veličiny, jež činí jich podstatu, a studujeme, zdali a jak veličina B se mění, když se mění veličina A; (parallelismus).

Oersted pozoroval (1820), že magnetka deklinační volně zavěšená se uchylovala (úkaz B), kdykoli drátem nad anebo pod ní rovnoběžně umístěným procházel proud; při tom experimentoval proudem silným, tak že se drát rozžhavil; i domníval se, že toto rozžhavení drátu jest příčinou (A) oné úchylky; (koincidence). V tomto smyslu pokračovalo se v experimentech (Muncke), k nimž dle onoho vysvětlení stavěny velké batterie. Avšak shledalo se, že úchylka magnetky nastává i tehdy, když drát není rozžhaven; (opposice); proto rozžhavenost drátu nebyla onou příčinou (A) ale ovšem proud sám, přes to že při určitém postavení drátu k magnetce proudem nenastala úchylka žádná. Vlastní rozhodnutí, jakož i vniknutí v jádro celého úkazu způsobeno však (Ampère) rozborem kvantitativním; (parallelismus).

H. Becquerel domníval se, že paprsky t. zv. *Roentgenovy* mají svůj původ ve fluorescenci, jež jest výboji elektrickými vzbuzena. Proto soudil, že tělesa, jež i bez takových výbojů za obyčejných poměrů fluorují, též takové paprsky vysílají. Zkoumal tudíž v tomto směru praeparaty uranové; nalezl analogické paprsky, avšak tyto byly způsobeny nikoli fluorescencí jakožto takovou, nýbrž existencí radia, kterým též ona fluorescence byla způsobena.

§ 5. **Fysikální zákon.**

Hlavním cílem badání fysikálního jest tudíž, jak z předešlého vysvítá, *kvantitativní* prozkoumání závislosti úkazů přírodních. Výsledek práce v tomto směru vedené jest pak *fysikální zákon*. Jakým způsobem si při hledání zákonů fysikálních dlužno vésti, možno zde, v úvodě, vylíčiti jen hlavními rysy způsobem všeobecným, schematicky. Příkladů konkretních, jimiž všeobecná taková skizza se objasní, udá se ve všech jednotlivých oborech fysiky veliké množství. Tam také bude na místě připojiti četné podrobnosti, jichž vyčítání by zde, kde jde o první orientaci, bylo unavujícím.

Předběžnou přípravou při hledání zákona fysikálního jest zavedení *fysikálních veličin*, jež při úkazech, o jichž závislost se jedná, jsou rozhodujícími. Vhodnou volbou jednotek lze pak veličiny tyto vyjádřiti *číslem*. Jednotka musí ovšem býti téhož druhu jako veličina, pro kterou jest zavedena; ale jinak jest úplně libovolnou. Obyčejně bývá volba její pro ponejprv více méně nahodilou a tím již provisorní. Později ovšem, když již zákon jest nalezen,

stává se, že revidujeme celý úkol a že z důvodů soustavných nahrazujeme jednotky provisorní jednotkami definitivními. Vyčíslení veličiny jednotkou k cíli tomu volenou vyžaduje *fysikálního měření*, kteréž se provádí *fysikálními přístroji*.

Projednejmež případ nejjednodušší, při němž běží o vzájemnou závislost veličin pouze dvou, y a x, z nichž x pokládáme za podmiňující, y za podmíněnou. Po způsobu mathematickém pravíme pak i ve fysice, že veličina y jest *funkcí* veličiny x a tato její *argumentem*, a píšeme

$$y = f(x)$$

kladouce x do závorky a píšíce před závorku znamení funkční písmeno f anebo, je-li třeba, jiné jemu podobné, jako symbol slova funkce (Clairaut 1733). Nastává pak v určitých případech úkol tuto funkci určiti.

§ 6. **Řešení numerické.**

K cíli tomu volíme za veličinu x jisté zvláštní hodnoty

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ \ldots$$

a měříme odpovídající jim hodnoty

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ \ldots$$

Tak zjednáme si řadu dvojných hodnot (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), . . . kteréž činí číselný materiál k vyšetření oné funkce. Přehledné sestavení tohoto materiálu dává tabulku formy následující:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
.	.

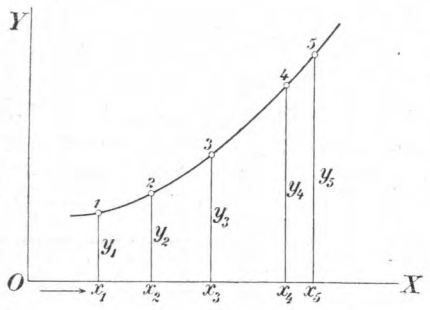
Jest při tom výhodno, ač nikoli nutno, když hodnoty x_1, x_2, x_3 . . . atd. tvoří přibližně řadu arithmetickou, t. j. když jich difference jsou aspoň blízce konstantními, když jsou tedy hodnoty x *aequidistantními*; v tomto případě lze pak z differencí, jakéž mezi hodno-

tami y vytvoříme, velmi dobře průběh funkce y již přehlédnouti. Úkol daný jest pak řešen, jak říkáme, *numericky*.

Vhodným k tomu příkladem jest úkol, stanoviti napětí nasycených par, na př. vodních, pro různé jich teploty. Zde znamená x teplotu, vyjádřenou na př. ve stupních (°) Celsiových; napětí pak určí se vahou, jakou při normální intensitě téže působí sloupec rtuti nullstupňové určité výšky y (*cm*), kterýž jest s oním napětím v rovnováze. Pracovati lze methodou buď statickou nebo dynamickou. Resultát měření jest pak číselný materiál v tom způsobu sestavený, jak zde tabulka uvádí. Viz Thermiku, pag. 303, 1908.

§ 7. Řešení grafické.

Daleko však lépe než sestavením číselného materiálu, zejména tehdáž, když veličiny $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nejsou aequidistantními, přehlédneme výsledek všech měření *grafickým znázorněním*. Po způsobu analytické geometrie nanášíme totiž, od určitého bodu O (obr. 1.), jakožto počátku souřadnic vycházejíce, veličiny x za úsečky, abscissy (ve směru na př. vodorovném) a veličiny y k nim patřící za pořadnice, ordinaty (ve směru k prvému kolmém, tedy na př. svislém). Každá dvojice hodnot x a y určuje v rovině bod; hodnoty x, y jsou jeho souřadnice, koordinaty. Obdržíme tedy řadu bodů (1), (2), (3), . . ., tolik, kolik dvojných hodnot (x, y) bylo měřením nalezeno. Tyto body druží se k sobě, naznačujíce svým uspořádáním průběh jakési čáry, kteráž jest zpravidla křivkou, zřídka přímkou. Obyčejně můžeme křivku tuto s velikou jistotou kresliti, přes to, že máme dány body porůznu; jistota jest ovšem tím větší, čím těsněji tyto body k sobě se druží; takovým způsobem se pak doplňuje pásmo bodů mezi oněmi body danými scházejících. Tento postup se nazývá *grafická interpolace*. Mnohdy jest průběh křivky tak jednoduchý a význačný, že jest možno křivku přes vlastní obor pozorování i dále vésti. Tento postup zove se *grafická extrapolace*. Rozumí se samo sebou, že extrapolace vždy zůstává více méně nejistou; může však pro prvý počátek dobře orientovati o tom, co lze v dalším postupu asi očekávati; ale k závě-



Obr. 1.

rečnému potvrzení jsou vždy nutná aspoň některá pozorování kontrolní. Se stanoviska přísně vědeckého nelze extrapolaci grafickou připustiti. Ale také interpolaci grafickou nutno prováděti s jistou opatrností a kritičností, neboť křivka, interpolací zjednaná, podává více než pozorování. Chce-li pozorovatel při grafickém znázorňování zůstati jenom při tom, co pozoroval, pak spojuje body (1), (2), (3), . . . přímkami. Na místě křivky vznikne tím čára klikatá. Tím ovšem není míněno, že by funkce $f(x)$ ten průběh měla, nýbrž jest jen naznačena reserva, s jakou pozorovatel chce zůstati na stanovisku faktickém.

Grafické methody užívá každý badatel hned při pozorování, poněvadž tato velmi dobře orientuje o povaze funkce, o kterou v určitém případě se jedná, a zároveň upozorňuje na chyby, kteréž snad při pozorování nahodile byly učiněny. Neboť jakmile některý z bodů (x, y) vybočuje z čáry, do kteréž se druží body ostatní, jest to pozorovateli upozorněním, že něco nebylo v pořádku. Čáru klikatou kreslívá pozorovatel v případech, kdy průběh funkce není jednoduchým a pravidelným. Mnohdy bývá totiž základní proměnnou x čas, funkcí y pak veličina, která se s časem mění (na př. teplota lidského těla ve stavu horečném), při čemž změna jest způsobována příčinami velmi četnými, které rovněž s časem se mění, Závislost veličiny y na jediné proměnné x, totiž na času, poskytuje jen zdánlivé zjednodušení, vskutku jest závislost velmi složitou, a proto reserva, jaká se v přímočarém spojování bodů (x, y) jeví, zcela odůvodněnou.

§ 8. Řešení mathematické.

Vlastní, závěrečný cíl celého úkolu hledáme — pokud jen možno — v tom, abychom neznámou funkci $y = f(x)$ vystihli *výrazem mathematickým*. Podaří-li se to, pak jest výraz takový stručnou, praecisní formulací hledaného *zákona fysikálního*, kterou úkol sám nabude svého zakončení. Vodítkem zůstává při tom vždy ona křivka, ke kteréž vedlo grafické znázornění vykonaných pozorování; hledaný výraz mathematický jest *analytická rovnice této křivky*.

Často projeví se povaha takové křivky bedlivému oku nikoli nesnadno. Zkoušíme pak, zdali by jednoduché algebraické výrazy nevyhověly daným pozorováním, jako na př. výrazy formy

$$y = a + bx$$
$$y = a + bx + cx^2$$
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

anebo u křivek periodicky se měnících

$$y = a \sin x + b \cos x$$

anebo jindy zase

$$y = a \cdot e^x$$

neb všeobecněji

$$y = a\, e^{\alpha + \beta x} \text{ atd.}$$

Každá takováto rovnice obsahuje konstanty jako a, b, c, . . ., kteréž tak dlužno určiti, aby křivka onou rovnicí fakticky daná se kryla pokud možná s křivkou, jakouž z daných pozorování jsme obdrželi grafickou interpolací. Řešení úkolu děje se v konkretních případech podle určitého početního mechanismu, kterýž udává tak zvaná *methoda nejmenších čtverců* *).

Příkladem velice poučným jest úkol, o němž již nahoře učiněna zmínka, totiž mathematicky vyjádřiti napětí y nasycených par vodních v závislosti na teplotě x. Grafické znázornění výsledků pozorovacích dává křivku, kteráž s rostoucí teplotou x urychleně stoupá. Takovéto stoupání mívají křivky algebraické, ale také exponenciální. Vskutku byl od různých pozorovatelů úkol velmi různě řešen, tak že existuje celé množství formul, jimiž se průběh *jedné a téže křivky* hleděl vystihnouti. Za příklad uvádíme formuli algebraickou (*Broch,* 1881)

$$y = a\, \frac{b + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4}{1 + \gamma x}$$

anebo exponenciální (*Biot-Regnaultovu*)

$$\log y = a + b^{\beta x} + c^{\gamma x}$$
$$x = t - t_0,$$

kdež značí x teplotu od bodu t_0 počítanou. Konstanty a, b, c, d, e, f, γ mají v každém z obou vzorců určité číselné hodnoty. Viz bližší údaje v Thermice, pag. 308, 1908.

§ 9. **Přednosti znázornění grafického.**

Vylíčili jsme v předcházejícím přirozený postup, v jakém badání o jisté fysikální otázce pokračuje. Seznali jsme, že jest postup tento dán řešením: numerickým, grafickým a mathematickým. Řešení numerické jest východištěm a zároveň základem pro grafické znázornění; řešení mathematické zakončuje úkol, jak původně byl dán. Není pochybnosti, že formulí mathematickou jest výsledek vyjádřen co nejstručněji a nejpřesněji. Avšak mluva mathematická, má-li jí býti v plném smyslu rozuměno, předpokládá zvláštní předběžné vzdělání, jakéhož v rozsahu větším možno jen u vlastních odborníků vyžadovati. Pro širší kruhy, kteréž se o výsledky badání fysikálního zajímají, bývají formule mathematické, vyjímajíc některé zcela jednoduché, velmi často méně přístupnými, mnohdy přímo odpuzujícími a tím méně hledanými. V takovýchto případech osvědčuje se methoda grafického znázornění měrou daleko větší; jest každému přístupnou, předpokládajíc k svému porozumění jenom některé základní definice, kteréž sobě osvojiti může snadno i neodborník. V postupu dalším pojednáme o těchto definicích a budeme při výkladech fysikálních užívati grafických znázornění měrou velmi hojnou.

*) O methodě nejmenších čtverců, jakož i o její základech jest obšírně pojednáno ve Všeobecném úvodě k Theoretické Mechanice, kterouž sepsal Dr. *A. Seydler* (1880).

§ 10. **Formule interpolační.**

Formule mathematické mají ostatně v četných případech skutečně význam podřízený; jsou totiž často jen *formulemi interpolačními*, k tomu soužícími, abychom chyby v pozorovacím číselném materiálu obsažené vyrovnali a tím nikoli pozorování *jednotlivá*, nýbrž jich *soubor* jakožto *celek* k platnosti přivedli. V číselných konstantách takovýchto formulí interpolačních, kteréž dle methody nejmenších čtverců jsou odvozeny, dlužno viděti výsledek, k němuž každé pozorování jednotlivé přičiňuje svou část. V případech takových používáme pak formulí těchto ke zvláštnímu způsobu řešení, jež zoveme *tabellárním*. Počítáme totiž z oněch formulí interpolačních hodnoty funkce y pro takové hodnoty argumentu x, kteréž přísně aequidistantně postupují. Tabulky takové jsou pro praktické upotřebení pozorovacích výsledků oproti formulím mathematickým nepoměrně pohodlnější a zavádějí se proto nyní hojně ve všech oborech fysiky.

Příkladů k tomu, co zde řečeno, nalezneme později velké množství. Zde budiž prozatím uveden příklad z doby nejnovější. *L. Holborn* a *F. Henning* určovali (1907) *střední* (také pravé) *teplo specifické* y vodní páry, t. j. teplo, kterým se 1 gramm vodní páry v intervallu tepelném 100^0 až x^0 zahřeje o jeden stupeň.

Výsledky pozorovací vyjádřili funkcí algebraickou

$$y = 0{\cdot}4669 - 0{\cdot}0000168\, x + 0{\cdot}000000044\, x^2,$$

ale též funkcí exponencialní

$$y = 0{\cdot}4544 + 0{\cdot}006925 \cdot 10^{0{\cdot}0007513\, x}.$$

Obě rovnice vyhovují pozorováním zcela uspokojivě. A přece jsou rovnice ty, se stanoviska mathematického posuzováno, velice různé. Tato

různost jeví se již tím, že rovnice algebraická dává pro y minimum (pro $x = 190$), exponenciální však nikoli. Kdybychom narýsovali křivky, oběma rovnicemi vyjádřené, v rozsahu co možno velikém, ukázalo by se, že se dokonce nekryjí v celém průběhu, ale ovšem kryjí se v mezích, jež dány byly pozorováním samým. To jest charakteristické pro každou formuli, která nevyjadřuje zákon přírodní, nýbrž jest jenom formulí interpolační, významu podřízeného, a jenom k tomu slouží, aby se dle ní propočítala tabulka, která pro jednotlivá aequidistantní x udává příslušná y. Tak jest tomu též v oněch četných formulích, jimiž, jak řečeno, vyjadřuje se napětí nasycených par vodních v závislosti na teplotě.

Ne vždycky bývá úkol tak jednoduchým, že by nějaká fysikální veličina byla podmíněna jedinou jen základní proměnnou. Častější případ jest ten, kdy o veličině takové rozhoduje základních proměnných několik. Tak závisí objem plynu na tlaku a teplotě. Galvanický odpor elektrolytu závisí na koncentraci a teplotě. Pozorovatel, hledaje zákonitosti i v takových případech, musí jen jedinou podmiňující veličinu měniti, a ty ostatní udržovati při tom stálými — úkol, který v mnohých případech bývá dosti nesnadným.

§ 11. **Záznamy autografické.**

Dle vylíčení předchozího spočívá grafické znázornění jakési funkce na *číselném materiálu*, když *před tím* byl pozorováním zjednán. V mnohých případech může se však věc míti naopak: znázornění grafické předchází a odvození hodnot číselných z diagrammu následuje. Stává se tak zejména tehdáž, jde-li o závislost jisté fysikální veličiny *časovou*. Ovšem že zde čas vlastně jen *zastupuje* veličinu jinou, po případě několik veličin jiných, kteréž onu pozorovanou podmiňují a měníce se s časem způsobují, že také ona se mění. Kladouce tedy čas na místě těchto veličin zjednodušujeme závislost *formálně*, rozumějíce jí tak, že v čase jsou *implicite* ony podmiňující veličiny obsaženy. Způsob tento jest tím výhodnější, čím častěji se stává, že ony veličiny v čase obsažené ani všechny neznáme. V těchto případech podaří se často sestrojiti přístroje, kteréž samočinně zaznamenávají, *registrují* změny oné veličiny fysikální, jak průběhem času nastávají. Přístroje takové zoveme *autografy*, a diagrammy jimi zjednané *autogrammy*.

Vhodný příklad k tomu, co zde řečeno, podávají elementy meteorologické, jako tlak a teplota vzduchu, směr, rychlost neb síla (tlak) větru, vlhkost vzduchu atd. V dobách ještě nedávných bylo pravidlem tyto elementy na stanicích meteorologických několikrát denně v určitých intervallech časových pozorovati a tak zjednávati pro studium jich změn číselný materiál. Tento způsob pozorování byl nedokonalým i tehda, když se mohlo v *krátkých* intervallech,

na př. každé dvě neb čtyry hodiny, pozorovati; neboť změny mezi tím nastalé ušly pozorování úplně. Za dnů našich registrují se nepřetržitě ony elementy meteorologické zvláštními přístroji; tak na př. teplota vzduchu *thermografem*, tlak vzduchu *barografem*, směr a rychlost nebo síla větru *anemografem*, vlhkost vzduchu *psychrografem* a pod. Zde tedy jest autogramm věcí první, odvození číselné z autogrammu věcí druhou, mathematické pak zpracování věcí poslední. Připojme však ihned, že zpracování mathematické, vyjádření diagrammu formulí mathematickou, jest vzhledem k veliké složitosti funkce, o niž tu jde, nemožné; sotva pro průměrné hodnoty měsíční a roční a pro pravidelné intervally na př. dvouhodinné podaří se ony změny vystihnouti číselně empirickými formulemi, jimž však stěží lze přikládati významu značnějšího; grafické znázornění a z něho odvozené sestavení tabellární stačí tu úplně. Zcela analogické jsou poměry u elementů zemského magnetismu; ovšem že zde autografy nejsou dosud tak rozšířené jako autografy meteorologické, poněvadž jich úprava jest daleko nákladnější; zde tedy zpravidla musí se přestati na tom, *absolutní hodnoty* magnetické deklinace, inklinace a horizontální intensity zvláštními apparáty (obyčejně přenosnými) čas od času stanoviti a jich *variace* pokud možno v pravidelných intervallech časových na př. každých 6 hodin opět zvláštními (jinými) apparáty (stabilními) pozorovati. Jest však patrno, že tímto způsobem se variace tyto vystihnou sotva v nejhlavnějších rysech; pro důležité studium změn *nepravidelných*, tak zvaných *perturbací* magnetických, zůstávají pozorování taková materiálem téměř bezcenným; zde mohou jenom autografy nepřetržitě registrující býti základem spolehlivým. Zvláštní důležitost mají přístroje autografické pro studium otázek fysiologických. Přímé pozorování jistých veličin fysikálních jest zde nad míru obtížné; postup obyčejný, jak bývá ve fysice, zjednati totiž nejprvé číselný materiál a pak z něho znázornění grafické, nemá ve fysiologii místa. Věcí první a základem všeho dalšího zpracování jest zde vždy znázornění grafické, kteréž se zjednává důmyslně sestavenými přístroji, jež změny časové jistých veličin samočinně registrují. Za příklad uvádíme přístroje, registrující pulsatorní pohyb krve, tak zvané *sphygmografy* *), přístroje registrující krevní tlak v cevách, *kymografy* **), přístroje ke studiu pohybů respiratorních, pohybů svalových atd. Také v elektrotechnice zavádí se již samočinné re-

*) σφυγμός ὁ puls, tepna.
**) κῦμα τό vlna, příboj.

gistrování časových změn na př. intensity proudu neb napětí; zejména děje se tak na stanicích centrálních, kde stroje dynamoelektrické jsou nepřetržitě činnými, aby jich působnost byla stále kontrolována.

Mají-li se autografické křivky zpracovati, redukovati číselně, dlužno též na to míti pozor, zdali pořadnice jsou přímočaré anebo snad obloukovité. Případ poslední bývá dosti častý; pero, kterým diagramm se píše, bývá upevněno na tyčince kolem určité osy se otáčející. Tak jest to na př. na barografech a thermografech firmy Richard-Frères v Paříži. Zde jest také koordinatní papír, na němž registrace se děje, dle toho linován. Co se přesnosti a citlivosti týče, vyhovuje přísnějším požadavkům methoda vyšetřování fotografického, kde pohyby indikatorů se přenášejí na zrcátko, jehožto výchylky se methodou optickou (Gaussovou) na papíru hodinovým strojem rovnoměrně pošinovaném, fotograficky zaznamenávají. Ve fysice jsou methody autoregistrační dosud málo užívané, poněvadž zde o závislost časovou se jedná zřídka a poněvadž požadavky přesnosti a citlivosti zde jsou velmi značné. Za to v meteorologii, geofysice, fysiologii mají význam veliký.

Ve všech příkladech zde uvedených jest viděti, jak důmysl lidský za dvojím tu pracuje cílem. Přístroje autografické registrují nepřetržitě, objektivně přesně a správně; v tom jest pokrok v ohledu věcném; pozorovatel sám má jenom dozor nad tím, aby autografy bezvadně pracovaly; proto je kontroluje občasným pozorováním; jinak není však vázán na určité doby pozorovací, jest volným; v tom jest pokrok v ohledu osobním.

§ 12. **Rozdělení fysiky.**

Fysika jest dle vnitřní své povahy vědou jednotnou; nějaké ostré dělení, jež by látkou samou bylo přirozeně odůvodněno, nelze udati. Jestliže přes to fysika se na jednotlivé odbory dělívá, děje se tak z důvodů nikoli vnitřních, nýbrž vnějších, z důvodů didaktických nebo vůbec opportunních.

Především rozděluje se fysika na experimentální (v níž jest obsažena též fysika praktická) a mathematickou.

Fysika experimentální poskytuje základ, materiál; fysika mathematická zpracuje tento materiál, odvozuje jednotlivé zákony, jež mathematicky formuluje, z těch pak tvoří zákony vyšší, v nichž by ony jednotlivé byly zahrnuty. Nejvyšší její snahou jest vypracovati theorii pro celou, co možná rozsáhlou skupinu zjevů, a vystoupiti tím způsobem na stanovisko co možná nejvyšší, s něhož by bylo možno dedukcí jednotlivé ty zjevy, od nichž se vyšlo,

ovládati. Fysika mathematická stává se tak theoretickou. Jestliže mathematická fysika od experimentální vyšla, musí opět theoretická se k experimentální vrátiti, aby důsledky theorie pro nějaký obor úkazů vypracované se pokusem kontrolovaly. Neboť theorie spočívá zpravidla na základech, jež bývají hypothetickými, a jež dlužno zkoušeti; to pak nelze spolehlivě jinak, než pokusy, kteréž tak upraviti dlužno, aby co možná byly rozhodujícími.

Dle výkladu tohoto není pochybnosti, že fysika experimentální a mathematická vespolek velmi úzce souvisí, tak že by dle toho každý experimentální fysik měl býti též mathematickým a naopak. V dobách dřívějších to bylo možné; za dnů našich tato možnost přestává; neboť postupem doby látka se příliš rozhojnila a nikdo nemůže oba ty odbory ovládati. Na vysokých školách jest každý z těch oborů zastoupen professurou samostatnou a dle toho také přednášky jsou rozděleny.

Další rozdělení fysiky vzniklo historicky dle našich smyslů, jimiž úkazy přírodní poznáváme. Obor *akustiky* jedná o zjevech, jež sluchem poznáváme, obor *optiky* o zjevech, jež speciálně zrakem vystihujeme, obor *thermiky* o úkazech tepelných, pro něž nemáme sice orgánu zvláštního, jež však dle zvláštnosti pocitů dostatečně se vyznačují. Nauka o *elektřině* a *magnetismu* jest částí fysiky nejnovější, ale rozsahem svým předčí jiné. Tento obor ještě nejvíce se od jiných rozlišuje, ale při tom též výsledky oborů jiných vyžaduje a přijímá. Také zde užíváme method akustických (telefon), method optických i thermických, jimiž magnetické a elektrické zjevy poznáváme, zkoumáme a měříme. Ke všem pak těmto oddílům jest *mechanika* všeobecným jakýmsi úvodem nebo základem, jakožto nauka o stavech klidu i pohybu při hmotě vůbec, a to vzhledem k silám, jimiž stavy tyto se podmiňují.

Rozdělením fysiky, jak zde jest naznačeno a jak dosud nejvíce se zachovává, jest dáno jakoby pět rámců, do nichž lze souborně fysikální úkazy zařaditi. Že však rozdělení toto není ostré a že mnohdy jest pochybno, kam by který úkaz spíše mohl býti zařaděn, toho příkladem jest část fysiky, jednající o teple sálavém. Dříve se zařaďoval do thermiky, kam náleží methodicky i experimentálně; nyní se od mnohých autorů přejímá do optiky, vzhledem k theoretickému základu, na němž spočívá.

Někdy dělívá se fysika ve dvě veliké, ač nestejné partie: fysika hmoty a fysika aetheru. Do první partie náleží fysika všeobecná (mechanika), akustika, (též fysikální chemie). Do druhé pak optika, teplo, elektřina a magnetismus. Známé německé »Pokroky fysiky«, kteréž vydává Fysikální společnost Berlínská, se dříve dle toho rozdělovaly. Od roku 1903 počínajíc se sice dělení podrželo, ale označení »Fysika hmoty a aetheru« se opustilo.

V následujícím probíráme látku, jak se dle obyčeje ustáleného přijímá do mechaniky. Jednáme o ní v jednotlivých oddílech, jež tak po sobě

následují, jak to z absolutní soustavy měr přirozeně plyne. Při tom samo sebou předcházejí výklady povahou svou všeobecné, o hmotě vůbec, v prvé řadě ovšem o hmotě skupenství pevného, načež následují oddíly zvláštní o kapalinách a plynech. K mechanice se bude družiti akustika, thermika a optika, závěrek pak učiní elektřina a magnetismus.

I.

O prostoru.

§ 13. Výklad úvodní.

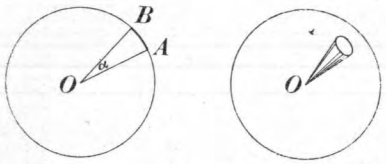
Ve fysice přijímáme pojem prostoru za pojem *základní*, považujíce názor prostorový za původní a to *vnější* formu našeho poznávání. (Kant.) O útvarech prostorových jedná *geometrie*; rozeznává útvary rozměrů tří — tělesa, dvou — plochy a jednoho — čáry; vyšetřuje jich vlastnosti a vztahy, učí, jak se stanoví jich objem neb plocha neb délka, přestává však na odvození pravidel nejednajíc dále o tom, jak skutečné vyměření objemu neb plochy neb délky dlužno prováděti; jinak jest jí jen forma útvarů prostorových důležitou, hmotného obsahu těles si nevšímá. Fysika přejímá z geometrie pravidla o vyměřování útvarů prostorových, ale vycházejíc odtud, kde geometrie přestává, jedná o skutečném provádění tohoto vyměřování na tělesích hmotných, stanovíc jednak základní jednotky, jednak přístroje a konečně methody pozorovací, hledíc při tom, aby dosaženo bylo přesnosti co největší.

Měření úhlu.

§ 14. Jednotka úhlová.

Při měření úhlu užíváme dosud onoho dávného způsobu, dle něhož se úhel plný dělí na čtyři pravé po 90 stupních (°), stupeň po 60 minutách (′) a minuta po 60 sekundách (″). Rozdělení toto jest založeno na soustavě sexagesimální, jež jest spřízněna s duodecimální. V duchu soustavy decimální, kteráž jinak všude se zavádí, pomýšlelo se též na rozdělení jiné, aby se totiž úhel pravý dělil na 100 stupňů po 100 minutách po 100 sekundách. Avšak přes četné návrhy a pokusy v tomto smyslu učiněné tento decimální způsob

dělení se neujal, jednak vzhledem k dávnověkým základům měření starého, jednak také vzhledem k souvislosti měření úhlového a časového. Vskutku zavládla při měření úhlu a času u všech národů a ve všech dobách jednotnost tak dokonalá, že by nebylo naprosto vhodné tuto jednotnost nyní rušiti.



Obr. 2.

Jiný, všeobecnější a pro výklady mathematické zvláště vhodný způsob měření úhlu spočívá na tom, že lze každý úhel pokládati za středový kruhu jakýmkoli poloměrem r opsaného. Na velikosti úhlu závisí poměr oblouku kruhového AB k poloměru r (obr. 2.); i možno přímo psáti

$$\alpha = \frac{arc\ AB}{r}.$$

Dle rovnice této jest $\alpha = 1$, je-li $arc\ AB = r$; tím stanovena nová jednotka úhlová, totiž úhel zvaný *radiant*. Úhel pravý jest dle této jednotky dán číslem $\frac{\pi}{2}$, úhel plný číslem 2π. Vztah radiantu k obvyklým jednotkám úhlovým vyjádřují rovnice:

$$\text{Radiant} = 57^0\ 17'\ 44'' \cdot 8062 = 57^0 \cdot 2957\ 795$$
$$= 3437' \cdot 74677 \quad = 206264'' \cdot 8062.$$

Dle toho jest absolutní měrou *úhlu rovinného* oblouk kruhu opsaného kolem vrcholu O poloměrem jednotkovým, t. j. $\alpha = arc\ AB$ pro $r = 1$.

Rozšíříce tento způsob měření úhlu z roviny na prostor přejdeme snadno k měření *úhlu prostorového*. Opišme kolem vrcholu O kouli poloměrem jednotkovým a mysleme si na místě výseku kruhového AOB v rovině analogicky v prostoru kolem O jako vrcholu opsaný kužel; tento vytne z oné koule jistou plošku a tato jest měrou úhlu prostorového kužele. Dle toho jest plný úhel prostorový dán číslem 4π jakožto úhrnný povrch $4\pi r^2$ koule při poloměru $r = 1$.

Úhel plošný, t. j. úhel dvou rovin měří se úhlem jejich normál, vztyčených v jakémkoli bodu průsečnice.

§ 15. Goniometry.

V širším slova smyslu zovou se goniometry čili úhloměry přístroje, jimiž lze měřiti úhly rovinné vůbec. V tomto smyslu jest úhloměrem též obyčejný transporteur, kterým lze vyměřiti s přesností ovšem skrovnou, nanejvýše asi na $\frac{1}{10}^0$ úhly narýsované v rovině nákresné.

V užším slova smyslu zovou se goniometry přístroje, jimiž lze stanoviti úhel, sevřený dvěma rovinami, na př. v optice úhel lámavý hranolu neb v mineralogii úhel rovin krystallových a pod. V tomto smyslu jsou tedy goniometry hranoměry. Jednoduchým přístrojem takovým, na rovnosti úhlů vrcholových založeným a všeobecně známým, jest *přiložný goniometr*. Kde roviny, jichž odchylku dlužno měřiti, jsou dostatečně veliké, koná goniometr tento dobré služby orientační. Přesnost jest ovšem jen asi taková, jako u transporteurů.

Goniometry daleko přesnější zakládají se na odrazu světla a připouštějí ve svém nynějším zdokonalení mechanickém měření odklonu i velmi malých ploch, ačli jsou dobře rovinnými a hladkými, s přesností jdoucí až do sekund úhlových. Zovou se goniometry odrazné. Jich prototypem jest goniometr Wollastonův, jejž zdokonalil zejména Mitscherlich, s děleným kruhem vertikálním, a goniometr Babinetův s děleným kruhem horizontálním. O důležitých strojích těchto, při nichž v podrobnostech mnohé zákony optické přicházejí k platnosti a kteréž obsahují též mnoho přidružených menších přístrojů pomocných, jednati budeme v nauce o světle v souvislosti se strojem, jemuž se velice podobají, totiž spektrometrem. Zde budiž na tyto goniometry odrazné jen poukázáno.

Ke strojům těmto druží se *theodolit*, jakožto stroj pro astronomii a geodesii významu základního. Ve fysice užívá se stroje toho méně často, někdy v optice vedle goniometru odrazného a spektrometru, mimo to ještě v magnetismu, ale ve zvláštní úpravě, ke stanovení deklinace a intensity zemského magnetismu.

§ 16. Libelly.

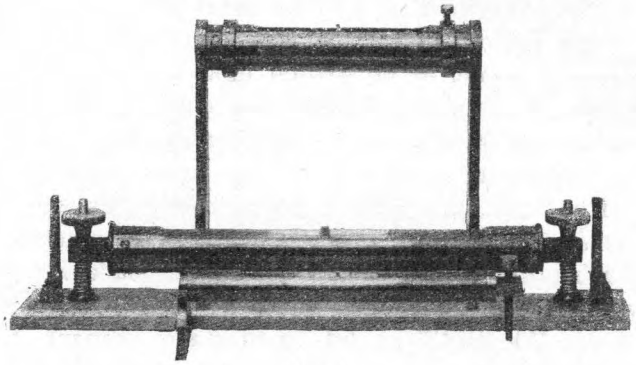
Úhlové rozdíly v blízkosti směru horizontálního lze velice citlivě stanoviti, po případě měřiti, přístrojem, kterýž se zove *libella* *).

Rozeznáváme libelly podélné a kulaté. Kde se jedná o nivellování **), t. j. o zařízení dané roviny do polohy vodorovné, lze užívati

*) Slovo jest deminutivum od libra ve smyslu nikoli závaží, nýbrž vah, tudíž libella malé vážky.

**) Z francouzského le nivellement, odvozeno z niveau, le, rovina vodorovná, hladina, ale také přístroj ke stanovení této roviny, niveau d'air libella.

libelly podélné i kulaté; podélnou se pracuje přesněji, kulatou rychleji. Kde však se jedná o případné měření odchylky od vodorovného směru, užívá se jenom libelly podélné; proto jest tato vědecky důležitější. Obr. 3. ukazuje některé libelly podélné, různé úpravy, dle účelu, jemuž zvlášť mají sloužiti. Trubička skleněná vhodného kalibru, stěn poněkud silnějších, vybrousí se z vnitř tak, aby vznikla rotační plocha velmi mírně konkávní, jejíž osa splývá s osou trubice. Na to se trubice velmi pečlivě vyčistí a naplní alkoholem aethylnatým anebo lépe étherem (slabě zbarveným buď modravě neb červenavě), až na malou bublinku vzduchu, a pak se vzduchotěsně uzavře, anebo, což jest nejlepší, zataví. Potom se



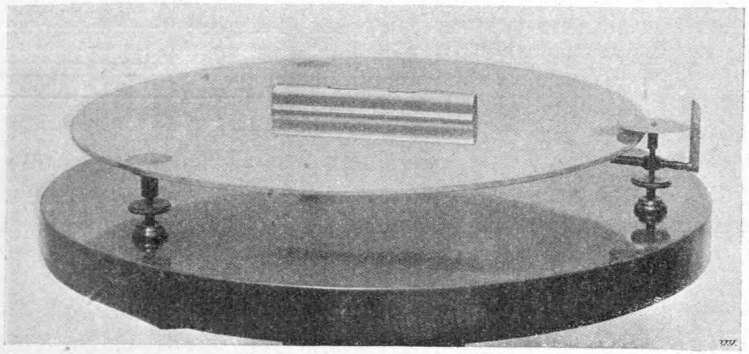
Obr. 3.

opatří dělením délkovým, decimálně postupujícím, tak, aby střední čárka asi odpovídala nejvyššímu bodu oné rotační plochy sférické, od osy trubice počítajíc; pak se vloží do trubice mosazné, otevřené na tom místě, kde má dělení býti viditelné a kde také bublina vzduchová se pošinuje, a tato trubice mosazná se upevní na vlastním podkladu libelly, ale tak, aby mikrometrickým šroubem bylo ještě malé sklánění trubice možné. Provedení mechanické bývá tu různé.

Jak se libelly užívá, poznáme z příkladu následujícího.

Předpokládejme, že jest libella správnou, t. j., že bublina vzduchová zaujme polohu *nullovou*, když libella spočívá na ploše *přesně vodorovné*. Poloha nullová jest ta, kdy střed bubliny, určený z oboustranného odečtení konců bubliny na stupnici, souhlasí s nullovým bodem stupnice, čili, při níž bublina na obou koncích jest od tohoto bodu stejně daleko. Budiž pak dána zrcadlová kulatá deska skleněná, spočívající na třech stavěcích šroubech, kteráž se má nivellovati (obr. 4.). Hroty stavěcích šroubů, na podložkách prohloubených spočívající, tvoří trojúhelník *ABC*, obyčejně rovnostranný,

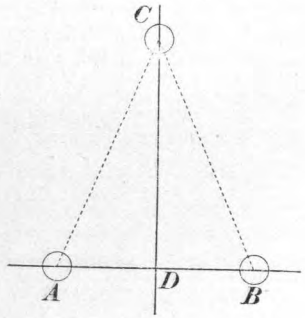
někdy rovnoramenný (obr. 5.). Nivelluje se nejprve podél základné *AB*,



Obr. 4.

pak podél výšky *CD*. Libella položí se tedy nejprve podél základné *AB*, a zařídí se do polohy nullové šroubováním na šroubech jakýchkoliv; na to se položí podél výšky *CD* a zařídí se do polohy nullové jenom šroubem *C*. Nivellováním podél dvou na sobě kolmých směrů jest celá rovina zařízena vodorovně.

Předpokládali jsme, že libella jest správnou. Při každém nivellování má pozorovatel se přesvědčiti, zdali tomu tak jest a po případě má provésti rektifikaci libelly. K tomu cíli stačí, když se provedlo nivellování jako by provisorně libellou tak jak byla, položiti ji ještě jednou podél základné *AB* a pak o 180° otočiti a přihlédnouti, zdali se postavení bubliny nezměnilo. Obyčejně se konstatuje, že se více méně změnilo. Pak se polovička odchylky korriguje šroubkem na libelle, polovička šroubem *A* neb *B*. Dobře jest, zejména byla-li úchylka velká, libellou opět o 180° otočiti a rektifikaci opakovati. Když vše souhlasí, pak teprve nutno libellu ještě jednou položiti podél výšky *CD* a nivellaci šroubem *C* dokončiti.



Obr. 5.

Podobným způsobem, jak zde popsáno, staví se vertikálně osa daného stroje (na př. kathetometru, boussoly sinusové a pod.) stavěcími šrouby *A*, *B*, *C*, když jest na stroji upevněna libella, která se *kolem téže osy* otáčí. Pozorovatel nivelluje ve směrech *AB* a *CD* provisorně, pak se vrátí do směru *AB*, otočí do směru obráceného *BA*, rektifikuje libellu a pak ve směru *CD* práci zakončí.

Při pracích takových má pozorovatel znáti *citlivost* libelly, kteréž užívá, t. j. *hodnotu jednoho dílce v sekundách*, aby si byl vědom, s jakou přesností práci svou provádí. Ke stanovení této citlivosti stačí libellu

jednostranně zvednouti o úhel ε'' proti směru horizontálnímu a přihlédnouti, o kolik n dílců se střed bubliny vzduchové pošinul. Citlivost jest pak dána podílem ε''/n v sekundách. Přesné vyzkoušení libelly by ovšem také vyžadovalo konstatovati, zdali při pokračujícím zvedání ε'' tato citlivost zůstává konstantní.

Úhel ε se počítá z nadzvednutí lineárního e (elevace). Otáčí-li se při tom libella kolem osy o délku L vzdálené, jest patrně

$$tg\ \varepsilon'' = \frac{e}{L}.$$

Poněvadž úhel ε jest velmi malý, platí rovnice

$$tg\ \varepsilon'' = \varepsilon\ tg\ 1'',$$

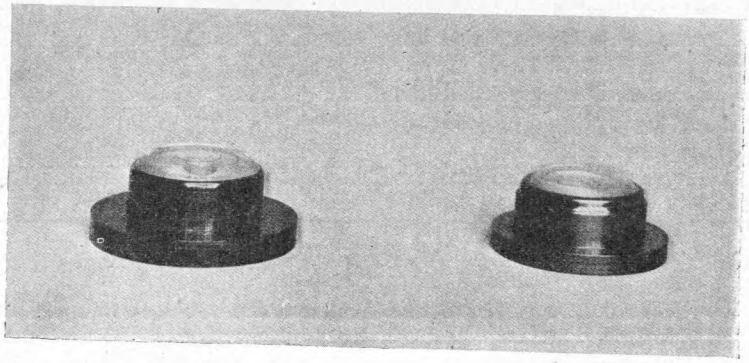
kdež jest $$tg\ 1'' = 0{\cdot}0000048482.$$

Odtud $$\varepsilon'' = \frac{1}{tg\ 1''}\frac{e}{L}$$

anebo číselně $$\varepsilon'' = 206265\ \frac{e}{L}.$$

Dělíce pak $\frac{\varepsilon''}{n}$ počítáme citlivost v sekundách.

Elevace e měří se šroubem mikrometrickým (podobné úpravy jako u sférometru, o němž níže jednáme). Na obrazci 4. jest viděti, že šroub na



Obr. 6.

pravo jest zároveň mikrometrickým. Délka L jest výška CD trojúhelníka ABC. Tím slouží přístroj v obr. 4. znázorněný též k určování citlivosti libell. Jinak bývají k tomu cíli sestrojovány přístroje zvláštní, u nichž délku DC dlužno voliti tím větší, čím citlivější jsou libelly, jež se mají kalibrovati. Nejdelší z libell v obr. 3. má sama mikrometrický šroub na obou stranách.

Citlivost obyčejných libell laboratorních bývá 60″ až 30″, při čemž dílce na libelle jsou dvoumillimetrové; tato délka dílce jest pro odhadování desetin při stanovení polohy bubliny nejpohodlnější. Libelly citlivosti

10″, při nichž tedy odhadováním desetin lze ještě sekundy obdržeti, náleží již mezi velmi citlivé.

Libelly kulaté nemají dělení žádného. Postavení bubliny, kteráž se rozestírá kruhovitě, jest dáno jedním neb dvěma soustřednými kruhy, do jichž středu se bublina staví, když libella spočívá na rovině vodorovné. Obr. 6. ukazuje libelly tohoto druhu, jak se jich užívá v laboratořích fysikálních, obyčejně k justování strojů, při nichž na správnosti polohy k vertikále méně přísně záleží, na př. galvanometrů, elektrometrů a pod.

Měření délky.

§ 17. Definice metru.

Ve stoletích minulých a ještě i v prvé polovici století našeho bylo v různých městech, zemích a státech kulturních užíváno jednotek délkových v rozmanitosti velice pestré, na újmu ovšem určitosti a přesnosti, kteréž vyžadovaly již zájmy obchodní, tím více však zájmy vědecké. Za dnů našich jest rozmanitost tato odstraněna zákonitým zavedením a ustálením soustavy metrické ve všech téměř státech vzdělaného světa *). Zásluhu o důležitou tuto stabilisaci dlužno přičísti Francii, jednak proto, že tam základní myšlenka oné soustavy vznikla, ale hlavně proto, že tam tato myšlenka v posledním desítiletí století 18-tého také ve skutek byla uvedena.

Z návrhů dávnějších, jež k zavedení internacionální míry délkové byly učiněny, jest nejvíce pozoruhodným ten, kterýž učinil *Ch. Huygens* v díle svém Horologium oscillatorium (v Paříži, 1673). Jednaje (pag. 7.) o délce mathematického kyvadla sekundového, nazývá ji »tripedalis« a dokládá: »Trojstopovou, pravím, nikoli vzhledem k nějaké stopě, které se u toho neb onoho národa europského užívá, nýbrž dle určitého a věčného vzoru (»modulu«) stopového, vzatého ze samé délky tohoto kyvadla, který pro budoucnost stopou hodinovou dlužno zváti; neboť k ní musí se vztahovati měření všech jiných stop, jež bychom neporušené budoucnosti chtěli odevzdati.« Tehda měl ovšem za to, že délka kyvadla jest pro celou zemi konstantní. V týchž však letech, kdy dílo jeho vyšlo (1673), již pronikalo poznání (Jean Richer, v Cayennu, 1671—1673), že tato délka jest měnlivá se šířkou geografickou a že by tudíž, majíc býti oním neproměnlivým modulem, musila býti vztahována na určitou geografickou šířku. — Zajímavo

*) Dle stavu, jaký byl v roce 1887, zavedena jest soustava metrická a to obligátně ve státech se 302 milliony a fakultativně ve státech se 492 milliony obyvatelstva. Vzhledem k úhrnnému obyvatelstvu celé země v počtu as 1500 millionů činí součet obou čísel již více než polovičku. V letech posledních znamenati jest další rozhodný pokrok, tak že i v Anglii, jinak velmi konservativní, jakož i v Rusku a Dánsku soustava metrická v principu jest již přijata.

jest však, že při prvních návrzích na zavedení nové jednotky délkové ve Francii opětně bylo pomýšleno na délku kyvadla sekundového v Paříži; ale návrh nebyl kommissí přijat, jednak proto, že by jednotka délková byla v závislost uvedena na čase, tedy na faktoru cizím, na délce středního dne slunečního, ale také že by byla závislou na způsobu *rozdělení tohoto dne*, na př. na 86400 dílů = sekund.

Z jiných návrhů starších budiž zvláště vytčen návrh, kterýž učinil vrstevník Huygensův *Gabriel Mouton* z Lyonu v roce 1670; dle toho měl jednotkou délky býti oblouček meridianu příslušící úhlu středovému 1 minuty; délka tato (asi 1·85 *km*), kterouž mílí nazval, měla se rozděliti dále dekadicky. Návrh jest zajímavým proto, že tatáž myšlenka byla později základem definice metru.

Návrh iniciativní ve Francii učinil *Talleyrand* ve shromáždění zákonodárném (assemblée constituante) počátkem roku 1790. Porady předběžné dály se pak v užší kommissi Pařížské akademie věd (commission de l'Académie; členové: *Borda, Lagrange, Laplace, Monge, Condorcet*). Zpráva kommisse d. d. $^{19}/_{3}$ 1791 byla přijata od shromáždění zákonodárného dne $^{26}/_{3}$ 1791; královská sankce následovala dne $^{30}/_{3}$ 1791. Návrh zněl, aby jednotkou délky byla desetimilliontá část kvadrantu meridianu zemského na hladinu moře redukovaného. Tím byla nová jednotka délková *definována*.

Definice tato, na soustavě decimální založená, souvisela s návrhem na nové rozdělení pravého úhlu na 100 stupňů, každého stupně na 100 minut, každé minuty na 100 sekund. Hledíc k novému rozdělení tomuto měl tudíž jednotkou délky býti oblouček meridianu zemského, na hladinu moře redukovaného, příslušící středovému úhlu jedné desetiny sekundy, když by se meridian za kruh pokládal; vztah mezi délkou oblouku meridianového a příslušným úhlem středovým, rozdílem to geografických šířek, měl tím býti co možná zjednodušen. Jest zajímavo, že nové toto rozdělování úhlu neproniklo, ačkoli se právě na něm definice metru zakládá; bez onoho vzájemného vztahu není pro číslo 1 : 40,000.000 žádného odůvodnění; vzhledem k rozdělování pravého úhlu dosud fakticky užívanému byl by návrh Moutonův býval vhodnějším; tisícina míle Moutonovy (asi 1·85 metru) byl by býval skoro dřívější sáh, pro praxis délka zcela vhodná.

§ 18. Realisace metru; první prototyp.

Nebylo ovšem na tom dosti, aby nová jednotka délková byla zákonitě *definována;* práce důležitější, provedení definice, *realisování* této nové jednotky musilo následovati. K cíli tomu bylo nutno změřiti alespoň část meridianu zemského. Kommisse akademie navrhla, aby změřen byl oblouk meridianu Pařížského mezi městy Dunkerque a Barcelona. Práce tato byla vskutku provedena, přes to, že doba nebyla takovémuto velikému podniku příznivá; bylať to doba velikých bojů sociálních i politických, doba četných výprav

válečných; není divu, že vzrušení všeobecné zasáhlo též do oněch prací vědeckých. Zahájili je 1792 *Delambre* a *Méchain* z uložení akademie. Avšak 8. srpna 1793 byla akademie zrušena. V soustavě metrické zavedeno provisorium. Nedlouho však potom zvolena sborem pro vyučování obecné (comité d'instruction publique) kommisse nová, nejdůležitější ze všech, jíž náleželi: *Berthollet, Borda, Brisson, Coulomb, Delambre, Haüy, Lagrange, Laplace, Méchain, Monge, Prony, Vandermonde*; později k ní přistoupili ještě *Darcet, Legendre, Lefèvre-Gineau*, kooptací zvoleni též někteří učenci jiných států, jako *van Swinden* z batavské a *Tralles* z helvetské republiky. Společnou prací všech těchto mužů byl veliký onen úkol, položení základů pro soustavu metrickou, konečně šťastně dokonán.

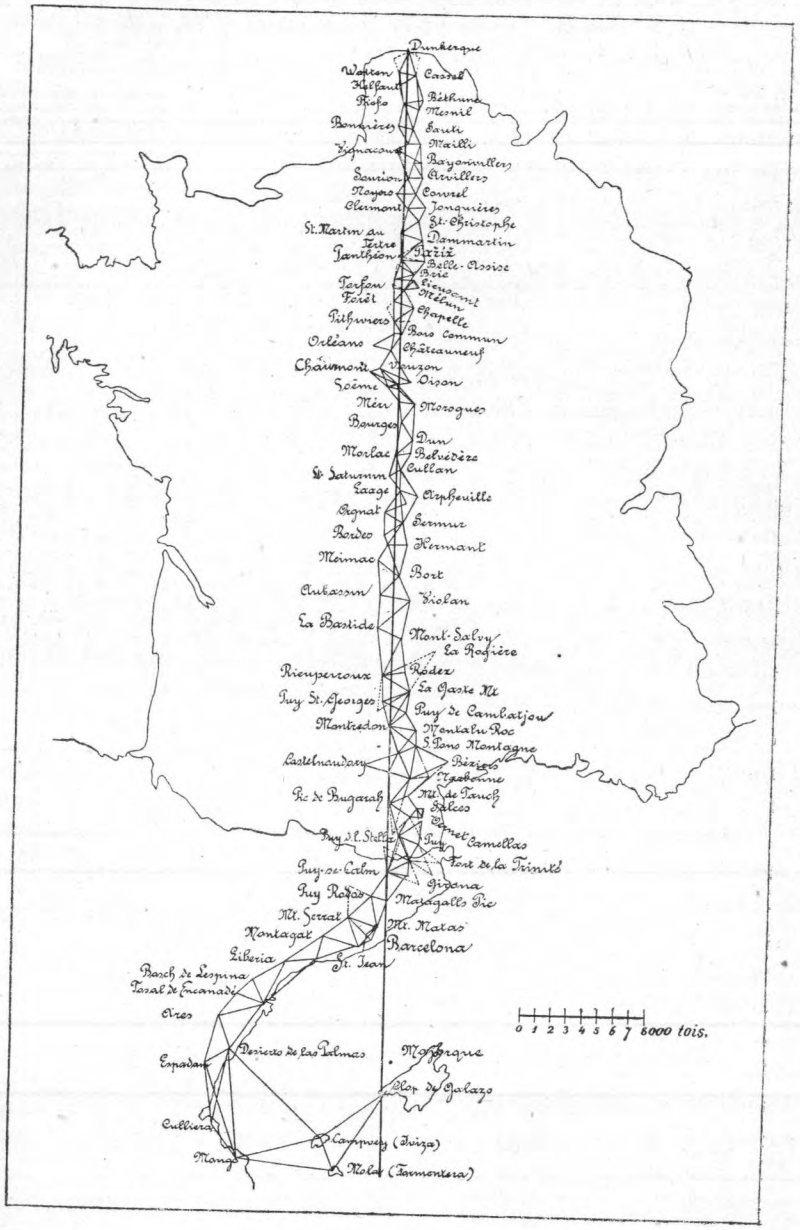
Měřený oblouk meridianu Pařížského počíná na severu Francie u města Dunkerque a pokračuje na jih přes celou Francii, přes Pyreneje až k věži pevnůstky *Mont Jouy* u *Barcelony* v úhrnné délce = 9° 40′ 25·9″. Při měření užíváno starého étalonu akademie Pařížské, železné tyče, jejížto délka při normální teplotě 13° R = $16^{1}/_{4}$° C činila přesně 2 sáhy (°) po 6 stopách (′), stopa po 12 palcích (″), palec po 12 čárkách (‴), téhož étalonu, jehož užívali akademikové francouzští (Bouguer, Condamine) při prvém měření meridianu zemského (1736 až 1744) v Peru; odtud též pojmenování: *toise du Pérou*. Délka této tyče položena za *základ* celého měření; fakticky při práci užíváno bylo kopií platinových. O triangulační síti a tím o rozsahu celého měření podává představu obr. 7.

Číselný výsledek celé práce byl následující: Desetimilliontá část kvadrantu zemského meridianu jest taková délka jako 3′ 11·296‴, oné toise du Pérou při její normální teplotě $16^{1}/_{4}$° C. Tato délka byla pak repraesentována délkou tyče platinové, od jedné plochy konečné ke druhé počítané, při normální teplotě 0° C. Touto tyčí platinovou šířky 2·5 *cm*, tloušťky 0·4 *cm*, tudíž průřezu 1 cm^2 (obr. 8.), byl tedy realisován *první metr* (mètre primitif). Dne 23. června 1799 uložen byl tento metr ve státním archivu republiky francouzské; odtud též pojmenování *mètre des archives*; zákonem pak d. d. 25. června 1799 byl tento metr za definitivní jednotku délkovou prohlášen.

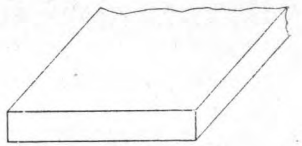
Kritické rozpravy, kteréž o této nové jednotce počátkem století našeho byly zahájeny, ukázaly, že následkem různých příčin onen mètre primitif vzhledem k původní intenci vypadl, poněkud kratším. Tak vypočítal *Bessel*, že pravdě podobná hodnota kvadrantu zemského meridianu není

v metrech 10 000 000,

nýbrž 10 000 855·76 ± 498·23.



Obr. 7.



Obr. 8.

Akademie francouzská vzala také otázku opravy metru v úvahu; avšak rozhodla, aby onen metr, jak již jednou za metr legálný byl prohlášen, jím také definitivně zůstal, a to z toho důvodu, že by taková oprava vzhledem k budoucnosti přece nikdy za poslední nemohla býti pokládána; kdyby zajisté jednou v budoucnosti ono měření bylo opakováno, za příznivějších podmínek vnějších, kdy měřící přístroje budou dokonalejší, methody měřící jednodušší a pozorovatelé sami zkušenější, není pochybnosti, že by výsledek měření takového vedl k hodnotě metru opět poněkud málo pozměněné; i musila by ona oprava býti poznovu provedena; avšak takovéto stálé opravování nelze nikterak připustiti vzhledem k naprosto nutné stabilisaci jednotky délkové a všech jiných s ní souvisících. Z toho však vysvítá zároveň jasně, že přednosti jednotky metrové a celé metrické soustavy nikterak nejsou v tom, jak metr byl definován. Konečně nelze říci jinak, než že jest metr délka onoho platinového prototypu při normální teplotě 0^0, ovšem s tou intencí realisovaná, aby byla rovna desetimilliontě části kvadrantu meridianu zemského. Poněvadž toho však jen přibližně může býti dosaženo, jest v poslední instanci onen platinový prototyp zároveň definicí metru i jeho realisací, tedy zcela podobně, jako ona toise du Pérou.

Že byla v prvních dobách myšlenka *neproměnlivosti* a *zabezpečenosti* jednotky délkové nejvíce fascinující, vysvítá z nadšených slov, kteráž v roce 1791 k deputaci Pařížské akademie, jejímž předsedou byl Lalande, když referovala o základech soustavy metrické, promluvil předseda konventu Grégoire: »Genius svobody se zjevil a tázal se genia věd, jaká jest jednotka pevná a neproměnlivá, nezávislá na všeliké libovůli, jedním slovem taková, kterou netřeba přenášeti, aby se poznala a kterou by bylo možno verifikovati v každých dobách a na všech místech. Vaší zásluhou, slavní učencové, bude svět za toto dobrodiní vděčen Francii.«

Budiž poukázáno na to, že zcela podobné motivy vězí v návrzích moderních (A. Michelson), za jednotku voliti délku vlny světelné nějaké určité látky, na př. natria, kadmia, resp. určité její čáry světelné (pro vakuum).

Počátkem století našeho (1806—1808, Biot a Arago) bylo měření poledníku Pařížského prodlouženo přes moře až k místu Mola na ostrůvku Formentera, v délce $= 2^0\ 41'\ 47{\cdot}5''$. Triangulace, při tomto měření zvlášť zajímavá, jest znázorněna též v obrazci 7.

Znamená-li α amplitudu měření prvého, β amplitudu tohoto měření druhého, máme přehledně

$$\alpha = 9^0\ \ 40'\ \ 25{\cdot}9''$$
$$\beta = 2^0\ \ 41'\ \ 47{\cdot}5''$$

tak že jest amplituda úhrnná

$$\alpha + \beta = 12^0\ 22'\ 13{\cdot}4''.$$

Vyjádřena v jednotce délkové činí 705188·8 toise *).

*) Obšírnější výklad viz v článku »O měření země«, Em. Čuber. Časopis pro pěstov. math. a fysiky, III. 1874, pag. 228.

§ 19. Organisace internacionální; nové prototypy.

Zavádění soustavy metrické v jiných státech kulturních pokračovalo čileji teprve v druhé polovici století 19tého. V Rakousku zavedena soustava metrická zákonem d. d. $^{23}/_{7}$ 1871 Ř. Z. 1872 č. 16 nejprve fakultativně, od $^{1}/_{1}$ 1876 pak imperativně. V letech 1869 až 1875 radily se četné internacionální kommisse (zejména důležitou byla kommisse v roce 1872) v Paříži o způsobu, jak by soustava metrická měla býti všeobecně zaváděna a zabezpečena. Porady tyto vedly konečně k důležité smlouvě, k *internacionální konvenci metrové* (convention du mètre), d. d. $^{20}/_{5}$ 1875, ke kteréž přistoupily postupem času všechny téměř státy vzdělaného světa. V Rakousku byla konvence tato ratifikována dne $^{31}/_{12}$ 1875 a prohlášena v říšském zákoníku 1876 č. 20. Touto konvencí zaražen byl a organisován v Paříži (Bréteuil) pode jménem: mezinárodní ústav pro váhy a míry (bureau international des poids et mesures) stálý vědecký ústav metronomický *) na útraty všech států súčastněných.

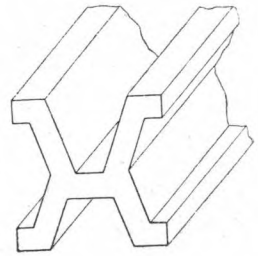
V parku St.-Cloud adaptována budova, od dob dřívějších pavillon de Bréteuil zvaná, a opatřena přístroji nejdokonalejšími. Vrchní vedení prací má internacionální komité, skládající se z odborníků všech států v oné konvenci zastoupených; jemu přísluší rozhodovati též o otázkách finančních. Nejvyšším orgánem autoritativním jest generální konference, kteráž se schází každých 6 let v Paříži. První byla roku 1889. Při poslední, čtvrté, r. 1907 byl zástupcem Rakouska praesident norm. cejch. komm. Vídeňské dvorní rada *Viktor v. Lang*.

Prvním úkolem ústavu tohoto bylo zhotovení nových, tak zvaných národních a mezinárodních prototypů jak pro délky tak pro hmoty. Již předem učiněno důležité rozhodnutí o materiálu, z něhož nové prototypy tyto měly býti pracovány. Původní metr (primitif) byl zhotoven z platiny. Ukázalo se však, že materiálem daleko ještě výhodnějším jest slitina platiny a iridia v poměru (dle hmoty) 90 : 10. Jako platina jest i slitina tato oproti vlivu atmosféry i oproti působení známých agencií chemických, horkou lučavku královskou vyjímajíc, úplně necitlivou. Jest dále velmi tuhá a pevná, dá se výborně hladiti a leštiti, tak že lze na plochách tím zjednaných nanášeti diamantem čárky velice jemné. Specifická její hmota jest největší všech dosud známých; činí totiž 21·56 g/cm^3. Roztažnost tepelná jest velmi malá a velmi pravidelná; materiál vydrží zahřátí až do žáru červeného. Všechny tyto vlastnosti činí materiál tento výtečně způsobilým, aby z něho byly hotoveny prototypy, jež mají pro celou budoucnost býti neproměnlivým základem veškerých měr (a vah).

Průřez nových prototypů délkových byl zcela zvláštní, jak jej vepsaný do čtverce $(2\ cm)^2$ ukazuje obr. 9. ve skutečné velikosti. Průřezem

*) *οἱ μετρονόμοι* sbor 15ti mužů v Athenách, (10 v městě a 5 v Peiraeu), kteří měli dozor nad správností měr a vah při prodeji.

této formy zabezpečuje se rychlé vyrovnávání teploty mezi tyčí a prostředím (lázní), v němž se nalézá; jím se docílí též značné pevnosti proti prohnutí tyče vlastní vahou; plocha, jež jest uprostřed celého průřezu, jest plochou neutrální; na ní jest naneseno vlastní dělení, na začátku a na konci toliko 3 jemné čárky (tloušťky 6 až 8 μ) ve vzdálenosti 0·5 *mm* od sebe; odlehlost obou *středních* čárek udává při normální teplotě 0° vlastní délku étalonu a to ve střední ose, kteráž jest též podélnými čárkami udána. Tím, že toto dělení jest na ploše neutrální naneseno, nemění se i při eventuální malé deformaci tyče ta délka, kteráž dělením jest udána. Celá délka étalonu činí 102 *cm*. Také v tom spočívá přednost těchto nových étalonů oproti původnímu metru platinovému, že tento byl, jak říkáme, měřítkem na kraje (plochy) (à bouts), kdežto ony nové jsou měřítka na čáry (à traits); odlehlostí čárek jemně vedených lze však jistou délku přesněji stanoviti než odlehlostí krajů, resp. krajních rovin.



Obr. 9.

Z většího počtu takovýchto prototypů byl jeden určen za internacionální a slouží za základ kontroly a verifikace vědecké. Jest uložen v mezinárodním ústavu dříve jmenovaném a označuje se všeobecně písmenem $\mathfrak{M}$. Jiné pak, tak zvané nacionální, v počtu 30, rozdělily se při první generální konferenci pro míry a váhy, v září 1889, losem mezi súčastněné státy a zůstávají uloženy v příslušných hlavních městech zpravidla v hlavním metronomickém ústavu toho kterého státu.

Rakousku připadly prototypy **N° 15 a N° 19**; tento jest určen za manipulační, onen pak jest nyní základním metrem *) pro veškeré království a země v říšské radě zastoupené, dle znění zákona d. d. $^{12}/_{1}$ 1893, Ř. Z. 1893 č. 10.

Konstanty jeho určeny následovně: Koefficient roztažnosti

$$\alpha \,.\, 10^9 = 8655 + 1 \cdot 00\, t.$$

Délka při teplotě tajícího sněhu

$$1\ m + 0 \cdot 9 \pm 0 \cdot 1.$$

Tudíž délka při teplotě t

$$1\ m + 0 \cdot 9 + 8 \cdot 655\ .\ t + 0 \cdot 00100\ .\ t^2 \pm 0 \cdot 2,$$

kdež znamená t teplotu určenou teploměrem vodíkovým, jak byl ustanoven k účelům internacionální služby pro míry a váhy **). Oba tyto prototypy jsou v pevných, proti ohni bezpečných skříních uschovány v ústavu c. k. normální cejchovní kommisse ve Vídni.

*) Nový tento prototyp vstoupil nyní na místo skleněného étalonu, jenž byl zákonem výše uvedeným d. d. $^{23}/_{7}$ 1871 Ř. Z. 1872 č. 16 za základ délek prohlášen, čímž byl zákon tento dodatečně pozměněn.

**) Thermika, pag. 25, 1908.

Starý platinový prototyp metru jest nyní již jen památkou historickou. Jeho kopie M shoduje se s ním tak přesně, jak vůbec nejjemnějšími prostředky moderními bylo lze dosáhnouti.

§ 20. Násobky a díly metru; označení.

Násobky a díly metru utvořeny na základě dekadickém a pojmenovány dle číselných názvů řeckých a latinských *); označení, jak jest zavedeno u nás v Rakousku na základě usnesení XV. plenární schůze c. k. normální kommisse cejchovní v roce 1885, ukazuje přehledně tabulka následující:

10 000 metrů	= myriametr	. . .	*μm*
1 000 »	= kilometr	. . .	*km*
100 »	= hektometr	. . .	*hm*
10 »	= dekametr	. . .	*dkm*
1 metr		. . .	*m*
0·1 *m*	= decimetr	. . .	*dm*
0·01 »	= centimetr	. . .	*cm*
0·001 »	= millimetr	. . .	*mm*

K tomu přistupuje

0·001 *mm*	= mikron	. . .	*μ*
0·000001 »	= millimikron	. .	*μμ*.

Jednotka *μ* jest pohodlna na př. k účelům mikroskopování; jednotky *μμ* užívá se na př. při stanovení délky vlny světelné. Vůči tomu, že *μ* značí mikron, jeví se býti označení *μm* pro myriametr nevhodným; proto se později zavedlo označení *mym*. Ostatně se jednotky této velmi málo užívá, právě tak, jako též jednotky *hm* a *dkm*, kteréž jen k vůli úplnosti nahoře byly uvedeny. Na místě millimikron říká se též mikromillimetr, což jest slovo poněkud dlouhé a dvakrát složené.

§ 21. Délkové jednotky metrické a starofrancouzské.

Při starších pracích vědeckých užívalo se velmi často — také u nás — **) starofrancouzské (pařížské) jednotky délkové sáhu (°), (toise du Pérou) a jejích dílů, stopy (pié) (′), palce (pouce) (″) a

*) Latinské: decem, centum, mille; řecké: *δέκα, ἕκατον, χίλιοι, μύριοι*; slovo *μύριοι* znamenalo Řekům vůbec nesmírně mnoho, později vložen do slova význam určitého čísla (10.000). Volba označení latinských a řeckých byla šťastnou vzhledem k tomu, že soustava metrická byla připravována jako internacionální.

**) Pozorování barometrická na hvězdárně Pražské jsou na př. až do roku 1872 incl. vyjádřena v Pařížských čárkách.

čárky (ligne) (‴). Při studiu prací těchto bývá pak třeba přepočítati údaje takové na moderní jednotky metrické.

Základní relace jsou tu následující *):

$$1\,m = 3'\ 11\cdot296''' = 443\cdot296'''$$

a obráceně

$$1' = 324{\cdot}83938\ mm$$

Při tom jsou normální teploty: pro míru metrickou 0° C, pro starofrancouzskou 13° R = 16·25 C. Jest tudíž délka přesné tyče metrové při 0° C taková jako délka 443·296‴ při teplotě 16·25 C přesného měřítka pařížského, anebo obráceně: délka přesné stopy pařížské při 16·25 C jest taková jako délka 324·83938 *mm* při teplotě měřítka 0° C.

Z oněch čísel plyne pak dále:

1 *m*	= 3′ 11·296‴	1′	= 324·83938 *mm*
1 *cm*	= 4·43296‴	1″	= 27·06995 »
1 *mm*	= 0·443296‴	1‴	= 2·25583 »

K usnadnění převodu slouží tyto tabulky:

Převod délkové míry starofrancouzské na metrickou.

	stopa v metrech	palec v millimetrech	čárka v millimetrech
1	0·3248394	27·06995	2·25583
2	0·6496788	54·13990	4·51166
3	0·9745181	81·20984	6·76749
4	1·2993575	108·27979	9·02332
5	1·6241969	135·34974	11·27915
6	1·9490363	162·41969	13·53497
7	2·2738757	189·48964	15·79080
8	2·5987150	216·55958	18·04663
9	2·9235544	243·62953	20·30246

*) Méchain a Délambre, Base du Système métrique, svazek 3, pag. 433. Mitteilungen der kais. Norm.-Aich.-Comm. (Berlin) I. Reihe, Nro. 10, 1889.

Převod délkové míry metrické na starofrancouzskou.

	metr ve stopách	millimetr v palcích	millimetr v čárkách
1	3·07844	0·0369413	0·443296
2	6·15689	0·0738827	0·886592
3	9·23533	0·1108240	1·329888
4	12·31378	0·1477653	1·773184
5	15·39222	0·1847067	2·216480
6	18·47067	0·2216480	2·659776
7	21·54911	0·2585893	3·103072
8	24·62756	0·2955307	3·546368
9	27·70600	0·3324720	3·989664

§ 22. Délkové jednotky metrické a anglické.

Jednotkou anglických měr délkových jest Yard po 3 stopách (foot), stopa po 12 palcích (inch). Poměr yardu k metru stanovil přesně *Kater* v roce 1818; zákonitě byl pak poměr tento ustálen vynesením »*Weights and measures act*« z roku 1878 dle relace:

$$1 \text{ Yard} = 914{\cdot}38348 \; mm$$

aneb obráceně

$$1 \text{ metr} = 39{\cdot}37079 \text{ inches.}$$

Normální teplotou pro yard jest

$$62^0 \text{ F} = 16^2/_3{}^0 \text{ C.}$$

Délka přesného měřítka yardu při teplotě 62° F jest tudíž taková jako délka 914·38348 *mm* přesného měřítka metrického při teplotě 0°; aneb naopak, délka metru jest taková jako délka 39·37079 anglických palců teploty 62° F přesného měřítka anglického.

Když po založení internacionální konvence metrické nový platino-iridiový normální metr M byl roku 1889 v první generální konferenci konvence metrické definitivně ratifikován, stalo se žádoucím podniknouti nová měření, aby poměr tohoto metru k normálu anglickému (Imperial Standard Yard) dle nejjemnějších method měřících a nejlepších zkušeností byl nově stanoven. Práce tyto provedeny v pavillonu de Bréteuil v Sèvres u Paříže. Poněvadž pak nebylo dovoleno onen »Imperial Standard Yard« do Paříže přenésti, byla v Londýně vyhotovena kopie tohoto yardu, co nejvěrnější, a tato tak zvaná »Parliamentary Copy VI« byla v Paříži s normálním metrem srovnána. Výsledek měření byl v druhé generální konferenci konvence metrické roku 1895 oznámen a do protokollu přijat, a krátce na to roku 1898 v Anglii zákonem sankcionován. Dle toho jsou na místě relací hořejších dnes v platnosti základní relace tyto:

1 yard (3 stopy) = 0·914 399 *m*
1 stopa (12 palců) = 0·304 80 *m*
1 palec = 25·400 *mm*

a obráceně:

1 metr = 1·093 6143 yard
= 3·280 843 stopy
= 39·370 113 palců
1 *mm* = 0·039 37 palce

Úkol přepočítávati údaje v délkové míře anglické na metrickou neb naopak přichází často vzhledem k tomu, že se míry anglické užívá velmi hojně v Anglii, Americe, osadách anglických a v jistém smyslu i na Rusi a j. Úkol ten mají usnadniti tabulky následující *).

Převod délkové míry metrické na anglickou.

	metr v yardech	metr ve stopách	millimetr v palcích
1	1·0936143	3·280843	0·039370
2	2·1872286	6·561686	0·078740
3	3·2808429	9·842529	0·118110
4	4·3744572	13·123372	0·157480
5	5·4680715	16·404215	0·196851
6	6·5616858	19·685057	0·236221
7	7·6553001	22·965900	0·275591
8	8·7489144	26·246743	0·314961
9	9·8425287	29·527586	0·354331

*) Tyto nové tabulky vstupují tedy na místo těch, jež v prvém vydání Mechaniky v roce 1901 pag. 30 byly uvedeny. Srovnej Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures. Tome XII. 1902, Mitteilungen der kaiserl. Normal-Eichungs-Kommission II. Reihe, Nr. 18, pag. 234, 1905.

Převod délkové míry anglické na metrickou.

	yard v metrech	stopa v metrech	palec v millimetrech
1	0·914399	0·304800	25·4000
2	1·828798	0·609599	50·7999
3	2·743197	0·914399	76·1999
4	3·657596	1·219199	101·5999
5	4·571995	1·523998	126·9999
6	5·486394	1·828798	152·3998
7	6·400793	2·133598	177·7998
8	7·315192	2·438397	203·1998
9	8·229591	2·743197	228·5998

Vedle těchto relací vědecky správných užívá se však v *obchodu anglickém* ještě relací jiných, jež vznikly tím, že se yard při své normální teplotě 62° F srovnal s mosazným metrem *téže teploty* $16^2/_3$° C (na místě teploty 0° C), čímž vznikla relace:

1 yard = 914·12 *mm*

aneb obráceně:

1 metr = 39·38203 palců.

Jednotka obchodní yard jeví se tu býti proti jednotce vědecké yard poněkud zkrácenou (asi o $^1/_4$ *mm*). Dvojakost tato jest dosti závadnou; ji se vysvětluje, proč často v knihách nalézáme o jedné a téže veličině dvojí různý údaj v míře anglické, při čemž ani nebývá udáno, zdali je míněn yard vědecký nebo yard obchodní.

Z hořejších základních vztahů pro anglickou míru obchodní plynou pak ještě následující:

1 stopa = 0·30471 metru
1 palec = 25·392 *mm*

a obráceně:

1 metr = 3·2818 stopy
1 *mm* = 0·0394 palce.

§ 23. Rozměry naší země.

Tvar naší země (geoid) lze s velkou approximací pokládati za rotační ellipsoid (sféroid). Vzhledem k tomu, že základní jednotka délková jest odvozena z rozměrů tohoto ellipsoidu, uveďme dle nynějšího stavu vědy, jak zase naopak tyto rozměry se jeví

v oné nyní všeobecně přijaté jednotce délkové. Rozměrů těchto budeme v následujících výkladech častěji potřebovati.

Data nejvíce rozšířena jsou ta, jež na základě měření poledníkových vypočítal slavný astronom *F. Bessel* *). Data novější vypočítal *A. Clarke* **) a *H. Faye*; pravdě as nejpodobnější dle nynějšího stavu měření jsou data, jež odvodil *H. Faye* ***); proto v následujících oddílech, zejména v oddílu o gravitaci, jsou přijata jeho data. Nicméně v následujícím sestavení jsou též vedle nich uvedena čísla dle Bessela, aby bylo viděti, jak rozdíly jsou dosti značné.

Budiž

R_0 = poloosa hlavní (aequatoreální) } ellipsy zemské,
R_1 = poloosa vedlejší (polární) }

$R_0 - R_1$ = sploštění absolutní země,

$\frac{R_0 - R_1}{R_0}$ = sploštění relativní země,

$R = \sqrt[3]{R_0^2 R_1}$ poloměr koule mající týž objem jako země,

$R' = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ poloměr koule mající týž povrch jako země,

$2\pi R_0$ = obvod aequatoreální,

Q = quadrans terrestris, čtvrtmeridián,

V = objem (volumen) země,

S = povrch (superficies) země.

Číselné hodnoty jsou sestaveny v tabulce následující.

	F. Bessel	H. Faye	
R_0 =	6377·397	6378·393	. . . *km*
R_1 =	6356·079	6356·549	. . . *km*
$R_0 - R_1$ =	21·318	21·844	. . . *km*
$\frac{R_0 - R_1}{R_0}$ =	$\frac{1}{299·2}$	$\frac{1}{292·0}$	
R =	6370·283	6371·103	. . . *km*
R' =	6370·290	6371·109	. . . *km*
$2\pi R_0$ =	40070·368	40076·625	. . . *km*
Q =	10000·856	10002·008	. . . *km*
V =	1082·841	1083·260	. . 10^9 *km*^{3}
S =	509·951	510·082	. . 10^6 *km*^{2}

*) F. W. Bessel, Astron. Nachr. 14, pag. 333, 1837 a 19, pag. 97, 1842.
**) A. R. Clarke, Geodesy, pag. 319.
***) Annuaire, publié par le bureau des longitudes, Paris 1908, pag. 260.

§ 24. Jiné míry starší.

Z jednotek starších buďtež zde uvedeny ještě některé, jichž se dosud mnoho užívá. Sem náleží především jednotka při odlehlostech topografických mnoho užívaná, tak zvaná míle. Původně znamenala míle tisíc kroků, mille passus; počítá-li se krok 75 *cm*, bylo by 1000 kroků = $^3/_4$ *km*. Na tom základě jsou na př. mapy rak. vojenského generálního štábu kresleny v měřítku 1 : 75000, dle něhož právě 1000 kroků (»míle«) = 1 *cm*, (ostřejším pochodem asi 10 minut). V původním svém významu míle = 1000 kroků se slova toho neužívá. Tak zvaná *míle geografická* vztahuje se na délku rovníka, (redukovaného na hladinu mořskou), a určuje se jako délka příslušná úhlovému oblouku $\frac{1}{15}{}^0$ čili 4′. Dle toho, zdali přijmeme data, jak je pro rozměry naší země odvodil *F. Bessel* nebo *H. Faye*, obdržíme číselně

míle geografická = 7420·44 *m* (Bessel),
míle geografická = 7421·60 *m* (Faye).

Číslo prvnější se v knihách všeobecně udává.

Proti *míli geografické*, jež jest odvozena z rozměrů *rovníka*, jest tak zvaná *míle mořská* odvozená z rozměrů *poledníka* jakožto délka příslušná oblouku jedné minuty ($\frac{1}{60}{}^0 = 1'$). Obdobně jako nahoře máme i zde:

míle mořská = 1852·01 *m* (Bessel),
míle mořská = 1852·22 *m* (Faye).

Jednotky »míle mořská« užívá se všeobecně při plavbách na moři; při tom udává se rychlost, s jakou paroloď pluje, zpravidla počtem mořských mil ujetých za hodinu. Za účelem stanovení této rychlosti spustí se s lodi do moře trojhranný plavač stabilně plovoucí a téměř nehybný, aby i proti (slabému) tahu na určitém místě zůstal; od něho jde lano, kteréž se odvinuje, když loď pluje. Lano jest opatřeno *uzly*. Pozorování koná se půl minuty, t. j. $\frac{1}{120}$ hodiny. Počítá se počet uzlů, kolik jich za tento čas před očima pozorovatele přeběhne. Odlehlost uzlů jest taková, aby tento *počet uzlů za půl minuty* odpovídal *počtu mořských mil za hodinu*. To dává odlehlost 1852 *m* : 120 = 15·4 *m*. Obyčejně se brává o 0·6 *m* menší, vzhledem k tomu, že přece onen plavač při odvinování lana jde poněkud za lodí. Na některých lodích se pozoruje pouze čtvrt minuty; pak ovšem musí býti odlehlost uzlů poloviční, tedy 7·7 *m*, resp. 7·4 *m*, aby opět počet uzlů v této době odvinutých udával počet mořských mil za hodinu. Když se tedy na př. udává, že moderní parolodi jedou rychlostí až 25 uzlů, znamená to, že za hodinu ujedou 25 mořských mil, tedy 25 × 1·852 = 46·3 *km*. Naše rychlovlaky ujedou za týž čas průměrně asi 60 *km*. Dlužno ovšem připomenouti, že přístroje k stanovení rychlosti jsou u moderních

parolodí dokonalejší, než jak nahoře popsáno; nicméně způsob, udávati rychlost dle uzlů, se i u těch všeobecně zachovává.

V mnohých spisech, zejména anglických, nazývá se míle mořská geografickou; důsledně má se pak z geografické odvoditi jako její čtvrtina, tedy jako oblouk odpovídající 1 minutě rovníka. Dle této definice by byla

mořská míle = 1855·11 *m* (Bessel),
mořská míle = 1855·40 *m* (Faye),

tudíž proti dřívější o 3 metry větší.

Podobná dvojakost jako zde jest též u *míle anglické*.

Míle anglická, zvaná *London-mile*, obyčejná, má 5000 anglických stop, a to *obchodních*. Naproti tomu míle anglická, zvaná Statute-mile, British-mile, má 5280 anglických stop, a to *zákonitých*. Co se oddílů její týče, má míle tato 8 furlongs (brázd), nebo 40 rods (prutů) anebo 80 chains (řetězců), každý chain 22 yards (loket); odtud číslo 80 . 22 = 1760 yards (loket), čili 1760 . 3 = 5280 foots (stop).

V metrech jest

London-mile = 1523·986 *m*,
British-mile = 1609·3295 *m*.

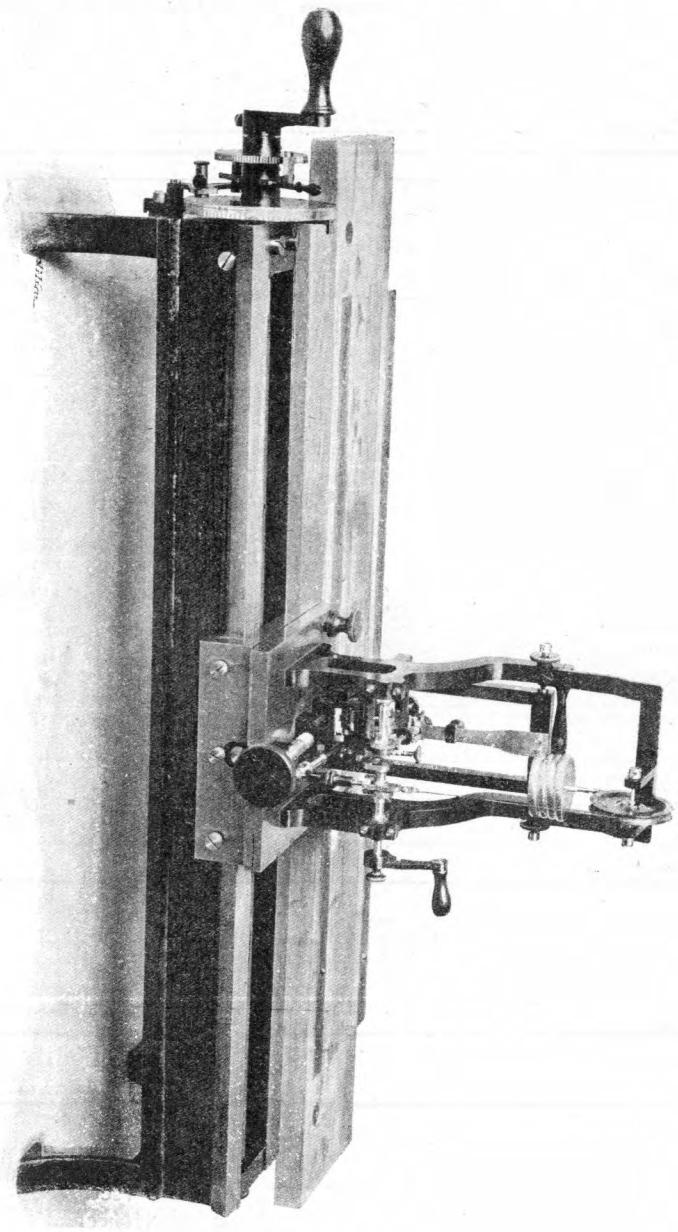
§ 25. Dělicí stroj délkový.

Ke skutečnému odměřování délek potřebujeme měřítek, přesně dělených, na př. na *cm* neb *mm*, jedná-li se o odčítání pouhým okem, aneb ještě jemněji, jedná-li se o odčítání mikroskopy. Měřítka taková hotoví se dělicím strojem délkovým.

Ač základ dělicího stroje délkového jest jednoduchý a určitý, bývá jeho provedení velmi rozmanité. Každý hotovitel konstruuje model vlastní dle svého nejlepšího soudu. Pozorovatel, maje dělicím strojem pracovati, musí se vpraviti do konstrukce toho určitého stroje, který má před sebou, musí studovati jeho zvláštnosti, tím spíše, poněvadž neznalostí jich mohl by zaviniti poškození stroje. Při tom málo mu pomáhá popis sebe obšírnější a podrobnější, který se vztahuje na model jiný. Proto zde podáváme popis dělicího stroje pouze v hlavních rysech, při čemž v některých jednotlivostech vztahujeme popis ten na model znázorněný v obr. 10. (Lorenz), kterého užíváme k účelům fysikální laboratoře.

Částí dělicího stroje nejpodstatnější, v níž větší neb menší hodnota celého stroje spočívá, jest šroub; zoveme jej, jako všechny jiné, jemu podobné, šroubem mikrometrickým *), poněvadž slouží účelům měřicím a má zaručiti měření do délek velmi malých. Hotoví se z tvrdé oceli, v délce

*) μικρός malý, μέτρον, τὸ míra, měřítko.



Obr. 10.

takové, aby bylo možno ještě alespoň půl metru děliti nepřetržitě, tedy na př. v délce 58 *cm*. Šroub tento spočívá v ložiskách pevných. Otáčí-li se, má osa otáčecí přesně splývati s vlastní jeho osou podélnou, aby sebou neházel. Výška otočky šroubové bývá zpravidla 1 *mm*, někdy $^1/_2$ *mm*. Žádá se však, aby výška tato, kdekoli měřená, byla v celé délce šroubu naprosto konstantní. Požadavek tento splniti jest nad míru nesnadno; nutno šroub vytáčeti s největší péčí a při teplotě zcela konstantní.

Šroub jest spojen s maticí šroubovou, ocelovou, pro snadnější rozebírání dvojdílnou. Matice pak souvisí pevně s větší a hmotnější ocelovou čtvercovou deskou, která na massivním stativu celého stroje má sáňkové vedení přesně pracované, tak, aby, když se šroubem otáčí, deska s onou maticí šroubovou jemně postupovala v drahách s osou šroubu rovnoběžných. Na tuto desku pak přišroubuje se přístroj rycí, když se stroje užívá k dělení, po případě i jiné předměty, jež chceme mikrometricky pošinovati, nebo i mikroskop, běží-li o srovnávání daného měřítka se šroubem dělicího stroje, eventuálně o zkoušení tohoto šroubu samého.

Aby se při otáčení šroubu mohly stanoviti též díly jedné otočky, jest na předním konci šroubu před jeho prvním ložiskem upevněn kotouč mosazný, jehož obvod jest rozdělen na 100 dílů; proti dílcům stojí pevný index; lze odhadnouti ještě desetiny dílce a tím stanoviti i tisíciny millimetru. Na tomto kotouči jest také rukověť k otáčení šroubu. Mimo to mívá kotouč ještě menší ozubené kolečko. Budiž jen naznačeno, že slouží k tomu, aby se určitý díl millimetru, na př. pětina, desetina, dvacetina a pod., mohly na měřítko jakési nanášeti, aniž by, kdo dělení provádí, musil hleděti na dělení kotouče; otáčí kotoučem mechanicky vždy o touž část otočení celého, což jest zaručeno tím, že do ozubeného kolečka zasahá závěr, který vždy týž počet zubů pošine vpřed, nazad přes zuby volně přecházeje. — Když se tohoto zařízení neužívá a otáčí se šroubem rukou přímo, což jest pro nejpřesnější účely vždy spolehlivějším, pak dlužno též pamatovati na tak zvaný jalový chod šroubu. V malinkém rozsahu lze totiž každým šroubem pootočiti vpřed a zpět, a matice se při tom nepošine, zůstávajíc na svém místě. Při dělení dlužno tudíž šroubem otáčeti vždy v jednom smyslu, t. j. vpřed; a kdyby se nedopatřením přešlo přes určitý dílec a bylo nutno o několik dílců se vrátiti, pak se otočí šroub o více dílců zpátky a opět se točí dále vpřed, aby se k určitému dílci přišlo vždy směrem vpřed.

Částí stroje nejvíce komplikovanou jest přístroj rycí. Má totiž rydlo býti vedeno nikoli rukou přímo; neboť při tom nebylo by lze uvarovati se postrannímu tlaku neb tahu, čímž by čárky mohly vypadnouti poněkud uhnuté. Také tlak, kterým rydlo pracuje, nelze rukou říditi. Konečně jde též o délku čárek. Nejlépe jest, upraviti přístroj rycí tak, aby ruka pracovala na postranním kolečku, jím otáčejíc, a aby na ose kolečka tohoto umístěny byly dva excentry, z nichž jeden větší způsobuje pohyb rydla vpřed a vzad, druhý pak, menší, pohyb vzhůru a dolů. Jedním otočením kolečka uvede se tedy rydlo vpřed, jsouc nadzdviženo; pak se skloní, táhne se vzad, zde se nadzdvihne, aby se opět vedlo vpřed. Když ryje, jest tlačeno vahou závažíček, kteráž možno voliti v počtu menším neb větším. Konečně se délka čárek upraví kontaktními šrouby. Obyčejně, při dělení dekadickém, nemají čárky býti stejně dlouhé, nýbrž pátá vždy delší

a desátá ještě delší, a to buď jednostranně neb i oboustranně. Tato věc opatří se pomocí ozubeného kolečka, proti jehož obvodu se kontaktní šrouby s obou stran opírají; na tomto obvodě jsou pak příslušné výřezy, jež možno i hlubšími neb mělčími učiniti, do nichž kontaktní šroubky při pátém a desátém dílci zapadají. Kolečko má vedle sebe jiné ozubené se dvaceti zuby a pomocí toho postrčí se vždy o jeden zub, když rydlo provede jednu čárku; toto postrčení provádí se třetím excentrem na ose onoho postranního kolečka umístěným.

Jak viděti, jde tendence celého uspořádání k tomu, nechati pracovat mechanismus za člověka. Mechanismus správně zařízený se nemýlí, kdežto člověk se mýliti může. Činnost pracovníka přestává tedy na tom, pravou rukou otáčeti hlavní šroub, levou rukou pak po té otáčeti kolečko postranní na přístroji rycím. Vše ostatní obstarává mechanismus před tím dobře zařízený.

Při dělicích strojích, jež nejpřesnějším účelům vědeckým mají sloužiti, pokročí se ještě dále: vyloučí se spolupůsobení člověka úplně. Vskutku blízkostí pracovníka vznikají mechanická otřásání, různosti teploty a vlhkosti, kteréž na výsledek dělení velmi jemného vždy škodlivě působí. Proto jsou nejdokonalejší dělicí stroje automatické; takové mohou pracovati i v noci, za úplného klidu, při konstantní teplotě, a to nepřetržitě bez únavy, bez omylů a úplně stejnoměrně *).

O praxi dělení budiž ještě poznamenáno následující.

Předměty, na nichž dělení se má provésti, upevní se na stole podél šroubu rozestřeného, obyčejně voskem **), ale opatrně, aby snad tlakem nevznikla deformace. Dle výšky předmětu upevní se pak rydlo. Tímto bývá při dělení měřítek dřevěných neb kovových nůž ocelový, přibroušený šikmo k ostré hraně, kterou se dílce ryjí. Na skle ryje se diamantem. Běží-li však o dílce, jež mají zřetelně vystupovati, jako u teploměrů, hustoměrů, graduovaných nádob atd., potáhne se sklo jemnou vrstvou vosku nebo paraffinu, nebo ještě lépe laku asfaltového, který těsně ke sklu přilne, a dělení ryje se do této vrstvy. Na to se dělení vyleptá fluorovodíkem čili kyselinou fluorovodíkovou (FH), koncentrovanou (dýmavou). Slabý roztok jeví tendenci k rozmazání čárek podžíráním. Fluorovodík plynný účinkuje na sklo ovšem silněji, jest však plicím velmi nebezpečný; proto lze jím pracovati jen v nádobách uzavřených. Vodu však fluorovodíkem více méně nasycenou lze uschovati v nádobách guttaperčových a při práci štětcem na dělení nanášeti. Vosk neb paraffin neb lak asfaltový se smyje silicí terpentinovou neb benzolem. Aby dílce dobře vynikly, natírají se hustou směsí rumělky a šellaku v alkoholu ***).

Dobrý dělicí stroj jest pro účely laboratoře fysikální velmi užitečný. Jím hotoví se měřítka v jednotce metrické, jím lze však měřítka hotoviti v jednotce libovolné aneb, jinak řečeno, jím lze libovolnou délku danou

*) V té příčině jest velice zajímavým popis Rowlandova dělicího stroje (kterým hotovil své optické mřížky), v jeho sebraných spisech.

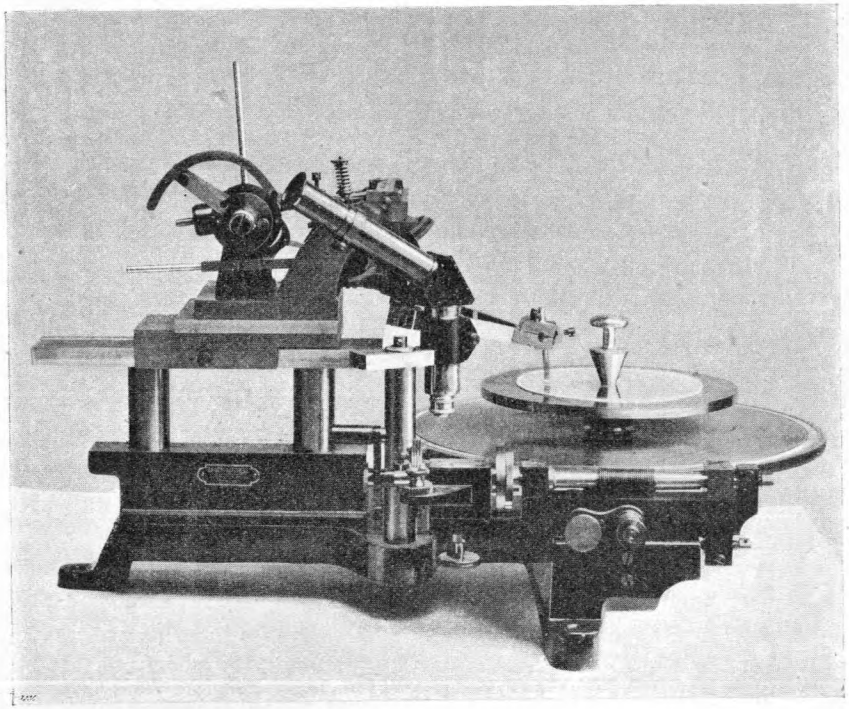
**) Vosk sám byl by k účelům takovým tvrdým a drobivým, proto se roztaví a pak smíchá se silicí terpentinovou.

***) Podrobnější návod viz na př. Ostwald-Luther, Physiko-chemische Messungen, 2. vyd., pag. 29—35, 1902.

rozděliti na určitý počet dílců; na př. provésti dělení na teploměru, na mensurách atd. Jím lze zkoumati měřítka daná a určiti metrickou hodnotu jich dílce, při kteréžto práci se na přístroj rycí umístí mikroskop, jenž má v okuláru nitkový kříž. Konečně všude tam, kde se má předmět nějaký v rovině vodorovné mikrometricky jemně a o délku danou pošinovati, koná dělicí stroj služby nejlepší.

§ 26. **Dělicí stroj kruhový.**

U dělicího stroje podélného jest šroub dlouhý, matice šroubová krátká. U kruhového jest tomu naopak, šroub jest krátký, matice šroubová dlouhá, jsouc vyryta na obvodu kruhové desky. V tom jest již vnější rozdíl obou těchto strojů. Obr. 11. ukazuje kruhový dělicí stroj, vhodných pro laboratoř rozměrů (Société Génevoise). Hlavní deska má 30 *cm* v průměru. Na jejím obvodu jest vyryta matice o výšce $^1/_2$ stupně, (délkově 1·3 *mm*). Do ní zasahá manipulační šroub, mající jen 28 závitů. Do desky jest v blízkosti obvodu zapuštěn kruhový stříbrný proužek, na němž je naneseno jemné dělení na stupně, každý stupeň na 6 dílů, tudíž po 10 minutách. Při práci musí pozorovatel k vlastní kontrole stále na tomto dělení postavení desky sledovati.



Obr. 11.

To se děje slabým mikroskopem, pevně na stativu stroje umístěným, jenž v okulárním poli má na tenké skleněné destičce vyryty dvě parallelní rovné čáry, mezi něž při práci přichází dílec onoho děleného kruhu. Aby odčítání bylo pohodlnější, jest mikroskop rozdělen ve dvě k sobě skloněné části, objektivní a okulární, ve způsobu z obrazce patrném, pomocí totálního odrazu. Na desce upevní se koncentricky deska jiná, na kteréž kruhové dělení nanésti dlužno. Rycí přístroj jest upraven podobně jako u podélného stroje dělicího. Uvádí se v pohyb pákou. Ozubená kolečka, jež obstarávají pomocí vhodných kontaktů délku čárek, lze dle způsobu dělení vyměňovati. V nejjednodušším případě, kde (u malé desky) dělení pokračuje po stupních, jest každá pátá čárka delší a desátá ještě delší.

§ 27. **Měřítka.**

Měřítka obyčejná hotoví se ze dřeva, zpravidla v délce 2 *m*, 1 *m*, 0·5 *m*, 0·2 *m*, 0·1 *m*. Měřítka jedno- a dvoumetrová mívají průřez pravoúhlý a jsou měřítky na plochu; správná úhrnná délka jest dána odlehlostí krajních k délce kolmých rovin; tyto bývají mosaznými do dřeva zapuštěnými plíšky zabezpečeny. Na správnosti těchto konců záleží ovšem nejvíce; zde lze často nalézti chyby až do 1 *mm*. Měřítka kratší mívají formy lineálů a slouží účelům rýsování; jsou měřítky na čáry, t. j. úhrnné délky jsou dány odlehlostí čárek na hraně lineálu. Decimetrová měřítka tohoto druhu hotoví se též ze slonoviny. Měřítka delší, dvoumetrová, dělena jsou na centimetry, kratší vždy na millimetry *).

K rychlému vyměřování délek větších užívá se měřítek páskových buď z oceli anebo z plátna, do něhož jsou vetkány jemné drátky, aby délka měřítka se natažením neměnila; pásková měřítka ocelová jdou obyčejně do délky 10 *m*, plátěná na př. 30 *m*. Jsouce ohebná konají též dobré služby při vyměřování obvodů.

Pro měření přesnější osvědčují se velmi dobře měřítka skleněná. Při těchto užívá se zrcadlového skla buď bez folie, tedy průhledného, nebo s folií, (stříbrnou), aby při odčítání nevznikly chyby parallaxou. Pro škály metrové, jakých se užívá při odčítacích dalekohledech k účelům magnetometrickým a galvanometrickým, užívá se rovněž měřítek skleněných a to ze skla bílého. Dělení na skle lze provésti velmi zřetelně a čistě; sklo netrpí prachem a vlhkostí ani výpary kyselin atd.

Dlouhá měřítka skleněná jsou dosti drahá. Proto se k účelům posledně uvedeným užívá měřítek provedených na papírovém proužku, který jest nalepen na dřevo formy **T**, aby se tak snadno

*) Zcela nevhodné jest dělení na půlmillimetry; čárka millimetr půlící ruší přehled a k odhadnutí desetin millimetru pranic nenapomáhá.

nekroutilo. Zde však dlužno podotknouti, že se musí dříve papír na dřevo nalepiti a teprve, když lep uschl, a dřevo se ustálilo, dělení strojem dělicím nanésti.

K přesným účelům vědeckým užívá se, vedle oněch měřítek skleněných, hlavně měřítek kovových. Při tom vkládá se proužek kovu jemnějšího, zpravidla stříbra, do kovu hrubšího, na př. mosazi. To však lze jen tehdá, když koefficienty tepelné roztažnosti se rovnají; jinak vzniká relativní pošinutí. Kombinace stříbro-mosaz vyhovuje vskutku podmínce této velmi dobře. Dle pozorování konaných v »Bureau international« neobjevilo se ani při zahřátí na 100° žádné relativní pošinutí.

Vhodným materiálem pro měřítka jest niklová ocel (napouštěná) obsahující niklu buď 36% nebo 44%. Roztažnost tepelná (na 1° a 1 *m* vztahovaná) činí u prvého druhu okrouhle 0·001 *mm*, u druhého 0·0075 *mm* *). Změna jest tudíž u druhu prvého velmi nepatrná; odtud její název »invar« (invariabilis).

§ 28. **Nonius (vernier).**

Při provádění měření jde o to, stanoviti polohu dvou indexů, anebo dvě konsekutivní polohy jednoho indexu, na daném měřítku. Indexem takovým bývá buď bod, neb přímka; na př. bodec hrotu, který se kolmo na dělení promítá, nebo průsek nitek u nitkového kříže, nebo zase sama nitka takového kříže, rovnoběžně s čárkami měřítka zařízená, přímkový průmět roviny na rovinu měřítka atd. Zpravidla přijde index takový mezi dvě sousední čárky měřítka; počet plných dílců odečte se pak přímo; ale zbývá ještě zlomek dílce, o jehož určení se jedná.

Určení toto lze přibližně provésti odhadem. Pozorovatel dovede na měřítku na př. millimetrovém dobře odhadnouti ještě desetiny millimetru, snadno tak přesně, aby chyba nebyla větší než jedna desetina millimetru.

Při odhadování desetin dlužno oku dáti takovou polohu, aby promítání indexu na měřítko se dálo kolmo. Zrcadlením, jak již naznačeno, se věc usnadní. Pošinutím oka z této určité polohy vzniká při odčítání chyba, zvaná *parallakční*. O významu slova *parallaxa* jedná se v oddíle o času.

K odčítání spolehlivějšímu slouží *nonius*, přístroj velice rozšířený, kterýž nalezneme u každého přesného stroje, určeného

*) Mitteilungen der kaiserl. Norm.-Eich.-Komm. Berlin 3. pag. 66, 1908. Pro invar obsahující 36·1% niklu udává se jinde přesněji roztažnost (v hořejším smyslu) 0·000877 *mm*.

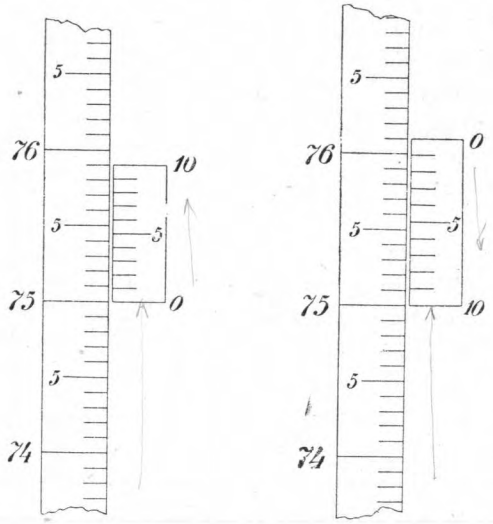
k měření buď délek neb úhlů. Jest to měřítko pobočné, kteréž buď lze pošinovati podél hlavního, anebo podél něhož lze pošinovati hlavní. Jím má se odečísti ještě n-tá část dílce hlavního měřítka.

K cíli tomu jest na noniu $n \pm 1$ dílců hlavního měřítka rozděleno na n dílů. Hodnota dílce jest tudíž $\frac{n \pm 1}{n} = 1 \pm \frac{1}{n}$.

Dle toho se rozeznává:

1) Nonius postupný, s hodnotou dílce $1 - \frac{1}{n}$,

2) nonius zpětný, s hodnotou dílce $1 + \frac{1}{n}$.



Obr. 12.

Odčítání na noniu provádí se tím způsobem, že se přihlédne, kolikátý dílec nonia splývá s dílcem hlavní stupnice. Je-li to dílec k-tý, činí zbývající zlomek $\frac{k}{n}$ dílce hlavního. Indexem, na kterýž se odečtení vztahuje, jest ovšem *nullový bod nonia*.

U měřítek délkových, kteráž jsou millimetrová, bývá obyčejně $n = 10$.

Odčítají se tedy desetiny millimetru a sice pouhým okem, což stačí (obr. 12.).

Děje-li se odčítání lupou, a je-li dělení i hlavní i pobočné jemně provedeno, aby čárky byly velmi tenké ale určité, jest výhodnějším voliti $n = 20$.

Při tom není však rozumné, číslování nonia dle dvacetin millimetru zaříditi, nýbrž dle desetin (obr. 13.) a čárky (kratší) mezi jednotlivými desetinami používati k odhadnutí setin millimetru. Vskutku lze dle polohy této čárky mezi čárkami hlavního měřítka odhadnouti velmi dobře ještě dvě setiny millimetru. Přesnost větší jest noniem samým nemožnou.

Obr. 13.

Zdálo by se ovšem, že by zvětšením čísla n, na př. $n = 100$, bylo lze větší přesností docíliti. Avšak věc jest illusorní. I kdyby čárky byly sebe jemnější a odčítání se dálo mikroskopem, nelze při velkém n rozhodnouti, která čárka nonia vlastně koinciduje s čárkou hlavního měřítka; koinciduje totiž čárek několik oku stejně dobře. Proto jest touto okolností jistá mez přesnosti sama dána.

Při noniech, jak se jich užívá u strojů úhloměrných, goniometru, spektrometru, theodolitu a pod., volívá se buď

$$n = 30 \quad \text{nebo} \quad n = 60$$

v souhlasu s tím, že dělení stupně na minuty a minuty na sekundy jest šedesátinné. Je-li tedy na př. dělení hlavní na $^1/_2{}^\circ = 30'$, jak to bývá u kruhů malých (průměru na př. 10 *cm*), volí se $n = 30$ a odčítají se noniem minuty. U kruhů větších (průměru na př. 25 *cm*)

jde dělení hlavní na $^1/_6{}^0 = 10'$; zde tedy volí se $n = 60$ a noniem se odečítá ještě 10 sekund.

Co se konečně týče rozdílu mezi noniem postupným a zpětným, jsou theoreticky oba stejně oprávněny, avšak prakticky dlužno postupnému dáti rozhodně přednost. Rozdíl mezi oběma vyniká dobře z obrazců 11. a 12., kterými se konkretně znázorňuje uspořádání, jak bývá u barometrů. Číslování u nonia postupného jde vpřed, u zpětného zpět. Pozorovatel, jsa zvyklý odčítati na hlavním měřítku v jistém směru, musí u zpětného vzpomenouti, že má jíti zpět, kdežto u postupného jde ve směru stejném. Patrně jest způsob poslední výhodnější, a nedává příčinu k chybám odčítacím. Proto jest nonius postupný daleko rozšířenější; jen u strojů anglických byl dříve nonius zpětný oblíbenější.

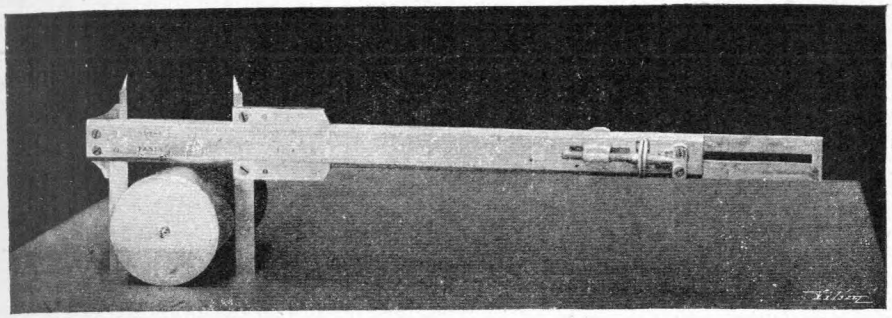
Aby se koincidence čárek dala přesně posouditi, jest s výhodou, když dělení nonia se nalézá v téže rovině s dělením hlavním a když se čárky těsně stýkají. Často nelze dobře tomuto požadavku vyhověti. Pak bývá nonius k hlavnímu měřítku nakloněný a dělení jest provedeno na kraji přiostřeném.

Historicky budiž poznamenáno následující: *Pedro Nuñez*, též *Nunes, Nunnius, Nonius*, (1492—1577), professor mathematiky na universitě v Coimbra, popsal v díle svém »De crepusculis liber unus« 1542, přístroj, jímž měřiti lze díly obloukové. Dle něho byl volen název »nonius«, přes to, že přístroj ten nesouhlasí s měřítkem, který nyní noniem zoveme. Francouzové užívají proto jména »vernier«, vzhledem k tomu, že *Pierre Vernier* (1580—1637) ve spise svém La construction, l'usage et les propriétés du quadrant de mathématique, Bruxelles, 1631, nynější nonius popsal. Na jiné straně (Breusing) udává se, že prioritu má jesuita *Ch. Clavius* (1537 až 1612), professor mathematiky na koleji v Římě, v jehož spisech Opera mathematica, 1612, se již popis nonia nalézá. U nás jest název nonius tak rozšířený a ustálený, že se nedoporučuje jej jiným (na př. vernier) nahrazovati.

Co se terminologie týče, jsou názvy nonius postupný a zpětný nyní nejrozšířenější; jsou odvozeny dle číslování, jež u prvého nonia jest s hlavní stupnicí stejnosměrné, u druhého protisměrné. Jiné názvy jsou dobíhavý a předbíhavý, kteréž hledí k čárkám, jež u prvého nonia jsou pozadu, u druhého napřed proti čárkám hlavní stupnice.

§ 29. **Měřítko kalibrové.**

Měřítkem, jež kalibrovým zoveme, určuje se průměr buď vnější nebo vnitřní válců, trubic a pod. Úprava tohoto měřítka, jakož i způsob měření ukazuje dostatečně obr. 14., znázorňující laboratorní přístroj k měření průměru vnějšího. Analogické přístroje k měření průměrů vnitřních jsou úpravy podobné. U měřítka jest zpravidla nonius na desetiny millimetru, k jemnému pošinování pohyblivého ramene též mikrometrický šroubek.

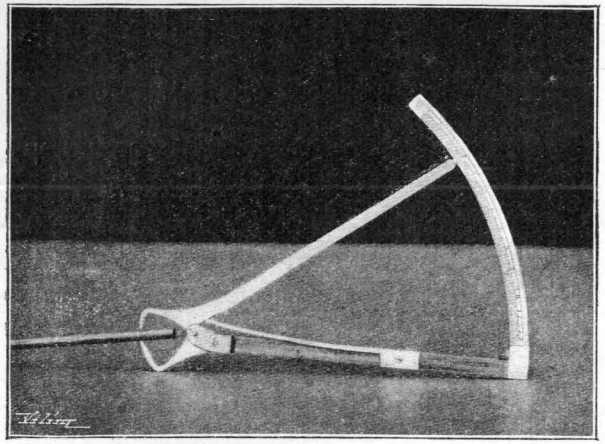


Obr. 14.

Slovo kalibr vzniklo z názvu »scala librarum«, stupnice váhy (totiž váhy projektilů), nyní označuje průměr (ráž) vývrtu děl, pušek, pak průměr útvarů válcových vůbec jako na př. vnitřní průměr trubic vodovodů, plynovodů a pod. Měřítko kalibrové k účelům dělostřeleckým vynalezl 1540 Hartmann v Norimberce.

§ 30. **Kontaktní měřítko pákové.**

K rychlému měření malých rozměrů těles, jako tloušťky destiček skleněných neb krystallových, tloušťky drátů a pod., konají



Obr. 15.

dobré služby měřítka kontaktní, při nichž se odečtení učiní zřetelnějším ve způsobu, jak obr. 15. dostatečně znázorňuje. Stupnice

na velkém oblouku nepostupuje rovnoměrně, poněvadž se kontaktem měří malá tětiva kruhu a nikoli oblouk.

§ 31. Sférometr.

Sférometr *) ve vlastním slova smyslu jest přístroj, sloužící k vyměření koule, t. j. jejího poloměru křivosti. Základ toho jest následující.

Protne-li se koule (obr. 16.) rovinou v kruhu poloměru r, vznikne úsek kulový, jehožto výška e (elevace) s poloměrem R křivosti koule souvisí jednoduchým vztahem:

$$e\,(2R - e) = r^2.$$

Je-li tudíž pro určitý přístroj r konstantní, lze poloměr R pokládati za závislý na elevaci e dle rovnice

$$2R = \frac{r^2}{e} + e.$$

Při tom jest kruh poloměru r určen jakožto kruh opsaný trojúhelníku ABC (obr. 16.), jehož strany jsou a, b, c a úhly α, β, γ. Ze známých vztahů

$$bc \sin\alpha = 2\Delta$$
$$2r \sin\alpha = a$$

plyne

$$r = \frac{abc}{4\Delta},$$

při čemž Δ jakožto plošný obsah trojúhelníka jest určen vzorcem $\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, kdež

$$2s = a + b + c.$$

Zpravidla bývá

$$a = b = c,$$

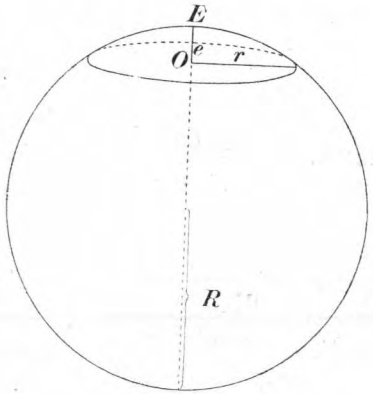
t. j. trojúhelník ABC rovnostranný; pak máme jednodušeji, znamená-li l délku strany,

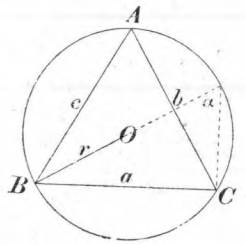
$$r = \frac{l}{\sqrt{3}},$$

kteréžto relace možno i tehda použíti, když podmínce

$$a = b = c$$

jest alespoň přibližně vyhověno; na místě l nastupuje střední hodnota $^1/_3\,(a + b + c)$.

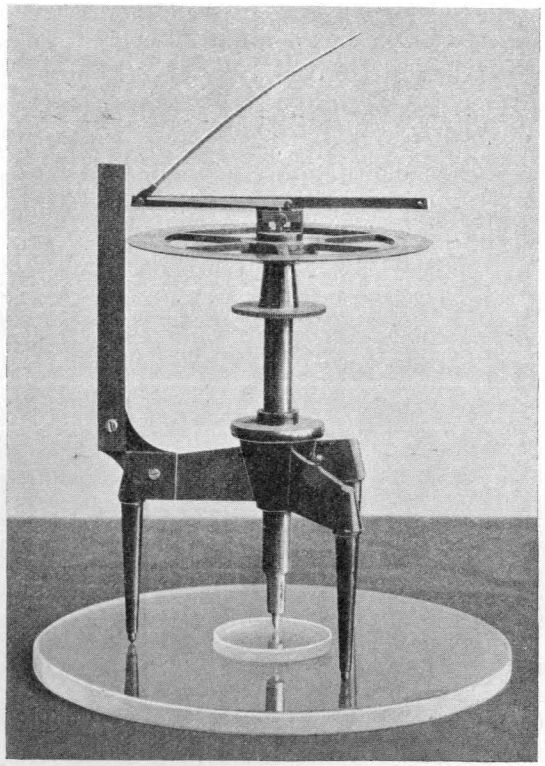




Obr. 16.

*) σφαῖρα ἡ koule, μέτρον, τὸ míra, měřitko.

Sférometr (obr. 17.), jak se ho k účelům laboratorním užívá, spočívá na třech nožkách, končících ostrými bodci A, B, C, rozloženými v trojúhelník zpravidla velmi přibližně rovnostranný. Vzdálenosti jejich a, b, c rozměří se a zavede střední hodnota $l = {}^1/_3\,(a + b + c)$, z níž se dle $r^2 = \frac{l}{3}$ počítá r jednou pro vždy.



Obr. 17.

Tento poloměr r jest vlastní konstantou daného sférometru *);

*) Není tudíž se stanoviska fysikálního vhodné, do vzorce pro R zaváděti l na místě r, t. j. psáti

$$R = \frac{l^2}{6\,e} + \frac{e}{2},$$

čímž se jednoduchý význam vzorce zastírá a do něho zavádí veličina významu podřízeného.

z něho lze — lépe než z délky l — posouditi, pro jaké koule ještě určitého sférometru použíti lze a pro jaké již nikoliv.

Nožky A, B, C nesou matici šroubovou, do níž zasahá ocelový mikrometrický šroub, dole bodcem končící. Tento bodec má se pohybovati co možná přesně nad středem O kruhu body A, B, C opsaného ve směru kolmém na rovinu kruhu ABC; osa šroubu musí tudíž býti přesně k oné rovině kolmou. Šroub sférometru jest částí nejdůležitější; na jeho přesnosti závisí přesnost stroje celého. Při otáčení šroubu má se jeho dolejší bodec pošinovati nahoru neb dolů co jen možná přesně úměrně otáčení šroubu. Aby bylo lze i nejmenší části celého otočení odečísti, jest se šroubem spojena kolmá deska dostatečného průměru, aby se její obvod dal rozděliti na př. na 100 dílů (což stačí) vhodné velikosti, tak že lze ještě desetiny takového dílce odhadnouti. Jest tudíž pak možno otočení šroubu na $\frac{1}{1000}$ celé výšky šroubové stanoviti. Tato výška bývá 1 *mm* anebo častěji $\frac{1}{2}$ *mm*. Celé otočky odčítají se na stupnici postranní kolmo upevněné, která slouží současně za index pro odčítání na obvodě desky.

Přídavkem ke sférometru velmi důležitým jest »planum«, t. j. deska přísně rovinná, obyčejně skleněná, aby se stanovil »nullový bod« sférometru.

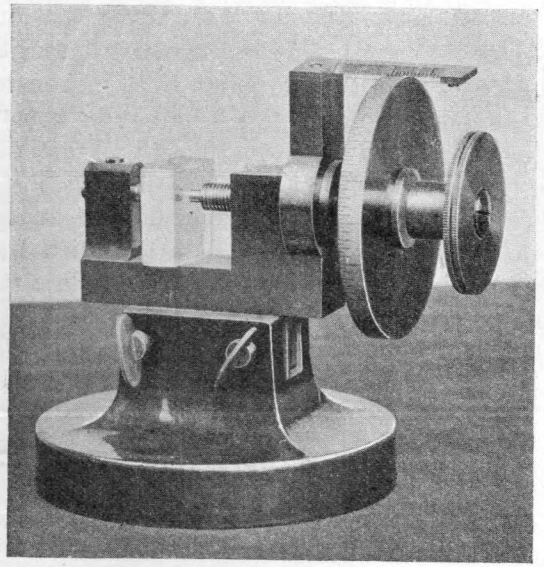
Jak se přístroje užívá ke stanovení tloušťky malých předmětů, netřeba zvlášť vykládati.

Když pozorovatel sférometrem pracuje, má přesně rozhodnouti, kdy střední hrot u šroubu na předmět podložený právě dosedne. Rozhodnutí toto se usnadní tím způsobem, že pozorovatel jemným postranním tlakem prstu hledí stroj kolem tohoto hrotu otáčeti; dokud stroj spočívá jen na třech hrotech postranních, klade znatelný odpor; jakmile však dosedne též na hrot střední, již se ony postranní hroty malounko nadzvednou, a stroj ustupuje tlaku prstu rozhodně více. Přechod lze zjistiti velmi citlivě. Jinak lze okamžik, kdy dotek nastane, učiniti viditelným a to buď zařízením pákovým nebo libellou. Prostřední hrot jest totiž dán zaostřeným koncem tyčinky, která jde volně celým šroubem až na venek, a zde se opírá buď o dvojnásobnou páku jednoramennou, která, jsouc po straně otáčivá, dlouhým svým koncem se zvedá, anebo o libellu, která je rovněž kolem postranní osy otáčivou a toto otáčení pošinutím bublinky vzduchové velice citlivě udává (Wild, Common a j.). Konečně lze též k indikaci použíti pošinutí interferenčních proužků. V obr. 17. jest znázorněn sférometr se zařízením pákovým (Société Genevoise). Aby citlivost tohoto pákového zařízení vynikla, jest v obrazci páka o úhel asi 45° již zvednuta, na důkaz, že správné postavení sférometru jest již překročeno. Toto zvednutí odpovídá překročení o 0·1 *mm*. Hne-li se tedy páka o 1°, znamená to překročení okrouhle o 0·002 *mm*, tak že 0·001 *mm* je touto indikací dobře zabezpečena. Ještě větší citlivosti lze docíliti při indikaci libellou nebo interferenčními proužky.

Není pochybnosti, že tím vším lze sférometr učiniti přístrojem velice jemným a citlivým, tak že lze jím odečtení stupňovati až na desetiny mikron. Ale jiná jest otázka, zdali veliká tato citlivost není illusorní, zdali indikace na mikron anebo dokonce desetiny mikron má vůbec významu. Aby se páka hnula nebo libella pootočila, k tomu je potřeba jakéhosi tlaku; tento tlak působí hrotem tyčinky též na těleso, jehož tloušťka se měří. Avšak každé těleso jest elastické, ustupuje tomuto tlaku, třebas že jen velice málo, ale přece v těch mezích, v nichž se odečtení děje. Dlužno tudíž právě u velmi citlivých sférometrů počínati sobě velice kriticky.

§ 32. **Kontaktní měřítko šroubové.**

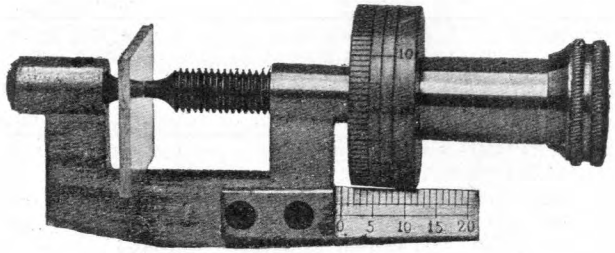
Měřítko toto, kteréž v provedení velmi účelném znázorňuje obr. 18., jest jako by zjednodušeným sférometrem, jenž jest upraven



Obr. 18.

nikoli k vyměřování koulí, nýbrž k měření tloušťky u destiček, drátů a pod. Vzhledem k tomuto účelu má mikrometrický šroub výšku otočky 1 millimetru; na kotouči, který je se šroubem spojen, odčítají se setiny millimetru přímo, tisíciny pak lze odhadnouti.

Celé otočky lze odečísti na měřítku hořejším, z obrazce patrném. Zjednodušené měřítko takové, kapesní, velmi mnoho užívané, ukazuje obr. 19.



Obr. 19.

§ 33. **Komparator.**

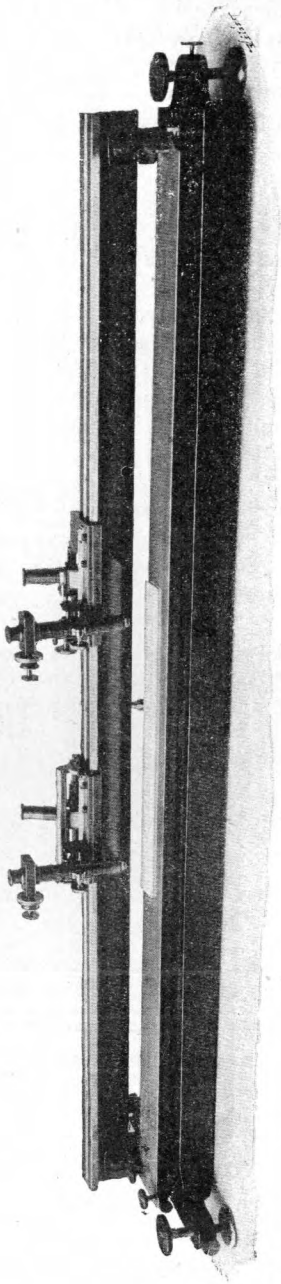
Komparator jest stroj, jímž se srovnávají měřítka délková vespolek, zejména též měřítka normální. Tato mohou býti buď na kraje neb na čáry; dle toho mívá také komparator konstrukci dvojí. Původní platinový metr byl na př. měřítkem na kraje, nový platinoiridiový metr jest měřítkem na čáry. Také všechny jeho kopie platinoiridiové jsou měřítka na čáry. V obr. 20. jest znázorněn komparator (z dílny Meyersteinovy, Bartels a Diederichs) pro měřítka na čáry; k němu vztahují se některé podrobné údaje popisu, který v následujícím v hlavních rysech podáváme.

Základní částí komparatoru jest měřítko, provedené s největší jemností a přesností na stříbrném proužku, zapuštěném do massivního hranolu mosazného formy **T**, aby byl ve směru vertikálním proti prohnutí co nejpevnějším. Měřítko jest děleno na millimetry v délce 100 *cm*; hranol má délku 114 *cm*. Na tomto massivním hranolu pošinují se podél měřítka dvoje sáňky, každé s pozorovacím drobnohledem. Pošinování toto má se díti přesně rovnoběžně s měřítkem; proto musí krajní plochy hranolové, jež slouží sáňkám za vedení, býti hoblovány a hlazeny s péčí co největší, aby představovaly roviny s podélnou osou měřítka přesně rovnoběžné.

Sáňky s drobnohledem lze na každém místě hranolu fixačním šroubem upevniti; tímto šroubem svírá se však jenom malá deska, která je s vlastními sáňkami spojena mikrometrickým šroubem; lze tudíž sáňky, jež nejprve rukou jako by z hruba byly pošinuty, po utažení fixačního šroubu dále pošinovati vpřed i zpět tímto mikrometrickým šroubem velice jemně, tak že lze mikroskop zaříditi na určité místo pozorovaného měřítka s největší přesností. Na sáňkách jest dále nonius, který se odčítá lupou, rovnoběžně podél nonia pošinovatelnou. Mimo to jest na sáňkách jemný teploměr dělený od 0° do 50°, ke stálé kontrole teploty.

Důležitou částí jsou oba pozorovací mikroskopy; jimi se pozoruje dělení na měřítkách, jež se mají zkoumati. Tato měřítka kladou se na zvláštní podélný stolek, který se postaví na stativ celého stroje a který lze na jedné straně šroubem jemně zvedati a snižovati; tím se docílí toho, že měřítko srovnávané, jež se na tento stůl vhodně upevní, lze zaříditi tak, aby odlehlost dílců od objektivu drobnohledu při pošinování tohoto zůstávala co možná konstantní. Drobnohled, jednou na některý dílec tohoto měřítka zařízený, zůstává pak zařízeným pro měřítko celé. Poněvadž zvětšení obou mikroskopů jest jen mírné, zvětšujíť asi 30krát, provede se tato předběžná orientace měřítka zkoumaného dosti rychle a snadně. Práce se ostatně usnadní libellou. Zařídí se vodorovně nejprve komparator pro sebe, t. j. jeho měřítko, a pak stolek, t. j. měřítko srovnávané pro sebe; tím jsou pak vespolek rovnoběžné. Libella vhodné úpravy a citlivosti (obr. 3., přední) jest ke stroji připojena. Mikroskopy, jež ovšem lze níže a výše stavěti, zařizují se obyčejně svisle; jest však možno, kdyby toho za účelem jiného uspořádání bylo třeba, je též v kolenovitém ohbí v rovině na měřítko kolmé otáčeti.

Důmyslné jest zařízení okulárů v mikroskopech. Zde jest totiž jemný nitkový kříž, ale nikoli pevný, nýbrž na rámečku pošinovatelný v rovině k ose mikroskopu kolmé. Pošinování děje se pomocí matice šroubové mikrometrickým šroubem v pevných ložiskách otáčivém v podobné úpravě v malém, jako u dělicího stroje ve velkém. Také tento šroub má deštičku dělenou na obvodě na 100 dílů, jež lze proti pevnému indexu odčítati. Poněvadž výška otočky



Obr. 20.

mikrometrického šroubu činí $\frac{1}{10}$ *mm*, lze tímto způsobem odečísti ještě přímo $\frac{1}{1000}$ *mm*, t. j. 1 μ, a odhadem ještě $\frac{1}{10}\mu$. Zařízení toto slove okulární mikrometr; užívá se ho k účelům na př. astronomickým též u dalekohledů s největším úspěchem. Aby bylo lze počet celých otoček mikrometrického šroubu v okuláru rychle odečísti, jest v rovině nitkového kříže upevněna stupnice ozubená, v níž deset zubů odpovídá délce 1 *mm*, jeden pak zub $\frac{1}{10}$ *mm*, t. j. jednomu otočení mikrometrického šroubu.

Po tomto předběžném popisu jest již jasno, jak se komparatoru užívá.

Když se srovnávají měřítka téže délky, na př. normální metrové étalony, vespolek, položí se na stolek nejprve jedno, a na jeho konečné čáry zařídí se oba nitkové kříže mikroskopu. Pak se položí na totéž místo měřítko druhé. Pošinutím nitkových křížů na jedné i druhé straně tak, aby nitkové kříže opět padly přesně na konečné čáry, lze *rozdíl* délek obou měřítek až na $\frac{1}{10}\mu$ odečísti. Měřítka stroje samého se při tom neužívá. Jedná-li se však o měření jisté jakékoliv délky, pak se odměří na tomto právě měřítku pošinováním jednoho z obou mikroskopů, při čemž se odčítá na noniu; tím se celá délka stanoví přesně asi na $\frac{1}{50}$ *mm*. Ovšem lze užívati také obou mikroskopů, když se odlehlost okulárních nitkových křížů jednou pro vždy pro jich polohy nullové přesně, normálním měřítkem, určí, a s údaji měřítka na komparatoru samém srovná.

Při pracích takových dlužno dbáti vlivu teploty a uvésti tento v počet. Jalový chod mikrometrického šroubu v okuláru mikroskopu učiní se neškodným, když se při definitivním zařízení nitkového kříže šroubuje vždy vpřed.

Komparatory takové, jaký obr. 19. ukazuje, ale rozměrů větších (zejména co se týče mikroskopů), mají ústavy metronomické, jako jest bureau international, aneb ústavy normální cejchovní kommisse jednotlivých států kulturních. K práci jsou vyhrazeny zvláštní síně s teplotou co možná konstantní.

§ 34. **Kathetometr.**

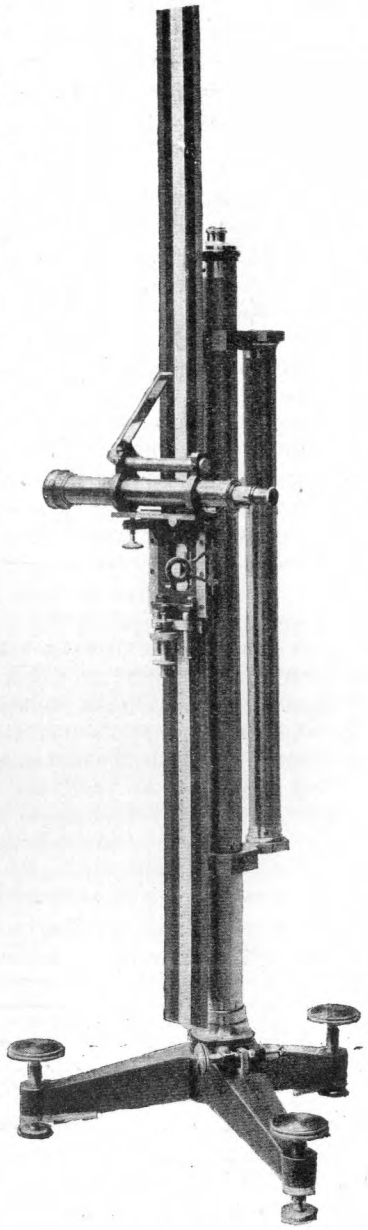
Co jest komparator pro měření ve směru vodorovném v blízkosti, to jest kathetometr *) pro měření ve směru svislém v dálce. Proto jest úprava kathetometru analogická s úpravou komparatoru; kathetometr jest jako komparator svisle postavený. Místo odčítacích drobnohledů zaujmou odčítací dalekohledy. Tyto lze rovněž hrubě i jemně pošinovati na sáňkách po massivním hranolu, na němž jest měřítko, jako u komparatoru. Rozdíl jest však v tom, že massivní tento hranol není pevným, nýbrž otáčivým kolem svislé osy, s níž jest rovnoběžně postaven.

Jedná se totiž u kathetometru o stanovení vertikálních odlehlostí nejen v téže vertikální rovině, nýbrž v rovinách různých, jasněji řečeno, v různých azimutech; musí tudíž býti umožněno dalekohled i s měřítkem pootočiti. Proto jest obyčejně hmota hranolu s oběma dalekohledy vyvážena hmotou válcového podlouhlého závaží, obě pak hmoty jsou na opačných stranách upevněny na dutém válci, který jest otáčivým kolem osy vertikální, zařízené na massivním, stavěcími šrouby opatřeném stativu, na němž celý stroj jest montován.

Jinak bývá způsob provedení kathetometrů dosti rozmanitý. Také se užívá dvou dalekohledů jen u takových kathetometrů, jimiž se mají studovati *změny* vertikálních odlehlostí dvou indexů; pro účely obyčejné postačí dalekohled jen jediný.

Příklad kathetometru (Jos. a Jan Frič) podává obr. 21.; k němu se vztahují některá data následujícího popisu, který jen v hlavních rysech podáváme.

Pozorovací dalekohled jest astronomický zvětšení mírného, s nitkovým křížem. Na dalekohled klade se libella; jest s výhodou, je-li při ní lehké zrcátko, které se dá nad libellu do vhodného sklonu zaříditi, aby pozorovatel, zíraje do dalekohledu, mohl (je-li osvětlení příznivo) malým pohnutím oka již kontrolovati též stav libelly. Sáňky, jimiž se dalekohled pošinuje, jsou dvojdílné. Šroubem fixačním se upevní díl dolejší, zatím co díl hořejší,



Obr. 21.

*) *κάθετος* adj. od *κατὰ* (dolů) a *ἵημι* (posílám) tedy spuštěný, odtud subst. *ἡ κάθετος* svislá přímka, též svislá rovina.

který nese dalekohled, se může ještě šroubem jemně vpřed neb zpět pošinouti. Jest velmi výhodné, zejména pro měření malých výškových rozdílů, když tento šroub korrekční jest zároveň mikrometrickým, podobné úpravy, jako v okuláru mikrometrickém, aby se díly jedné otočky přesně na $\frac{1}{100}$ stanovily; je-li výška šroubová na př. $\frac{1}{2}$ *mm*, lze odečtením setiny a odhadnutím i tisíciny millimetru stanoviti, ač skutečná přesnost ani takových měření differenčních do těchto krajností nejde.

Kathetometr vyžaduje před každým měřením jisté předběžné úpravy (adjustování). Tato jest určena podmínkami, jež lze stručně shrnouti ve dvě věty:

1. horizontálně visirovati,
2. vertikálně odčítati.

Podmínka prvá vyžaduje, aby optická osa pozorovacího dalekohledu byla horizontální. Poněvadž však jen geometrickou osu můžeme nivellovati, vede podmínka ta především k tomu, aby osa optická dalekohledu splývala s jeho osou geometrickou a aby pak tato osa libellou se zařídila vodorovně. Dalekohled má tedy spočívati v kongruentních polokruhových vidlicích, do nichž se klade a v nichž se může kolem své osy geometrické otáčeti. Když při tomto otáčení průsek nitkového kříže dalekohledu stále na témže bodu zobrazeného nějakého předmětu utkví, splývá osa optická s geometrickou; jinak nutno průsek nitkového kříže pošinouti. Proto má nitkový kříž býti ve dvou na sobě kolmých směrech poněkud pošinovatelný. Nivellování dalekohledu provede se pak jednoduše; libellu dlužno při tom, třeba-li, zároveň rektifikovati.

Podmínka druhá vede především k tomu, aby osa kathetometru byla vertikální. Jest výhodno, když na vhodném místě stativu jest k předběžné hrubší orientaci upevněna libella kulatá. Definitivní orientace provádí se libellou u dalekohledu, a lze věc tak zařídíti, že se nivellováním současně i osa stroje staví vertikálně i dalekohled horizontálně.

Konečně musí měřítko býti také vertikálné; jinak dopadne měření vždy poněkud větší. Plné jistoty o tom lze nabýti nejlépe, když se odečtení na měřítku srovnává s odečtením vertikálně postaveného nebo zavěšeného nějakého měřítka normálního, na který dalekohledem visirujeme. Tím se také kontroluje měřítko na kathetometru. Malá odchylka směru měřítka od vertikálnosti má ostatně vliv nepatrný, jak snadnou úvahou poznáme.

Kritická úvaha o přesnosti měření, kteréž lze kathetometrem dosáhnouti, vede k výsledkům dosti nepříznivým. Záleží především na tom, aby směr visirovací se neměnil. Kdyby se dalekohled sklonil o malinký úhel ε, činila by chyba v odečtení pro dálku L patrně $L\,tg\,\varepsilon$.

Pro $L = 1\,m$ a $\varepsilon = 1''$ obdržíme

$$L\,tg\,\varepsilon = 0{\cdot}0048\,mm,$$

poněvadž jest

$$tg\,1'' = 0{\cdot}00000485.$$

Kdyby se tedy na př. pozorovalo ve vzdálenosti $L = 2\,m$, což není vzdálenost značná, a kdyby se měla zaručiti $0{\cdot}1\,mm$, nesměla by chyba dosáhnouti $0{\cdot}05\,mm$, t. j. úhel ε by nesměl býti větší než asi 5 sekund. Z toho jest patrno, že by libella u dalekohledu musila býti velmi citlivou, aby tento úhel již znatelným pošinutím bubliny, na př. o jeden dílec udávala. Citlivé libelly lze konečně snadno pořídíti; ale pak musí s touto velkou citlivostí býti vše ostatní v souhlasu. Zejména postavení celého stroje musí

býti *velmi pevné*. Není-li tomu tak, pak jest přímo trapné, libellou té citlivosti pracovati, poněvadž každé pohnutí pozorovatele, každý dotek stroje rukou způsobuje změnu stavu libelly. Zejména také zvedání dalekohledu. Proto jest dobře, když dalekohled sám jest zvlášť vyvážen závažím, zavěšeným na dobrém hedvábném provazci, který se vede přes kladku nad osou stroje upevněnou. Pošinování dalekohledu děje se pak velmi jemně a fixační šroub nemá držeti celou váhu dalekohledu, nýbrž jen zvýšiti tření a zabrániti nahodilému pohybu.

Konečně způsobují se změny ve stavu libelly nepravidelnostmi ve vedení sáněk. Není možno plochy tak přesně rovinně brousiti, aby v každé poloze sáněk dalekohled zaujal naprosto týž směr. Pak jest nutno pokaždé dle libelly dalekohled korrigovati. Ale jen tehdy nevzniká tím chyba, když dalekohled při tomto korrigování se otáčí kolem osy, *která se nalézá svisle nad nullovým bodem nonia*. Není-li tomu tak, pak se vzdálenost osy dalekohledu od tohoto bodu skláněním mění. Tohoto požadavku mnozí hotovitelé nešetří.

Z celého jest viděti, že kathetometr náleží ke strojům velice choulostivým a že přesnosti $0{\cdot}1\,mm$ lze dosáhnouti jen opatrností a kritičností velikou. Příčinou toho jest, že stupnici *blízkou* promítáme jako by *na dálku*. Proto jest výhodnější při měření postaviti nějaký étalon normální svisle na ta místa, jichž vertikální odlehlost hledáme, a používati horizontálního dalekohledu pošinovatelného podobně jako u kathetometru jenom k odčítání.

Kathetometr sestrojili *Dulong* a *Petit*, když pozorovali absolutní roztažnost rtuti. Mnohá pozorování činil kathetometrem *Regnault*. Novější konstrukce (Fuess, Berlín) přihlížejí k tomu, aby při visirování dalekohledem byla zároveň viditelnou stupnice kathetometru sama. Proto jest tato stupnice průhlednou, jsouc nanesena na proužku skleněném, který je upevněn na sloupu stranou. Rámeček, v němž je dalekohled umístěn, jakož i dalekohled sám jest prořiznut tak, aby stupnice přišla do zorného pole okuláru a aby dělení bylo současně viditelno s nitkovým křížem. Místo nitkového kříže béře se výhodněji okulární mikrometr, který je zároveň noniem k hlavní stupnici. Pozorovatel, zíraje dalekohledem na předmět, může pak současně postavení dalekohledu a jemné změny při jeho pošinování pohodlně pozorovati a odečítati.

Měření plochy.

§ 35. **Stanovení jednotek plošných.**

Soustava metrická stanoví za jednotku plochy čtverec, jehož stranou jest jednotka délky. Nazveme-li tuto všeobecně L, (longitudo, délka), stanovíme onu plochu výrazem L . L čili L^2. Poslední označení jest pro jednotky plošné nejvhodnější. Píšeme tudíž:

m	dm	cm	mm
m^2	dm^2	cm^2	mm^2

pro metr a jeho dekadické díly, a podobně

$$m \quad dkm \quad hm \quad km \quad mym$$
$$m^2 \quad dkm^2 \quad hm^2 \quad km^2 \quad mym^2$$

pro metr a jeho dekadické násobky.

Označení v Německu zavedené užívá písmena q (quadratum = čtverec), které se připojuje k jednotce délkové L ve způsobu qL. Píše se tedy na př. *qm*, *qmm*, *qkm* atd. Označení toto jest méně šťastné. Jiné starší, kdy se psalo na př. □ *m*, □ *cm* atd., nyní již vymizelo.

Jakožto jednotky zvláštní obdržely svá jména *) a své označení plochy

$$m^2 = \text{centiare} \ldots ca,$$
$$dkm^2 = \text{ar} \ldots a,$$
$$hm^2 = \text{hektar} \ldots ha.$$

jest tedy

$$ca = \tfrac{1}{100}\, a,$$
$$a = 100\, m^2,$$
$$ha = 100\, a.$$

Měření plochy bývá v měrné fysice dosti důležitým, jako na př. k určení plošného obsahu různých diagrammů, křivek hysteretických a j. Nejjednodušeji stanoví se plochy takové vážením, jinak planimetry, integrafy a j.

Budiž vzpomenuto též staré jednotky plošné, pro rozlohu polností, kteréž dosud dosti mnoho se užívá.

Jitro = 1600 čtv. sáhů = (40 sáhů)²

$$= 0{\cdot}5756\ ha.$$

Sáhy jsou zde míněny rakouské, při čemž bylo

$$1 \text{ sáh} = 1{\cdot}8965\ m.$$

Pole o jednom jitru mělo výsevu 2 korce čili 3 měřice obilí. Dle toho říkalo se též, že má někdo 50 korců polí nebo 75 měřic, což jest totéž jako 25 jiter.

Měření objemu.

§ 36. Stanovení jednotek objemových.

Za jednotku objemu stanoví soustava metrická krychli, jejížto stranou jest jednotka délková. Podržíme-li pro tuto označení L, určíme onu krychli výrazem L . L . L čili L^3. Označení toto jest pro

*) Slovo ar, francouzsky are, kteréž jest internacionální, bylo přijato z latinského slova area = plocha.

jednotky objemové nejvhodnější. Píšeme tedy:

$$m \quad dm \quad cm \quad mm$$
$$m^3 \quad dm^3 \quad cm^3 \quad mm^3$$

pro metr a jeho dekadické díly, a podobně

$$m \quad dkm \quad hm \quad km \quad mym$$
$$m^3 \quad dkm^3 \quad hm^3 \quad km^3 \quad mym^3$$

pro metr a jeho dekadické násobky. Některých se ovšem málo užívá, na př. dkm^3, hm^3 a mym^3.

Německé označení užívá, podobně jako u plošných jednotek, písmena c (cubus, krychle) neb kde třeba *cb*, kteréž se připojuje k jednotce délkové L ve způsobu cL. Píše se tedy na př. *cbm*, *ccm* a pod. Označení tato zavedena byla dle usnesení rady spolkové ze dne $^8/_{10}$ 1877, »Reichsanzeiger« 1877 N° 276; jsou však méně vhodná, (již proto, poněvadž *c* značí centi-) a ustoupí snad v budoucnosti oněm vhodnějším, jichž se jinak užívá všeobecně.

Násobky a díly délkové postupují dle čísla 10, násobky a díly jim odpovídající objemové dle čísla $10^3 = 1000$; podle toho jest ovšem skok na př. od jednotky dm^3 k jednotce cm^3 v objemu dosti značný. Okolnost tato byla podnětem zavésti také pro objem jednotku zvláštní s označením vlastním, od níž by se pak mohly samostatně činiti násobky a díly dekadické. Za takovouto jednotku zvolen objem dm^3 a zaveden jakožto litr *) s označením *l*. Díly nejčastěji užívané jsou

$$\text{decilitr} = \tfrac{1}{10}\, l \ldots dl,$$
$$\text{centilitr} = \tfrac{1}{100}\, l \ldots cl,$$
$$\text{millilitr} = \tfrac{1}{1000}\, l \ldots ml.$$

Poslední jednotka, *ml*, souhlasí pak s jednotkou cm^3. Dle toho jsou do intervallu dm^3 a cm^3 vloženy dvě jednotky, totiž *dl* a *cl*; poslední se užívá méně často. Z násobků litru jest užíván jenom

$$\text{hektolitr} = 100\, l \ldots hl.$$

Dle tohoto výkladu měla tudíž mezi kubickým decimetrem na jedné a mezi litrem na druhé straně býti identita. Avšak věc rozvinula se během doby jinak. Stanovení objemu děje se totiž buď měřením nebo vážením. Vážení vede k výsledkům přesnějším; při něm uží-

*) Z řeckého λίτρα, ἡ; slovo znamená totéž jako latinské libra, a bylo ho užíváno jednak k označení určité jednotky mincovní, jednak k označení určité váhy (jako naše libra). Slovo poukazuje tudíž na to, že zavedená jednotka objemová odpovídá při vodě určité jednotce váhy resp. hmoty.

váme za jednotku váhu jednotky hmotné, kilogrammu. Tím se měření objemu opírá o tuto jednotku hmoty, a litr, jakožto jednotka objemová, výhradně při methodě vážení užívaná, činí se závislou na kilogrammu. Vzhledem k tomu nutno při měřeních nejpřesnějších z důvodů zásadních činiti rozdíl mezi dm^3 a l, jak o tom níže, ve spojení s výkladem o kilogrammu, obšírněji pojednáme.

Jednotka objemová kubický metr obdržela jméno *stère* *), (decistère, dekastère), hlavně určené pro vyměřování dříví; avšak jméno málo zobecnělo, a označení kubický metr jest běžnější. Při tom se v lesnictví činívá rozdíl mezi kubickým metrem (neb zkrátka metrem) plným (pevným) a prostorovým. Tento platí pro dříví narovnané, tedy polenové, otýpkové, pařezové a pod., kde se počítá objem dříví i s mezerami, onen pak pro stromy, klády a pod. Obyčejně bývá (kubický) metr prostorový asi 0·6 až 0·8 plného.

Stará jednotka objemová pro odměřování obilí byl *korec*, jenž měl 4 věrtele a 16 čtvrtcí. Vztah k hektolitru určuje rovnice

$$\text{korec} = 0{\cdot}936\ hl.$$

§ 37. **Určování objemu.**

Ke stanovení objemu kapalin, — a na základě neprostupnosti eventuálně i objemu těles tuhých — slouží nádoby kalibrované, jako baňky, mensury, byretty, pipetty a pod. U byrett a pipett jest dělení míněno tak, aby objem *vyteklé* (lnoucí) kapaliny byl určitý. Výhodou pipett jest malý průřez, proto přesnější odečtení; byretty mají oproti tomu v užívání větší rozsah. Mensury válcovité jsou pohodlné všude tam, kde se nejedná o značnější přesnost měření. Jiné přístroje k měření objemu zejména látek sypkých, na př. solí, neb látek tuhých ale porovitých, na př. korku, neb látek, jež se nesmějí do kapalin vnořiti, na př. střelného prachu, zovou se *objemoměry* (volumometry, stereometry) a zakládají se na zákoně Boyle-Mariottově o plynech; proto pojednáme o nich v souvislosti s tímto zákonem.

Zřídka kdy lze objem stanoviti přímo, vyměřením; jen u těles geometricky pravidelných. Mezi těmi vyniká válec, jakožto těleso, kteréž mechanicky nejpřesněji (na soustruhu) lze vyhotoviti. Jinak nutno stanoviti objem nepřímo, t. j. vypočítati objem na základě vážení. Objem se vyplní kapalinou a určí se její váha netto, resp.

*) od řeckého στερεός pevný, tuhý.

její hmota, ovšem se zřetelem k příslušným korrekcím, jež vznikají zejména vážením ve vzduchu a teplotou. Při tom jest jednostejno, zdali ono vyplnění objemu se děje přímo, jako u nádob kalibrovaných, jež se tím kontrolují, nebo nepřímo, vytlačením kapaliny a užitím zákona Archimedova, jako u těles tuhých; kapalinou bývá v posledním případě zpravidla voda, v prvnějším buď voda nebo rtuť. Vodu lze snáze zjednati čistou, její přilnavost k tělesům pevným napomáhá vyplniti objem dokonale; u rtuti napomáhá zase velká hmota specifická přesnosti při přepočítání vážení na objem. Kalibrování k účelům technickým děje se ostatně zpravidla odměřeným množstvím rtuti.

Četné a zajímavé podrobnosti, hledící k otázkám, o nichž v tomto oddílu jednáno, obsahuje Geodesie nižší, kterou sepsal Frant. Müller, I. díl (1887—1894); rovněž Technický průvodce, jejž sestavili F. Červený a V. Řehořovský (1896 a 1899), kde jsou (pag. 62) uvedena četná data číselná; konečně též Mechanika, kterouž sepsali K. V. Zenger a F. F. Čecháč (1883), kde se obšírněji jedná zejména o mírách národů starých, o mírách staročeských, o dělicích strojích délkových i úhlových a o mnohých fysikálních i astronomických strojích měřicích.

II.

O času.

§ 38. Úvahy předběžné.

Podobně, jako názor prostorový, pokládáme ve fysice i názor časový za původní a to vnitřní formu našeho poznávání; tím přijímáme pojem času za pojem základní, přestávajíce na tom, že čas omezený, doba, jest veličinou, kterou lze měřiti a tím vyjádřiti číslem. Jednotky, k měření tomu potřebné, jež by byla čistě časovou, nemáme. Děje ryze časové, jako naše cítění, myšlení, představování, mohou sice sloužiti k odhadování času, nikoli však ku přesnému jeho měření. Za tou příčinou zakládáme měření času na pozorování prostorovém, totiž na pohybu, kterýž se děje i v čase i v prostoru, a volíme k tomu pohyb naší země.

Úhrnný pohyb tento jest velmi složitý. Rozkládáme-li jej, možno v něm rozeznávati desatero pohybů jednotlivých, z nichž však vynikají hlavně tři: otáčení se země kolem určité osy, *rotace*; obíhání země kolem slunce, *revoluce*; a konečně postupování v prostoru světovém zároveň se sluncem a celou sluneční soustavou, *translace*. Tento poslední pohyb směřuje k určitému bodu na obloze nebeské, jenž se označuje jako *vrchol* (apex) soustavy sluneční. Následkem pohybu tohoto země naše opisujíc velkolepé spirály v prostoru světovém, nevrací se nikdy do polohy, kterouž některé doby zaujímala; pravíme-li často, že jest země za rok na témž místě, kde byla před rokem, míníme tím jenom polohu její vzhledem k ekliptice, t. j. k rovině, středem slunce položené, v níž střed země kolem slunce obíhá. V tomto smyslu myslíme si tuto rovinu jakoby pevně se sluncem spojenou a nevšímáme si toho, že zároveň se sluncem v prostoru světovém postupuje. Vztahujeme tedy polohu země jen na slunce, jeho vlastního pohybu nedbajíce. Pak zbývají čelnější pohyby země naší jenom dva: rotace a revoluce.

Pro vrchol (apex) soustavy sluneční nalezli v novější době polohu (v rektascensi a deklinaci), jak následuje (dle Annuaire, pag. 223, 1908).

	AR	*D*
M. L. Struve (1888)	$266^{\circ}7$	$+ 31^{\circ}0$
M. L. Boss (1889)	280	+ 40
M. Newcomb (1899)	277·5	+ 35

Kdybychom přijali hodnoty poslední, jež jsou téměř průměrem obou předcházejících, vycházelo by, že vrchol jest v souhvězdí lyry a že jest dosti blízký hvězdě *Vega* (α lyrae). Její poloha jest totiž

Vega	278·5	38·7

Dle toho naznačuje tato krásná hvězda (první velikosti) místo, ke kterému (za dnů našich) ve svém pohybu postupném směřuje slunce a celá sluneční soustava.

O skutečných pohybech země my, kteří jsme na povrchu jejím, ničeho neznamenáme; naopak, nám se zdá, jako by země naše byla nehybným, pevným základem, a jako by se kolem nás celá obloha nebeská otáčela (následkem rotace) a jako by mimo to slunce na nebi v určité dráze postupovalo (následkem revoluce). Jedná-li se o pohyb, (kterýž ve skutečnosti vždy jest relativním), můžeme tyto pohyby zdánlivé substituovati na místě pohybů skutečných. Vskutku jest také celý způsob, jak se vyjádřujeme, založen na tomto zdání, nikoli na skutečnosti, (»východ« slunce, »západ« slunce atd.), což jest přirozeno, uvážíme-li, jak dlouho se pokládalo za skutečnost, o čem se nyní ví, že jest jen zdáním. Také základní pojmy a definice astronomické založeny jsou na pohybu, jak se nám býti zdá; ovšem není nesnadno přenésti je pak na pohyb, jak skutečně jest.

§ 39. Vzájemná velikost a odlehlost slunce, oběžnic a stálic.

Pravili jsme, že dlouhý čas za skutečné platily pohyby, o nichž nyní víme, že jsou zdánlivé. Pokud se týče rotace, pronikalo poměrně záhy přesvědčení, že neotáčí se kolem nás celá obloha nebeská se všemi hvězdami zcela současně, nýbrž že ve smyslu opačném otáčí se země naše sama. Avšak jinak tomu bylo pokud se týče revoluce. Ještě *Tyge Brahe* (1546 až 1601), slavný pozorovatel astronomický, nechtěl uznati výklad, kterýž podal *Mikuláš Koperník* (1473—1543), že země kolem slunce obíhá a nikoli naopak, jak dotud bylo za správné pokládáno; a nečinil to z nedostatku vnímavosti pro myšlenky nové, sotva také z důvodů theologických, nýbrž z důvodů věcných, astronomických; a důvody tyto vážil ze vzájemného seskupení stálic. Vskutku nebylo lze — tehdá — pozorováním

zjistiti, že by průběhem roku, po který revoluce země trvá, sebe menší změny v tomto seskupení nastávaly, ačkoli země naše po půl roce přichází do polohy o 300 millionů kilometrů od dřívější odlehlé. V astronomii zove se úhel, o který změnou pozorovací stanice se změní směr k nějaké hvězdě, *parallaxa* *) hvězdy. Odmítavé důvody Tychonovy měly tedy, jak krátce pravíme, základ v nedostatku všeliké *roční parallaxy* stálic. Nyní ovšem víme, že roční parallaxa stálic jenom proto nemohla tehdejšími prostředky pozorovacími býti zjištěna, poněvadž jest velice malá.

Aby v těchto otázkách zavládla jasnost, jest velice prospěšno, učiniti si o všech rozměrech, o nichž v oddílu tomto bude nám jednati, zmenšený obraz, podobně jako kreslíme mapy dílů světa, chtějíce přehlédnouti jich rozlohu.

V tabulce následující **) sestaveny jsou přehledně jednak základní rozměry (aequatoreální průměr) slunce a oběžnic, jednak vzdálenosti oběžnic od slunce.

Jméno a značka	Průměr aequatoreální		Poloosa dráhy	Vzdálenost od slunce největší	Vzdálenost od slunce nejmenší
	rel.	$10^3\ km$	rel.	$10^6\ km$	$10^6\ km$
Slunce ☉	108·558	1384·8			
Mercur ☿	0·373	4·76	0·3871	69·4	45·6
Venus ♀	0·999	12·74	0·7233	108·3	106·7
Tellus ♁	1	12·76	1	152·0	147·0
Mars ♂	0·528	6·73	1·5237	247·6	205·4
Juppiter ♃	11·061	141·1	5·2028	810·6	735·9
Saturn ♄	9·299	118·6	9·5389	1497·3	1338·3
Uran ♅	4·234	54·0	19·1833	2983·5	2719·2
Neptun ♆	3·798	48·4	30·0551	4505·5	4429·6

Chtějíce dle těchto čísel znázorniti především *vzájemnou velikost* slunce a oběžnic, volme měřítko 1 : 10^{10}. Rychlost světla v tomto měřítku činí 3 *cm/sec*. Kruh průměru 13·85 *cm*, znázorňující slunce, vešel by se právě asi na stránku této knihy; kruh pro Juppitera měl by průměr 1·41 *cm*, pro zemi naši jen 0·13 *cm*. Kdybychom však v tomto měřítku, ve kterém se slunce jeví jako malý ballonek, Juppiter jako lískový oříšek a země jako

*) Jméno toto, jehož se také ve fysice často užívá, pochází z řeckého *παρ-άλλαξις ἡ* záměna, též úchylka, *παρ-αλλάσσω* měniti.

**) Data astronomická vypsána jsou z Annuaire publié par le bureau des longitudes 1908. Čísla kolumny prvé a tudíž i druhé se udávají jinde různě. Srovn. na př. kalendář c. k. hvězdárny Vídeňské, 1908.

zrnko písečné, postavili toto slunce do středu náměstí Starého Města Pražského a k němu oběžnice dle poměrné jich odlehlosti správně *rozestavili*, ukazuje tabulka, že by prostora náměstí stačila pro dráhy Merkura, Venuše, Země a Marsa; oběžnice ostatní by přišly do kruhů větších, Neptun ve velikosti hrášku asi ku Prašné bráně; k umístění celé té miniaturní soustavy sluneční vyžadovalo by se tedy celé rozlohy Starého Města Pražského.

Kdyby se zvolilo měřítko ještě 100-kráte menší, tedy 1 : 10^{12}, mohla by se taková miniaturní soustava sluneční umístiti v sále, jehož délka a šířka by byla aspoň 10 metrů. Avšak tímto dalším zmenšením stalo by se slunce, v průměru 1·4 *mm*, asi tak velikým jako jest hlavička špendlíková; oběžnice pak bylo by lze viděti jen mikroskopem. Kdybychom však v tomto zmenšení 1 : 10^{12}, ve kterém rychlost světla jest dána číslem 0·3 *mm/sec*, měli umístiti *nejbližší* nám stálici, musili bychom jíti do dálky větší než 40 kilometrů.

Z úvah těchto vysvítá: *Rozměry slunce i planet mizí proti odlehlostem planetárním, tyto však zase mizí proti odlehlostem stellárním.*

Aby se pro tyto ohromné vzdálenosti stellární obdržela přehledná čísla, užívá se pro ně v astronomii zvláštních jednotek délkových. Takovou jest na př. millionkráte zvětšená velká poloosa *a* dráhy zemské. Přijme-li se za aequatoreální parallaxu slunce, (t. j. za úhel, ve kterém se jeví aequatoreální poloměr země ze středu slunce, při střední vzdálenosti země od slunce), hodnota 8·80″ (jak ji přijala Conférence internationale des étoiles fondamentales v Paříži 1896), vychází pro tuto střední vzdálenost čili poloosu *a* dráhy zemské hodnota

$$a = 23439{\cdot}2\, R_0,$$

kdež značí R_0 aequatoreální poloměr naší země. Přijmeme-li pro tento hodnotu, jak ji nalezl *A. Clarke*,

$$R_0 = 6378{\cdot}3\ km,$$

obdržíme

$$a = 149\ 501\ 000\ km.$$

Tuto hodnotu přijímá Annuaire 1908, pag. 221. Volíme-li pro R_0 hodnotu, jak ji určil *Bessel*

$$R_0 = 6377{\cdot}4,$$

obdržíme

$$a = 149\ 480\ 000\ km$$

hodnotu, kterou uvádí na př. kalendář hvězdárny Vídeňské 1908, pag. 95. Ještě častěji užívá se jednotky zvané *rok světelný*; jest to délka, kterou světlo, s rychlostí 300 000 *km/sec* se šířící, proběhne za 1 (Julianský) rok, t. j. délka

$$300\ 000 \,.\, 365\tfrac{1}{4} \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60 = 9{\cdot}5 \text{ billionů kilometrů.}$$

Následující tabulka udává roční parallaxu a z té vypočtenou odlehlost některých nejznámějších hvězd od země naší, a to jednak v millionkrát

zvětšené velké poloose a dráhy zemské, jednak v billionech kilometrů, konečně v letech světelných T.

Hvězda	Parallaxa	Vzdálenost od země		
	$''$	$10^6 . a$	$10^{12} . km$	T
α Centauri	0·72	0·29	43	4·5
Sirius	0·37	0·56	83	8·8
Procyon	0·27	0·76	113	12·1
α Aurigae	0·21	0·98	146	15·5
α Aquilae	0·20	1·03	153	16·3
α Tauri	0·15	1·38	204	21·7
Vega	0·15	1·38	204	21·7
α Ursae minoris	0·07	2·95	438	46·5

V tabulce této uvedeny některé z těch hvězd, jichž roční parallaxu bylo lze určiti. Daleko větší množství jest však těch, jichž parallaxa jest tak malá, že ji vůbec určiti nelze. Odlehlost hvězd takových, odlehlost hvězd dráhy mléčné, mlhovin, jde do set a do tisíců světelných roků. Z toho však jest patrno, že pohled na oblohu nebeskou neskýtá pozorovateli *obraz přítomnosti,* nýbrž *obraz minulosti,* a to zase nikoli *současné,* nýbrž *postupné* *). Mlhoviny, jak je vidíme dnes, *byly* před mnohými a mnohými tisíci lety; »jich bledá zář jest důkazem o pradávné jsoucnosti světla a hmoty.« (A. Humboldt.)

§ 40. **Základní pojmy a definice astronomické.**

Úvahy předcházející měly za účel objasniti, proč revoluce naší země nepřivádí pražádných patrných změn ve vzájemném seskupení stálic. Poznání toto jest velmi důležité, aby se jasně vystihly

*) »Stárnoucí lidstvo čte ve hvězdách,
jak dědeček ve kronice,
vždyť čteme tam samou jen minulost,
co bylo, co není snad více.

Čeho my ještě se dožili!
ba na stará kolena divy:
nám minulé vidět lze přítomně
a mrtvé zřít jakoby živy.«

J. Neruda, Kosmické písně.

jisté základní pojmy a definice astronomické a zvláště aby se porozumělo tomu, proč tyto mohly býti založeny na *zdánlivých* pohybech těles nebeských.

Astronomie stanoví následující základní směry (obr. 22.).

1. *Osa světová*, přímka, středem zemským procházející, kolem níž se zdánlivě obloha nebeská otáčí *).

2. *Přímka svislá*, jdoucí v bodu pozorovacím na povrchu země směrem, v jakém působí tíže zemská, t. j. středem země **).

Osa světová protíná oblohu nebeskou v bodech, jež *poly* ***) čili *točny* zoveme: *pol severní N*, *pol jižní S*.

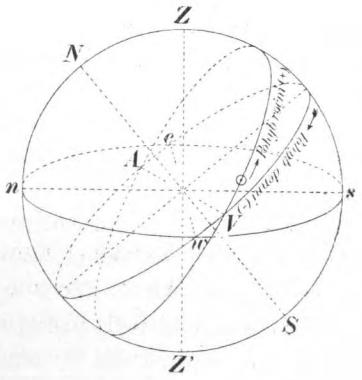
Přímka svislá protíná oblohu nebeskou v bodech, jež zovou se *zenit* (nadhlavník) Z a *nadir* (podnožník) Z'.

Uvedenými dvěma směry jsou určeny tři roviny:

3. Rovina položená osou světovou a přímkou svislou jest *poledník* čili *meridian*.

4. Rovina položená středem země kolmo na osu světovou jest *rovník* čili *aequator*.

5. Rovina položená středem země kolmo na přímku svislou jest *obzor* čili *horizont*.



Obr. 22.

Činívá se někdy rozdíl mezi tímto obzorem pravým a jiným zdánlivým, který jest rovnoběžný s oním, ale prochází bodem pozorovacím na povrchu země. Poněvadž však, jak dříve vylíčeno, rozměry země v prostoru světovém úplně mizí, splývají obě tyto roviny jako by v jedinou.

Jmenované tři základní roviny astronomické, poledník, rovník a obzor, protínají nebeskou kouli v největších kruzích, kterýmž se táž jména dávají jako rovinám samým.

Poledník protíná obzor v přímce, kteráž směřuje k astronomickému bodu severnímu n a jižnímu s; přímka na tuto kolmá

*) O malých pohybech této osy zemské pojednal *V. Špaček* v Časop. pro pěst. math. a fys. 36., pag. 55, 1907.

**) O nepatrné odchylce tohoto směru od středu země jedná se později.

***) *πόλος*, ὁ od *πέλομαι* pohybovati se.

a středem země jdoucí směřuje k astronomickému východu *e* a západu *w* *).

Následkem zdánlivého otáčení se oblohy nebeské kolem osy světové vycházejí hvězdy na straně východní nad obzor, vystupují výš a výše, až dostoupí polohy nejvyšší v okamžiku *vrcholení* čili *kulminace* v meridianu; na to zase sestupují níž a níže až zapadnou na straně západní. Některé hvězdy zůstávají stále nad obzorem, — hvězdy *cirkumpolární* (koltočňové) — a u těch můžeme pozorovati dvojí vstup do poledníka, dvojí kulminaci, tak zvanou vyšší a nižší, anebo horní a dolní; u hvězd ostatních děje se kulminace nižší pod obzorem. Při zdánlivém tomto pohybu opisují hvězdy kruhy s rovníkem rovnoběžné.

Počet hvězd cirkumpolárních stoupá, když na zemi naší od rovníku postupujeme k polu severnímu nebo jižnímu. Na polu samém jsou všechny hvězdy cirkumpolární; kulminace hořejší a dolejší odpadá, výška hvězd nad obzorem se nemění.

§ 41. Čas hvězdný.

Zdánlivým otáčením se oblohy nebeské kolem osy světové, jak právě bylo vylíčeno, kteréž se děje s naprostou rovnoměrností, určen jest čas, kterýž zoveme *časem hvězdným, tempus siderale.*

Mysleme si totiž určitý bod na obloze nebeské, na př. v rovníku, což jest nejjednodušší. V okamžiku hořejší kulminace tohoto bodu začíná *den hvězdný* a trvá do hořejší kulminace nejblíže příští; den tento dělíme na 24 hodiny po 60 minutách, tyto po 60 sekundách.

Času tohoto užívá se v astronomii; onen bod, jehož zdánlivou rotací čas hvězdný se určuje, jest tak zvaný *bod jarní*, totiž bod, v němž se střed slunce nalézá při průchodu rovníkem počátkem jara (asi 21. března).

Otázka, jak dalece příliv a odliv mořský činí čas hvězdný nerovnoměrným, bude moci býti vážně řešena až ve staletích budoucích. Dosud odhaduje se, že přílivem a odlivem den hvězdný se dlouží asi o $0{\cdot}01^{s}$ za století. Jest jasno, že se zde jedná o nerovnoměrnost tak velice nepatrnou, že hořejší výrok o naprosté rovnoměrnosti času hvězdného tím nepozbývá své platnosti.

---

*) Uvedené označování *n, s, w, e* (resp. eventuálně *N, S, W, E*) jest internacionální dle jmen anglických: Nord, South, West, East.

§ 42. Čas sluneční pravý.

Stejným způsobem jako bod jarní může též *střed slunce* sloužiti k určování času; vzhledem k tomu, že se postavením slunce celý způsob života našeho řídí, jeví se volba tohoto bodu býti přirozenější než volba bodu jarního. Čas, kterýž jest určen zdánlivým otáčením se středu slunečního kolem osy světové, zove se *čas sluneční pravý, tempus solare verum.*

§ 43. Rozdíl mezi časem hvězdným a časem slunečním pravým.

Jest důležito ihned vytknouti rozdíl, jakýž jest mezi tímto časem slunečním pravým a oním časem hvězdným.

Dne 21. března (v určitém okamžiku toho dne, na př. v poledne) nalézá se střed slunce v bodu jarním; následkem toho kulminují bod jarní a střed slunce současně, pravý den sluneční začíná v témž okamžiku jako den hvězdný. Pozorujeme-li však nejblíže příští kulminace dne následujícího, shledáme, že bod jarní vstoupí dříve do poledníku, než střed slunce, jehož kulminace se tedy od včerejška o něco opozdila — asi o 4 minuty času hvězdného. — Jest tudíž den sluneční o tolik delší než den hvězdný. Opozdování toto děje se ovšem i dále za každý den asi o 4 minuty; rozdíl roste, za měsíc kulminuje bod jarní již asi o $30 \times 4^{m} = 120^{m} = 2^{h}$ času hvězdného dříve než střed slunce, za půl léta o 12^{h}, za rok o 24^{h} — t. j. 21. března roku nejblíže příštího *počítáme o celý jeden hvězdný den více než dnů slunečních.*

Příčinou tohoto opozdování se slunce jest pohyb jeho vlastní, tak zvaný roční. Střed slunce postupuje totiž den ode dne na nebi v určitém kruhu, v ekliptice, od západu k východu, tedy ve smyslu opačném než jest pohyb denní, jenž se děje od východu k západu. Tento největší kruh, jenž jest průsekem příslušné roviny se zdánlivou koulí nebeskou, jest od rovníku odkloněn o úhel $23^{0}\ 27'$, tak zvaný odklon ekliptiky, kterýž jest měnlivý v mezích jen velice málo rozdílných.

Roční tento pohyb slunce v ekliptice má průběh následující: Od *bodu jarního — aequinoctium vernum* — (20. nebo 21. března) vycházejíc vystupuje slunce v ekliptice až k *slunovratu letnímu — solstitium aestivum* — (21. neb 22. června); od toho dne sestupuje k *bodu podzimnímu — aequinoctium auctumnale* — (22. nebo 23.

září) a dále až k *slunovratu zimnímu — solstitium brumale* *) — (21. neb 22. prosince), odkudž pak opět stoupajíc se vrací k bodu jarnímu. Čtyři tyto body na ekliptice od sebe postupně o 90° vzdálené jsou význačnými pro roční počasí. Celý pohyb tento vykoná slunce za rok, t. j. asi 365 dnů; poněvadž za tu dobu proběhne as 360 úhlových stupňů, připadá průměrně na den bez mála jeden stupeň, což odpovídá časově 4 minutám, jak výše bylo uvedeno **).

Podle času hvězdného mohou býti přesně regulovány hodiny hvězdné; takových se užívá na hvězdárnách. Podle času slunečního pravého jdou hodiny sluneční.

Pravili jsme dříve, že se slunce ve své kulminaci proti jarnímu bodu denně asi o 4^m opozďuje. Srovnáme-li přesněji hodiny sluneční a hvězdné, pozorujíce kulminaci slunce dalekohledem passážním a odečítajíce stav hodin hvězdných, shledáme, že ono opozďování se slunce čili, jak raději řekneme, předbíhání hodin hvězdných proti hodinám slunečním, se neděje rovnoměrně. Zaznamenáme-li, mnoho-li ukazují hodiny hvězdné v okamžiku pravého poledne a tvoříme-li difference, obdržíme průběhem roku měnlivé hodnoty, jež leží mezi jistými maximálními a minimálními. Pro rok 1908 činí na př. tyto difference 27. března minimum $3^m\ 38^s$, 19. června maximum $4^m\ 10^s$, 18. září minimum $3^m\ 35^s$, 23. prosince maximum $4^m\ 27^s$. Jest tedy vzhledem k těmto variacím patrno, že pravý čas sluneční postrádá rovnoměrnosti; nebylo by možná regulovati hodinový stroj tak, aby hodiny šly dle pravého času slunečního; hodiny jdou rovnoměrně, *pravý čas sluneční však plyne nerovnoměrně.*

Příčina této nerovnoměrnosti jest několikerá. Především neděje se pohyb slunce v ekliptice rovnoměrně. Země naše pohybuje se totiž kolem slunce nikoli v kruhu, v jehož středu by bylo slunce, nýbrž v ellipse, v jejímž ohnisku S (obr. 30.) slunce se nalézá. V bodu P, kde jest sluncí nejblíže (perihelium, *περί, ἥλιος* přísluní), pohybuje se nejrychleji, v bodu pak protějším A, kde jest od slunce nejdále (aphelium, *ἀπό, ἥλιος*, odsluní), nejvolněji. Ellipsa dráhy

*) brûma staženo z brevissima (dies) nejkratší den; všeobecněji, čas zimní od toho: brumalis.

**) Pro převod míry úhlové v časovou neb naopak máme relace:

	360°	odpovídá	24h
tudíž:	15°	»	1h
	15′	»	1m
	15″	»	1s

Převodní koefficient jest tedy = 15.

zemské jest ovšem tak málo od kruhu rozdílna, že v malém výkresu ji nelze od kruhu rozeznati; její numerická excentricita CS/CA činí = 1·677%. Proto jest ellipsa v obr. 30. k vůli zřetelnosti rýsována s excentricitou 10kráte větší, ač i tak se od kruhu sotva rozezná.

Ve skutečnosti jest, je-li poloosa a dráhy zemské jednotkou,

$$SP = 0{\cdot}9832,$$
$$SA = 1{\cdot}0168.$$

Přijmeme-li tudíž pro a hodnotu (§ 39)

$$a = 149\,501\,000\ km,$$

vychází v millionech kilometrů

$$SP = 146{\cdot}99,$$
$$SA = 152{\cdot}02.$$

Úhlová rychlost obíhání za den jest v periheliu 61′ 10·1″, v apheliu 57′ 11·7″, průměrně 59′ 8·3″. Nerovnoměrnost tuto přenášíme pak na slunce. Dříve bylo řečeno, že postupuje v ekliptice denně asi o 1°; správněji však musíme říci: v perigeu P' (*περί, γῆ*) postupuje slunce nejrychleji, za den o více než 1°, totiž o 61′ 10·1″, v apogeu A' (*ἀπό, γῆ*) pak nejvolněji, za den o méně než 1°, totiž 57′ 11·7″.

Než i kdyby nebylo této nerovnoměrnosti, kdyby tedy slunce v ekliptice den co den o střední hodnotu 59′ 8·3″ nahoře udanou postupovalo, nebylo by tím docíleno rovnoměrnosti v čase slunečním pravém; neboť čas tento stanoví se zdánlivým pohybem denním, tento pak děje se rovnoběžně nikoli s ekliptikou, nýbrž s aequatorem. V slunovratech postupuje slunce s rovníkem rovnoběžně, jinak šikmo, nejvíce v bodech rovnodennosti; dle toho promítá se stejný oblouček ekliptiky na rovník největšími kruhy meridianovými v délky různé, větší v okolí solstitia, menší v okolí aequinoctia.

§ 44. Čas sluneční střední.

Z úvah předcházejících vysvítá, že čas sluneční pravý pro svou nerovnoměrnost se nehodí k účelům časoměrným. Avšak vzhledem k tomu, že jest slunce regulátorem celého našeho denního zaměstnání, následkem čehož čas sluneční životu obecnému jediné vyhovuje, jest nutno, čas tento podržeti, avšak jeho nerovnoměrnosti *vyrovnati*. Tak povstává *čas sluneční střední, tempus solare medium.*

Čas tento stanoví pro *sluneční den střední* určitou hodnotu průměrnou. Z příčin praktických, aby se totiž datum neměnilo za světla denního, nýbrž během noci, začíná den tento buď krátce před neb krátce po *dolejší* kulminaci slunce. Jinak dělí se též na 24 (vlastně 2krát 12) hodiny (^{h}), hodina na 60 minut (^{m}), minuta na 60 sekund (^{s}), kteréž se zovou středními *).

Stanovení průměrné hodnoty dne slunečního děje se úvahou následující:

Tropický rok, t. j. doba, za kterou slunce proběhnouc ekliptikou se vrátí do bodu jarního, trvá 366·24220 dnů hvězdných. Za tuto dobu máme dnů slunečních o jeden méně, tedy jen 365·24220. Máme tudíž rovnici:

$$366{\cdot}2422\ \textit{dies sid.} = 365{\cdot}2422\ \textit{dies sol. med.},$$

z čehož plyne dále (dle rovnosti $\textit{dies} = 86400\ \textit{sec}$)

$$\frac{\textit{dies sid.}}{\textit{dies sol.}} = \frac{365{\cdot}2422}{366{\cdot}2422}$$

$$\frac{\textit{difference}}{\textit{dies sol. med.}} = \frac{1}{366{\cdot}2422}, \qquad \frac{\textit{difference}}{\textit{dies sider.}} = \frac{1}{365{\cdot}2422}$$

$$\textit{difference} = \frac{86400}{366{\cdot}2422}, \qquad \textit{difference} = \frac{86400}{365{\cdot}2422}$$

$$= 3^m\,55{\cdot}91^s \qquad = 3^m\,56{\cdot}56^s$$

středního času slunečního. — času hvězdného.

Středního času slunečního užívá se jak ve fysice, tak ve všech vědách exaktních výhradně. Hodiny, jimiž se řídíme v životě obecném, jdou vesměs dle středního času slunečního. V astronomii užívá se času tohoto vedle času hvězdného; na observatořích jdou některé hodiny dle středního času slunečního, jiné dle času hvězdného. Počátkem jara *) souhlasí jedny s druhými; odtud však rozcházejí se vždy více a více, tak že rozdílu přibývá s časem úměrně, až po uplynutí roku tropického se opět sejdou. V dobrých kalendářích udává se pro každý den ve zvláštní rubrice »čas hvězdný ve střední poledne«. Rozdíl roste tu den co den o $3^m\,56{\cdot}56^s$ času hvězdného.

*) Značky *h*, *m*, *s* píší se často nad příslušná čísla (nad řádku), jde-li o udání časového okamžiku; naproti tomu vedle čísel (na řádku), jde-li o udání časové (omezené) doby. Na př.: pozorování začalo ve $2^h\ 30^m\ 40{\cdot}7^s$, skončilo v $6^h\ 25^m\ 31{\cdot}6^s$, trvalo tedy 3 *h*, 54 *m* 50·9 *s*. Avšak dvojakost takovou nelze doporučiti; tím méně, poněvadž ve fysice značka *m* na řádce psaná znamená metr; lépe jest tudíž při údajích časových — podobně jako při úhlových — psáti příslušné značky vždy nad řádkou. Kde se sekunda má označiti ve spojení s jinými jednotkami fysikálními do řádky, píše se *sec*, dle internacionálního způsobu psaní (jinak u nás též sek.).

Když se však v astronomické praxi času středního užívá, počíná den střední, odchylně od způsobu občanského, nikoli o půlnoci, nýbrž v poledne a hodiny se odtud čítají nikoli od 0 do 12 a opět od 0 do 12, nýbrž od 0 do 24. V souhlasu s tím mění se astronomické datum též v poledne, čímž se toho docílí, že celá noc, kdy se konají astronomická pozorování, má totéž datum. Při tom dlužno pamatovati, že datum astronomické pokročí o půl dne později než datum občanské; když toto o půlnoci pokročilo, trvá ještě datum astronomické a pokročí až v poledne. Dle toho převádějí se údaje časové astronomické na občanské, když se k astronomickému údaji přičte 12 hodin a pak výsledek přizpůsobí obvyklému, ovšem že velmi nevhodnému, počítání občanskému hodin od 0 do 12 dopoledne a opět od 0 do 12 odpoledne.

§ 45. **Rozdíl slunečního času středního a pravého; rovnice časojevná.**

Zcela jiné povahy jest rozdíl obou časů slunečních. Poněvadž čas sluneční pravý plyne nerovnoměrně a čas sluneční střední se v hlavní věci onoho přidržuje a jenom ony nerovnoměrnosti vyrovnává, alternuje rozdíl obou brzy ve smyslu positivním, brzy v negativním, jinak však zůstává v jistých mezích. Rozdíl tento Θ zavádí se jakožto *rovnice časojevná* ve smyslu:

$$\Theta = \textit{temp. sol. medium} - \textit{temp. sol. verum}$$

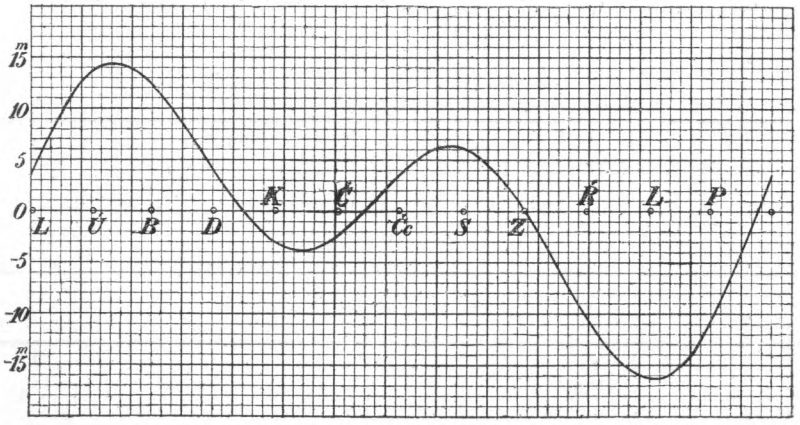
$$\Theta = \qquad M \qquad - \qquad V.$$

V dobrých kalendářích uvádí se rovnice tato pro každý den v rubrice nadepsané: »hodiny v pravé poledne«. Význačné hodnoty, počítané (pro Prahu, střední poledne) na rok 1908, 1909 a 1910 ukazuje tabulka následující:

*) Souhlas tento nenastane — vzhledem k rovnici časojevné — přesně toho dne a toho okamžiku, kdy jaro ve smyslu astronomickém počíná.

	Dne	1908	1909	1910
	1. ledna	+ 3m 9·1s	+ 3m 32·6s	+ 3m 24·6s
max.	11. února		+ 14 25·3	
	12. února	+ 14 25·4		+ 14 25·2
+ 0	15. dubna	+ 0 6·2	+ 0 9·4	+ 0 13·4
— 0	16. dubna	— 0 8·5	— 0 5·3	— 0 1·4
minim.	15. května	— 3 49·2	— 3 49·9	— 3 48·9
— 0	14. června	— 0 3·8	— 0 7·6	— 0 8·9
+ 0	15. června	+ 0 8·7	+ 0 5·1	+ 0 3·7
max.	27. července	+ 6 17·9	+ 6 18·0	+ 6 18·7
+ 0	1. září	+ 0 0·4	+ 0 4·1	+ 0 9·8
— 0	2. září	— 0 18·5	— 0 14·8	— 0 8·9
minim.	3. listopadu	— 16 20·4	— 16 21·3	— 16 20·2
0	24. prosince	— 0 22·8		
	25. prosince	+ 0 7·2	— 0 0·3	— 0 8·1
	26. prosince		+ 0 29·5	+ 0 21·8

Z čísel tabulky této jest patrno, že se rovnice časojevná od roku k roku mění jen velmi málo. Hodnoty maximální a minimální zů-



Obr. 23.

stávají téměř stejnými; větší jsou poněkud odchylky v těch dnech, kdy nastává změna znamení, zejména účinkem roku přestupného (na př. zde 1908); ale i tyto činí jen málo sekund. Lze tuďíž na

základě čísel uvedených sestrojiti křivku, kteráž v rozměrech, v jakých ji lze přehledně provésti, znázorňuje průběh rovnice časojevné pro rok jakýkoli. Křivku tuto ukazuje obr. 23. Ve směru vodorovném jsou nanášeny dny roční po pentádách, tak že dílec znamená 5 dní; každý první den měsíce jest vyznačen. Ve směru svislém jest nanášena hodnota Θ v minutách, tak že ještě desetina minuty může býti odhadnuta. V obrazci vystupuje zřetelně rozdíl mezi extremy zimními a letními.

§ 46. **Vliv rovnice časojevné na rozdělení dne.**

Pravým polednem dělí se den — v užším slova smyslu — souměrně*) ve dvě polovice, z nichž jedna, dopoledne, východem slunce začíná, druhá, odpoledne, západem slunce končí. Středním však polednem dělí se den — vzhledem k rovnici časojevné — nesouměrně; dopoledne a odpoledne, počítaná, *jak jsme zvyklí*, dle poledne *středního*, jsou tudíž zpravidla délky nestejné. Rozdíl jest stanoven dvojnásobnou hodnotou 2Θ rovnice časojevné Θ; stává se tudíž patrným v těch měsících, kdy jest Θ dosti veliké, t. j. v měsících zimních.

O dušičkách vychází slunce (1908) $6^h\,49^m$ a zapadá $4^h\,39^m$; dopoledne trvá tudíž $5^h\,11^m$, odpoledne jen $4^h\,39^m$; *dne ubývá s večerem, rána zůstávají světlá.* Čím blíže k vánocům, tím více se rozdíly tyto umenšují; o vánocích, kdy jest den nejkratší, mizí rovnice časojevná a den se dělí středním polednem souměrně. Po vánocích přibývá dne, ale roste též, a to ve smyslu obráceném, rovnice časojevná. Po hromnicích na př. (1909) 12. února, vychází slunce $7^h\,20^m$, zapadá $5^h\,10^m$, dopoledne trvá tudíž $4^h\,40^m$, odpoledne $5^h\,10^m$; *dne přibývá s večerem, rána zůstávají tmavá.* Den se prodlužuje poněkud *soumrakem.* Avšak tohoto slova užívá se jinak ve smyslu občanském (civilním), a jinak ve smyslu hvězdářském (astronomickém). Soumrak ve smyslu hvězdářském trvá, až slunce zapadne 6^0 pod obzor. V naší šířce 50^0 trvá v tomto smyslu soumrak nejdéle v červnu (45 minut) a nejkratšeji v březnu (35 minut), kdy slunce sestupuje pod obzor příkře. Ve smyslu občanském trvá soumrak, až slunce zapadne 18^0 pod obzor. V naší šířce 50^0 v době letní, v červnu a v červenci, slunce vůbec tak hluboko pod obzor nepřijde, tak že soumrak jest celou noc; v době jarní, v březnu, trvá $1^h\,49^m$.

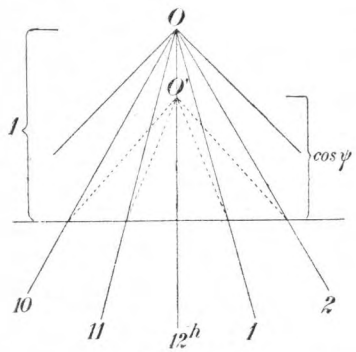
*) Mathematicky přesně ovšem také ne, vzhledem k měnlivé rychlosti, s jakou slunce postupuje v ekliptice.

§ 47. Hodiny sluneční.

Tyč (stilus *) hodin slunečních bývá ve směru osy světové upevněna buď na stěně vodorovné (hodiny horizontální), neb na stěně svislé (hodiny vertikální) anebo konečně na stěně s rovníkem rovnoběžné (hodiny aequatoreální). Rovina, položená tyčí (t. j. osou světovou) a středem slunce tvoří v pravé poledne s meridianem úhel = o, jinak úhel α (úhel hodinový), jenž se průběhem dne každou hodinu o 15^0 mění. Je-li β úhel, který stín gnomonu tvoří se stínem, jak jest v okamžiku pravého poledne, jsou v platnosti při geografické šířce ψ místa pozorovacího rovnice následující pro hodiny vertikální, horizontální a aequatoreální:

$$tg\ \beta = tg\ \alpha\ .\ cos\ \psi$$
$$tg\ \beta = tg\ \alpha\ .\ sin\ \psi$$
$$\beta = \alpha.$$

U hodin aequatoreálních jest tedy vztah mezi β a α nejjednodušší. Rovněž jednoduše a přehledně lze však také u hodin jak horizontálních tak obvyklejších vertikálních vyjádřiti vztah ten konstrukcí. V obr. 24. jest pro hodiny vertikální tato konstrukce naznačena nejprve všeobecně a pak provedena — geografickou šířku $\psi = 50^0\ 5'$ (Praha) předpokládajíc — pro úhly $\alpha = 15^0, 30^0, 45^0$ atd., čímž zjednány pro příslušné úhly β směry označující polohu stínu tyče $1^h, 2^h, 3^h$ atd. před pravým polednem nebo po pravém poledni. Konstrukce v této formě, zjednaná dle rovnic tvaru



Obr. 24.

$$\frac{tg\ \alpha}{tg\ \beta} = n,$$

kdež jest n konstanta > 1, buď $1/cos\ \psi$ neb $1/sin\ \psi$, jest zajímavou tím, že upomíná na konstrukci pro lom paprsků homocentrických rovinou, pokud lze dle zákona Ptolomaeova paprsky lomené také za homocentrické pokládati t. j. pokud lze klásti (přibližně)

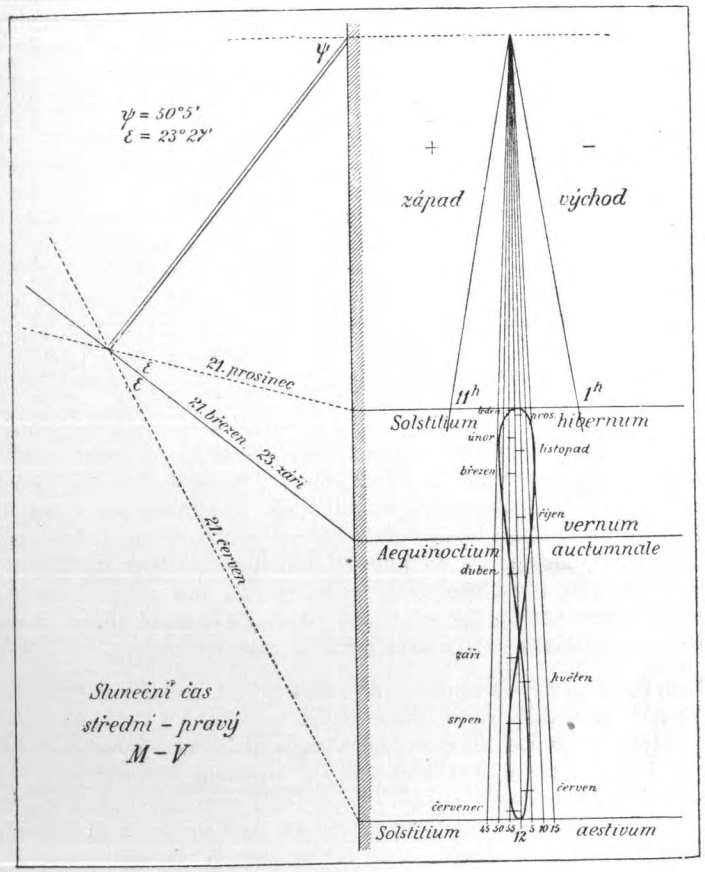
$$\frac{sin\ \alpha}{sin\ \beta} = \frac{tg\ \alpha}{tg\ \beta}.$$

Na hodinách slunečních, na př. vertikálních, kteréž vídáme nejčastěji na stěnách kostelů, zámků **), škol neb jiných budov veřejných, lze také prů-

*) Je-li stilus postaven ve směru osy světové, zove se polos; pakli je vertikální, gnomon, od řeckého *γνώμων* ὁ znalec, udavatel, *γνώμων ὡρολογίων* ukazovatel hodin slunečních, a také — pars pro toto — hodiny sluneční vůbec.

**) V nádvoří zámku Děčínského jsou sluneční hodiny s nápisem: »Me sol, vos umbra regit.«

běh rovnice časojevné znázorniti konstrukcí jednoduchou a poučnou. Třeba jen každého dne v okamžiku středního poledne zaznamenati, kam padne stín S konečného bodu stilu (obr. 25.). Poloha S mění se den ode dne jak ve smyslu vertikálním, následkem stoupání a klesání slunce, tak



Obr. 25.

ve smyslu horizontálním, následkem měnlivosti rovnice časojevné. Pásmo bodů S tvoří pak křivku, osmičce poněkud podobnou, kteráž jest znázorněním rovnice časojevné. Je-li tato jednou pro vždy přesně konstruována, lze naopak i na hodinách slunečních okamžik středního poledne dosti dobře zjistiti a tím na př. hodiny věžní kontrolovati *).

*) Vzájemná tato kontrola dokazuje právě, že hodiny sluneční »nejdou« dobře, t. j. nejdou stejnoměrně. Odtud nápis na kyvadle hodin z dob Ludvíka XIV.: »Solis mendaces arguit horas.«

§ 48. Čas pásmový.

Dle výkladů předešlých mění se čas s meridianem; neboť tímto určuje se okamžik, od něhož čas začínáme počítati, tedy jeho nullový bod. Cestujíce tudíž s chronometrem na př. po železnici na západ, pozorujeme, že se lokální čas proti chronometru opozďuje a naopak urychluje, cestujeme-li na východ; rozdíl činí na každý stupeň délkový $^1/_{15}$ hodiny, t. j. 4^m. Tato různost časů lokálních jest velice na závadu při službě železniční a telegrafické. Proto poměrně záhy zavedly mnohé státy ve vlastním území k účelům této služby čas jednotný, tak zvaný železniční. Takovým jest na př. čas Pařížský, jehož se užívá ve Francii a v Alžíru, anebo čas Petrohradský na Rusi, Madridský ve Španělsku, Lissabonský v Portugalsku, Athenský v Řecku atd., takovým byl ještě nedávno u nás čas Pražský, resp. Pešťský, podobně čas Mnichovský v Bavořích atd. Na stanicích hraničních nastávala pak změna času, mnohdy v několika různých směrech. V novější době opouští se však již tento čas železniční, kterýž jest určen zcela nahodilou polohou hlavních měst, a zavádí se v zájmu internacionálním čas tak zvaný *pásmový*.

Nejjednodušším bylo by ovšem považovati zemi naši za jediný celek a zavésti jednotný čas pro celou zemi, kterýž by se pak mohl zváti časem světovým, universálním. Snad jednou i to se uskuteční; dosud jest tomu na závadu, že jsme příliš uvykli času lokálnímu při svém denním zaměstnání a že bychom velké odchylky od tohoto času dobře nesnesli. Není-li však již možno, aby hodinové i minutové ručičky na hodinách ve všech krajích naší země ukazovaly zcela stejně, jest alespoň možno, aby *ručičky minutové* souhlasily, t. j. aby se údaje časové lišily jen *v hodinách*. Tato myšlenka jest uskutečněna v čase pásmovém.

Provedení jest následující: Zavedou se 24 meridiany *) hlavní, a s tím 24 pásma. Každé pásmo rozestírá se v rozsahu 15 stupňů délkových po obou stranách svého hlavního meridianu, tedy na východ o $7^1/_2{}^0$ i na západ o $7^1/_2{}^0$. Za první meridian volí se meridian hvězdárny v Greenwich **). Datum se mění na meridianu 180^0, jenž probíhá Tichým oceánem; na lodích, plujících směrem západním, zaznamenává se datum vyšší, když se tento meridian přepluje. Přehled pásem a pojmenování času, jednak již užívané, jednak navrhované, ukazuje sestavení následující:

*) Vlastně polomeridiany, polokruhy, míníme-li meridianem kruh celý.

**) Hvězdárna tato, založená r. 1675 za panování Karla II. na podnět Johna Flamsteeda (1646—1719), jenž první se stal »astronomer royal«, stojí ve velkém (76 hektarů) parku Greenwichském na návrší 97 *m* vysokém a jest opatřena velice dokonalými přístroji astronomickými, meteorologickými a magnetickými. Přednost meridianu Greenwichského jest odůvodněna jednak tím, že nejlepší námořské mapy, vydávané admiralitou anglickou, se na tento meridian vztahují, jednak též, že Nautical Almanac, obsahující všechny početní astronomické tabulky, jakých rok co rok při plavbě se užívá, týž meridian předpokládá.

Pásmo	Hlavní meridiany	Čas
0	0	Greenwichský, světový
1	15	Středoevropský
2	30	Ruský (Petrohradský)
3	45	Východoruský, Kavkazský
4	60	Transkaspický
5	75	Madrasský
6	90	Kalkuttský
7	105	Siamský, Malayský
8	120	Čínský
9	135	Japanský
10	150	Východoaustralský
11	165	Kamčatský
12	180	Novoseelandský
13	195	Behringův
14	210	Aljašky
15	225	Columbie
16	240	Tichomořský (Pacific)
17	255	Hor skalních (Rocky Mountains)
18	270	Středoamerický
19	285	Východoamerický
20	300	Interkoloniální
21	315	Brasilský
22	330	Atlantský
23	345	Senegálský
24	360	Greenwichský, universální.

Zavedení času pásmového i pro život obecný mělo by při četných výhodách menší obtíže než se obyčejně za to má. Již užívajíce středního času slunečního nejsme s hodinami svými v souhlasu se sluncem; rozdíl činí v měsících zimních přes $^1/_4$ hodiny. Zavedením času pásmového přibylo by k rozdílu tomuto ještě nanejvýše $^1/_2$ hodiny a to pro místa ležící na meridianech přechodních.

Při příležitosti zavádění času pásmového mělo by se zároveň upustiti od nepraktického rozdělování dne na dvakrát 12 hodin, a zavésti dělení na 24 hodiny *). Ciferník hodin našich by zůstal jak jest; změnil by se toliko *způsob počítání*, jakož se již děje v astronomii i v meteorologii.

Co se týče Prahy, má stará hvězdárna v Clementinu následující délku od Ferro (Sterneck) a následující šířku (Weinek-Gruss)

$$\lambda = 32^0\ 4'\ 49{\cdot}50''$$
$$\psi = 50^0\ 5'\ 15{\cdot}86''.$$

*) Některé státy, jako Francie, Italie, zavedly již v jízdních řádech železničních počítání hodin od 0 do 24^h. Mělo by se tak státi všeobecně.

Z toho plyne časová difference proti času universálnímu

$$-\ 57^{m}\ 40{\cdot}33^{s}$$

a tudíž proti času středoevropskému

$$+\ 2^{m}\ 19{\cdot}67^{s}.$$

§ 49. Oprava a chod hodin.

Hodiny i nejlepší nejdou naprosto správně; i jest nutno čas od času je kontrolovati, buď srovnáváním s hodinami jinými již prozkoumanými anebo přímo pozorováním astronomickým, na př. pozorováním kulminace slunce. Odchylka, jakouž hodiny v určitém okamžiku časovém — těmito hodinami samými určeném — proti správnému času ukazují, zove se jich *oprava (korrekce)*; její znamení (+ neb —) stanoví se tak, aby oprava, *algebraicky* (t. j. se svým znamením) k časovému udání hodin připojena dala čas správný. Tak na př. byla passážním dalekohledem stanovena kulminace středu slunečního dne $^{30}/_{6}$ 1897 v čase hodinovém

$$11^{h}\ \ 59^{m}\ \ 3{\cdot}7^{s}.$$

Rovnice časojevná toho dne byla

$$3^{m}\ \ 25{\cdot}8^{s}.$$

Hodiny, dle slunečního času středního jdoucí, měly tudíž ukazovati

$$12^{h}\ \ 3^{m}\ \ 25{\cdot}8^{s}$$

z čehož plyne, že jich korrekce v okamžiku pozorování byla

$$+\ 4^{m}\ \ 22{\cdot}1^{s}.$$

Oprava hodin, jednou určená, nezůstává však konstantní; mění se den ode dne; změna tato stanoví pak tak zvaný *chod* hodin *denní*. U týchž hodin stanovena 5 dní později, $^{5}/_{7}$ 1897 oprava

$$+\ 4^{m}\ \ 38{\cdot}3^{s}.$$

Průměrný jejich chod denní v době této byl tudíž

$$16{\cdot}2^{s} : 5 = 3{\cdot}24^{s}.$$

Je-li tento positivní, tedy to znamená, že hodiny se *opozdují* (že retardují), tak že jest nutno k jich udání něco přidávati; jejich sekunda jest poněkud delší. Je-li naopak negativní, znamená to, že hodiny se *předcházejí* (že akcelerují), tak že jest nutno od jich údaje něco ubrati; jejich sekunda jest poněkud kratší.

Je-li známa oprava hodin pro určitý okamžik časový a je-li znám jich chod, jest možno jednoduchou interpolací opravu hodin pro jakýkoliv okamžik časový hodinami určený vypočísti.

Interpolační však počet takový předpokládá, že chod hodin jest *konstantní*, ode dne ke dni, od hodiny k hodině. Vskutku jest to jediný požadavek, který na hodiny velmi dobré klademe. Nikoliv zdali jest chod malý, jest významné pro kvalitu hodin, nýbrž zdali jest stálý, neproměnný.

Na chod hodin má značný vliv mechanické otřásání způsobené v blízkosti jejich na př. těžkými povozy po ulici jedoucími, prudké zavírání dveří a vůbec neklid jakýkoliv. Ještě značnější vliv má však teplota. Vliv tento lze umenšiti užitím kyvadel kompensovaných, jakéž musí míti každé dobré hodiny kyvadlové; podobně mají také chronometry kompensaci tepelnou. O těchto kompensacích jedná se v nauce o teple *). Dlužno však pamatovati, že při *náhlejších* změnách teploty kompensace *nemůže stačiti* a že pak chod hodin i nejlepších a nejlépe kompensovaných nemůže zůstávati stálým. Nesmí tudíž na př. hodiny, jež na hvězdárnách jsou normálními, býti změnám teploty příliš exponovány; naopak musí býti umístěny v místnostech (sklepních), kde teplota během celého roku jen velmi málo a nenáhle se mění.

Obr. 26.

Požadavek, aby změna chodu nečinila během let nic více než na př. jednu desetinu sekundy, jest již velice přísný a vyhovují mu jen nejlepší kyvadlové hodiny astronomické, umístěné co nejpříznivěji.

Budiž ještě poznamenáno, že není obyčejem dobré hodiny astronomické často »říditi«, aby ukazovaly správně, nýbrž že se nechávají bez rušivého zasahování do jejich mechanismu stále jíti; ale ovšem se ve zvláštním protokollu zaznamenává jich oprava, jak byla čas od času stanovena, a jich průměrný denní chod.

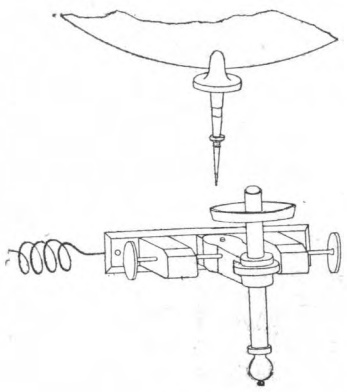
Pro účely fysikální osvědčuje se velmi dobře *přenosný chronometr*, jímž lze na př. dobu kyvu magnetky stanoviti na místě jakémkoli. Obr. 26. ukazuje takový chronometr (Bröcking) v úpravě pro laboratoře

*) Viz Thermiku, pag. 81—86, 1908.

fysikální výhodné. Chronometr spočívá v závěsu Cardanově, aby zůstával v poloze vodorovné; před prachem a otřásáním jest chráněn dvojí skříňkou. Jde 8 dnů; denní chod jest konstantní na málo desetin sekundy.

§ 50. **Akustické a grafické označování sekundy.**

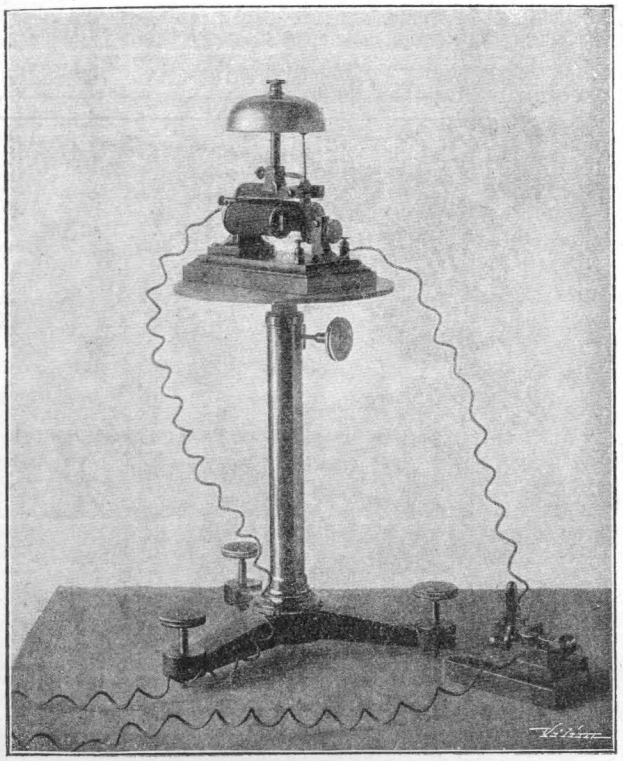
K účelům fysikálních pokusů a měření jest často žádoucno sekundu (středního času slunečního) buď akusticky *signalisovati*, aneb graficky *registrovati*. Jednoho i druhého účelu dosáhne se jednoduše galvanickým proudem, když se totiž proud sekundovým kyvadlem samým na okamžik uzavře. Za tím účelem opatří se, jak obr. 27. znázorňuje, kyvadlo sekundové nejlépe na svém nejdolejším konci — kde rovnovážnou svou polohou proběhne nejrychleji — platinovým hrotem. Pod tímto jest mistička ocelová, kterou lze jednak dvěma šrouby říditi na levo a na pravo tak, aby její střed přišel přesně pod platinový hrot, když kyvadlo stojí, jednak šroubem nahoru a dolů zvedati. Na mističku nalije se čisté rtuti, kteráž má tvořiti vysoký meniskus. Má-li se experimentovati, zvedne se mistička šroubem tak vysoko, aby platinový hrot rtutí co možná krátce probíhal. Tím se na okamžik uzavře proud.



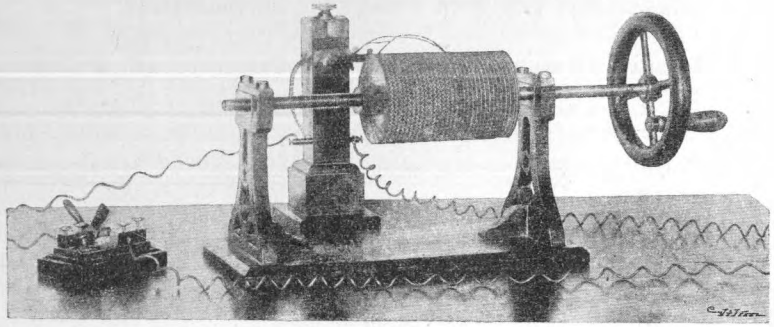
Obr. 27.

Jde-li o signalisování sekundy, vepne se do proudu elektrický zvonek (obr. 28.), který pak krátkým udeřením paličky sekundu zřetelně označuje.

Jde-li o registrování sekundy na př. na válci, na němž jest napiatý papír sazemi počerněný, přistaví se k němu registrační elektromagnetický přístroj (obr. 29.) a vepne se do proudu. Když pak pozorovatel neb hodinový stroj válcem otáčí, píše péro registračního přístroje na válci kruh, k němuž při spojení proudu elektromagnetem přistupují příčné krátké čárky sekundu registrující. Zpravidla jest osa válce zároveň šroub, tak že se válec při svém otáčení současně pošinuje vpřed neb vzad. Registrační péro píše pak spirálu přerušovanou příčnými čárkami sekundovými.



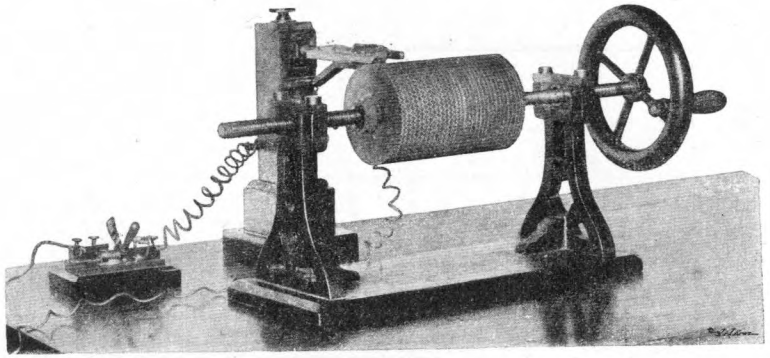
Obr. 28.



Obr. 29.

§ 51. Ladička chronoskopem.

Podle uspořádání v předcházejícím popsaného můžeme srovnávati graficky vibrace jisté ladičky s registrátorem sekundy a zjistiti, mnoho-li kmitů ladička za sekundu vykoná — t. j. stanoviti její kmitočet čili její absolutní výšku. Jakmile však toto stanovení jednou se provede, může pak ladička sama kmity svými



Obr. 30.

registrovati čas, a hodí se, jak patrno, k účelu tomu velmi dobře, jde-li o zjištění dob velmi kratinkých. Jest tedy pak ladička chronoskopem. K účelu tomu užívá se jí vskutku jak ve fysice, tak v astronomii a zejména též ve fysiologii. Kmity její se udržují elektromagneticky (obr. 30.).

§ 52. Rok siderický, tropický a anomalistický.

Jako slova »den« tak užívá se i slova »rok« ve smyslu několikerém.

Významem nejjednodušší jest rok jakožto *doba jednoho oběhu* země kolem slunce, t. j. doba, za jakou průvodič od středu slunce ke středu země vedený opíše plný úhel 360°. Rok tento zove se *siderický (hvězdný)*, poněvadž se za tuto dobu vrátí země se slunce pozorována, (anebo slunce se země pozorováno), k téže stálici. Doba jeho činí

$$365 \cdot 25636^{d}$$

čili

$$365^{d}\ 6^{h}\ 9^{m}\ 10{\cdot}7^{s}$$

středního času slunečního. Pro účely života obecného není však důležitým vztah země — resp. slunce — k stálicím, nýbrž ten vztah, který souvisí s pravidelným vracením se čtvero ročních počasí. V určitém okamžiku daného roku vstoupí střed slunce do bodu jarního V čili země na dráze své do bodu J onomu protějšího. Doba, kteráž uplyne, až se opět střed slunce vrátí do bodu jarního V čili země do bodu onomu protějšího J zove se *rokem tropickým* *). Doba jeho, poněkud málo proměnlivá, jest nyní

$$365 \cdot 24220^{d}$$

čili

$$365^{d}\ 5^{h}\ 48^{m}\ 46{\cdot}0^{s}.$$

Jak viděti, jest rok tropický kratší siderického. Za rok tropický nevykoná tudíž země plný oběh kolem slunce, čili průvodič ze středu slunce ke středu země vedený neopíše plný úhel 360°. Důvod toho jest, že bod jarní V na ekliptice ponenáhlu postupuje a to slunci vstříc, čili že bod J, na dráze země k jarnímu protější, postupuje zemi vstříc. Postup tento zove se *praecesse* bodu jarního. V našich letech činí praecesse asi $50 \cdot 2''$. Číslo toto není však konstantou; mění se poněkud rok od roku. Proto také rok tropický není přísně vzato dobou *určitou, stálou*, nýbrž poněkud měnlivou **).

Jaký jest fysikální základ praecesse a jaké jsou její následky, o tom bude jednáno později na svém místě.

Často se uvádí oběh země ve vztah k periheliu P; doba, kteráž uplyne, až se země opět do perihelia vrátí, zove se *rokem anomalistickým*, a trvá

$$365 \cdot 25966^{d}$$

čili

$$365^{d}\ 6^{h}\ 13^{m}\ 54{\cdot}9^{s}.$$

Tato doba jest zase větší než rok siderický; perihelium P postupuje totiž také na dráze zemské, ale nikoli zemi vstříc, nýbrž za zemí, tak že ho země dohání. Postup tento činí v našich letech asi $11{\cdot}7''$ (obr. 31.).

Z tohoto výkladu vysvítá, že obě přímky, totiž přímka apsid a přímka rovnodennosti se otáčejí sobě vstříc, že se sbližují a to ročně o úhel $50 \cdot 2'' + 11 \cdot 7'' = 62''$. V astronomii zove se úhel měřený obloukem ekliptiky od bodu jarního až k jistému bodu jinému *délkou* tohoto bodu. V tomto smyslu mluvíme též o délce perihelia, kteráž jest dána úhlem $V S P$. Patrně jest tato délka měnlivá. Ona změna ($11{\cdot}7''$) následkem vlastního postupu perihelia

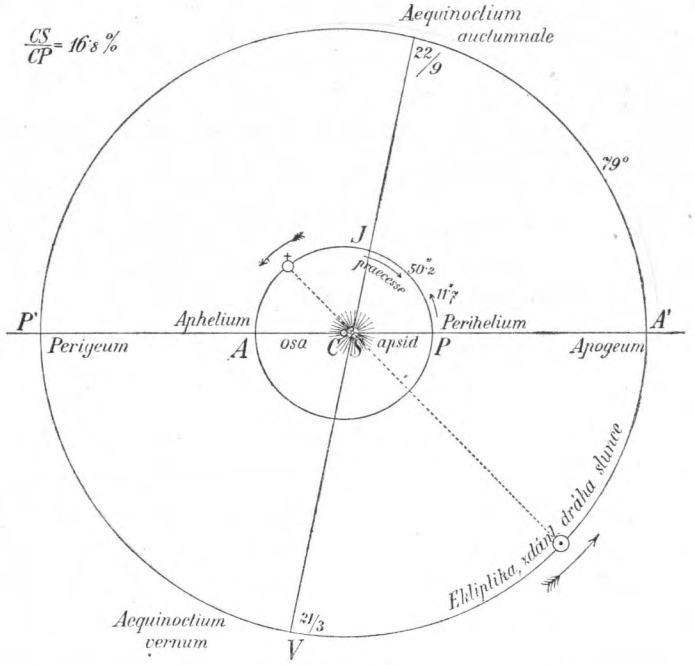
*) Název se odvozuje od slova tropicus, obratník ($\tau\rho\acute{\epsilon}\pi\omega$), poněvadž se dříve doba tropického roku odvozovala z návratu středu slunce do obratníka.

**) Za století ubývá délky roku tropického téměř o $0{\cdot}6^{s}$.

vzhledem k hvězdám vznikající zove se *siderická*, změna pak úhrnná 11·7″ + 50·2″ zove se *tropická*.

§ 53. Obíhání země na dráze elliptické a čtvero ročních počasí.

Ellipsa, kterouž opisuje střed země kolem středu slunce, kterýž jest ohniskem, má sice excentricitu velmi malou, pouze 1·677%, tak že se ve výkresu od kruhu nerozeznává. Ve skutečných velkých rozměrech jeví se však elliptický pohyb zřetelně jistými důsledky.



Obr. 31.

Tak jest již průměr desky sluneční proměnným; je-li země v periheliu, což jest počátkem ledna, má slunce průměr 32′ 36″; je-li v apheliu, což jest asi počátkem července, má slunce průměr jenom 31′ 32″. Jiný důsledek elliptického pohybu země naší jest nestejné trvání ročních dob. V číslech okrouhlých vyjádřeno, trvá

jaro	$92^d\ 21^h$	podzim . . .	$89^d\ 19^h$
léto	93 14	zima	89 0
dohromady . .	186 11	dohromady . .	178 19

Trvá tedy jaro a léto dohromady o $7^d\ 16^h$ déle než podzim a zima. Vysvětlení podává obr. 31. Periheliem probíhá země naše krátce po začátku zimy, kde jest pohyb její nejrychlejší, tím zkrátí se i podzim i zima proti jaru a létu. Patrně jest situace tato pro severní polokouli země naší příznivá; jednak že následkem větší blízkosti slunce více od něho tepla dostáváme, právě když tohoto potřebujeme, jednak že touto nepříznivou v ohledu tepelném polovicí roku rychleji proběhneme.

Avšak situace tato se mění stále a to v neprospěch náš. Neboť, jak nahoře řečeno, obě přímky, přímka apsid AP a osa rovnodennosti VJ se otáčejí k sobě a sbližují se ročně o úhel asi 62″, tedy okrouhle 1′. Dosud se uchylují obě přímky o úhel asi (číslem okrouhlým) 79° = 4740′; splynou tudíž obě téměř za tolik, přesněji za 4600 let, tak že ve století 66. přijde země do perihelia počátkem jara. V postupu pak dalším, asi za 10 500 let, stočí se obě přímky vzájemně o 180°, tak že situace proti nynější bude obrácená; ve století 124. přijde tedy země do perihelia krátce po začátku léta. V periodě asi 10 500 let střídá se tudíž pro severní polokouli situace tepelně příznivá s nepříznivou. Rozdíl dosavadní ne celých 8 dní není ovšem tak značný, aby se účinky tohoto střídání jevily měrou velikou. Dlužno však vytknouti, že excentricita dráhy zemské, kterou se rozdíl tento způsobuje, jest proměnlivou, že byla v dobách dávných větší, tak že onen rozdíl činil až 33 dny. Není pochybnosti, že rozdíl tak značný jevil se tepelně účinněji, a že mohl býti aspoň jednou z příčin, jež na polokouli naší způsobily geologicky zjištěné doby ledové.

Podrobnější výklad o otázkách v tomto oddílu uvedených podávají spisy: Zeměpis hvězdářský, Dr. F. J. Studnička 1881; Z říše hvězd, Dr. G. Gruss. K doplnění viz též články, jež prof. A. Mach v Časopisu J. Č. M., ročník XXVIII., 1899 uveřejnil pod titulem: Základní úlohy mathematického zeměpisu a sférické astronomie řešené konstrukcí. Dále pěkný populární spis: Nebe a země, Adolf Mach, 1907. Z cizojazyčných spisů populárních uvádíme zejména: Astronomie populaire, C. Flammarion, 1885. Z novějších německých: Das Weltgebäude, M. Wilhelm Mayer, 1908 (2. vyd.).

III.

O hmotě.

§ 54. Vlastnosti hmoty.

Vědy přírodopisné, klassifikujíce předměty přírodní, tvoří abstrakcí pojmy nižší a vyšší, jež se rozeznávají svým obsahem a rozsahem. Pojmy vyšší mají větší rozsah než nižší; proto se též zovou ony širšími, tyto užšími. Proti většímu rozsahu stojí menší obsah; pojmy vyšší čili širší jsou chudší souborem svých vlastností. V tomto smyslu jsou pojmy: nerost, rostlina, zvíře, nejširšími příslušných nauk přírodopisných.

Vědy přírodopisné shrnují veškeré tyto nejširší pojmy v pojem ještě vyšší, nejvšeobecnější, totiž v pojem *hmoty*. Definice tohoto pojmu může jako pojem ještě vyšší obsahovati vše, co jest, co existuje pro nás, t. j. co smysly svými vůbec postihujeme; musí však to, co z toho hmotou zoveme, blíže vymeziti uvedením těch vlastností, kteréž za význačné uznáme.

Tyto jsou *prostornost* a *neprostupnost*. Hmotou jest vše, co zaujímá nějaký prostor výhradně, t. j. tak, že jiná hmota nemůže současně zaujmouti prostor týž. Zdali tyto vlastnosti to neb ono, co existuje, má, rozhoduje zejména zrak a hmat.

S výkladem tímto není v odporu, že sobě názor prostorový poznáváním přírody teprve tvoříme a v rámci této formy nazírací dojmy smyslové vykládáme. Zajisté může jen úsudek vytříbený poznáváním předmětů přírodních, u nichž vlastnost prostornosti a neprostupnosti jasně pozorujeme, rozhodnouti v konkretních případech, máme-li co činiti s hmotou čili nic. Reálný obraz osvětleného předmětu, vznikající na př. dutým zrcadlem, zaujímá též jistý prostor, ale nikoli výhradně; neboť do téhož prostoru můžeme vniknouti jakýmkoli předmětem jiným. Zrak by nás snad svedl, že bychom se domnívali viděti něco hmotného, hmat však rozhodne, že tomu tak není. Ale i hmat může klamati. Plyny nelze hmatati, ale jich neprostupnost lze na př. známými některými pokusy demonstrovati. Naopak jsme přesvědčeni, že slunce, měsíc atd., které jen

vidíme, ale které hmatati nemůžeme, nejsou snad optické obrazy, nýbrž skutečné hmoty a mluvíme o hmotách, které smyslům našim vůbec nejsou přístupny, jako o vnitru země a pod. na základě úsudků, kteréž dle důkladnějšího poznávání hmot skutečně nám přístupných sobě činíme.

Prostor hmotou zaujatý může býti i velmi veliký i velmi malý. V přírodě pozorujeme extremy v obou směrech (tělesa nebeská, krvinky a pod.). Pojmenování »veliký« a »malý« jsou ostatně vždy relativní. Jak veliký jest prostor hmotou zaujatý, určujeme měřením, stanovíce *objem* (volumen). Hmota určitého objemu zove se *těleso*; způsobem, jak těleso jistý objem vyplňuje, určuje se jeho *tvar* (forma).

Oba pojmy, hmota i těleso, vyjádřují podstatně totéž, lišíce se jen vztahem k prostoru. Mluvíme-li o tělesu, máme na mysli již také jeho objem i tvar; mluvíce o hmotě nepřihlížíme k objemu a tvaru. Poněvadž však ve skutečnosti jiných hmot než omezených není, jest fakticky rozsah obou pojmů týž. Užívá-li se někdy názvu »*těleso hmotné*«, děje se tak oproti názvu »*těleso mathematické*«, při němž hledíme jen k objemu a tvaru, ke hmotě samé nepřihlížejíce. Je-li těleso rozměrů nesmírně malých, mluvíme o něm často jako o *hmotném bodu*. V názvu jest neshoda; bod nemůže býti hmotným, nemaje žádných rozměrů. Nicméně jest tento pojem »*bodu hmotného*« oproti »*bodu mathematickému*« ve fysice pohodlným; chceme jím jenom říci, že rozměry oné hmoty jsou tak malé, že netřeba přihlížeti k *objemu* a zejména také ne ke *tvaru*.

Hmota není jednotnou; různé hmoty liší se svou *látkou* — pojem, který se stává srozumitelným, když se vyšetřuje chemické složení různých hmot.

Určitá hmota může se nalézati ve trojím *skupenství* (stav aggregační); může býti buď tuhou, kapalnou nebo plynnou. Meze skupenství nejsou ostatně ostře vyznačeny, právě tak málo jako na př. meze rostlin a zvířat; ukazuje se, že lze vhodnými prostředky těleso z jednoho skupenství převésti *spojitě* ve skupenství jiné.

Označování skupenství děje se dle jistých význačných vlastností. Hledíce k teplotě, kterou se zpravidla změna skupenství provádí, nazýváme to skupenství vyšším, do něhož těleso přechází vyšší teplotou. Skupenství nejnižší zoveme tuhé, často též pevné; jedno i druhé slovo nevystihuje ovšem celou podstatu skupenství tohoto; slovem tuhý označuje mluva mnohdy vlastnost jinou (lano neb provaz neb kaučuk tuhne, tělo lidské tuhne a pod., čímž se ovšem nemíní přechod ze skupenství kapalného); na druhé straně mnohá tělesa tohoto skupenství nejsou pevná. Označení tuhá tělesa jest tak dalece vhodnější, že slovem tím lze lépe vládnouti (přechod: tuhnutí, bod tuhnutí atd.). Označení vyššího sku-

penství kapalným děje se dle tvoření kapek, nejvyššího skupenství plynným dle plynulosti, kterážto vlastnost, ač již u kapalin přichází (tekutost), zde zvláště význačně se objevuje.

Označili jsme neprostupnost za základní, podstatnou vlastnost hmoty. Avšak ve skutečnosti pozorujeme četné úkazy, kteréž proti neprostupnosti svědčiti se zdají.

Velmi mnohé z nich lze vyložiti *porovitostí* těles. Hmota velmi často nevyplňuje jistý objem — pokud buď již pouhým neb ozbrojeným okem viděti můžeme — spojitě, nýbrž rozpojitě, tak že zůstávají jisté mezery, dutinky, jež *pory* *) zoveme. Proto se uvádí často porovitost jako všeobecná vlastnost hmoty; avšak tak všeobecnou přece není, poněvadž jsou tělesa, u nichž ani mikroskopem porů žádných konstatovati nelze. Do porů těles mohou ovšem vnikati aneb jimi pronikati látky jiné. Tím lze snadno vysvětliti, že kapaliny prosakují tělesa tuhá, že vzduch neb plyny vnikají do těles tuhých anebo skrze tělesa tuhá pronikají, atd.

Tak lze rtuť protlačiti skrze kůži (vlastní vahou) aneb skrze dřevo (tlakem vzduchu), tak se vodou prosakuje dřevo a vypuzuje z něho vzduch, čímž dřevo, jež dříve na vodě plovalo, do vody zapadá, tak vsakuje se voda do útvarů skalních, jež pak mrznouc trhá. Podobně vniká olej do mramoru, achatu a j. Horkem se pory rozšiřují; platina a ocel v žáru propouští vodík, kterýž za teploty obyčejné udržuje.

Sklo naproti tomu nepropouští plyny i při teplotě velmi vysoké, což jest důležito, poněvadž se tím nádoby ze skla hodí pro udržení plynů i při teplotě vysoké.

Jsou však případy, kdy nelze mluviti o porovitosti ve smyslu výše uvedeném a kde přece vzájemné pronikání látek pozorujeme. U kapalin nelze zjistiti pory ani sebe silnějším mikroskopem; víme však, že kapaliny pohlcují, absorbují plyny v množství často úžasném. Míchají-li se pak kapaliny, jako na př. alkohol aethylnatý a voda, nastává stažení se, kontrakce objemu dosti značná. Také u plynů nelze mluviti o porech ve smyslu výše uvedeném; a přece vidíme, jak plyn jeden vniká, diffunduje do objemu druhým plynem zaujatého, ba že vniká do směsi obou plynů ještě jiný plyn třetí neb i čtvrtý atd.

Než představa neprostupnosti, zkušenostmi obecného života nám běžná, jest soudu našemu tak nutnou, že hledíme i zjevy takové uvésti s představou touto v souhlas. Nelze též upříti, že jedna okolnost této představě napomáhá; neboť ony výše uvedené úkazy absorpce a diffuse mají své meze, nepokračujíce do stupně libo-

*) *πείρω* pronikám; *πόρος* ó průchod, zejména »pory« těla lidského.

volného. Ale ovšem jest nesnadno vzhledem k úkazům těmto neprostupnost formulovati, bez jakési představy, hypothesy o složení, konstituci hmoty vůbec.

Hypothesou, kteráž prokázala fysice i chemii služby velice platné, jest *theorie atomická*. Stojíce pak na půdě této theorie můžeme neprostupnost formulovati v tom smyslu: hmoty mohou se prostupovati navzájem, avšak *atomy zůstávají neprostupnými*.

Východištěm pro theorii atomickou jest dělitelnost hmoty, vlastnost, která též za všeobecnou se uvádí. Zkušenost ukazuje, do jak značných stupňů jde dělitelnost jak umělá, tak zvláště přirozená. Známým toho příkladem jsou barviva, zejména pak látky těkavé, páchnoucí, jichž rozptylováním vznikají částečky nesmírně malinké. Avšak ještě dále jde dělení v myšlenkách; každou sebe menší částečku hmotnou můžeme si mysliti dále rozpůlenou atd., v myšlení není žádných mezí. Vzniká tudíž otázka, zdali jest hmota vskutku tak do nekonečna dělitelnou, jak si mysliti můžeme. Kdyby tomu tak bylo, pak by hmota dle své struktury byla analogickou útvarům geometrie, byla by spojitou jako na př. přímka. Porovitost by nebyla této představě na odpor; hmota jsouc porovitou, podobala by se přímce na několika místech přerušené, jejíž však jednotlivé části jsou spojité. Rozhodnouti otázku, zdali jest hmota continuum či discontinuum, spojitou či rozpojitou, lze ovšem jen s jistou pravděpodobností a to na základě zkušeností, jež činí nejen fysika, nýbrž zvláště chemie; a právě tato rozhoduje ve smyslu diskontinuity, jádra to theorie atomické.

Vzhledem k obtíži, jež při definování hmoty vzniká tím, že vlastnost výhradného zaujímání prostoru nelze pochopiti bez hypothesy o konstituci hmoty, uvádí se často *setrvačnost* hmoty za vlastnost charakteristickou. Hmota jest vše, co jest setrvačné. Tím jeví se pak setrvačnost ne jako fysikální zákon (axioma, Huygens, Newton), nýbrž jako vlastnost ex definitione. Mnoho však obratem tímto není získáno; místo na pole hypothesy vede definice ta na pole abstrakce; v klidu není vůbec žádná hmota, ale také ne v pohybu přímočarém a rovnoměrném, jehož určení samo jest možné jen abstrakcí *).

Od otázky, jak hmotu definovati dle nějaké význačné vlastnosti, čímž se určí rozsah pojmu, jest zcela rozdílnou otázka o podstatě hmoty, kteráž se týče obsahu pojmu. Přikloníme-li se názoru atomickému, lze otázku tu praecisovati v tom smyslu, jaká jest pod-

*) Srovnej též článek »O síle setrvačnosti« *Jos. Krkošky*, Časopis pro pěst. math. a fys. 36, pag. 143, 1907.

stata atomů, v čem záleží jich různost dle látky, zdali lze si mysliti hmotu jednotnou a pod., vesměs otázky, jež náleží k nejnesnadnějším problémům vědeckým.

§ 55. **Měřitelnost hmoty.**

Hmota stává se — nehledíc k otázce o její podstatě — předmětem fysikálního i chemického zkoumání, jakmile jest měřitelnou. Vzhledem k tomu, že každá hmota zaujímá nějaký prostor, byla by blízkou myšlenka, množství hmoty měřiti dle objemu. Jak známo obecný život v mnohých případech na tomto způsobu měření přestává. Avšak zkušenost učí, že objem téhož tělesa — od něhož hmoty neubíráme aniž k němu přidáváme — se mění tlakem i teplotou, zejména také, když zároveň se mění skupenství. Mimo to učí zkušenost, že různá tělesa téhož skupenství — na př. tuhého — při témže objemu dle různé látky též značné ukazují různosti ve smyslu fysikálním. Tak na př. pohybují-li se stejnou rychlostí proti sobě a srazí-li se, nejeví se účinek rázu u obou stejně velikých těles stejným způsobem. Nebylo by nemožno, alespoň u těles tuhých, souditi z těchto účinků kinetických na velikost hmoty.

Jest však jiná vlastnost, povahy statické, kterou mají všechny hmoty a kterou seznáváme na základě zkušenosti již od nejútlejšího mládí. Všechny hmoty jsou těžké, tíhnou, gravitují k zemi, mají váhu. Pokud hmoty neubíráme ani nepřidáváme, zůstává tato váha nezměněnou, byť i objem hmotou zaujatý se měnil způsobem jakýmkoli. I jest patrno, že vzhledem k tomu tato váha jeví se býti tou veličinou neproměnnou, kterou můžeme uvésti ve spojení s pojmem hmoty jakožto kvantity; jinak řečeno, *vahou můžeme měřiti hmotu*. Věc vlastně jest zřejmá především, jen když jde o touž látku. Většímu množství látky odpovídá větší váha. Avšak úsudek tento generalisujeme i pokud se týče látek různých. Vidíme-li, že jakýsi objem rtuti má větší váhu než týž objem vody, soudíme, že jest v témž poměru i hmota oné rtuti větší než hmota vody. Neznajíce podstatu hmoty nemáme vlastně pro úsudek tento zřejmého důvodu než jen právě ten, že úsudek, který se jeví býti jasným a oprávněným u jedné a téže látky, generalisujeme na látky i jakkoli různé. Oporou tohoto úsudku jest ovšem chemie, která učí, že, když se látky slučují neb rozlučují, tak že z daných látek vznikají nové, vlastností zcela rozdílných, přece váha zůstává nezměněnou *). Také to jest velmi

*) V posledních letech vyskytly se některé práce, jež poukazovaly k tomu, že věta o nezměnitelnosti váhy při reakcích chemických není zcela přesně v platnosti. Ukazovaly se ztráty na váze. Avšak v novější době rozhodl *H. Landolt* prací velice kritickou, po 9 let trvající, že všechny takovéto výjimky jsou jen zdánlivé a že jsou způsobeny vlivy při vážení vedlejšími. Viz Sitzungsber. d. Berliner Akademie pag. 354, 1908.

důležité, že tento způsob měřiti kvantitativně hmotu, nikde nevede ani v otázkách statických ani kinetických k odporům, jako jest na př. v souhlasu se zákony o rázu těles, při čemž jich váha nemá vlivu žádného, nýbrž jenom jich hmota.

Pravíme-li, že hmotu měříme vahou, nepravíme, že hmota jest váha. Vskutku jest váha veličina podmíněná, jak později blíže shledáme, kdežto s hmotou spojujeme představu veličiny nepodmíněné. Jistá koule platinová měla by na př. na různých oběžnicích různou váhu, ba již na různých místech země, ale její hmota byla by stále tatáž. Úsudek však, že na témže místě při stejné váze jsou i hmoty kvantitativně stejné, má platnost všeobecnou, poněvadž zde neběží o to, jaká tato váha jest, nýbrž jen, aby byla stejnou. Proto jest nutno oba tyto pojmy od sebe přísně rozeznávati. Na jednom a témže místě povrchu zemského jsou hmota a váha veličiny úměrné; avšak faktor úměrnosti se může dle povahy pole gravitačního měniti.

§ 56. **Definice kilogrammu.**

Jednotkou hmoty může býti hmota jakákoliv. Vskutku také bylo dříve v různých dobách a v různých zemích užíváno jednotek ve veliké rozmanitosti, té podobné, která zavládla v užívání jednotek délkových. Bylo tedy zcela odůvodněno, že s reformou měr délkových (a s nimi souvisících měr plošných a tělesných), jak byla provedena ve Francii koncem století minulého, šla parallelně reforma míry hmotné. Při tom uvažováno, aby podobně jako jednotka délky, také nová jednotka hmoty byla vhodným způsobem definována a pak dle této definice realisována.

Východištěm této definice byl úmysl, číslo, které vyjadřuje hmotu specifickou těles, učiniti identickým s číslem, které vyjadřuje hustotu těles. Obě tyto veličiny, specifická hmota a hustota, nejsou, jak později vyložíme, *co do pojmu* nikterak totožné, ale ovšem jest možno, vhodnou volbou jednotky hmotné, učiniti je *číselně* totožnými. Toho pak se docílí, když se jednotka hmoty odvodí od téže látky, která jest při hustotě základem, a tou jest *voda maximální hustoty*.

Týž objem vody, na př. 1 dm^3, má různou hmotu a tudíž i různou váhu dle teploty své a dle tlaku. Vliv tlaku není ovšem značný, jako u kapalin vůbec; předpokládáme vždy i když to zřejmě není vytčeno, obyčejný, anebo určitěji, normální tlak atmosférický. Zbývá pak jen vliv teploty, kterýž u vody ukazuje zvláštní anomalii. Přibývá-li totiž teploty, od 0° počínajíc, vzrůstá z počátku hmota vody a dosahuje při teplotě asi 4° C hodnoty maximální; odtud pak při teplotě dále vzrůstající zase klesá. Pravíme, že voda má při určité pro vodu charakteristické teplotě hustotu maximální *).

V soustavě metrické jest jednotka hmoty *kilogramm*, jsouc definována jako *hmota krychlového decimetru vody hustoty maximální za absolutního tlaku jedné atmosféry.*

Jednotka tato zvala se »jednotkou váhy« (unité de poids), ale není žádné pochybnosti, že byla míněna jako jednotka hmoty. Kdyby měla býti opravdu jednotkou váhy, t. j. síly, jakou se hmota krychlového decimetru vody hustoty maximální zemí přitahuje, byla by musila definice obsahovati poukázání především na prostor vzduchoprázdný — neboť ve vzduchu by ona váha byla menší — pak na určité místo povrchu zemského, t. j. na místo určité geografické šířky, po případě i délky a určité výšky nad hladinou mořskou (na př. nullové). Ale toho všeho v původní definici nebylo a jest vskutku s podivením, že mohla později vzniknouti domněnka, jako by kilogramm měl býti jednotkou váhy. Říkáme-li, že jistá hmota na př. jisté množství rtuti má »váhu jednoho kilogrammu«, jest tím jen míněno, že má váhu takovou jako na témže místě jeden kilogramm, čímž není řečeno, jak velikou tato váha jest, nýbrž jedině, že obě ty hmoty mají váhu stejnou. Při této stejnosti nezáleží pak ovšem na tom, jakým to místo povrchu zemského jest; vacuum, čili lépe řečeno, redukce na vacuum jest při tom vzhledem k vážení nutnou, poněvadž konstatujíce vahami, že váha obou hmot jest stejnou, musíme vzpomenouti toho, že srovnáváme vlastně váhu jednoho i druhého tělesa umenšenou, a to různě umenšenou, vzhledem k tak zvané ztrátě na váze ve vzduchu. Kdyby kilogramm měl vskutku býti jednotkou váhy — ovšem zcela určitou — musil by se pro každé místo povrchu zemského anebo aspoň pro každou geografickou šířku zhotoviti různě veliký.

Zásadní rozhodnutí o tom, že kilogramm není jednotkou váhy (síly), nýbrž hmoty, stalo se — k návrhu komitétu — při první internacionální konferenci metrické roku 1889 zcela určitě formulací: »internacionální kilogramm udává jednotku hmoty.« Pro říši německou byl v době nejnovější stanoven nový řád pro míry a váhy zákonem ze dne 30. května 1908. Odstavec prvý tohoto zákona zní: Kilogramm jest hmota internacionálního prototypu kilogrammového. Viz Mittheil. d. kais. Normal-Eichungs-Kommission, pag. 43., 1908. Přes to vše vedou se dosud v literatuře zcela zbytečné diskusse, je-li kilogramm jednotkou váhy nebo hmoty.

*) Dle prací nejnovějších nastává maximum hustoty při $t^* = 3{\cdot}98°$ dle teploměru vodíkového. Viz Thermiku, pag. 105, 1908.

§ 57. Realisace kilogrammu.

Úkol, dle definice kilogramm uskutečniti, realisovati, provedl z uložení kommisse metrické *Lefèvre-Gineau* *). Úkol ten měl dvojí stránku. Jednalo se především o měření objemové, ale také o studium, při které teplotě hustota vody je maximální a jak se mění v blízkosti této charakteristické teploty. Myšlenka, stanoviti kilogramm dle definice přímou methodou, totiž sestrojiti dutou krychli objemu 1 dm^3, tuto naplniti vodou hustoty maximální a stanoviti váhu vody netto, nedá se provésti, protože naplniti onu krychli tak, aby vodní povrch byl přísně rovinným, není možno vzhledem ke zjevům kapillárním. Musila tudíž býti volena methoda nepřímá, nikoli vážení duté krychle s vodou, nýbrž vážení na př. krychle ve vodě. Ztráta na váze, dle zákona Archimedova, udává pak opět váhu téhož objemu vody. Místo krychle doporučoval se však raději válec, u něhož geometrickou pravidelnost lze (na soustruhu) přesněji zaručiti než u krychle. Také vyměření válce a tudíž vypočítání jeho objemu lze provésti s přesností větší, než u krychle. Při tom se doporučovalo, objem válce voliti značně větší než 1 dm^3, aby chyby pozorovací měly na výsledek menší vliv.

Válec, jehož užil Lefèvre-Gineau, byl mosazný a měl výšku a průměr asi $^1/_4$ metru.

Přesné stanovení výšky (ze 37 pozorování) dalo průměrnou hodnotu

$$2{\cdot}437672\ dm.$$

Podobně přesné stanovení průměru (ze 48 pozorování) dalo průměrnou hodnotu

$$2{\cdot}428368\ dm.$$

Z toho vypočten objem

$$11{\cdot}2900054\ dm^3,$$

vše to při teplotě 17·6° C.

Válec ten nebyl ovšem massivní; neboť hmota takového plného válce by byla asi 95 kilogrammů, tedy příliš veliká, než aby vážení se mohlo díti s největší přesností. Proto byl válec vypracován dutě. Aby pak tlak vnějšího vzduchu nebyl rozdílný od tlaku vzduchu uvnitř válce obsaženého, což by mělo vliv na objem, vliv ovšem dle tlaku měnlivého též měnlivý, bylo postaráno — úzkou trubičkou — o stálou kommunikaci mezi vzduchem vnitřním a vnějším. Jednotka, dle níž váženo, byla jakási provisorní, také mosazná; ovšem že násobky a díly její byly s přesností největší zjednány.

*) *Lefèvre-Gineau, Louis* (1751—1829) byl professorem mechaniky (1786) a pak experimentální fysiky (1804) na Collège de France. Do kommisse metrické byl povolán v roce 1794. Gineau se nazýval dle svého rodného města.

Vážení prováděno při střední teplotě vody 0·3° C; neboť teplotu blíže nully lze (ledem tajícím) daleko snáze zjednati a udržeti než teplotu nějakou vyšší. Ovšem že pak bylo nutno zvláštní pozorování konati o tom, jak se hustota vody odtud až přes teplotu 4° C mění, aby vážení bylo lze na vodu hustoty maximální přepočítati. Přídavkem »maximální hustoty« měla definice kilogrammu býti učiněna nezávislou na jakékoliv stupnici teploměrné.

Když tímto způsobem konečně bylo zjištěno, kolika oněm provisorním jednotkám hmotným jeden kilogramm odpovídá, byl z platiny vypracován massivní válec hmoty úplně identické, a to byl první kilogramm, tak zvaný *kilogramme primitif* čili *des archives*, který týmž zákonem, jako *mètre des archives* byl prohlášen za novou jednotku hmoty.

§ 58. **Nové prototypy.**

Když po četných internacionálních konferencích, kteréž konány byly v Paříži v letech 1869—1875, uzavřena byla internacionální konvence metrická d. d. $^{20}/_{5}$ 1875 a když v souvislosti se smlouvou touto zahájeny roku 1878 práce v internacionálním ústavu pro míry a váhy v Breteuilu, bylo prvním předmětem prací těchto zhotovení nových prototypů metru a kilogrammu, kteréž by vstoupily na místo oněch původních »des archives«. Jako nové prototypy metru, byly i nové prototypy kilogrammu ve větším počtu (42 kusy) zhotoveny ze zvláštní slitiny platiny (90%) a iridia (10%) *) v letech 1876—1889. Když pak roku 1889 dle ustanovení konvence metrické sešla se v Paříži první generální konference pro míry a váhy, byl z nových těch prototypů kilogrammu jeden uznán za úplně identický s oním kilogrammem des archives, a tento nový kilogramm, jenž se označuje písmenou ℜ, jest vlastním základem authentickým pro všechny kilogrammy normální. Z ostatních nových prototypů zůstaly některé jako internacionální v ústavu Breteuilském k účelům manipulačním, jiné pak byly jako nacionální losem (po dvou) rozděleny mezi státy, které přistoupily k oné smlouvě metrické.

Rakousku připadly prototypy kilogrammové N° 14 a 33, z těchto pak byl zákonem ze dne 12. ledna 1893 Ř. Z. N° 10 kilogramm N° 33 prohlášen za vlastní normale základní **), kdežto

*) Materiál ukazoval, dle dodatečné analyse, iridia 10·08 až 10·09%, vedle toho stopy rhodia 0·01 až 0·02% a stopy železa 0·01%.

**) Nový tento kilogramm normální pro Rakousko vstoupil na místo kilogrammu křišťálového, který byl zákonem ze dne 23. července 1871 Ř. Z. 1872 N° 16 za normální prohlášen, čímž zákon tento, pro zavedení soustavy metrické v Rakousku velice důležitý, byl pozměněn.

druhý N° 14 slouží za manipulační normale prvého řádu. Oba kilogrammy — jakož i příslušné étalony metrové N° 15 a 19 — uschovány jsou v pevných, proti ohni bezpečných skříních v ústavu c. k. normální cejchovní kommisse ve Vídni.

Starý prototyp platinový, kilogramm des archives, jest nyní již jen památkou historickou. Nový kilogramm ℜ jest tak přesnou jeho kopií, jak vůbec prostředky nejjemnějšími toho lze dosíci.

Rakouský kilogramm N° 33 má tvar přímého kruhového válce zaoblených krajů. Hlavní řez osový válce jest čtverec, jehož strana jest 39 *mm*. Jeho číslo »33« jest vryto ve dvou třetinách výšky. Při teplotě nullové jest jeho objem 46·408 *ml*, jeho hustota = 21·5482. Vztah k prototypu ℜ jest dán rovnicí:

$$\text{kilogramm N° 33} = \Re + (0{\cdot}061 \pm 0{\cdot}002)\ mg.$$

§ 59. **Násobky a díly grammu; označení.**

Slovo »kilogramm« poukazuje již k tomu, že vlastní jednotkou hmoty byl míněn gramm, t. j. tisící část kilogrammu, čili hmota krychlového centimetru vody maximální hustoty. Jenom proto, že hmota gramm jest malá, ustanoven pro realisaci jednotky hmotné kilogramm. Násobky však a díly jsou odvozeny dle grammu *). Pojmenování a označení, kteréž u nás v Rakousku bylo zavedeno z usnesení c. k. norm. cejchovní kommisse ve výroční schůzi roku 1885, ukazuje přehledně tabulka následující:

1000	kilogramm	= tuna	*t*
100	»	= (metrický) cent	*q*
1000	gramm	= kilogramm	*kg*
100	»	= hektogramm	*hg*
10	»	= dekagramm	*dkg*
1	»	= gramm	*g*
0·1	»	= decigramm	*dg*
0·01	»	= centigramm	*cg*
0·001	»	= milligramm	*mg*
0·000001	»	= mikrogramm	*γ*

*) Pojmenování gramm vzato z řeckého *γράμμα, τὸ* (od *γράφω* = rýti); značka, písmeno, vše psané, kniha, ale také malé závaží; v tomto smyslu užívali slova toho geoponici (scriptores rei rusticae).

S jednotkami délkovými souvisí tyto jednotky hmotné dle schematu tohoto:

m	m^3	tuna,	t
dm	dm^3	kilogramm,	kg
cm	cm^3	gramm,	g
mm	mm^3	milligramm,	mg
μ	μ^3	mikrogramm,	γ.

Tuna mohla by se zváti též megagramm. Francouzsky zove se millier. Desetina tuny, čili 100 kg, zavádí se jako jednotka obchodní pod názvem »metrický cent«. (V Německu: Doppelzentner dz, označení méně vhodné, které jednak zbytečně upomíná na starý cent, jednak odchylně užívá písmena d, jež jinak naznačuje deci-.) Označení metrického centu písmenem q souvisí s pojmenováním, jak jest v zemích románských obvyklé (quintale metrico, quintal métrique, také v angličině quintal), ačkoli officiální označení na př. italské jest centinajo metrico.

Násobku hektogramm se neužívá. Jednotka mikrogramm s označením γ začíná se zaváděti teprve v dobách novějších dle analogie »mikrometru« (jak by se důsledně musilo říkati, kdyby nebylo slovo již zadáno) čili tisíciny millimetru = μ (mikron).

§ 60. Závaží; uspořádání, materiál.

Stanovení hmoty libovolně veliké, jak se provádí vážením, vyžaduje, aby byla pohotově celá řada známých hmot na výběr, tak aby jakýkoli násobek neb díl grammu mohl býti sestaven. Takovou řadu známých hmot zoveme závažím. Jeho uspořádání, jak nyní jest předepsáno *), řídí se dle prvočísel 1, 2, 5 čísla 10; musí však buď 1 neb 2 býti zastoupeno dvakrát **). Máme tedy buď

řadu	5	2	2*	1
nebo řadu	5	2	1	1*

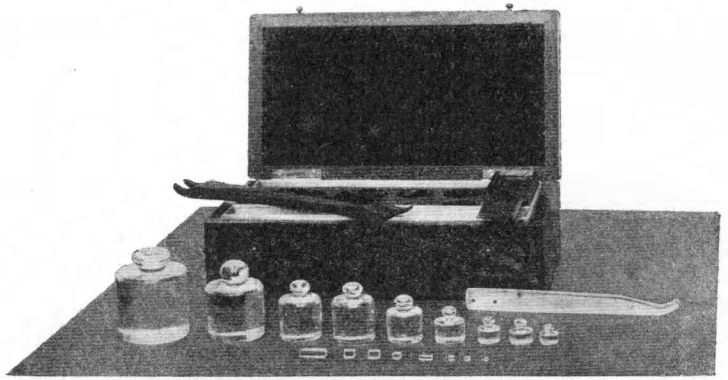
Soustava prvnější má tu přednost, že jest $5 + 2 + 2 + 1 = 10$, t. j. že každá serie hmot je pro sebe dekadicky uzavřena.

Soustava druhá značí úsporu materiálu, poněvadž se vystačí i při součtu $5 + 2 + 1 + 1 = 9$, ale jest při vážení méně pohodlnou.

*) K cejchování se závaží jinaká nepřipouštějí.

**) V tom jest právě vada tohoto uspořádání; jest pak nutno, při přesném vážení stejnojmenná závaží přece dobře vzhledem k eventuálním korrekcím, jež se srovnáváním závaží zjednají, od sebe rozeznávati, na př. indexem * nebo ', který se k číslu na závaží vyraženému má připojiti; ale ovšem přes to jest záměna snadno možnou. Soustava na př. 4, 3, 2, 1, jak ji r. 1895 navrhl *D. J. Mendělějev*, by této vady neměla, a bylo by též $4+3+2+1 = 10$.

Materiálem pro závaží přesné jest mosaz, (také, ač méně často, bronz, pakfong č. argentan), která se zlatí, po případě nikluje; závaží mosazná jdou od 2 kg dolů až do 1 g. Pro díly grammu užívá se někdy drátku aluminiového, do spirály stočeného, častěji plíšků platinových neb aluminiových. Jest při tom pohodlno, když malá tato závažíčka již svou formou poukazují na svou hodnotu. Proto se pro decigrammy užívá drátu silnějšího, pro centigrammy (eventuálně i pro milligrammy) slabšího a spirála má závitů buď pět neb dva neb jeden. U plíšků pak ukazuje hodnotu forma pěti-, čtyr- a troj-úhelníka. Výborným materiálem pro závaží k účelům přísně vědeckým jest křišťál. Velké kusy, na př. 100 g neb výše, jsou ovšem velmi drahé; menší však kousky, na př. pro díly grammu, jsou laciné a tudíž se pro vážení velmi přesná lépe doporučují, než drátky



Obr. 32.

a plíšky. Závaží takové, upravené dle systému 5, 2, 2, 1 a jdoucí od 0·01 g do 100 g, ukazuje obr. 32. Dobrým materiálem bylo by též sklo, u něhož otázka ceny jest vedlejší. Závadou jest však (zejména pro účely obchodní) jeho křehkost a jeho malá hmota specifická. V laboratořích vědeckých lze však s výhodou upraviti, zejména pro hmoty 5 kg a výše, závaží skleněná formy baňkovité a dutá, obsahující uvnitř broky olověné většího kalibru *) hlavně pro práce,

*) Závažím ze skla neb křišťálu se vytýká, že se snadno stávají elektrickými. Elektrisaci závaží křišťálových pozorovali při pracích svých již *Regnault*, též *Dumas*, *Boussignault*, *Stas* a j. Elektrisace lze se však uvarovati tím, že se závaží — jakož jest též z jiných důvodů pohodlné — při vážení rozestaví ve skříni vah na desce mramorové neb skleněné; neboť elektrisace vzniká hlavně tehdá, když se závaží vkládají ve skříňce vlastní do svých přihrádek obyčejně látkou ně-

kde by magnetičnost materiálu mohla býti na závadu. Velká závaží, na př. 10, 20, 50 *kg*, bývají obyčejně železná.

Správnost závaží k účelům obchodním zabezpečuje se státní kontrolou (cejchováním). Při tom existují zcela určité předpisy, až do jakých mezí jsou u jednotlivých závaží — dle jich velikosti — odchylky přístupny. Závaží dutá jsou zakázána.

Pro *závaží praecisní* předpisuje u nás normální cejchovní kommisse, aby měla formu zkomoleného kužele s menší plochou dolejší. Výhoda toho je patrna; závaží, když se vkládají ve skříňce do příslušných dutin, anebo když se vyndavají, méně se otírají. Vezme-li se průměr hořejší plochy za jednotku, jest průměr dolejší plochy a výška zkomoleného kužele předepsána čísly:

0·85,	0·92	při závažích	20 *kg* . . .	500 *g*
0·80,	0·45	„ „	200 *g* . . .	5 *g*
0·80,	0·22	„ „	2 *g* a	1 *g*.

Závaží menší mají tudíž býti více plochá než větší. Knoflík nesmí býti přišroubován, nýbrž musí býti v celku vysoustruhován. Okraje jsou zaoblené.

Hmoty peněz přizpůsobují se nyní soustavě grammové. Z našich peněz (dle stavu počátkem r. 1900) má:

stříbrná koruna	hmotu	5 *g*
niklový 20-haléř	„	4 *g*
niklový 10-haléř	„	3 *g*

Podobně má ve Francii:

stříbrný frank	hmotu	5 *g*
„ 2-frank	„	10 *g*
„ 5-frank	„	25 *g*

a na Rusi:

stříbrný nový rubl	hmotu	20 *g*
„ 50-kopejk	„	10 *g*
„ 25-kopejk	„	5 *g*.

Jak viděti, pokračuje u peněz ruských a francouzských váha mince úměrně s její hodnotou. U nás tohoto přirozeného pravidla nebylo šetřeno; naše koruna má hmotu 5 *g*, pětikoruna však nikoli 25 *g*, nýbrž jen 24 *g*.

§ 61. **Litr a krychlový decimetr; poměr.**

Tak jako při metru, ukázalo se — pozdějšími pracemi — také při kilogrammu, že jest jen přibližnou — ačkoli velmi přibližnou — realisací definice. Dle této měl objem jednoho kilogrammu vody

jakou obložených a vždy zase odtud vytahují. Jinak lze otřením stanniolovým lístkem případné náboje odvésti. Dle návrhu *Dornova* lze ještě dokonaleji a snadněji se zbaviti elektrisace ionisací vzduchu, tak totiž, že ve skříňce vah se umístí nějaký radioaktivní praeparát.

maximální hustoty, za tlaku jedné atmosféry, t. j. tak zvaný litr, býti identický s krychlovým decimetrem. Avšak vzhledem k oné odchylce kilogrammu des archives ℜ od kilogrammu ideálního, který by zcela přesně odpovídal definici, jest nutno, ovšem jen při nejpřesnějších pracích vědeckých, litr od krychlového decimetru rozeznávati. Definitivní stanovení poměru mezi litrem a krychlovým decimetrem jest jedním z vědeckých úkolů internacionálního ústavu Breteuilského, jehožto prostředky k provedení takové — nikoli snadné — práce jsou dosud nejlepší.

Jak viděti, situace se změnila. Dříve se hledala hmota, kteráž by byla rovnou hmotě nejhustší čisté vody určitého objemu (dm^3). Nyní, kdy jest tato hmota dána prototypem kilogrammu platinového resp. platinoiridiového ℜ, hledá se naopak objem čisté vody nejhustší, tak, aby její hmota se rovnala oné hmotě dané.

Litr jest objem jednoho kilogrammu vody té teploty, při níž voda dosáhne největší hustoty za absolutního tlaku jedné atmosféry a při tomto tlaku měřený. (Zákon d. d. $^{12}/_{1}$ 1893, Ř. Z. $^{31}/_{1}$ 1893 číslo 10.) Věc tato jest zásadně proto důležitou, poněvadž se objem těles velice zřídka stanoví přímo, t. j. vyměřením, nýbrž skoro vždy nepřímo, t. j. vážením, jak již na svém místě bylo vytčeno.

Zásadně není tudíž identity v označení:

$$l \text{ a } dm^3$$
$$ml \text{ a } cm^3.$$

Mnozí zavádějí ještě označení λ pro mikrolitr ($10^{-6}\,l$), tak že jest pak analogicky

m	*g*	*l*
mm	*mg*	*ml*
μ	γ	λ.

Pracemi posledních let jest ostatně — jak na generální schůzi konvence metrické roku 1907 bylo ohlášeno — otázka, o níž zde jednáno, již definitivně rozřešena.

Pro hmotu kubického decimetru vody při maximální hustotě nalezli *)

Chappuis	0·999 974 ℜ
Macé de Lépinay, Benoît, Buisson	0·999 972 »
Guillaume	0·999 971 »

*) Viz Bulletin des séances de la Société Française de physique, 21. prosince 1907 v přednášce, kterou o předmětu tom měl *Ch. Ed. Guillaume.*

Dle toho byl by kilogramm správně určen až asi na 28 *mg*, čili na 3 tisíciny procenta, o kteroužto část jest proti definici větším.

§ 62. **Specifická hmota a hustota.**

Hmota M tělesa nějakého jest úměrná jeho objemu V čili

$$M = SV.$$

Faktor S úměrnosti charakterisuje *látku* (materiál) a zove se *hmotou specifickou*; jest to hmota jednotky objemové.

Zpravidla volí se jednotky

pro objem . . . . cm^3
» hmotu . . . . *g*.

Totéž číslo platí však též, když se volí

pro objem dm^3 nebo mm^3
» hmotu *kg* » *mg*.

Při stejném objemu V jest u dvou těles:

$$\frac{M}{M'} = \frac{S}{S'} = D.$$

Číslo D, udávající, kolikrát jest hmota M nějakého tělesa větší než při témže objemu hmota M' tělesa jiného, kteréž za základ srovnávání volíme, zove se *hustotou* (densitas) onoho tělesa prvého. Za základ srovnávání volí se, jakož se dálo již dříve, než soustava metrická byla zavedena, voda maximální hustoty. Pro tuto jest však, dle definice grammu, resp. kilogrammu,

$$S' = 1,$$

tudíž pak

$$S = D.$$

Hmota specifická a hustota jsou tudíž stejná čísla.

V této stejnosti číselné není však obsažena stejnost pojmová. Hmota specifická jest číslo pojmenované, hustota jest však číslo nepojmenované, číslo prosté. Nicméně jest tato číselná stejnost výhodou a ovšem také příčinou, že se ony pojmy mnohdy vespolek zaměňují, tak že dokonce mnozí i opačně pojmy ty vykládají, ač to není ani vhodné ani — vzhledem k užívání slova »specifický« v jiných oborech fysiky — důsledné.

§ 63. **Vliv tlaku a teploty.**

Na hmotu specifickou S a tudíž i na hustotu D mají vliv faktory, jimiž lze objem téže hmoty měniti. Jest to tlak a teplota. Vliv obou těchto faktorů jest však kvantitativně různý dle skupenství. U těles tuhých jest vliv tlaku i teploty velmi skrovný, u kapalin jest vliv tlaku zcela nepatrný, vliv teploty poněkud větší. U těles tuhých a kapalných se proto vliv tlaku ignoruje; teplota, při které měření provedeno, musí však býti udána.

Vliv rozhodující má však tlak a teplota u plynů; proto dlužno vždy určitě udati, pro jaký tlak a jakou teplotu specifická hmota neb hustota platí. Zpravidla udává se pro tak zvané poměry normální, totiž pro tlak jedné atmosféry a pro teplotu tajícího sněhu. Pro jiný tlak a jinou teplotu lze pak specifickou hmotu i hustotu dle jistých zákonů — Boyle-Mariottova a Gay-Lussacova, jež později seznáme, — počítati.

§ 64. **Hutnost plynů a par.**

Čísla udávající specifickou hmotu neb hustotu plynů a par jsou velmi nepřehledná, poněvadž velmi malá. Důvod toho jest patrný; čísla vztahují se k vodě, tudíž k látce daleko hmotnější než jsou plyny a páry. Proto jest zde obyčejem, ke srovnání tomuto voliti také plyn, na př. vzduch, (eventuálně vodík). Poněvadž však hmota tohoto jest podmíněna tlakem a teplotou, jest nutno blíže poměry tlakové a tepelné udati.

Tu pak jeví se býti nejjednodušším, hmotu nějakého plynu jistého objemu srovnávati s hmotou téhož objemu vzduchu, *při témže tlaku a téže teplotě*. Poněvadž se dle zákonů výše jmenovaných tlakem a teplotou *objem všech plynů mění stejným způsobem*, tedy se volbou *téhož* tlaku a *téže* teploty obdrží číslo, z něhož *vliv tlaku i teploty* jest *vymýcen*, tedy číslo, jež charakterisuje *jediné* chemickou podstatu, *jsouc na tlaku a teplotě vůbec nezávislé*. Číslo toto jest na př. 1·52 pro kysličník uhličitý CO_2. Znamená tedy, že hmota nějakého objemu tohoto plynu jest o 52% větší, tudíž i těžší, než hmota *téhož* objemu vzduchu při témže tlaku a téže teplotě; jaký však jest tento tlak a jaká teplota, jest jednomyslno.

Číslo toto zove se *hutnost* plynu neb páry.

Pro toto číslo není vlastně vhodného názvu, v řeči naší právě tak málo jako v řečech jiných, ve francštině, němčině, angličině atd. Zde užívá se názvů, jaké by, přeloženy, dávaly slovo hustota (density, Dichte atd.).

Avšak slova tohoto užiti naprosto nelze, nemá-li vzniknouti *rozpor* mezi stránkou vědeckou a jazykovou. Když se na př. plyn nějaký, vzduch a pod. stlačí, pravíme, že se *zhustí;* jinak že se *zředí*; mluvíme o plynech zhuštěných a zředěných. Vývěvami zhušťujeme vzduch neb zřeďujeme. Kdybychom však pro ono číslo přijali slovo hustota, musili bychom říci, že plyn zhuštěný má touž hustotu jako plyn zředěný; *zhuštěním* by se tedy neměnila *hustota*. V tom jest tedy jazyková kontradikce. — Nezbývá tudíž než voliti označení jiné. Již se ujalo slovo *hutnost* (hutnota). Slovo jest uměle vytvořené, patrně z téhož kmene, jako slovo hustota. Podobně se dálo v jazyku německém. Zde se užívá slova »Dichtigkeit« ve smyslu hustoty, slova »Dichte« ve smyslu hutnosti, ač zde nikterak není ustálené jednotnosti. Když se však v češtině slovo hutnost v tomto významu přijme, pak jest nesprávné užívati téhož slova ve smyslu *hustoty* u těles tuhých a kapalných, kde není v tomto smyslu hutnosti nezávislé na tlaku a teplotě. Při plynech pak nesmíme viděti rozpor ve větě: plyn nějaký se stlačením zhustí, avšak jeho hutnost se tím nemění. Název »hutnota« jest užívanější, ale vadí, že zní tak jako hustota. Proto by se spíše doporučoval název *hutnost*.

§ 65. **Specifický objem.**

Vedle *specifické hmoty* S jest užívána převratná (reciproká) její hodnota jakožto *specifický objem* $\frac{1}{S}$. Tam jest to hmota jednotky objemové, zde jest to objem jednotky hmotné. Je-li tedy na př. specifická hmota korku 0·2, jest jeho specifický objem 5, t. j. 1 *g* korku má objem 5 cm^3, nebo 1 *kg* objem 5 dm^3, nebo 1 *mg* objem 5 mm^3. Zvláštního označení se zde neužívá, píše se $\frac{1}{S}$ a čte se jako specifický objem. Tlak a teplota má ovšem na objem specifický obrácený vliv než na specifickou hmotu.

Z toho, co jsme o významu pojmu »hutnost plynů a par« vyložili, rozumí se samo sebou, že převratná hodnota hutnosti nemá se specifickým objemem nic co činiti.

§ 66. **Tělesa stejnorodá a různorodá.**

Srovnávajíce vespolek částečky téhož daného tělesa, větší neb menší, po případě tak malé, jak je vůbec dělením můžeme obdržeti a pak mikroskopicky pozorovati, shledáváme buď shodu všech vlastností anebo různost třebas jen některých vlastností. V prvém případě pravíme, že těleso jest *stejnorodé*, *homogenní*, v druhém, že jest *různorodé*, *heterogenní* (nehomogenní) *).

*) Z řeckého *γένος*, *τό* rod, *ὁμός* adj. stejný, společný, *ἕτερος* adj. jeden z obou, druhý, jiný, různý.

Vzduch v ovzduší, zemi obklopující, celkově není homogenním, ale jest jím v malých objemech, kde lze teplotu udržeti všude stejnou; podobně voda v moři a voda v malé nádobě. Mnohé horniny, jakožto směsi různých látek, jsou různorodé; naproti tomu vápenec, křemen a j. čistě vyhráněné jsou stejnorodé. Světlo šíří se v prostředích homogenních přímočaře; eventuální různorodost lze opticky nejcitlivěji (na př. methodou Töplerovou) demonstrovati.

§ 67. **Tělesa isotropní a anisotropní.**

Plyny a kapaliny, stejné všude teploty, ukazují vlastnosti, jež se v různých směrech jeví zcela shodně. Když však kapaliny, tuhnouce, přecházejí do skupenství nejnižšího, vznikají tělesa tuhá všeobecně dvojího způsobu: *krystallická* neb *amorfní* *). Tělesa krystallická jeví určitou strukturu, určité tvary, pravidelně omezené, a shrnují se přehledně ve zvláštní soustavy. U takovýchto krystallů, jež jsou homogenními, pozoruje se, že mnohé vlastnosti fysikální, jako pružnost, roztažnost tepelná, vodivost tepelná a elektrická, rychlost šíření se světla a pod., buď ve všech směrech stejně se jeví, nebo v některých odchylně; v prvém případě pravíme, že krystally jsou *isotropní*, v druhém, že jsou *anisotropní* **). Isotropie pozoruje se jen v jediné (první) soustavě krystallické, v ostatních jest anisotropie.

Tělesa amorfní (beztvará, v tom smyslu, že neukazují *určitého* tvaru) mohou býti po případě jen nahodile amorfními, tak že za jiných okolností krystallisují. Případ tento ukazuje se někdy na př. u skla, kteréž při rychlém chladnutí jest beztvaré, ale kteréž někdy během dlouhého času nabývá krystallické struktury, stávajíc se zrnitým a ztrácejíc průhlednost. Jsou však látky, jako na př. látky bílkovité, kteréž nejsou schopny krystallisace, zůstávajíce za všech okolností amorfními. Takové zoveme *kolloidy* ***), kladouce proti nim *krystalloidy*. Tělesa amorfní bývají isotropní, mohou se však (na př. tlakem, jako sklo) státi anisotropními.

*) Řecké slovo *κρύσταλλος* *ὁ* značí původně led, (v italštině Monte cristallo, = ledovec), pak těleso čiré, průhledné jako led, krystall; *μορφή* *ἡ* tvar, postava, *ἀ* privativum.

**) *ἴσος* adj. stejný, *τρέπω* točím, obracím.

***) Název pochází z řeckého *ἡ κόλλα* klih, *κολλάω* klížím, ve francštině la colle klih.

Vlastnosti anisotropie, význačné krystallům jakožto látkám pevným, jeví též některé kapaliny ve svých nejmenších částečkách. *O. Lehmann* *), jenž objev tento (1889) učinil, nazval částečky takové *tekoucími* a *tekutými krystally*, název, kterýž dle dosavadních běžných představ zní jako »oxymoron«, poněvadž se krystallický stav za význačný pro skupenství pevné pokládá. Bylo od mnohých poukazováno na možnost, že to, co v kapalině pod mikroskopem krystallické vlastnosti jeví, jsou částečky pevné, po způsobu emulsí **) v kapalině obsažené, jež by byly analogické s nejjemnějším práškem obyčejných krystallů v kapalině obsaženým. Zdá se však, že vskutku se jedná o krystally, jež jsou na kraji přechodu svého do skupenství kapalného.

§ 68. **Theorie atomická.**

Jednajíce o dělitelnosti hmoty naznačili jsme již otázku, zdali dělení i v myšlenkách má určitou mez, anebo, zdali jde do nekonečna; jinak řečeno, zdali hmota jest discontinuum nebo continuum. Otázka tato jest tak stará jako badání vědecké o přírodě vůkol nás. Byla řešena se stanoviska filosofického i fysikálního. Záhy již rozeznávaly se zde dva směry, kteréž označovány slovy: atomismus, dynamismus; tento pokládá hmotu dle analogie útvarů geometrických za něco souvislého a oživuje ji silami; onen považuje hmotu za složenou z částeček dále nedělitelných, zvaných *atomů* ***). Názor dynamistický jest patrně jednodušší, ale právě pro tuto jednoduchost svou, vůči tak veliké rozmanitosti úkazů fysikálních na hmotě pozorovaných, jest méně způsobilý, aby se na jeho základě učinil pokus tyto úkazy vysvětlovati. Názor atomistický jest méně jednoduchý. Již zpředu vznikají otázky, zdali tyto atomy jsou u všech látek stejné neb různé. Jsou-li stejné, pak by se rozmanitost látek musila vykládati jinými vztahy kvantitativními, jako jest vzájemná poloha, pohyb, snad i tvar a velikost atomů. Odtud název *atomismus kvantitativní*. Aneb vysvětlujeme různost látek růzností atomů, čímž vlastně různost pozorovanou vkládáme z celku do nej-

*) *Otto Lehmann* (* 1855), od r. 1889 professor na vysoké škole technické v Karlsruhe. Původní názor jeho byl vyjádřen slovy: »Für den Physiker ist es jedenfalls von hohem Interesse, dass Kristalle existieren, deren Weichheit eine so bedeutende ist, dass man sie beinahe flüssig nennen könnte.« Viz k historii celého objevu Ann. d. Physik 27, pag. 213, 1908.

**) od lat. emulgeo, -ēre, o mléku, vydojiti, pak vůbec vyssáti, vyčerpati. Mléko jest typickým příkladem emulsí, t. j. kapalin, v nichž jsou látky pevné v nejjemnějších částečkách obsažené, následkem čehož kapaliny ty nejsou čiré, průhledné.

***) *τέμνω* krájeti, děliti, *ἀ* privativum.

menších oněch částeček, různost těchto samých dále nevykládajíce. Odtud název *atomismus kvalitativní*.

Ve fysice a chemii začalo se o těchto otázkách bedlivěji uvažovati, když se při studiu chemických dějů, rozkladů a skladů začalo též vážiti. Objevily se zde jisté jednoduché zákony, jednoduchostí svou překvapující, kteréž nebylo snadno srovnati s názorem o kontinuitě hmoty a kteréž tudíž přímo vedly k názoru opačnému. Theorie atomická, jak se nám nyní v plném rozvoji svém představuje, sahá kořeny svými do konce století 18-tého a nabývá určitějších forem počátkem století předešlého; zejména *Dalton* *) formuloval již jasně i co do stránky měřící, co zoveme atomem. Tento atomismus jest kvalitativní. Atom jest nejmenší samostatně existující částečka hmotná těch látek, kteréž se nedají rozložiti a kteréž zoveme *prvky* či *elementy*. Atomy různých prvků různí se mezi sebou nejen svou kvalitou, nýbrž i svou hmotou a tudíž, vzhledem k tíži, též svou váhou. Zavádíme tudíž pojem *hmota* neb *váha atomová*. Určovati však tuto v jednotkách absolutních, t. j. v jednotce milligramm nebo mikrogramm aneb v jednotce silové, není možno. Naproti tomu dovedou chemie a fysika srovnávati tyto atomy mezi sebou, t. j. určovati jich hmotu neb váhu relativní. Při tom jeví se býti nejjednodušším, voliti ke srovnávání atom nejméně hmotný a tudíž i nejlehčí ze všech, jež známe, a to jest atom vodíka. Tím obdržíme jen čísla větší než 1, tudíž přehlednější, čísla, která ovšem jsou identická pro relativní hmotu jako pro relativní váhu atomovou, poněvadž v poměru vypadne urychlení tíže. Užívá se tu obyčejně názvu relativní *váha atomová*, ač lépe jest říkati relativní *hmota atomová*, poněvadž různá váha jest teprve následkem různosti hmotné, jež jest dána různou kvalitou atomů. Při tom se pak slovo relativní, jež se zde rozumí samo sebou, vynechává. V tomto smyslu užívá tedy chemie i fysika pojmu *hmota* (váha) *atomová*.

Různé atomy označuje chemie písmeny velké abecedy. Píše tedy na př. O, H, C, atd., a to dle začátečních písmen názvu latinského neb řeckého jakožto internacionálního, tedy kyslík (= oxygenium), vodík (= hydrogenium), uhlík (= carbonium) atd. Při tom značí však ono písmeno nejen jméno atomu, nýbrž i jeho hmotu, (váhu), ovšem relativní.

*) *John Dalton*, fysik a chemik, žil v letech 1766—1844, působil jako professor mathematiky a fysiky na kolleji v Manchestru. Poznal již zákon o poměrech stálých a množných.

Z látek chemicky *jednoduchých*, z prvků, vznikají látky *složené*. Toto skládání vykládá theorie atomická jako sdružování se atomů v nové jedince, jež zovou se *molekuly* *). Toto seskupení označujeme též píšice na př. HgS, H_2O atd. Poněvadž pak při slučování každý atom v molekule přijde k platnosti svou hmotou a tudíž i svou vahou, kteréž pokládáme za nezměnitelné, následuje z toho ihned, že *molekulová hmota* i *váha* jest rovna součtu hmot i vah atomových. Ovšem jest s těmito též jen relativní.

Názor zde vylíčený o sdružování se atomů v molekuly, jednoduše vysvětluje právě *základní* zákony chemické, jež se zovou *stoechiometrickými* **).

Hmota součástek se vždy rovná hmotě celku, a naopak; při slučování i rozlučování látek zůstává hmota (aneb, jak říkáme, vážením to konstatujíce, zůstává váha) neproměnnou. Odtud pak indukcí rozšířený názor, jenž se jako princip formuluje, o *zachování hmoty*.

Zejména pak dva zákony stoechiometrické plynou ihned jako důsledky onoho názoru. Jest to

a) zákon o poměrech stálých (proportiones constantes).

b) zákon o poměrech množných (proportiones multiplae).

Slučují-li se dva prvky X a Y, děje se to vždy v poměrném množství (hmotném), jež lze vyjádřiti

jednak poměrem $x : y$,

jednak poměrem $mx : ny$,

kdež jsou m, n čísla celá.

V theorii atomické značí x a y váhy atomové, m a n počet atomů jednoho i druhého prvku, které v molekulu vstupují.

Určování hmot atomových a molekulových provádí se methodami chemickými i fysikálními. Jisté veličiny fysikální (teplo specifické, zejména pak hutnost plynů a par), jsou s nimi v jednoduchém vztahu. Právě tyto vztahy vedly také k výsledku, jenž jest v souhlasu s jinými úkazy chemickými, že i u prvků, hlavně plynného skupenství, dlužno předpokládati molekuly, v nichž jsou sdruženy atomy stejné, po dvou (H_2, O_2, N_2 atd.) neb po čtyřech (P_4, As_4) neb i po šesti (S_6). Takové molekuly zovou se elementárními. Jimi vysvětluje se na př. různá působnost téhož plynu ve stavu obyčejném a ve stavu zrodu — in statu nascendi —; tam působí atomy již mezi sebou vázané; zde však, kde atomy z jisté sloučeniny chemickým pochodem vystupují, jsou ještě volnými a tudíž spíše tvoří nové sdružení s atomy jiných prvků.

*) Slovo utvořeno z latinského moles, -is hmota. Mělo pak slovo moles značiti nejmenší částečku hmotnou ještě viditelnou, na př. drobnohledem; v tomto smyslu se však neujalo. Zmenšené slovo molekula v latině nepřichází, jest tvořeno deminutivní koncovkou dle analogií jiných, franc. la molecule.

**) Slovo v chemii užívané; *στοιχεῖον τό* hláska, jakožto základ slov a mluvy, tudíž pak přeneseně základní částky, elementy, z nichž se skládají hmoty.

§ 69. Gramm-atom a gramm-molekula.

Hmota atomová α a molekulová μ značí množství hmotné vyjádřené jednotkou H, t. j. jednotkou, která představuje hmotu vodíku. V našich dobách stala se ovšem v příčině této jakási změna. z důvodů opportunity. Hmoty atomové α nevztahují se již na vodík, nýbrž na kyslík; avšak při tom nevolí se atomová hmota kyslíku jedničkou, nýbrž klade se $=16$, což jest přibližně atomová hmota kyslíku vztahovaná na vodík. Zůstal tedy přece dřívější způsob zásadně v platnosti, také dnes se vztahují čísla α na vodík, jenom že nikoli přímo, nýbrž nepřímo oklikou přes kyslík, tak že pak není $H = 1$, nýbrž poněkud > 1. Dosud se jeví býti pravděpodobným $H = 1{\cdot}008$ *).

Konajíce různé analyse kvantitativní, pracujeme jednotkou hmoty *gramm*. Tu pak bývá mnohdy s výhodou, tvořiti množství α gramm nebo μ gramm. Toto množství hmotné se zove *gramm-atom* a *gramm-molekula*.

Dle toho jest na př.

gramm-atom síry . . . . . 32·1 *g* síry S

gramm-atom stříbra . . . 107·9 *g* stříbra Ag a podobně

gramm-molekula vody . . 18·0 *g* vody H_2O atd.

Dělíme-li hmotu M hmotou specifickou S, obdržíme objem V, který tato hmota zaujímá.

Právě tak obdržíme objem gramm-atomu neb gramm-molekuly, dělíme-li množství hmotné α, resp μ gramm hmotou specifickou S. Nazývá se pak

$\frac{\alpha}{S}$ . . . objem atomový,

$\frac{\mu}{S}$ . . . objem molekulový.

*) Právě proto, že toto číslo vzhledem ke kyslíku nelze tak přesně určiti jako ostatní čísla α vzhledem ke kyslíku, vzal se za základ $O = 16$, aby těch poměrných čísel, jež jsou určena spolehlivěji, bylo též stále užíváno. Oním důvodem opportunity byla tedy *stabilisace* vah atomových.

Názvy nejsou vhodné, poněvadž dávají podnět k nedorozumění, jako by se jednalo o objem atomu neb molekuly. Tomu by bylo tak, kdyby S byla specifická hmota atomu samého neb molekuly samé; fakticky značí však S specifickou hmotu *soustavy* přečetných atomů neb molekul, a závisí tudíž také na *odlehlostech* interatomových neb intermolekulových.

Proto by bylo lépe zavésti určitější názvy: objem gramm-atomový a gramm-molekulový.

§ 70. **Rozvoj theorie atomické.**

Pro fysiku, která se zanáší látkou a jejími vlastnostmi, pokud tato nemění svou podstatu, jest pojem *molekula*, jakožto nejmenší ještě existující částečka této látky, pojmem důležitějším než atom. Četné úkazy, jež dlužno vysvětlovati vzájemným působením molekul a jež tudíž molekulovými zoveme, vedou k tomu, připisovati molekulám jisté síly, jimiž na sebe působí, síly tak zvané molekulové. Ovšem vysvětlením úkazů to vlastně není, jako spíše převedením toho, co ve velkém, na částečkách hmotných pozorujeme, na ony nejmenší částečky existující, na molekuly. Úkazy tepelné vedou dále k tomu, mysliti si tyto molekuly nikoli v klidu, nýbrž v pohybu, ovšem různého způsobu dle skupenství, kteréž také pohybem tím a vzájemnými silami molekulovými se má vysvětliti. Myslíme si tedy, že molekuly jsou od sebe vzdáleny a že vzdálenosti tyto jsou veliké proti rozměrům molekul samých.

Úkazy pak světelné, pro kteréž jako postulát vědy předpokládáme světelný aether, veškerá tělesa prostupující, nutí předpokládati, že v mezerách mezimolekulových jsou molekuly aetherové, v pohybu se nalézající, jež si myslíme nesmírně jemnější, než molekuly hmotné. Přece však molekuly aetherové i hmotné působí na sebe vzájemně, tak že pohybem jedněch se vzbudí i pohyb druhých. Jest viděti, že již tím se theorie atomická, jak ji fysika rozvádí, dosti komplikuje. Ještě více děje se to úkazy elektrickými a magnetickými, kteréž také na stav molekul aetherových i hmotných uvésti se snaží.

Na straně druhé také chemie připisuje atomům vlastnosti, jež na látkách samých pozoruje. Sem náleží hlavně *příbuznost* chemická (affinita). Jisté prvky, resp. jich atomy, tíhnou zvlášť k sobě, přitahují se navzájem, poutají se vzájemně více než jiné, jsou chemicky příbuznými. Tak na př. vodík a kyslík, uhlík a kyslík, vodík a chlor a j. Ještě zajímavější jest však úkaz, který se víže na jméno

mocenství (valence) prvků a s tím souvisící zjev chemické sytosti. Jsou sloučeniny nasycené, kde jistý atom, vázaný s jiným, neb s jinými, dále již žádného připojení jiného nepřipouští, jakoby jeho přítažlivost přestala. Něco podobného u vzájemném gravitování velkých hmot není. Také zde přitahují se hmoty, ale každá působí na jiné tak, jako by druhé zde nebylo.

V celé této komplikovanosti, jaká se jeví v theorii atomické, zrcadlí se jenom veliká ta rozmanitost úkazů, jež jako faktické pozorujeme a jež ovšem nejsou vázány na theorii žádnou. Při tom zbývají mnohé otázky, atomů samých se týkající, otevřené. Další rozvoj ukazuje na př. theorie atomových vírů (vortex rings, Sir W. Thomson — lord Kelvin), dle kteréž atomy nejsou jakési malininké, pevné kuličky, nýbrž zvláštní útvar, tomu z daleka podobný, kterým lze představiti kroužky tabákového kouře. To však znamená, že atom není poslední útvar hmotný, že jest jeho základem soustava částeček ještě daleko jemnějších. V témže smyslu rozvíjí se moderní theorie elektronová, jež vznikla z úkazů elektrických. Tato theorie znamená návrat k elektrickým fluidům, kteréž si však představuje atomisované, rozeznávajíc nejmenší elementární množství elektřiny positivní i negativní, a zove je elektrony. Atom hmotný skládá se z nesmírně jemných dalších částeček, jež nabývají nábojů elektrických tím, že se spojí s elektronem positivním nebo negativním, a tu opět buď s jedním nebo i s několika elektrony. Spojením povstávají tak zvané iony, jichž valence jest počtem oněch s nimi spojených elektronů určena. Jak viděti, theorie atomická komplikuje se těmito moderními představami ještě více. Jest pak pochopitelno, že se oproti této komplikovanosti jeví i jakási reakce, v tom smyslu aspoň, že není třeba všechny pozorované úkazy chtíti vysvětlovati z atomů a molekul. Na druhé straně nelze neuznati, že theorie atomická prokázala fysice a chemii neocenitelné služby, že na jejím základě zkoumání chemické se bráti mohlo dle určitého plánu, systematicky, že napřed se mohlo viděti, kam chce práce dospěti, tak že theorie tato zaujímá plným právem první místo mezi theoriemi vědeckými vůbec.

IV.

Absolutní soustava měr.

§ 71. Výklad úvodní.

Fysika experimentální, zanášejíc se pozorováním úkazů přírodních, nepřestává na jich prozkoumání kvalitativním, nýbrž hledí toto zkoumání prohloubiti ve smyslu kvantitativním, definujíc v určitém způsobu jednotlivé *veličiny* fysikální a snažíc se vystihnouti mezi nimi určité zákonité vztahy. Základem postupu tohoto jest fysikální *měření*; toto pak vyžaduje volbu *jednotky* pro tu veličinu, kterouž měřiti dlužno. Poměr mezi touto veličinou a jednotkou její dává *číselnou hodnotu* veličiny měřené. S veličinou samou stoupá tudíž její číselná hodnota, naproti tomu klesá, zvětšuje-li se jednotka, kterou se ona veličina měří.

Jednotka musí býti téhož druhu jako veličina, jejíž číselnou hodnotu hledáme. Jinak může však býti volena zcela libovolně. Volnost tato má však jistý důsledek, který se objeví, jakmile se podaří na základě pozorování a měření nalézti zákonitý vztah mezi veličinami pozorovanými; rovnice totiž, která tento vztah mathematicky formuluje, obsahuje konstantu, jejížto číselná hodnota na ničem jiném nezávisí, než na volbě jednotek. Jinými slovy: zákon jest vyjádřen ve způsobu *úměrnosti*.

Pokud se fysice jednalo především o nalezení takovýchto zákonitých vztahů, nebylo ani jinak možno, než provisorně voliti jednotky pro veličiny pozorované nahodile a libovolně, ovšem ne zcela libovolně, poněvadž jakési důvody vhodnosti rozhodovaly při volbě každé jednotky. Ale jinak má se věc nyní, kdy celá řada takových vztahů jest nalezena a podrobným zkoumáním dotvrzena. Ono *provisorium* přestává a na místo něho nastupuje *definitivum* stanovené na základě principu jednoduchosti. Patrně jest nejjednodušším, když ona číselná konstanta se stane $= 1$, t. j. když na místě *úměrnosti* nastoupí *rovnost*. Takováto volba jednotek má svůj základ

v přírodních zákonech samých; důsledné pak provedení její vede ke zvláštní *soustavě* jednotek, kteráž se nyní jako definitivní povšechně ve fysice zavádí.

§ 72. Jednotky základní a odvozené.

Veškeré veličiny fysikální jsou mezi sebou jakoby sepiaty četnými vztahy, vyjadřujícími jich zákonitou souvislost; tím jest možno, dle principu právě vyloženého, jednotky pro veškeré veličiny fysikální stanoviti, jakmile jednotky pro některé jsou voleny. Tyto jednotky zovou se *základní* (fundamentální); ostatní pak *odvozené* (derivované); celá pak *soustava* měr základních i odvozených zove se *absolutní**). První otázka týká se tedy jednotek *základních*, v jakém totiž *počtu* a *způsobu* dlužno je voliti. Z hořejšího vylíčení jest patrno, že jich počet má býti co možná nejmenší. Podrobný rozbor ukazuje, že by postačily jednotky takové *dvě*, že však z jistých důvodů vhodnosti a přehlednosti jest lépe voliti základní a na sobě nezávislé jednotky *tři***).

Co se dále týče způsobu volby, rozhodly důvody čistě praktické. Absolutní osnova, jak nyní jest všeobecně přijata, volí jednotku *délky*, *hmoty* a *času* za základní.

Vskutku mají tyto jednotky některé výhody eminentně praktické. Především jsou *neproměnlivy*, jak dle místa, tak dle času. Jednotkou délky jest určitý platino-iridiový normální étalon; jednotkou hmoty určitá normální platino-iridiová hmota. Neproměnlivost jich dle místa jest samozřejmou; na kterémkoli místě povrchu zemského představují vždy touž délku a hmotu. Přenášení jich od jednoho místa na druhé není při náležité pozornosti spojené s nebezpečím nějakého poškození. Ale i dle času jest jich neproměnlivost zaručena alespoň na dobu velice dlouhou, povahou materiálu samého. K této výhodě úplné neproměnlivosti přistupuje však výhoda druhá, kterouž se výhoda prvá ještě více dotvrzuje; jest to veliká *přesnost* jich *reprodukce*. Zejména platí to o jednotce

*) Pojmenování »*absolutní*« užil nejprve *C. F. Gauss* o jednotce intensity zemského magnetismu oproti jednotce »*relativní*«, při kteréž se měření vztahovalo na intensitu v Londýně. Viz pojednání »Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram *absolutam* revocata,« 1832, sebraných spisů svazek V. pag. 116. Později *W. Weber* zavedl (1840) absolutní jednotky do měření elektrických. Za základní přijali oba jmenovaní badatelé jednotky *mm*, *mg*, *sec*.

**) O této otázce jednáme níže (v oddílu o tíži všeobecné) ještě jednou. Viz též na př. *P. Rossi*, Nuovo Cimento (5) 9. pag. 355, 1905.

hmoty, kterouž lze v kopiích reprodukovati nejdokonalejší operací fysikální, totiž vážením, tak, že kopie může originál úplně nahraditi. Ale i jednotku délky lze, byť ne se stejnou, ale dojista s velmi velikou přesností reprodukovati a tím zjednati kopie, kteréž také originál úplně mohou zastupovati. Právě takovými velice přesnými a také velice četnými kopiemi jest neproměnlivost jednotky délkové a hmotné ještě více zaručena než jich definicemi anebo materiálem jich originálů. Vedlejší vliv teploty a eventuálně i tlaku nutno ovšem zvlášť vyšetřiti a oba tyto faktory do definice určitým způsobem zavésti, jak o tom na svém místě již bylo jednáno. Co se konečně týče jednotky časové, jest tato založena na rotaci a revoluci zeměkoule a realisována dokonalým chronometrem; její neproměnlivost dle místa a času souvisí s neproměnlivostí oněch pohybů; její reprodukování, resp. kontrolování hodin lze prováděti pozorováním astronomickým tak přesně, jako reprodukci hmoty.

Jak již naznačeno, mohli bychom vlastně přestati na dvou jednotkách základních, délky a času; z těchto jednotku hmoty odvoditi bylo by totiž možno ze zákona gravitačního. Při oněch třech základních jednotkách vystupuje v onom zákoně jistý faktor, tak zvaná konstanta gravitační $\varkappa$. Souvisí se střední hustotou S naší země. Kdybychom přestali na dvou základních jednotkách délky a času, vyšla by na onom základě odvozená jednotka hmoty, která by činila

$$\frac{1}{\varkappa} \text{ gramm.}$$

Pro hodnotu $S = 5{\cdot}50$ pravdě nejpodobnější vychází číselně

$$\frac{1}{\varkappa} = 14\,950\,000.$$

Odvozená jednotka hmoty činila by tudíž okrouhle 15 tun. Pro účely fysikální byla by ovšem příliš velikou; mohla by se však zavésti pro naše závaží její milliontá část, podobně jako jest v elektřině nutno pro kapacitu užívati mikro-faradu, poněvadž jednotka farad jest ohromná. Obdrželi bychom pak jinou soustavu absolutních měr, kterou bychom mohli zváti gravitační.

Výhody soustavy takové byly by však jen rázu formálního. Věcně vadí okolnost, že hmotu $1/\varkappa$ lze stanoviti jen s approximací, která jest malou vůči té, s jakou byl dle definice realisován metr nebo kilogramm. Vzhledem k tomu ukázala by se postupem času nutnost, při dokonalejším stanovení konstanty gravitační přece do mathematické formulace zákona zavésti konstantu, která by pak měla před nynější jen tu výhodu — ne velikou, že by byla blízkou jedničce anebo eventuálně nějaké mocnosti čísla 10. Tím by však i ono formální zjednodušení odpadlo.

Uvádí se ještě soustava měr, ve které vedle základní jednotky délky a času vystupuje, jakožto třetí základní, jednotka síly, kterouž jest váha kilogrammu. Dle nynějšího stavu vědy jeví se soustava tato, kteráž se

často terrestrickou zove, kteráž však důsledně ve fysice nikdy nebyla provedena, býti antikvovanou.

S jiné strany (Ostwald, Helm) upozorňuje se na důležitý význam, jaký má pro veškeré přírodní vědy energie, a navrhuje se, aby se *jednotka energie* přijala za *základní*. Návrh nemá významu metronomického, poněvadž pro energii nelze zavésti žádného normálního étalonu.

V otázce »absolutnosti« soustavy měr možno jíti dále. Jednotka délky a času, *cm* a *sec*, jest povahou svou tellurická, jsouc odvozena z rozměrů a pohybu naší země. Lze tudíž klásti otázku, zdali by nebylo možno voliti jiné jednotky délky a času, které by, nejsouce vázány na existenci naší země, byly neproměnlivými a nezničitelnými pro celé universum a tím absolutními ve vyšším slova smyslu. Poukazuje se na délku vlny ve vakuu a na dobu kmitovou určitého světla, na př. určité světlé čáry natria, kadmia a pod. Myšlenka má analogii akustickou. Jako zde jediným tonem hudebním se řídí celá harmonie, tak by se jediným tonem světelným řídila celá metronomie. Zásadně není pochybnosti, že světelné jednotky tyto jsou neproměnlivější a universálnější než rozměry země a doba její rotace. Prakticky by však volbou takovou nebylo získáno ničeho. Kdyby se návrh přijal, došlo by se téhož výsledku jako u metru, že by totiž jednotkou délkovou opět byla délka určitého normálního étalonu, realisovaná s tou intencí, aby se přibližně rovnala určitému násobku oné délky vlny. Co se pak tkne světelné jednotky časové, jest závadou, že dobu kmitovou nelze přímo pozorovati, nýbrž jen počítati, a to na základě rychlosti světla. Byla by tudíž jednotkou časovou doba, za kterou světlo proběhne dráhu rovnající se určitému počtu oněch délek vln. Tolik však připustiti dlužno, že číselné hodnoty těchto veličin světelných, vztahované na nynější již přijaté jednotky, jsou zároveň kontrolou o stálosti neb neproměnlivosti těchto jednotek samých, ovšem v mezích přesnosti, s jakou ony číselné hodnoty fysikálně možno stanoviti.

Příklad poučný podávají měření, jež v letech 1892 a 1893 v Bureau internat. des poids et mesures provedl *Michelson* *). Měřil délky vlny pro čáry kadmia červenou, zelenou a modrou, a to ve vzduchu teploty 15° C a tlaku 760 *mm* Hg 0°. Jeho výsledky jsou tyto:

$$\lambda_č = 643{\cdot}847\,22\ \mu\mu \quad 1\ m = 1\,553\,163{\cdot}5\ \lambda_č$$
$$\lambda_z = 508{\cdot}582\,40\ \mu\mu \quad 1\ m = 1\,966\,249{\cdot}7\ \lambda_z$$
$$\lambda_m = 479{\cdot}991\,07\ \mu\mu \quad 1\ m = 2\,083\,372{\cdot}1\ \lambda_m.$$

*) *A. Michelson* (* 1852) od r. 1881 prof. fys. Cleveland, Ohio, nyní od r. 1896 prof. fys. v Chicagu, Ill. Viz Travaux et Mémoires du Bureau internat. des poids et mesures, XI., Journal de physique, (3) 3, pag. 5, 1894.

V posledních letech provedli nová měření *) *R. Benoît, Ch. Fabry* a *A. Perot* v sále ústavu »Laboratoire d'essais du Conservatoire des arts et métiers« dle nové methody, a to pro červenou čáru kadmiovou. Tato volena z toho důvodu, že její délka vlny má dle usnesení »Union internationale pour les recherches solaires« z roku 1905 sloužiti za normále pro měření spektroskopická. Definitivní výsledek této práce, pro suchý vzduch teploty 15° (stupnice vodíkové) a tlak 760 *mm* Hg 0° jest následující:

$$\lambda_{\check{c}} = 643{\cdot}846\ 96\ \mu\mu, \quad 1\ m = 1\,553\,164{\cdot}13\ \lambda_{\check{c}}.$$

Ke srovnání korrigovali uvedení autoři pozorování Michelsonova na teploměrnou stupnici vodíkovou a na suchý vzduch (zde byla korrekce nejista, poněvadž Michelson vlhkost vzduchu nezaznamenal). Po redukci jevil se býti výsledek Michelsonův jak následuje:

$$\lambda_{\check{c}} = 643{\cdot}847\ 00\ \mu\mu, \quad 1\ m = 1\,553\,164{\cdot}03\ \lambda_{\check{c}}.$$

Shoda jest tudíž překvapující, tím více, poněvadž výsledky zjednány různými methodami. Lze za to míti, že jest tím délka centimetru převedena na délku vlny λ s přesností $^1/_{10\,000\,000}$, tedy touže přesností, jaké nanejvýše lze dosáhnouti komparatorem při srovnávání různých étalonů délkových.

§ 73. Označení jednotek základních.

Chtějíce jednotky základní označiti *všeobecně*, užíváme (dle Maxwella) velkých písmen L (longitudo), M (materia), T (tempus). Chtějíce pak *zvlášť* označiti *určitou* jednotku délky neb hmoty neb času, užíváme označení, jak v soustavě metrické bylo zavedeno. Absolutní soustava nyní všeobecně přijatá užívá jednotek *cm*, *g*, *sec*; proto se také zove *centimetr - gramm - sekundová.*

Mnozí autorové začínají označovati gramm značkou *gr*. V soustavě metrické byly jednotky *původní* označeny *jedinou* písmenou; tedy: *m* (metr), *l* (litr), *a* (ar), *g* (gramm) atd.; jich *násobky* pak neb *díly* byly označeny připojením písmene dalšího; tedy na př. *cm* (centimetr), *ha* (hektar) atd. Proto není označení *gr* důsledné. Ovšem dlužno přiznati, že označení oněch původních jednotek *cm, g, sec* dvěma, jednou a zase třemi písmeny nečiní oku dobrý dojem. Označení *g* kolliduje mimo to s obvyklým označením *g* urychlení tíže, což někdy je závadné. Velmi mnozí píší proto *C, G, S*. V knize naší jsou zachovány značky legálně zavedené.

*) Compt. rend. 144, pag. 1082, 1907.

§ 74. Rozměr jednotek odvozených.

Vztahy mathematické, jimiž, jak dříve bylo řečeno, veškeré veličiny fysikální jsou sepiaty, mají tvar algebraický. Zavedeme-li tedy do rovnice, kterouž nějaká veličina fysikální U jest stanovena, za všechny ostatní veličiny jednotky L, M, T, obdržíme rovnici formy

$$U = k \cdot L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma},$$

kdež jsou exponenty α, β, γ čísla celá neb lomená, positivní neb negativní. Zpravidla volí se $k = 1$; tím jest U odvozeno a výrazem $L^{\alpha}\ M^{\beta}\ T^{\gamma}$ na jednotky základní převedeno. Tento výraz, udávající, jak jednotka odvozená souvisí s jednotkami základními, zove se *rozměr* (dimensio) jednotky odvozené, a to *všeobecný*, platný pro jednotky základní L, M, T jakékoli. Z rozměru všeobecného obdržíme pak *zvláštní*, kladouce za tyto jednotky základní některé *určité*.

V následujícím budeme u každé jednotky odvozené uváděti především její *rozměr všeobecný*, vedle toho pak její *rozměr zvláštní* pro soustavu centimetr-gramm-sekundovou.

Za příklad uveďme rozměry odvozených jednotek, o nichž bylo již jednáno.

Rozměr jednotky plošné, tedy útvaru dvojrozměrného, jest

L^2 všeobecně, cm^2 zvlášť.

Podobně rozměr jednotky objemové, tedy útvaru trojrozměrného, jest

L^3 všeobecně, cm^3 zvlášť.

Exponenty β, γ jsou při tom rovny nulle. Jest patrno, že pojmenování »*rozměr veličiny*« vzniklo *rozšířením* známého označení útvarů geometrických, jež jsou buď jedno- neb dvou- neb troj-rozměrné.

Specifická hmota S jest stanovena relací

$$S = \frac{M}{V}.$$

Rozměr jednotky pro hmotu specifickou jest tedy

$\frac{M}{L^3}$ všeobecně, $\frac{g}{cm^3}$ zvlášť.

Vyjadřujíce na př. specifickou hmotu oné slitiny platino-iridiové při 0° C, píšeme

$$S = 21{\cdot}56\ \frac{g}{cm^3}.$$

Specifický objem má pak rozměr

$$\frac{L^3}{M} \text{ všeobecně, } \quad \frac{cm^3}{g} \text{ zvlášť.}$$

Někdy bývá rozměr = 1, t. j. všechny exponenty α, β, γ jsou rovny nulle. Tak jest na př. úhel (s jednotkou úhlovou »radiant«) stanoven poměrem

$$\frac{arcus}{r}, \text{ tedy } \quad \frac{L}{L} = 1.$$

Výsledek takový ukazuje, že příslušná veličina jest pouhým *číslem* zcela *nezávislým* na *jakékoli volbě měr základních*.

§ 75. Význam rozměrových výrazů.

Význam výrazu, jímž se stanoví rozměr jednotky odvozené, spočívá především v tom, že z něho ihned vyrozumíme, jaký vliv volba té neb oné jednotky základní má na číselnou hodnotu jednotky odvozené. Majíce na př. na očích rozměr specifické hmoty $\frac{M}{L^3}$ vidíme, že jednotka času vůbec s tímto pojmem nemá co činiti; vidíme dále, že číselně zůstává veličina ta stejnou, když volíce jednotku délkovou 10-kráte větší neb menší, současně volíme jednotku hmoty 1000-kráte větší neb menší, tedy pro *dm* současně *kg* nebo pro *mm* současně *mg*. Mnohdy jest rozměr veličiny odvozené komplikovanější a nebylo by tak snadno bez něho číselné hodnoty pro jakoukoli jinou volbu základních jednotek, na př. pro soustavu *mm*, *mg*, *sec* (Gauss-Weber), přepočítati.

Dobré služby konají výrazy rozměrové pro kontrolu *homogenity fysikálních rovnic*. Položíme-li za jednotlivé veličiny fysikální, určitou relací spojené, rozměrové výrazy jich jednotek, musí na obou stranách rovnice vyjíti výsledek týž. Někdy lze na tomto základě, jejž Angličané zovou »principem dynamické podobnosti«, odvoditi i vztahy pro určitou veličinu platné.

Na druhé straně nesmí se význam rozměrů přeceňovati. Zejména, když pro některé veličiny fysikální vyjde rozměr jednotek týž, nesmí se vždycky na jakousi stejnost těchto veličin pomýšleti.

Stejný rozměr znamená stejný vliv jednotek základních. Podřízenost výrazů rozměrových jest již z toho patrnou, že by se tvářnost jich velice změnila, kdyby se na př. přijala soustava gravitační.

§ 76. Označení rozměrů jednotek odvozených.

V označování rozměrovém není shody. Obtíž vězí v tom, jak typograficky rozlišovati výrazy pro vztahy veličin fysikálních od výrazů pro jich rozměry. Mnozí autorové kladou výrazy rozměrové do závorek a to zúmyslně nikoli obyčejných malých ( ), jichž se i tak mnoho musí užívati, nýbrž méně užívaných velkých [ ]; avšak právě tyto mají ve spisech mathematických (v počtu pravděpodobnosti), geodetických i astronomických svůj zvláštní význam; neboť jimi se označují *výrazy summační*, kteréžto označování má výhodu jednoduchosti a přehlednosti. Ostatně ani zde není jednoty. Někteří autorové kladou do závorky veličinu, jejíž rozměr udávají, píšíce na př. pro specifickou hmotu

$$[S] = ml^{-3}.$$

Jiní právě naopak kladou do závorky rozměrový výraz samotný, píšíce

$$S = [ml^{-3}].$$

Při tom užívají pro jednotky základní *všeobecné* začátečních písmen latinských slov: longitudo, materia, tempus, a to brzy písmen velkých, brzy malých, tu stojatých, tam ležatých, někteří také malých písmen abecedy řecké; pro jednotky pak *soustavy metrické*, jak již uvedeno, píší mnozí *cm, g, sec*, jiní *cm, gr, sec*, a opět jiní *C, G, S*. V knize naší provedena jest zásada tato: Kde jde o všeobecné vztahy *veličin fysikálních samých*, jest připojování jich rozměrů jen na závadu, jsouc mimo to zbytečné, poněvadž vztahy ty nejsou právě těmi výrazy rozměrovými podmíněny. *Nutné* jest připojiti rozměr, jde-li o *data číselná*; zde pak užívání značek legálních, *cm, g, sec*, jak z příkladů dosud uvedených patrno, nemá žádné závady. Kde však jde o vztahy mezi *výrazy rozměrovými samotnými*, tam jest daleko lepším a poučnějším, vztahy ty sledovati na rozměrových výrazech nikoli zvláštních, kde vskutku označování *cm, g, sec*, t. j. dvěma, jednou a třemi písmeny, jest nepohodlné, nýbrž *všeobecných*. Voliti pak k označení základních jednotek všeobecných malá písmena latinská *l, m, t* není vhodné, poněvadž *l* značí litr a *m* metr. Také malá řecká písmena λ, μ, τ se méně hodí, poněvadž značí λ mikrolitr a μ mikron (§ 61.). Proto užíváme latinských písmen velikých a to *stojatých* L, M, T, kteráž se od *kursivních*, pro veličiny fysikální samé užívaných, typograficky liší tak, že závorek jakýchkoli netřeba. Co se konečně exponentů týče, ukazuje zkušenost, že se oku daleko *význačněji* představují a tudíž paměti daleko lépe vštípí výrazy kořenové a zlomkové jakožto původní, než výrazy s exponenty lomenými a zápornými; proto se v knize naší užívá z důvodů didaktických jen exponentů celých a kladných.

§ 77. Jednotky praktické.

Jednotky, odvozené podmínkou $k = 1$ z *určitých* jednotek základních *cm*, *g*, *sec*, vyjdou někdy velmi malé, jindy zase velmi velké. Proto připouští se též hodnoty dekadické, pro násobek a díl, především

$$k = 10^6 \quad \text{nebo} \quad k = \frac{1}{10^6},$$

vedle toho pak také

$$k = 10^3 \quad \text{nebo} \quad k = \frac{1}{10^3}.$$

Na tyto hodnoty poukazuje se předponami

mega-, mikro-,

jakož i předponami nám již známými

kilo-, milli-,

Vedle toho stanoví se také jiné — ovšem vždy dekadické — násobky neb díly jednotek odvozených soustavy *cm*, *g*, *sec* jakožto *jednotky praktické*, poněvadž se násobek a díl volí tak, aby měly jednotky ty pro praxis vhodnou velikost. K docílení pak žádoucí stručnosti mluvy zavádějí se pro ně názvy dle jmen některých slavných fysiků, kteří právě v příslušných oborech, pro něž ony jednotky mají platnost, vědeckými pracemi vynikli. Myšlenka tato provedena jest zvláště v oboru elektřiny; tak vznikly na př. jednotky zvané Volt, Coulomb, Ohm, Farad, a pod., jak na svém místě vyličíme. V mechanice seznáme Joule a Watt jakožto jednotky praktické pro práci a intensitu pracovní.

Nesmí se ovšem říkati »Ohmova« jednotka, »Voltova« jednotka, jako se říká Ohmův zákon, Voltův elektroskop; neboť badatelé, jichž jména jednotky praktické nesou, sami jednotek těch neznali. Zvláštní shodou okolností stalo se, že až do nedávna mezi oněmi jmény scházela jména právě těch, kteří první užívali absolutní soustavy měr, byť o jiných jednotkách základních (*mm*, *mg*, *sec*), jména *Gauss* a *Weber*. Nyní se jména Gauss užívá pro jednotku intensity magnetického pole.

V.

Rychlost a urychlení.

§ 78. Pohyb relativní a absolutní.

Chtějíce rozhodnouti, zdali těleso nějaké *a* jest v klidu či v pohybu, stanovíme jeho místo v prostoru; to však nelze jinak než že vztahujeme polohu tělesa *a* k nějakému tělesu jinému *A*, (po případě k nějakému útvaru prostorovému, jako jsou na př. osy souřadnic). Určujeme tedy polohu tělesa *vzhledem* k tělesu *A*, tudíž polohu *relativní*. Nemění-li se tato poloha, říkáme, že jest *a* v klidu, jinak, že jest v pohybu. Jest tudíž i *klid* neb *pohyb* takovým způsobem stanovený jen *relativním*.

Prochází-li se kdo v nějaké síni a stane-li na chvíli, myslí neb říká, že stojí, že jest v klidu. Může však síň tato býti kajutou lodi, plující po řece; vzhledem k nejbližšímu svému okolí, stěnám síně, nábytku a pod. ovšem stojí, avšak vzhledem ke břehům řeky vykonává týž pohyb, jaký má loď sama. Přistane-li tato u břehu, říkáme, že stanula; díme tak vzhledem k povrchu země. Avšak země sama se otáčí kolem své osy a obíhá kolem slunce. Mluvíce o tomto oběhu předpokládáme, že slunce stojí; avšak ani ono není v klidu, nýbrž pohybuje se v prostoru světovém určitým směrem k stálicím. Než i tyto mají zase svůj zvláštní pohyb v prostoru světovém.

Z tohoto příkladu poznáváme, že často můžeme mluviti i o klidu i o pohybu nějakého tělesa dle toho, na které jiné těleso jeho polohu vztahujeme.

V přírodě neznáme jiného *klidu* neb *pohybu* než *relativního*. Mluvíme však často o klidu neb pohybu *absolutním*. To směli bychom jen tenkráte, kdybychom o tělese *A* (neb o útvaru na něm založeném) věděli, že jest v klidu absolutním. Mnohdy *předpokládáme*, že tomu tak jest, buď že případný pohyb takového tělesa není znám, aneb že nemá pro případ projednávaný žádné důležitosti.

Kdyby *země* naše byla vskutku tím pevným, nepohyblivým *základem*, za jaký se tak dlouho pokládala, tu by každý klid neb pohyb na ni vztahovaný byl *absolutním*. Nyní víme, že země ta-

kovým základem není; tímto poznáním se však nezměnila povaha pohybů, jež na povrchu země naší dříve byly pozorovány a jež dosud pozorujeme, jako jest padání těles, pohyb kyvadlový, pohyby kmitavé atd., o nichž i nyní jednáme tak, jako by země naše byla v klidu absolutním.

Věda, jednající o pohybu těles, nepřihlíží-li k příčinám tohoto pohybu, jest povahou svou *abstraktní* jako geometrie; nazývá se *foronomie* nebo *kinematika* *).

§ 79. **Pohyb hmotného bodu.**

Ve skutečnosti jedná se vždy o pohyby *těles*. Studujíce pohyb tělesa hledíme vystihnouti pohyby některých jeho *význačných bodů* a z těchto pohybů skládáme sobě představu o pohybu celkovém. Tím převádí se úkol složitý na jednoduchý, t. j. na studium *pohybu hmotného bodu*, a úkol tento stává se východištěm všech základních definic foronomických.

Při studiu pohybu vůbec přichází k platnosti vztah k prostoru i k času, v němž pohyb se děje. Dvojí tento vztah zrcadlí se též v definicích foronomických. Hmotný bod opisuje při pohybu svém v prostoru určitou *dráhu* (trajektorii). Můžeme tudíž hleděti především k této dráze, kteráž se jeví buď *přímočarou* nebo *křivočarou*. Stanovíce rovnici dráhy určujeme pohyb *celkově* vzhledem k prostoru. Anebo můžeme hleděti k *průběhu* pohybu na této dráze; tím určujeme pohyb *podrobně*, jak se jeví v každém okamžiku časovém. Ve výkladech základních přestáváme při tom na případu, kdy křivka, dráhu stanovící, jest rovinnou: vskutku lze případ všeobecnější, kdy dráha má zakřivení dvojí, na onen jednodušší převésti tím obratem mathematickým, jako by se pohyb dál v rovině (oskulační), jejíž poloha se stále mění.

Pohyb bodu přímočarý.

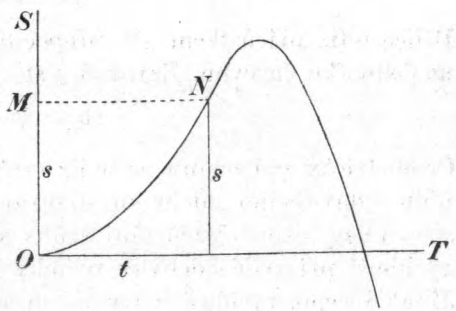
§ 80. **Diagramm pohybu.**

Základním případem pro všechny pohyby jest pohyb hmotného bodu *přímočarý*, na př. v přímce S (obr. 33.). Poloha bodu M mění se na přímce této průběhem času. V okamžiku, kdy začínáme čas počítati, nalézá se hmotný bod na př. v poloze O; po uplynutí

*) Z řeckého: *φέρω* nesu, pohybuji, *νόμος*, *ὁ* zákon, *κινέω* pohybuji.

doby t v poloze M. Zaveďme vzdálenost $OM = s$; nazýváme ji *drahou* (spatium) za *dobu* t vykonanou.

S dobou t mění se dráha s dle určitého zákona. Tento zákon prohlédneme nejsnáze zjednajíce sobě *diagramm* pohybu, na př. konstrukcí, nebo po případě autograficky; tento diagramm jest pak *obrazem* oné závislosti dráhy s na době t. Pravíme, že pohyb bodu *časově rozvineme*.

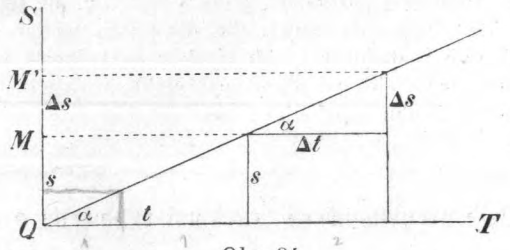


Obr. 33.

V obr. 33. jest osa časová, na kterou v jistém rozměru nanášíme dobu t, vedena ve směru kolmém na přímce S; nanášení délek s stává se tak nejjednodušším. Diagramm, ovšem jen schematicky narýsovaný, uvádí za příklad, jak se bod M od bodu O vzdaluje až do určité polohy nejzazší a pak zase v pohybu zpětném k bodu tomu vrací a přes tento do odlehlostí opačných přechází; chceme-li jednotlivé polohy bodu M míti, promítáme polohy bodu N z čáry diagrammu zpět na přímku S, v níž se pohyb vskutku děje.

§ 81. **Pohyb rovnoměrný; pojem rychlosti.**

Diagramm pohybu nejjednodušší jest patrně ten, kdy závislost dráhy s na době t jest znázorněna *přímkou* (obr. 34.). Dráha s roste



Obr. 34.

tu *rovnoměrně* s dobou t. Pohyb takový zove se proto *rovnoměrným*. Stálý přírůstek c dráhy za každou jednotku časovou zavádí se jakožto *rychlost* rovnoměrného pohybu.

Patrně jest $s = ct$.

Chtějíce rychlost c stanoviti, necháme od okamžiku časového t, kdy jest již vykonána dráha s, uplynouti další dobu Δt a pozorujeme, jaký jest v té době přírůstek Δs dráhy. I jest pak

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Dělíce totiž přírůstkem Δt přepočítáváme příslušný přírůstek Δs na jednotku časovou. Zároveň jest

$$c = tg\,\alpha.$$

Geometricky znázorňuje se tudíž rychlost goniometrickou tangentou úhlu udávajícího odchylku diagrammové přímky od kladného směru osy časové. Vzrůstání dráhy s dobou jeví se býti jak říkáme rychlejší při větší odchylce přímky čili při větším stoupání jejím. Jinak řečeno, rychlost má význam směrnice diagrammové přímky.

Dlužno vytknouti, že hodnota c onoho differenčního poměru $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jest konstantní ve dvojím smyslu, jak vzhledem k okamžiku t, od něhož pozorování začíná, tak vzhledem k přírůstku Δt doby, po kterou se současný přírůstek Δs dráhy pozoruje.

O rovnoměrnosti pohybu rozhodujeme sledujíce jeho průběh s průběhem časovým; avšak průběh časový stanovíme zase pohybem, totiž rotací země, o kteréž díme, že se děje rovnoměrně. Zdálo by se, že zde jest circulus vitiosus.

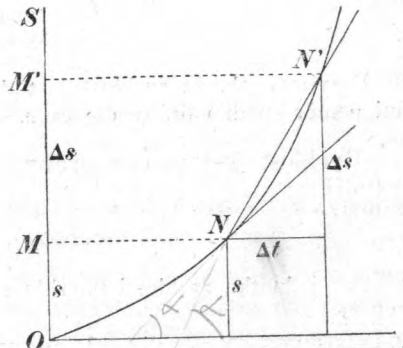
Avšak o rovnoměrnosti rotace zemské, i kdyby z důvodů zásadních neplynula, můžeme se přesvědčovati dle pohybů periodických, srovnávajíce postavení hvězd s hodinami kyvadlovými, jakož také činíme, ač nikoli ke kontrole rotace země, nýbrž naopak ke kontrole hodin. Správné jest však, že vlastně všechny pohyby srovnáváme s rotací země naší. Něco podobného platí o teplotě. Studujeme roztažnost látek s teplotou, ale teplotu stanovíme roztažností určité látky thermometrické normální, na př. vodíku; tudíž srovnáváme vlastně roztažnost všech látek s roztažností vodíku. Rovnoměrnost pak stupnice vodíkové plyne z důvodů vnitřních, totiž ze stejnoměrného stoupání obsahu tepelného.

§ 82. **Pohyb nerovnoměrný; rychlost průměrná a okamžitá.**

Není-li pohyb rovnoměrným (obr. 35.), nabývá výraz $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ významu *rychlosti průměrné*, kterouž by se za libovolnou dobu Δt vykonala táž dráha Δs, kdyby pohyb v této době Δt byl rovnoměrným. V tomto významu charakterisuje rychlost tato *časový in-*

tervall Δt a jest měnlivou jak dle větší neb menší jeho hodnoty, tak dle okamžiku časového t, od něhož začíná.

Má-li však onen výraz býti význačným *jen pro tento časový okamžik*, nesmíme se od něho příliš vzdáliti, t. j. *musíme intervall* Δt *voliti co možná malý*. V tomto smyslu obdržíme pak, utvoříce poměr $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, rychlost pohybu *okamžitou* pro časový okamžik t.



Obr. 35.

Geometricky jest rychlost *průměrná* vyjádřena tangentou úhlu, o který se odchyluje *sečná* NN' od osy časové; stává-li se přírůstek Δt velice malým, přechází sečná NN' v *tečnou* NT; tangentou pak úhlu, o který se tato tečná odchyluje od osy časové, jest znázorněna rychlost *okamžitá* v *).

Rozdíl mezi rychlostí průměrnou a okamžitou vynikne dobře tímto příkladem. Meteorologie studuje rychlost proudění vzduchového při větru. Anemometr otáčivý (Robinson), jehož údaje se odčítají několikrát za den (aequidistantně), stanoví vždy rychlost průměrnou pro jistý časový intervall (na př. ve dne mezi 10^h a 2^h); rychlost okamžitou lze posouditi anemometrem akustickým (Strouhal-Barus) dle výšky tonu vznikajícího vzduchem proudícím přes napiatý drát, kterýžto ton lze telefonicky do pozorovací síně převáděti.

Jak značný může ještě býti přírůstek Δt, aby pro poměr $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ byl *dostatečně* malým, závisí na povaze pohybu. Kdyby na př. šlo o to, zjistiti okamžitou rychlost rychlovlaku, byla by pro Δt hodnota desetiny sekundy jistě dostatečně malou. Naproti tomu, kdyby se měla určiti okamžitá rychlost některého bodu kmitající ladičky, dávající na př. komorní $\bar{a}$, (435 kmitů za sekundu), byla by pro Δt hodnota i setiny sekundy velmi velikou, poněvadž v té době rychlost v probíhá více než 4krát všemi hodnotami své periody; musila by se tedy pro Δt voliti na př. hodnota desetitisíciny sekundy neb ještě menší. Proto se ve smyslu mathematickém zavádí označení »*nekonečně malé*« hodnoty Δt, kde pak ovšem i přírůstek Δs jest *nekonečně malým; poměr* však obou nekonečně malých hodnot

*) Označení c a v jest voleno dle slov celeritas a velocitas, při čemž c upomíná na rychlost, kteráž jest konstantní, v pak na rychlost měnlivou. Obyčejně se však písmenou v označuje rychlost vůbec.

dává hodnotu *konečnou* v, kteráž jest hodnotou *mezní* čili *limitou* *) pro případ, kdy přírůstky Δt a Δs se zmenšujíce stávají se nekonečně malými. Geometricky se ona limita názorně jeví přechodem sečné v tečnou.

Nekonečně malé přírůstky Δt a Δs označují se v mathematice jako differenciály a píší se dt a ds,

tedy $$v = lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Pravíme pak, že rychlost jest differenciální kvocient čili differenciální poměr (podíl) dráhy dle času.

Rychlost jest poměr dráhy, t. j. délky k času; její rozměr jest tudíž

$$\frac{L}{T} \text{ všeobecně, } \frac{cm}{sec} \text{ zvlášť.}$$

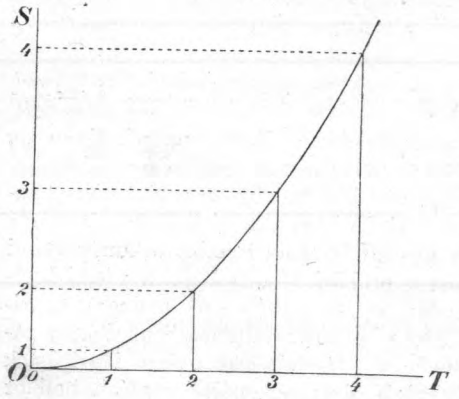
Pro jednotku rychlosti navrhlo se jméno

$$1\ \frac{cm}{sec} = cel.$$

(A. v. Oettingen), ale návrh se neujal.

§ 83. Pohyb rovnoměrně urychlený; pojem urychlení.

Z pohybů nerovnoměrných, při nichž tedy rychlost okamžitá v jest proměnlivou, vyniká zase pohyb takový, při kterém této rychlosti přibývá s dobou t rovnoměrně. Pohyb takový nazýváme *rovnoměrně urychleným*; konstantní pak přírůstek a rychlosti za každou jednotku časovou zoveme *urychlení* (acceleratio).



Obr. 36.

Chtějíce urychlení stanoviti, necháme od okamžiku časového t, kdy rychlost jest v, uplynouti další dobu Δt a pozorujeme, jaký jest v době té přírůstek Δv rychlosti. I jest pak

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Dělíce přírůstkem Δt přepočítáváme přírůstek Δv na jednotku doby.

Dráhu s vykonanou při pohybu rovnoměrně

*) Z latinského limes, -itis, mezní čára, hranice.

urychleném od okamžiku nullového do okamžiku t vypočítáme podobně jako při pohybu rovnoměrném zavedouce rychlost *průměrnou* $\frac{0+v}{2}$, což jest oprávněno právě vzhledem k tomu, že urychlování, t. j. vzrůstání rychlosti, jde s časem rovnoměrně. Násobíce tudíž tuto průměrnou rychlost dobou t obdržíme

$$s = \tfrac{1}{2} vt,$$

anebo, zavedeme-li urychlení,

$$s = \tfrac{1}{2} at^2.$$

Dle toho jest diagrammová čára (obr. 36.) při tomto pohybu *parabolou.*

Kdybychom vedle diagrammu dráhy sestrojili diagramm rychlosti, nanášejíce v jako pořadnici k úsečce t, značila by dráha vt u pohybu rovnoměrného plošný obsah pravoúhelníka o stranách v, t; a podobně i při pohybu rovnoměrně urychleném by dráha znamenala plošný obsah trojúhelníka, o výšce v, základně t. Tento plošný obsah jest však

$$s = \tfrac{1}{2} vt.$$

Tím jest důkaz o průměrné oné rychlosti dán geometricky.

Dle výkladů těchto jest urychlení poměr rychlosti a času; jeho rozměr jest tedy

$$\frac{L}{T} : T = \frac{L}{T^2} \text{ všeobecně, } \frac{cm}{sec} : sec = \frac{cm}{sec^2} \text{ zvlášť.}$$

Pro jednotku urychlení bylo navrženo jméno

$$1\ \frac{cm}{sec^2} = gal.$$

dle začátku jména Galilei (A. v. Oettingen). Ani toto jméno se neujalo. Vskutku zde při rychlosti a urychlení cítí se nejméně potřeba zvláštních jmen, užívá se tu jednotek délkových s přídavkem »za sekundu«, ač při urychlení není výraz takový správným.

§ 84. Pohyb nerovnoměrně urychlený; urychlení průměrné a okamžité.

Rozšíření pojmu urychlení na pohyb jakýkoli děje se týmž pochodem myšlenkovým, jako při rychlosti. Výraz $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ stanoví vždy *urychlení průměrné* pro časový intervall Δt a hodnota tohoto urychlení mění se všeobecně jak dle velikosti tohoto intervallu, tak dle okamžiku t, od něhož intervall začíná. Jde-li však o to, stanoviti

urychlení okamžité, charakterisující jenom tento okamžik časový t, nesmíme se od něho příliš vzdáliti, t. j. musíme přírůstek Δt voliti co možná (nekonečně) malý.

Kdybychom do diagrammu pohybového narýsovali též křivku, znázorňující závislost rychlosti v na času t, bylo by lze veškeré úvahy geometrické, jaké byly na křivce pro dráhu s provedeny, opakovati slovo za slovem též při této křivce rychlostní.

Budiž ještě poznamenáno, že může rychlosti během času též ubývati, tak že nelze mluviti o urychlení (akceleraci), nýbrž o opoždění (retardaci). Nicméně podržujeme i pro tento případ slovo *urychlení*, zavádíme je však jakožto *negativní*.

§ 85. Úplný diagramm pohybu.

V úvahách předcházejících odvodili jsme *tři veličiny foronomické*, s, v, a, kteréž svou závislostí na čase t nějaký pohyb vyznačují. Úplný diagramm pohybu byl by ten, u něhož by závislost tato pro všechny tři veličiny byla geometricky křivkami znázorněna.

Zpravidla přestáváme na diagrammu, kterým se znázorňuje závislost dráhy s na čase t. Vskutku lze z tohoto vypozorovati též závislost rychlosti v, i urychlení a na čase t; neboť rychlost dána jest stoupáním a urychlení zakřivením čáry diagrammové. Kde větev této čáry má průběh téměř přímý, je přibližně pohyb rovnoměrný a urychlení nullové; prudší zakřivení znamená prudší změnu rychlosti a tudíž větší urychlení; znamení pak tohoto urychlení souvisí s konkavitou neb konvexitou křivky, t. j. s polohou středu křivosti od čáry diagrammové čítajíc, ve směr, v němž dráhy buď přibývá neb ubývá.

Ve světle počtu differenciálního a integrálního značí rychlost okamžitá

$$v = lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

a urychlení okamžité

$$a = lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Co dříve řečeno, že stačí čára diagrammová pro závislost dráhy s na času t, znamená mathematicky, že stačí závislost formy

$$s = f(t)$$

pro posouzení celého pohybu; neboť rychlost v plyne derivací

$$v = f'(t)$$

a podobně urychlení a derivací další

$$a = f''(t).$$

Naopak postupuje se mathematicky integrací. Tak na př. z rovnice

$$a = const.$$

čili

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a$$

vychází integrací

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0$$

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

zcela všeobecně pro pohyb rovnoměrně urychlený. Při tom jsou v_0 a s_0 integrační konstanty, z nichž v_0 značí rychlost pohybu a s_0 dráhu již vykonanou v okamžiku $t = 0$, kdy čas t začínáme počítati.

§ 86. Širší význam pojmů rychlosti a urychlení.

Pojmy rychlosti a urychlení odvodili jsme vzhledem ke dráze s pohybujícího se hmotného bodu proměnlivé s časem t. Jest však patrno, že můžeme v širším smyslu týchž pojmů užívati, jde-li o jakoukoli veličinu fysikální, která se časem mění. Tak mluvíme o rychlosti, s jakou se mění průběhem času intensita galvanického proudu a pravíme na př., že stoupá rovnoměrně, a pod. V nejširším smyslu lze pak pojmů těch užívati, když jde o změny nějaké funkce s příslušným argumentem jakýmkoliv. V tomto smyslu pravíme na př., že objem kapaliny nějaké vzrůstá s teplotou urychleně, a pod.

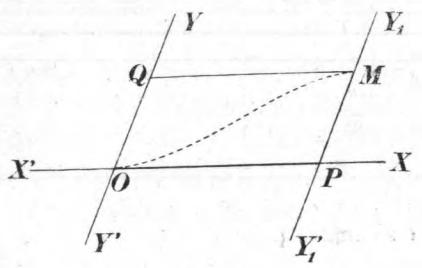
Znázorní-li se průběh funkce diagrammem, lze veškeré úvahy geometrické vzhledem k rychlosti a urychlení, s jakou se funkce ta mění se svým argumentem, provésti v témže způsobu, jako při diagrammech pohybu.

Pohyb bodu křivočarý.

87. Skládání pohybů přímočarých v rovině.

V úvahách předešlých předpokládali jsme, že se hmotný bod pohybuje na dané přímce. Může se však státi, že tato přímka sama jest v pohybu a to všeobecně ve směru jiném než vlastním, tak že na př. každý bod dané přímky $Y'Y$ (obr. 37.) se pohybuje přímočaře směrem $X'X$. Říkáme pak, že bod hmotný vykonává současně dva pohyby přímočaré, čímž však se jen má naznačiti, že pohyb jeho, kterýž ovšem může býti jen jediný, z těchto dvou jakožto výsledný vzniká. Jest pak dán úkol, tento výsledný pohyb určiti.

Při úkolu tomto vycházíme od zásady, že přímočarý pohyb v přímce $Y'Y$ přijde k platnosti stejně, ať přímka sama jest v klidu anebo ať se ve smyslu udaném pošinuje. Soudíme tedy, že výslednou polohu bodu obdržíme, když na místě pohybů *současných* (koexistentních) dosadíme pohyby *posloupné* (sukcessivní). Kdyby tedy v okamžiku $t=0$ se bod nalézal v poloze O a kdyby za dobu t se dostal na přímce $Y'Y$ do polohy Q a přímka sama do polohy $Y_1'Y_1$, obdržíme výslednou polohu M bodu nanesouce $PM = OQ$. Připojíme tedy ke dráze OP dráhu druhou $OQ = PM$ *i dle směru i dle velikosti.* Pravíme, že vykonané dráhy *geometricky sečítáme.* Jinak také, že sestrojíme rovnoběžník $OPMQ$ pošinutí OP, OQ.

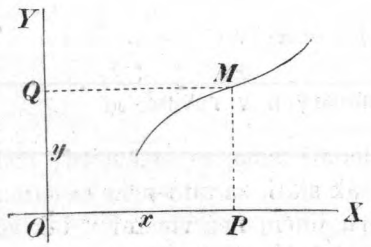


Obr. 37.

Jako pro okamžik t mohli bychom dle téhož pravidla pro každý jiný časový okamžik sestrojiti polohu výslednou M z daných poloh P a Q; dostatečný počet bodů M naznačoval by pak již výslednou dráhu, kteráž bude všeobecně křivočarou, ve zvláštních případech přímočarou.

§ 88. Rozkládání pohybu v rovině ve dva pohyby přímočaré.

Můžeme také, zpětně uvažujíce, daný pohyb v rovině rozložiti ve dva pohyby přímočaré $X'X$ a $Y'Y$ tím, že polohu bodu M *rovnoběžně promítáme,* vedouce (obr. 38.) $MP \parallel YY'$ a $MQ \parallel XX'$; pohyby průmětů P a Q zastupují dohromady pohyb bodu promítaného M. Takovéto rozkládání vede často ke zjednodušení názoru. Zpravidla bývají směry $X'X$ a $Y'Y$ k sobě kolmé a tudíž jsou pak *průměty* P a Q *pravoúhlé.*



Obr. 38.

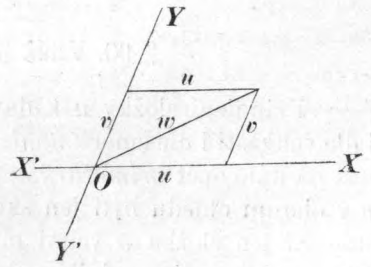
Pohyb koule vržené svisle vzhůru na lodi, rychle po řece plující, jeví se pozorovateli na břehu stojícímu dosti složitým; názor se však zjednoduší, když pohyb se rozloží jednak ve směru svislém, jak působí tíže a jak pohyb vidí pozorovatel na lodi, jednak ve směru vodorovném, jak pluje loď.

Vibrace bodu v některé Lissajousově křivce jeví se býti jednodušší, když se rozloží ve dvě vibrace na sobě kolmé. Je-li tou křivkou na př. ellipsa, poznáme ihned, jak rozměry této ellipsy závisí na amplitudě obou vibrací, jež jsou isochronní, a na jich rozdílu fásovém.

Směry $X'X$ a $Y'Y$ mohou býti považovány za *osy souřadnic* (obr. 37.). Pak jsou $OP = x$ a $OQ = y$ souřadnice bodu M. Pohyb bodu M libovolný *v prostoru* lze způsobem analogickým rozložiti dle *tří os souřadnicových* na sobě kolmých.

§ 89. Skládání rychlostí.

Jsou-li přímočaré pohyby hmotného bodu ve směrech $Y'Y$ a $X'X$ *rovnoměrné* s rychlostí v a u, lze snadno — konstrukcí i počtem — poznati, že i výsledný pohyb jest přímočarý a rovnoměrný. Rychlost tohoto výsledného pohybu nalezneme podobně jako výsledné vyšinutí z bodu O v době libovolné; neboť také rychlost znamená vyšinutí v době jednotky časové. Naneseme tedy (obr. 39.) směrem OX rychlost u jako délku a k ní připojíme směrem OY rychlost v též jako délku. Vedouce pak třetí stranu trojúhelníka, obdržíme její délkou rychlost w výslednou co do velikosti. Téhož výsledku ovšem dojdeme, připojíce naopak rychlost u k rychlosti v. Avšak pohyb sám děje se též ve směru oné třetí strany. Sloučíme-li tedy s pojmem rychlosti — kteráž byla dle původního výkladu určitá délka na přímce dané — též pojem *směru* pohybu, můžeme kratšeji říci, že obdržíme rychlost výslednou i dle velikosti i dle směru pohybu, *sečítajíce geometricky* rychlosti dané.



Obr. 39.

V tomto smyslu mluvíme o *skládání rychlostí.* Zvláštní případ, kdy dané rychlosti jsou stejno- nebo protisměrné a kdy se rychlosti sečítají algebraicky, jest v onom všeobecném sečítání geometrickém obsažen.

V prostoru vztahujeme pohyb na soustavu tří os souřadnicových na sobě kolmých, OX, OY, OZ a skládáme rychlost $\frac{ds}{dt}$ na dráze ve směru

tečné, k této dráze vedené, ze tří rychlostí

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}$$

ve směru os souřadnicových.

Máme zde relace:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos(xs)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos(ys)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos(zs)$$

Při tom jest

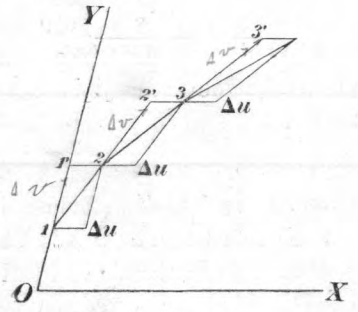
$$\cos^2(xs) + \cos^2(ys) + \cos^2(zs) = 1$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

jakož z jednoduchých úvah geometrických ihned jest patrno.

§ 90. Vznik pohybu křivočarého.

Připojení složky u k dané rychlosti v změní tuto rychlost v i dle velikosti i dle směru *náhle*. Nová rychlost w pak *zůstává*, pohyb jest na dále opět *přímočarým, rovnoměrným*. Má-li změna rychlosti v v obojím ohledu býti jen skrovnou, musí k dané rychlosti v přistoupiti jen složka u velmi malá, jako velmi malý přírůstek Δu. Než i potom děje se další pohyb přímočaře a rovnoměrně. Poznáváme z toho, že jen tehdá vznikne pohyb *křivočarý*, když ono pozměňování směru se opakuje, t. j. když znovu a znovu přistupuje další malá složka rychlosti Δu po uplynutí krátké doby Δt. Jinými slovy: rychlost ve směru $X'X$ musí se zvětšovati stále, t. j. musí zde býti *urychlení*.



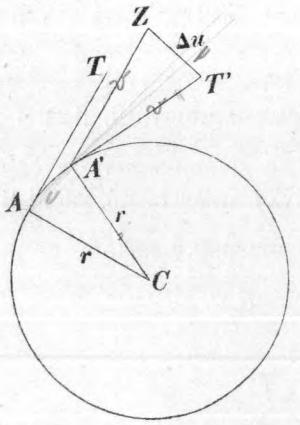
Obr. 40.

Podrobněji objasňuje se věc obrazcem 40. Hmotný bod, pohybující se ve směru OY rychlostí v, přišel by po uplynutí kratinké doby Δt do polohy 1 a potom dále do polohy $1'$; v poloze 1 přistoupí

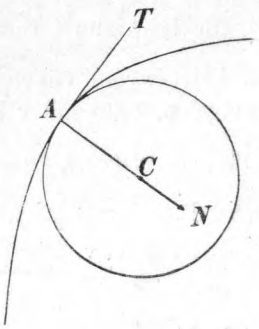
však složka rychlosti Δu; bod nepřijde tudíž do $1'$, nýbrž směrem pozměněným s rychlostí o něco málo větší do polohy 2, odkudž by v době Δt přišel dále do polohy $2'$; avšak opět přistoupí složka rychlosti Δu; bod přijde do polohy 3 směrem znovu pozměněným s rychlostí opět o něco větší atd. Obrazec naznačuje již vznik křivočarého pohybu lomenou čarou $0123\ldots$. V této jest ještě diskontinuita. Avšak tato přejde v kontinuitu a tím lomená čára v oblouk jisté křivky, když jsou přírůstky Δt a Δu nekonečně malé; jich poměr $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ dává svou mezní hodnotou urychlení ve směru $X'X$. Všeobecně mění se tímto urychlením rychlost v i co do směru i co do velikosti.

§ 91. Urychlení tangenciální a normální.

Je-li křivka pohybu dána, lze jednoduchou úvahou stanoviti to urychlení, kteréž způsobuje *jenom změnu směru* v rychlosti pohybu. Budiž touto křivkou kruh poloměru r (obr. 41.), a předpokládejme, že — hledě toliko k velikosti — pohyb se v něm děje rychlostí



Obr. 41.



Obr. 42.

v konstantní. Mění se však stále její směr. V poloze A jest rychlost v dána tečnou AT, po uplynutí kratinké doby Δt přijde hmotný bod do polohy A', kde je rychlost v dána opět tečnou $A'T'$, kteráž se ve směru od ní poněkud liší. Tato změna směru vznikla — dle pravidla o geometrickém sečítání rychlosti — malou složkou Δu, kteráž ihned vynikne, když v obrazci 41. vedeme rovnoběžně $A'Z = AT$.

Jde o stanovení této složky Δu. Dráha AA' téměř přímočará jest patrně $v\Delta t$. Z podobnosti trojúhelníků $ZA'T'$ a ACA' však plyne:

$$\frac{\Delta u}{v\Delta t} = \frac{v}{r}$$

čili

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$

Stanou-li se přírůstky Δt, Δu nekonečně malými, udává poměr $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ svou hodnotou mezní okamžité urychlení v poloze A. Z toho patrno, že změna směru v rychlosti v jest způsobena urychlením $\frac{v^2}{r}$, kteréž působí *kolmo k tečné*, čili ve směru *normály* kruhu a kteréž se tudíž zove *urychlením normálním*. Toto souvisí se čtvercem rychlosti v^2 a se zakřivením $\frac{1}{r}$ kruhu.

Výsledek tuto pro kruh odvozený lze ihned přenésti na pohyb ve křivce jakékoli. Neboť velmi malý oblouček křivky (obr. 42.) lze vždy pokládati za splývající s obloučkem kruhu, kterýž má na tom místě stejné zakřivení a kterýž se také zove kruhem křivosti čili kruhem oskulačním. Je-li r jeho poloměr, jest $\frac{1}{r}$ měrou křivosti onoho obloučku křivky jakékoliv.

Dle toho značí tudíž výraz $\frac{v^2}{r}$ *urychlení normální* a_n při pohybu křivočarém vůbec. Jím způsobuje se změna *směru* rychlosti pohybové v. Tato má v každém bodě křivky směr tečné. Mění-li se též dle své *velikosti*, značí výraz $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ pro přírůstky nekonečně malé svou hodnotou mezní *urychlení tangenciální* a.

Píšeme tedy, rozeznávajíce:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \qquad a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Dle označení počtu differenciálního stanovíme obě urychlení, tangenciální i normální, výrazy

$$\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{v^2}{r}.$$

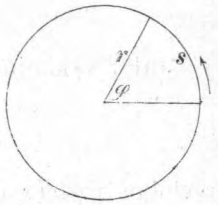
Nullové urychlení normální znamená pohyb přímočarý; nullové urychlení tangenciální a konstantní urychlení normální určuje rovnoměrný pohyb kruhový.

§ 92. Rychlost úhlová a urychlení úhlové.

Při pohybu kruhovém, o němž jednáno v odstavci předešlém, mění se dráha s, bodem vykonaná, *úměrně* s *úhlem středovým* φ (obr. 43.) dle rovnice

$$s = r\varphi.$$

Na základě toho můžeme všechny vztahy časové, kteréž jsme dříve zavedli pro dráhu s, snadno přenésti na středový úhel φ, a tak definice lineární převésti na definice úhlové.



Obr. 43.

To má především platnost o rychlosti pohybu v, definované mezní hodnotou poměru $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, kterýž přejde ve výraz $r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$;

poměr $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$ zove se *rychlostí úhlovou*. Jest tedy

$$v = r\omega.$$

Také lineární urychlení — ale ovšem jen urychlení tangenciální, stanovené mezní hodnotou poměru $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ — lze převésti na úhlové; poměr tento přejde ve výraz $r\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$, mezní pak hodnotou poměru $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \alpha$ stanoví se *urychlení úhlové*.

Jest tedy $$a = r\alpha.$$

Co se urychlení normálního týče, nelze je převésti na podobné úhlové, poněvadž při úhlu není žádné změny směru. Můžeme však do výrazu dříve odvozeného

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

zavésti rychlost úhlovou

$$v = r\omega$$

a obdržíme výraz nový

$$a_n = \omega^2 r.$$

Jest tudíž urychlení normální úměrno:

poloměru r *obráceně* při stejné *lineární* rychlosti v
a poloměru r *přímo* při stejné *úhlové* rychlosti ω.

Ve smyslu počtu differenciálního píšeme rychlost úhlovou výrazem

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

a urychlení úhlové

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

čili

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Jak z výkladů předešlých vysvítá, jest rozměr úhlové rychlosti

$\frac{1}{T}$ všeobecně, $\frac{1}{sec}$ zvlášť;

a podobně rozměr úhlového urychlení

$\frac{1}{T^2}$ všeobecně, $\frac{1}{sec^2}$ zvlášť.

Rozměrovým těmto výrazům dlužno rozuměti tak, že 1 v čitateli znamená vlastně veličinu, totiž úhel, jehož rozměr v absolutní míře jest $= 1$. Nejedná se tedy na př. při úhlové rychlosti o reciprokou hodnotu času, ač se rozměrově úhlová rychlost tak představuje.

Pohyb tělesa.

§ 93. **Translace a rotace.**

Pohyb tělesa, jak již v úvodu k této stati řečeno, studujeme na základě pohybu, jaký vykonává každý jeho bod. Pohyb tento jest všeobecně křivočarý.

Srovnávajíce dráhy jednotlivých bodů tělesa shledáme, že mohou nastati dva případy hlavní: buď jsou vespolek *shodné* nebo *podobné*.

Vytkněme především dva případy zvláštní, kde tato shodnost nebo podobnost zvláště jest patrnou.

Dráhy jednotlivých bodů mohou býti *přímočaré*. Přímky jsou vesměs vespolek shodnými. Pohyb tělesa takový zove se *posunování*, *translace* v daném směru.

Dráhy jednotlivých bodů mohou býti *kruhové*. Kruhy jsou vespolek vesměs podobnými. Pohyb tělesa takový zove se *otáčení*, *rotace* kolem osy dané.

Definice tyto daly by se rozšířiti na případy, kdy jsou dráhy jednotlivých bodů křivky jakékoliv. Tím přišli bychom k *translaci* a *rotaci* ve smyslu *širším*. Avšak tyto dají se na ony ve smyslu užším převésti, dle zásady, že každá malá část křivky se dá přibližně za přímočarou pokládati a rovněž každý obloučeк křivky za kruhový. Proto jest translaci a rotaci ve smyslu širším translace a rotace ve smyslu užším *základem*.

Složením translace a rotace vzniká pohyb, který v případě nejjednodušším, kdy směr přímočarého postupu se shoduje s osou otáčení, jeví se jako pohyb *šroubový*.

VI.

Síla, práce, energie.

§ 94. Pojem síly.

K pojmu síly přicházíme na základě osobní, individuální zkušenosti, kterou činíme o vlastní své síle tělesné. Postupem rozvoje tělesného a hojnými zkušenostmi denního života přichází k vědomí našemu ponenáhlu ona mohutnost svalová, síla tělesná, kterou jsme obdařeni sami, kterou vystihujeme analogicky u lidí vůbec i u zvířat a která tím se vyznačuje, že dovedeme působiti proti rozmanitým překážkám, jež se síle naší staví na odpor. Působíce proti nim pociťujeme menší neb větší námahu a pocity takové jsou subjektivním měřítkem síly vynaložené. Soudíce pak, že odpory takové jsou něco obdobného neb stejného, jako síla, která proti nim dovede působiti, nazýváme je také silami, rozšiřujíce tak pojem, jenž nám jest subjektivně, na základě vlastní zkušenosti, jasným, též na přírodu vůkol nás, a toto rozšíření jeví se býti oprávněno tím spíše, poněvadž velmi často shledáváme, že síly takové zcela podobné mají účinky jako síla naše vlastní.

Ze všech sil nejznámější jest tíže. Tělo naše a všechny hmoty vůkol nás jsou těžké, mají váhu, jako by je země k sobě táhla. Poznáváme to, zvedajíce je, držíce je v rukou a pozorujíce, jak padají, když je z rukou pustíme. Pravíme, že země naše působí na veškeré hmoty silou přitažlivou, formulujíce výrokem tím denní zkušenost. Na základě tíže zemské zdokonalil se pojem síly velmi záhy ve smyslu kvantitativním. Dle toho, mnoho-li kdo dovede zvednouti, držeti, unésti a pod., posuzujeme jeho sílu tělesnou kvantitativně.

Neméně známé jsou síly, kteréž nyní fysika celkově jakožto molekulové označuje a kteréž podmiňují veškeré tak rozmanité zjevy soudržnosti a přilnavosti. Chceme-li nějakou pevnou tyč ohnouti nebo přelomiti, kroutiti nebo překroutiti, chceme-li provazec natáhnouti nebo přetrhnouti, sloup stlačiti neb rozdrtiti, chceme-li těleso nějaké pevné jiným prorážeti, od jiného, k němuž lne, odtrhnouti, uvésti v pohyb na půdě drsné atd., ve všech těch a podobných případech cítíme odpor, který vlastní silou často

jen do jisté míry dovedeme překonati. Zavádíme pak pro odpory ty určitá jména, mluvíce o pevnosti těles, pružnosti, o tření a pod. a vykládajíce odpory tyto působením sil molekulových. Všechny zde uvedené příklady bylo by lze rozhojniti dalšími, jež mají svůj základ v silách thermických, magnetických, elektrických atd.

Jest úkolem fysiky studovati všechny ty rozmanité účinky, jež připisujeme silám přírodním a tak blížiti se otázkám velice nesnadným o podstatě sil těch. Představa o tom, jak účinkují, vždy bude upomínati na osobní zkušenosti o působení síly tělesné; názvy přitahování, odpuzování a pod., jichž tak hojně užíváme, jsou obrazné; chceme říci, že síly působí tak, jako by člověk působil, kdyby vlastní silou hmotu nějakou k sobě táhl neb od sebe pudil *).

§ 95. Účinek síly statický.

Stlačujeme-li neb napínáme-li pružnou ocelovou spirálu silou svého ramene, cítíme, jak spirála tomu se vzpírá, jak odpor, který klade, stoupá, až konečně při jistém stlačení neb napětí jest právě takový jako síla, kterou působíme. Pravíme, že jest rovnováha. Akce ramene a reakce spirály se rovnají. Účinek síly jest zde *statický*, jevě se jako tlak neb napětí.

Stejného účinku docílili bychom kladouce neb zavěšujíce na pružnou spirálu závaží. Soudíme, že síla ramene se rovná váze těchto závaží. Měříme tak na základě účinku statického sílu ramene, jakož i sílu spirály vahou hmot. Volíme-li tedy váhu určité hmoty za jednotku síly, lze tímto způsobem sílu vyjádřiti číslem, sílu měřiti. Právě tak mohli bychom číselně vyjádřiti sílu, jakou táhne kůň, jakou magnet přitahuje železnou kotvu, jakou horká vodní pára tlačí na jistou plochu stěny parního kotle a pod.

§ 96. Jednotka síly statická.

Dle předešlého mohli bychom váhu hmoty jakékoli voliti za jednotku síly. Jest však nejjednodušším, voliti váhu *jednotky* hmotné. Touto jest nyní kilogramm. *Jest tedy váha kilogrammu jednotkou síly statickou.*

Často se jednotce této říkává též kilogramm a dodává se, že dlužno rozeznávati kilogramm jako hmotu a kilogramm jako váhu. Správné to není. Stejným právem bylo by lze připojiti, že dlužno ještě rozeznávati kilogramm jako hybnost anebo kilogramm jako živou sílu a pod. Slovo

*) O síle pojednává obšírněji článek prof. *Jos. Krčošky* v Časop. pro pěstov. math. a fys. 34., pag. 21., 1905.

kilogramm znamená *jenom* hmotu určité velikosti; tato hmota pak, jsouc v poli gravitačním jisté intensity, má určitou váhu, jež jest touto intensitou podmíněna, právě tak, jako má určitou hybnost nebo určitou živou sílu, jež jest podmíněna její rychlostí.

Vzhledem k tomu dlužno též v označování tohoto rozdílu šetřiti. Označení *g*, *kg* znamená vždy *hmotu*; jedná-li se o její *váhu*, dlužno užívati označení jiného, na př. dlužno klásti tyto značky do závorky, tedy psáti *(g)*, *(kg)*, jak v tomto díle budeme činiti *).

§ 97. Účinek síly dynamický.

Obecný život poskytuje mnoho příkladů, kdy síla se jeví *dynamicky*, totiž pohybem. Vůz, vlak, loď uvádějí se v pohyb silou koně, páry, větru a pod. Ukazuje se však, že pohyb přestává, když síla působiti přestane. Z pozorování takových vzniká snadno názor, jako by pohyb hmot vůbec vznikal a udržoval se jen působením jistých sil, názor, který z části jest správným, celkově však nikoliv. Rozpoznati věc není však snadno, poněvadž to vyžaduje pozorování a přemýšlení zároveň, empirii i spekulaci. Obé zároveň scházelo filosofům přírodním doby staré i střední. Otázky statické byly záhy správně formulovány a řešeny (Archimedes); otázky dynamické vedly na bezcestí k názorům, jež se nám nyní zdají býti podivnými (Aristoteles) a jež přece se udržely i do prvních století doby nové. V názorech Aristotelových tkvěli ještě do jisté míry mužové jako Tyge Brahe a Kepler.

Dle starších těchto názorů bylo na př. zásadou, že každé těleso hledá své místo; toto jest u těles těžkých dole, u lehkých nahoře; proto tělesa těžká padají a to dle větší neb menší váhy své rychleji neb volněji; lehká naproti tomu stoupají, na př. ve vzduchu neb v kapalině. Pohyby těles, odpovídající této jich vrozené snaze, jsou přirozené; ostatní, jako na př. vrh těles, vynucené.

Rozvoj dynamiky stal se možným teprve, když v otázkách základních o působení sil zjednána byla jasnost. Zásluhu pak o to má otec moderní mechaniky *Galileo Galilei* **).

*) Jednotného označování dosud není. V německých spisech píše se na př. *kg* a *kg-gew.* (Kilogrammgewicht, F. Kohlrausch.)

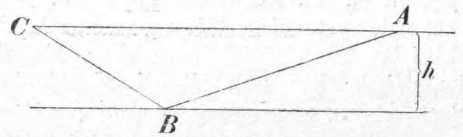
**) *Galileo Galilei* narodil se $^{15}/_{2}$ 1564 v Pise. Léta mládí svého strávil ve Florencii, odkud otec jeho pocházel. V letech 1581—1585 studoval na universitě v Pise hodlaje se věnovati lékařství, později přiklonil se úplně mathematice a fysice; do těchto dob (1583) připadá jeho objev o isochronismu kyvadla, kterýž učinil pozoruje kyvy lampy zavěšené v kathedrále Pisanské. V 25. roce (1589) stal se docentem mathematiky v Pise. Pokusy o padání těles na šikmé věži Pisanské prováděnými ukázal nesprávnost náhledů Aristotelových, že by tělesa těžší padala

§ 98. Setrvačnost.

Že hmota jenom působením síly z klidu se uvádí v pohyb, jinak v klidu setrvávajíc, jest poznání dosti blízké a snadné, poněvadž jest v souhlasu s denní zkušeností. Ale že hmota, byla-li v pohyb uvedena, také v tomto pohybu určitým způsobem setrvává, i když síla žádná jí nepohání, — ale ovšem také žádná jí nezadržuje, — jest poznání daleko nesnadnější, vyžadujíc abstrakce od denní zkušenosti, kteráž s tím nesouhlasí.

K poznání tomu došel G. Galilei a sice na případě zvláštním, spojuje pokusy s rozumováním a maje odvahu logicky, na základě principu kontinuity, rozšířiti důsledky oněch pokusů i na případ mezní, pro který kontrola pokusem jest nemožnou.

Ve spise »Dialogo intorno sopra i due massimi systemi del mondo«, uvažuje Galilei o pádu těles na šikmé rovině a dochází výsledku, že těleso, po rovině šikmé (obr. 44.) výšky *h* padajíc, nabývá konečné rychlosti, jaká dostačuje, aby těleso po jiné šikmé rovině stoupajíc téže vyšky *h* dostoupilo. »Patrno tedy, že těleso, z klidu při *A* padajíc podél *AB*, nabývá stupňů



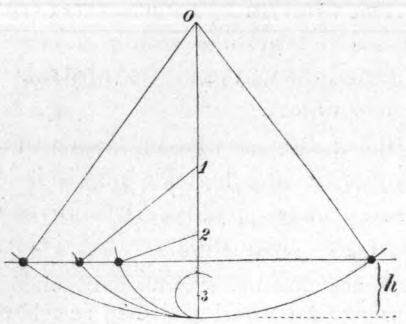
Obr. 44.

rychlosti dle vzrůstu času samého; avšak stupeň v *B* jest největší z nabytých a povahou svou nezměnitelně způsobený, ač-li jsou odstraněny příčiny urychlování dalšího neb opozdování, urychlování totiž, kdyby ještě na prodloužené rovině dále postupovalo, opozdování však, když by se na rovinu přikloněnou odrazilo; *na vodorovné však rovnoměrný pohyb dle stupně rychlosti z A do B nabyté do nekonečna by pokračoval.*«

Experiment, který zde Galilei popisuje, jest jenom myšlenkový; změna pohybu ze směru *AB* do směru *BC* jest náhlá. Když se však

rychleji. Vzdav se (1592) svého místa stal se záhy professorem na universitě Paduanské, kdež působil v letech 1592—1610. Do této doby připadají jeho studie o pádu těles po šikmé rovině a jeho objevy dalekohledem. V roce 1610 přijal povolání do Florencie. Známý jest konflikt jeho s kurií římskou, kterýž vzplanul zvláště po vydání spisu: Dialogo di G. G. sopra i due massimi systemi del mondo (1632). Hlavní jeho dílo vyšlo v cizině pod názvem: Discorsi e dimostrazioni matematiche (Leyden 1638). Poslední léta svého života strávil v Arcetri u Florencie, kdež také $^{8}/_{1}$ 1642 zemřel. Z jeho žáků vynikli *Viviani* a *Torricelli*. Obšírněji o jeho životě a zejména jeho konfliktu s kurií římskou pojednáno ve spise: Dr. F. J. Studnička, Bohatýrové ducha, 1898.

padání hmoty s výšky h zařídí tak, aby se změna směru dála ponenáhlu, jako jest tomu, když těleso, jsouc na niti zavěšeno, padá ve dráze kruhové, pak lze experimentem skutečným ukázati, že těleso rychlostí, v nejnižším bodě dráhy nabytou, opět do výšky h stoupne, se které padalo. Galilei ukázal to kyvadlem (obr. 45.) zavěsiv těžkou kouli kovovou na hřebík do zdi zaražený. Vskutku koule na jedné straně s výšky h spuštěná vystoupí na druhé straně do téže výšky, aspoň téměř do téže výšky; Galilei poznává, že příčinou malého zdržení koule jest odpor vzduchu, který se u koulí menší hmoty specifické, na př. korkových, jeví ještě více. Při tom však, a to jest důležité, ani nezáleží na tom, zdali koule, po daném oblouku padajíc, stoupá po oblouku stejném aneb jakémkoli jiném. Galilei ukazuje správnost toho velmi jednoduše; stranou těsně vedle svislé niti zaráží na místech 1, 2, 3, . . . do stěny hřeby, na nichž se pak při pohybu nit zachytí; tím koule, padajíc po oblouku o středu o, stoupá po oblouku o středu 1 neb 2 . . ., ale pokaždé vystoupí do téže výšky h; a když hřebík na místě 3 jest zaražen tak nízko, že zbývající část niti nestačí, aby koule do této výšky h vystoupila, pak koule v nejvyšším bodě oblouku o středu 3 má ještě zbytek rychlosti, kterou se přemrští na druhou stranu.



Obr. 45.

G. Galilei poznal setrvačnost pro pohyb na rovině vodorovné, kdy tíže pohyb ani neurychluje ani neopozďuje. Ve významu všeobecnějším uvádí již setrvačnost *Ch. Huygens* větou: »Kdyby nebylo tíže a kdyby vzduch pohybu těles nepřekážel, jedno každé z nich by v pohybu jednou nabytém pokračovalo rychlostí rovnoměrnou v čáře přímé.« *)

Pokračuje pak dále, že skutečný pohyb těles je složen z tohoto rovnoměrného, jehož základem je setrvačnost a z pohybu, který vzniká působením tíže.

Způsobem nejurčitějším, jako axiom čili první zákon pohybu, formuluje setrvačnost *I. Newton* slovy: »*Každé těleso setrvává ve*

*) Si gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, .. unum quodque eorum acceptum semel motum continuaturum velocitate aequabili secundum lineam rectam. Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato, pars secunda, de descensu gravium, pag. 21. Parisiis 1673. Ch. Huygens žil v letech 1629—1695. K významu spisu zde uvedeného vrátíme se v oddílu o kyvadle.

svém stavu klidu nebo pohybu rovnoměrného přímočarého« — a dokládá: »*leč by vnějšími silami bylo nuceno stav svůj měniti*« *).

Jak důležitým, zásadním pokrokem bylo poznání sestrvačnosti v pohybu, vysvítá nejlépe z námitek, které ještě *Tyge Brahe* (1546—1601), tak slavný pozorovatel, činil proti pohybu země. Nebylo by lze pochopiti, pravil, jak by kámen, padaje s věže, mohl dopadnouti na úpatí jejím, kdyby se země otáčela. Nebylo by lze nalézti sílu, která by osu zemskou udržovala ve směru neproměnlivém.

Nelze upříti, že námitky tyto, beze známosti setrvačnosti hmoty, byly velmi závažné. *M. Koperník* (1473—1543) hleděl již učiniti věc pochopitelnou udávaje, že pohyby kruhové jsou hmotám na zemi přirozené a že je tudíž konají se zemí zároveň. Také *J. Kepler* (1571—1630) musil pro udržování pohybu (téměř) kruhového oběžnic předpokládati zvláštní sílu tangenciální, jejížto původ vysvětliti činilo obtíže nepřekonatelné.

Příkladů setrvačnosti v klidu poskytuje denní zkušenost. Rozjede-li se na př. prudce vůz neb loď, zvrátí se pozorovatel na voze neb lodi stojící neb sedící vzad. Hne-li se prudce mísou, vystřikne voda; a t. d. Ale také pro setrvačnost v pohybu máme příkladů dosti, kteréž ovšem v dobách starých asi také byly pozorovány, ale jinak vykládány, — pokud vůbec kdo o nich přemýšlel. Zarazí-li se v pohybu vůz nebo loď, padne pozorovatel na voze neb lodi stojící neb sedící vpřed. Hodí-li se těleso vzhůru neb padá-li dolů na lodi prudce rozjeté, stoupá neb padá se stanoviska pozorovatele na lodi přímočaře, tak jako kdyby loď stála. Skočíce s vozu rozjetého padneme ve směru jeho pohybu, atd. Historicky zajímavo jest poznamenati, že již *Leonardo da Vinci* (1452—1519) znal úkaz, jak lze z plochých kaménků na sebe složených jeden vyraziti, aniž by ostatní se pohnuly.

§ 99. Stanovení síly na základě účinku dynamického.

Pohyb tělesa setrvačností jest rovnoměrný, přímočarý. Každou *změnu* tohoto pohybu připisujeme síle působící na těleso v jistém směru. Stává-li se pohyb nerovnoměrným, zůstávaje však přímočarým, působí síla ve směru pohybu; stává-li se pohyb křivočarým, zůstávaje rovnoměrným, působí síla na konkavní straně křivky. Zde i tam lze změnu pohybu vystihnouti *urychlením*. Dynamický (kinetický) účinek síly jest tedy povšechně *urychlení*.

Majíce tudíž sílu f dynamicky stanoviti, klademe ji jednoduše *úměrnou* jejímu účinku, t. j. urychlení a, a píšeme

$$f = Const.\ a.$$

*) Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare. Philosophiae naturalis principia mathematica. (Axiomata sive leges motus: I.) I. Newton narodil se téhož roku 1642, kdy zemřel G. Galilei, a žil do roku 1727.

Zavedouce tuto úměrnost zůstáváme v souhlasu s měřením síly statickým. Pro váhu p máme pak vzhledem k urychlení g téže vztah

$$p = Const.\ g.$$

Vskutku také pozorujeme na př. na rovině nakloněné, že váha tělesa, měřena staticky závažím, mění se na nakloněné rovině právě tak, jako urychlení, kterým těleso padá — totiž dle $\sin \alpha$ při úhlu elevačním α, — tedy právě tak, jako veličina sílu kineticky určující. Význam konstanty »*Const*« v hořejší rovnici určí se úvahou následující:

Urychlení g jest (na témže místě povrchu zemského) pro všechna tělesa totéž. Jejich váha p jest však rozdílna; dle toho zavedli jsme pojem hmoty m těles kladouce tuto úměrnou váze. Má tedy ona konstanta jako faktor hmotu m tělesa, na které téže působí. Totéž zavádíme všeobecně. Píšeme tedy

$$p = const.\ mg,$$
$$f = const.\ ma,$$

čímž se síla vůbec stanoví úměrnou jednak hmotě, na kterou působí, jednak urychlení, které jí udílí.

Měření síly změnou pohybu, t. j. urychlením, vyjadřuje I. Newton slovy: »Změna pohybu jest úměrná hybné síle působící a děje se dle přímky, ve které ona síla působí.« *)

§ 100. **Jednotka síly dynamická.**

Urychlením a hmotou jest síla dynamicky určena; konstanta, kteráž ještě zbývá v rovnici

$$f = const.\ ma$$

závisí jediné na volbě jednotek. Pro urychlení a hmotu jsou již jednotky stanoveny. Jest patrno, že taková volba jednotky pro sílu jest vhodná, pro kterou

$$const. = 1,$$

tak že jest jednoduše

$$f = ma.$$

Jednotkou síly dynamickou jest dle toho síla, kteráž hmotě jednotkové udílí urychlení jednotky. Její rozměr jest

$\frac{LM}{T^2}$ všeobecně, $\frac{cm \cdot g}{sec^2}$ zvlášť.

*) Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur. (Axiomata sive leges motus; II.)

Pro dynamickou jednotku síly a to všeobecnou zavádíme označení F, kladouce

$$F = \frac{LM}{T^2}.$$

Zkrácení toto jest velmi často výhodné. Jestiť síla veličina, která se nalézá jakoby v čele celé řady jiných, s ní souvisících. Výrazy rozměrové jeví se pak daleko přehledněji, když se v nich ponechá jednotka F, kdežto se jich význam zastře, když se jde až k základním jednotkám L, M, T.

Pro jednotku síly dynamickou zvláštní, platnou pro soustavu *cm*, *g*, *sec*, zavedlo se jméno *dyna* *).

Jak v následujícím odstavci vyložíme, jest dyna jednotkou velmi malou; proto se s výhodou užívá *megadyny*, t. j. násobku millionového.

V součinu *ma*, kterým se síla *f* určuje, značí faktor *m* kvantitu, t. j. kvantum hmotné. Oproti tomu lze korrelativně druhému faktoru *a* přičísti povahu intensity. Když se naopak od tohoto pojmenování vyjde, lze k němu užiti korrelativně názvu extensity, také kapacity, místo kvantity. Odtud na př. označení hmoty, jakožto kapacity tělesa pro sílu. Síla jest v postupu odvozených veličin fysikálních první, při níž ony dvě stránky každá svým faktorem v součinu jsou zastoupeny; podobných veličin seznáme více. Proto se nyní se zálibou takové dva faktory pro kvantitu (extensitu, kapacitu) a pro intensitu i tam hledají, kde méně určitě vystupují.

§ 101. **Poměr obou jednotek sil, starší statické a nové dynamické.**

Starší jednotku síly, váhu kilogrammu, vyjádříme v dynách dle rovnice $p = mg,$

kladouce za m a g příslušné hodnoty číselné. Za m položíme 1000 grammů. Co se však týče urychlení téže g, není toto určitým, závisíc, jak později obšírně vyložíme, na šířce geografické a výšce nad mořem toho místa, na kterém jednotky »váhy kilogrammu« užíváme. Právě v této neurčitosti jednotky starší spočívá vědecký důvod pro její odstranění. Volíme-li na př. střední šířku geografickou 45° a hladinu moře, jest

$$g = 980{\cdot}606\ \frac{cm}{sec^2},$$

tudíž $$váha\ kg = 980606\ dyn.$$

*) Z řeckého *δύναμις*, ἡ síla.

Převodní koefficient jest nepřehledný. Stane se však jednoduchým, když na místě *dyny* zavedeme *megadynu*; pak jest

$$\textit{váha kg} = 0{\cdot}9806\ \textit{megadyny},$$

z čehož vidíme, že váha kilogrammu jest velmi blízkou megadyně, jsouc jenom o dvě procenta menší. Přesněji jest

$$1 - \frac{0{\cdot}0194}{0{\cdot}9806} = 1 - 0{\cdot}0198.$$

Vzhledem k tomu, že váha kilogrammu, není-li g určitě udáno, již v desetinách procenta jest neurčitou, stačí úplně pamatovati, že jest o *dvě procenta* menší než megadyna. Všechna tudíž čísla, jimiž jest síla vyjádřena dle starší jednotky, převedeme na novou, když čísla ta o dvě procenta umenšíme.

Nahodilá tato přibližná shoda starší jednotky a nové jest důležitou pro dobu přechodní. Jest pozorovati, že zejména v kruzích technických jednotky moderní, megadyny, se neužívá, nýbrž že se trvá při jednotce starší, kterouž jest váha kilogrammu a kteréž se (ovšem nevhodně) zkrátka říká kilogramm. Nelze upříti, že tato jednotka starší má své přednosti. Snadno lze síly závažím měřiti; každý také ze skušenosti ví, jak velikou váha kilogrammu jest. Než vše to lze přenésti na megadynu, s dodatečnou malou korrekcí. Proto i na dále lze užívati závaží při experimentování; jenom výsledky dlužno přepočísti na megadyny vzhledem k urychlení g toho místa, kde se experimentuje. Údaje stanou se pak zavedením jednotky absolutní přesnějšími a pozbývajíce lokálního významu, všeobecně platnými.

Jednotka, kterou jsme dynou zvali, jest, jak již řečeno, pro účely mechanické příliš malou, jsouc o 2 procenta větší než váha milligrammu. Za to hodí se lépe pro síly na př. elektrické neb magnetické.

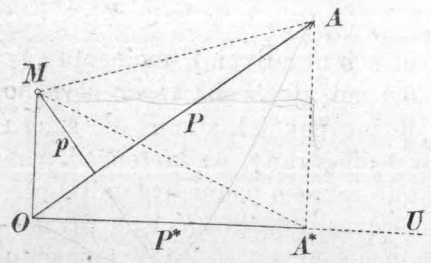
§ 102. Znázorňování síly.

Síla jest určena *působištěm, směrem a velikostí*. Tyto tři činitele můžeme velmi přehledně *znázorniti*, vedouce od působiště přímku ve směru, jak síla působí, a v délce, jak odpovídá velikosti síly. Třeba jen určiti, jakou délkou chceme znázorniti dynu neb megadynu. Kdybychom na př. megadynu znázornili délkou decimetru, byla by váha kilogrammu znázorněna délkou asi o 2 millimetry kratší. Kde jde jenom o srovnávání sil vzájemné, o vztahy relativní, postačí rýsovati délky vůbec úměrné. Tento způsob znázorňování síly jest geometrický. Tím se stává, že lze na jeho základě dáti i výkladu o silách, jich skládání, rozkládání a pod. ráz geometrický; odtud název »geometrie sil«.

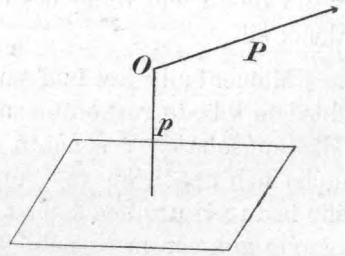
Veličiny, kteréž podobně jako síla jsou charakterisovány nejen svou velikostí, nýbrž též svým směrem, nazýváme všeobecně *vektory*. Oproti tomu veličiny charakterisované jenom svou velikostí zoveme *skaláry*. Tak jest na př. objem nebo hmota nějakého tělesa skalárem, podobně práce, effekt, energie. Na druhé straně jsou dráha tělesa, jeho rychlost, urychlení vektory, podobně jako síla. Věty o skládání a rozkládání mají pro všechny vektory platnost stejnou; jest tudíž geometrie sil speciálním případem geometrie vektorů.

§ 103. Moment síly.

Působnost síly, která jest dána působištěm, směrem a velikostí, posuzuje se často netoliko dle její *velikosti* P, nýbrž též dle *odlehlosti* p buď jejího směru OA od daného bodu M (obr. 46.),



Obr. 46.



Obr. 47.

anebo jejího působiště O od dané roviny (obr. 47.). V obou případech tvoříme součin Pp a zavádíme jej jakožto ***moment*** síly a to

buď vzhledem k danému bodu,

aneb vzhledem k dané rovině.

U momentu prvého není rozhodujícím působiště, nýbrž jenom směr, u momentu druhého naopak není rozhodujícím směr, nýbrž jenom působiště.

Rozměr momentu jest dle toho všeobecně i zvlášť

$$\mathrm{FL} = \frac{\mathrm{L^2M}}{\mathrm{T^2}}$$

$$\textit{dyna} \,.\, \textit{cm} = \frac{\textit{cm}^2 \,.\, g}{\textit{sec}^2}.$$

O momentu síly P vzhledem k danému bodu M poznamenejme ještě toto.

Geometrický význam momentu Pp jakožto dvojnásobné plochy trojúhelníka OMA (obr. 46.) jest ihned patrný. Jde-li o několik sil v témž působišti O a tvoříme-li pro každou moment vzhledem k témuž bodu M, bývá ke srovnání těchto momentů výhodno, zavésti pro všechny společnou délku OM a nahraditi současně každou sílu P jejím průmětem P^* na směr OU kolmý k přímce OM. Jako se tím všechny různé délky p nahradí délkou společnou OM, tak se podobně všechny různé směry OA nahradí směrem společným OU; spustíce tedy kolmici $AA^* \perp OU$ položíme průmět $P^* = OA^*$ síly P do počtu na místě síly dané. Patrně jest trojúhelník

$$OMA = OMA^*$$

a tudíž také

$$Pp = P^* \,.\, OM.$$

Výhodu této velmi účelné záměny poznáme v oddílu o aequivalenci sil.

Moment síly jest buď positivní neb negativní. U momentu síly vzhledem k bodu rozhoduje smysl otáčení, kteréž síla kolem pevného bodu způsobuje. V součinu Pp dlužno pak jak sílu P dle směru jistého neb opačného, tak rameno p dle strany, na kterou od pevného bodu při určitém směru síly toto rameno padne, počítati s příslušným znamením + neb —; následkem toho zůstává na př. moment positivním, když oba tyto činitele znamení změní. U momentu síly vzhledem k rovině, kde směr síly nerozhoduje, dlužno sílu P bráti bez znamení, absolutně, a znamení momentu stanoviti jen dle znamení délky p, kteráž se v jednom směru od dané roviny počítá positivně, v opačném negativně. Bližší ustanovení seznáme na svém místě, kde o momentech takových budeme jednati *).

Součin Pp rovný součinu dvou vektorů nazývá se v analysi vektorové součinem *vektoriálním*. Všeobecněji přistupuje ještě k součinu tomu sinus úhlu oběma vektory sevřeného.

---

*) Slova momentum od latinského movere, hýbati, tudíž vlastně movimentum, užívá se ve fysice ve významech mnohých. Nehledíc k významu moment ve smyslu časovém (vlastně: pohnutí oka, okamžik) mluvíme jen v mechanice o momentu síly, dvojice sil, o momentu direkčním, o momentu setrvačnosti; ale také v jiných oborech mimo mechaniku užívá se téhož slova. Dlužno tudíž na bližší jeho stanovení míti dobrý pozor.

§ 104. **Práce.**

Pojem práce přijala věda ze života obecného, kdež pojem ten má význam rozhodující, a definovala jej určitě pro své účely, zůstávajíc v souhlasu s tím, jak i obecný život práci posuzuje. Budiž dána síla f na hmotu nějakou působící. Pokládejme sílu tu za konstantní. V případech, kde jde o sílu s časem měnlivou, možno výsledky pro konstantní síly nabyté též přizpůsobiti síle měnlivé, když se působnost síly pozoruje v době nesmírně krátké; neboť po dobu takovou lze i sílu měnlivou za konstantní pokládati.

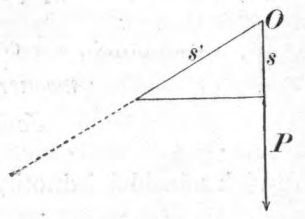
Síla působíc na hmotu, není-li zmařena silou jinou, opačnou, uvádí hmotu v pohyb ve svém směru podél dráhy přímočaré. Součin z velikosti f síly a délky s této dráhy, podél kteréž síla působí, zavádí se jakožto práce W (work) síly. Píšeme tedy

$$W = f \,.\, s.$$

Tato definice jest v souhlasu se životem obecným. Zdvihání břemene, při němž se překonává jeho váha, způsobuje větší práci, má-li se provésti do větší výšky. Pošinování hmot na dráze vodorovné. kde se překonává tření, představuje větší práci, děje-li se na vzdálenost větší. Koně táhnoucí vůz po silnici nakloněné vykonávají práci jednak dle síly vynaložené, která souvisí s nákladem, odklonem silnice, třením v osách a pod., jednak dle dálky, do jaké se jede. A tak i v případech méně jednoduchých vždy se práce stanoví dvěma faktory, z nichž jeden znamená sílu, druhý délku.

Práci zavádíme jako veličinu, kteráž může býti buď positivní neb negativní. Děje-li se pošinutí po síle, počítáme je za positivní a i práci za positivní. Děje-li se pošinutí proti síle, počítáme je za negativní a tím i práci za negativní.

Když se opírá dělník na př. o vůz, který na kolejích již jest rozjetý, tlačí-li ve smyslu pohybu, popohání, tlačí-li proti pohybu, zastavuje vůz; zde práci čítáme za negativní, poněvadž se pošinování děje proti síle působící, onde pak za positivní.



Obr. 48.

Mnohdy neděje se pošinutí ve směru působící síly, nýbrž ve směru jiném. Pak dlužno pošinutí skutečné s' (obr. 48.) promítati na směr síly a průmět s vzíti v počet do součinu $f \,.\, s$, kterým se práce

stanoví. Tak na př. když se těleso váhy P po nakloněné rovině pošine o délku s', dlužno tuto dráhu promítati na vertikální směr působící síly, a pak tento průmět s do součinu Ps zavésti.

Součin fs, t. j. součin dvou vektorů f a s, z nichž jeden vztahujeme na směr druhého, nazývá se v analysi vektorové součinem *skalárním*.

§ 105. **Jednotka práce.**

Píšíce výraz pro práci

$$W = f \,.\, s$$

ve formě rovnosti a nikoli úměrnosti, přijímáme již za jednotku práce tu, která jest určena jednotkami síly a délky.

Rozměr jednotky práce jest dle toho všeobecně i zvlášť

$$\mathrm{FL} = \frac{\mathrm{L^2M}}{\mathrm{T^2}}$$

$$dyna \,.\, cm = \frac{cm^2 \,.\, g}{sec^2}.$$

Jednotka *dyna . cm* zove se *erg* *). Jest to jednotka malá, poněvadž síla dyna jest malá. Zavede-li se megadyna, obdržíme jednotku *megaerg* millionkráte větší. Ale ani této se neužívá, nýbrž z důvodů, jež ve volbě jednotek elektrických spočívají, jednotky desetkráte větší, tedy 10 megaerg = megadyna . 10 *cm* = megadyna . *dm*, a jednotka tato, jež se zavádí jako praktická, zove se *Joule* **). Máme tedy přehledně:

$$\begin{aligned} erg &= dyna \,.\, cm, \\ megaerg &= megadyna \,.\, cm, \\ Joule &= megadyna \,.\, dm. \end{aligned}$$

Jiných násobků jednotky erg, jako na př. kiloerg a pod. se neužívá.

---

*) Z řeckého: τὸ ἔργον čin, práce.

**) *James P. Joule*, proslulý stanovením (1843) mechanického aequivalentu tepla pokusem, žil v letech 1818—1889.

§ 106. **Starší jednotka práce a její poměr k novější.**

Dokud se užívalo váhy kilogrammu za jednotku síly, stanovila se jednotka práce tak zvaným metr-kilogrammem. Starší tuto jednotku vyjádříme jednotkou novější dle relace:

$$\begin{aligned} \textit{váha } kg &= 0{\cdot}9806 \textit{ megadyna}, \\ metr &= 10 \textit{ dm}, \end{aligned}$$

tudíž násobením

$$metr\text{-}kilogramm = 9{\cdot}806 \textit{ Joule}.$$

Jest tedy starší jednotka práce o 2 procenta menší než dekajoule. Údaj tento stačí úplně, pokud není přesně udáno, pro jakou geografickou šířku a pro jakou výšku nad hladinou moře se váhy kilogrammu za jednotku síly užívá.

Mechanický aequivalent tepla, t. j. práce mechanická aequivalentní jedné (Maxwellově) kilogramm-kalorii (*Cal*), udává se na př. číslem 427 metr-kilogramm. V nové jednotce činí tento aequivalent $427 \,.\, 9{\cdot}806$, tudíž

$$4186 \textit{ Joule}.$$

Pro gramm-kalorii ($cal = {}^1/_{1000}\ Cal$) činí tudíž mechanický aequivalent

$$4{\cdot}186 \textit{ Joule}.$$

Naopak jest Joule aequivalentní

$$0{\cdot}2389 \textit{ cal}.$$

Jest viděti z těchto čísel, že jednotka práce Joule svou velikostí jest přiměřená jednotce tepelné gramm-kalorii *).

§ 107. **Effekt pracovní.**

Výraz, kterým se stanoví práce, neobsahuje udání doby, za kterou práce byla vykonána; hledí tudíž jen k výsledku, k práci hotové. Avšak již život obecný má zřetel též k době, kteréž se k určité práci potřebovalo; byla-li tato doba krátká, říká se, že bylo pracováno s větším úsilím, intensivněji. Právě tak zavádí se i ve vědě pojem pracovního úsilí, pracovní intensity, pracovního effektu nebo zkrátka effektu P (power, puissance) jakožto poměr práce W k době t, za jakou práce vykonána.

---

*) Viz Thermiku, pag. 610 a násl., 1908.

Jest tedy $$P = \frac{W}{t}.$$

Vzhledem k tomu, že jest

$$W = f \,.\, s,$$

obdržíme též $$P = f \frac{s}{t}.$$

Avšak poměr $\frac{s}{t}$ má význam rychlosti.

Kdežto tedy práce jest dána součinem ze *síly* a *dráhy*, podél které síla působí, jest effekt dán součinem ze *síly* a *rychlosti*, s jakou síla ve vlastním směru působí.

§ 108. **Jednotka effektu pracovního.**

Jednotkou práce a jednotkou času jest stanovena též jednotka effektu. Rozměr její jest všeobecně i zvlášť

$$\mathrm{F}\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{L^2M}}{\mathrm{T^3}}$$

$$dyna \,.\, \frac{cm}{sec} = \frac{cm^2 \,.\, g}{sec^3}.$$

Možno tedy effekt měřiti jednotkou

$$\frac{erg}{sec} = dyna \,.\, \frac{cm}{sec}$$

nebo $$\frac{megaerg}{sec} = megadyna \,.\, \frac{cm}{sec}.$$

anebo konečně

$$\frac{Joule}{sec} = megadyna \,.\, \frac{dm}{sec}.$$

Pro tento poslední pracovní effekt zaveden název *Watt* *). Užívá se též násobků

$$100 \;\; Watt = hektowatt,$$
$$1000 \;\; Watt = kilowatt,$$

zejména k účelům technickým.

---

*) *James Watt*, geniální autodidakt, původně mechanik, později vyrabitel parních strojů, kteréž jeho důvtipem byly velice zdokonaleny; byl členem král. Spol. nauk v Londýně a Akademie Pařížské. Žil v letech 1736—1819.

Jako z vykonané práce a doby pracovní se určí intensita dle rovnice

$$P = \frac{W}{t},$$

tak zase naopak z intensity pracovní a doby určí se vykonaná práce dle rovnice

$$W = P \,.\, t.$$

Značí tedy na př.

$$Watt \,.\, sec = Joule.$$

Počet vykonaných pracovních jednotek Joule lze tedy též vyjádřiti počtem Watt-sekund, po případě počtem hektowatt-hodin neb kilowatt-hodin a pod. V tomto způsobu stanoví se zejména také práce elektrická, obyčejně počtem kilowatt-hodin. Má-li se na př. za 50 kilowatt-hodin zaplatiti 30 korun, tedy se platí cena tato za práci, která by se vykonala, kdyby se intensitou kilowattu pracovalo po 50 hodin, nebo s intensitou 10 kilowatt po 5 hodin a pod.

V našich dnech diskutuje se návrh, aby pracovní jednotka kilowatthodina se jmenovala *Kelvin* k uctění památky lorda Kelvina (Williama Thomsona, nedávno zemřelého; žil v letech 1824—1907).

§ 109. **Starší jednotka effektu a její poměr k novější.**

Starší jednotkou pracovního effektu, dosud v přechodní době mnoho užívanou, jest tak zvaná *koňská síla* (horse-power, odtud označení HP nebo HP), kteráž se stanoví počtem 75 metr-kilogramm za sekundu.

Dle dřívějšího jest

$$metr\text{-}kilogramm = 9{\cdot}806 \;\; Joule,$$

tudíž $$koňská \;\; síla = 735{\cdot}5 \;\; Watt.$$

Místo toho bývá se okrouhle 736 *Watt*. Anebo píšeme jinak

$$koňská \;\; síla = 0{\cdot}736 \;\; kilowatt.$$

Intensita pracovní, kterou zoveme silou koňskou, jest tedy blízkou jednotce nové kilowatt, jsouc ovšem menší; nicméně přechodní data, dle koňských sil určená, převedou se nejjednodušeji na kilowatt. Proto také se tohoto násobku s oblibou užívá.

Slova »síla« užívá se v pojmenování »koňská síla« ve smyslu praegnantním, nikoliv obyčejném; právě tak i v jazycích jiných, na př. ně-

meckém Pferdekraft. Francouzsky říká se cheval-vapeur. Ono číslo 75 metr-kilogramm za sekundu jest okrouhlé a přijímá se nyní na pevnině v době přechodní. Anglická koňská síla (horse-power) čítá 550 anglických librostop za sekundu; obdržíme tedy za tuto 746 Watt, proti 736 Watt za koňskou sílu hořejší. Připomenouti dlužno, že průměrná pracovní intensita koně jest značně menší než 75, totiž jen asi 50, předpokládajíc, že by kůň pracoval jen tak dlouho, aby neumdlel. U strojů ovšem umdlení není. Jednotka koňská síla jest dosud velmi oblíbenou, tak že u parních, plynových a j. strojů se jí k určení pracovního effektu všeobecně užívá, ač by i to mělo přestati. Při stanovení effektu elektrického se však užívá jenom jednotek hektowatt neb kilowatt.

§ 110. **Práce síly a živá síla.**

Obecný život mluví o práci hlavně tehdy, když se podél jisté dráhy překonává nějaký odpor. Je-li do výše zvedáno břemeno, přímo neb nepřímo (strojem), stoupá jistou rychlostí, která se nemění; působící síla překonává právě váhu tělesa, do pohybu jednou uvedeného, a práce její měří se součinem z této váhy a výšky. Právě tak, když koně táhnou vůz s nákladem, rychlostí se neměnící, po silnici nakloněné nebo vodorovné, překonávajíce zde tření, onde tření i část úhrnné váhy. Vůz na vodorovných kolejích rozjetý by se třením zastavoval; má-li se udržeti jeho rychlost, nutno působiti silou, která se právě rovná tření.

Kdyby však v posledním příkladě síla se zvýšila, pak by přebytek síly přišel k platnosti kinetickým svým účinkem, totiž urychlením; vůz by se rozjížděl rychlostí stoupající. A kdyby vůbec nebylo tření, pak by celá síla f na hmotu m vozu působící se jevila kineticky urychlením a, kterým by vůz nabýval rychlosti v s dobou t stále stoupající, dle rovnice

$$v = at,$$

při čemž by dráha s, podél které síla působí, souvisela s urychlením a a dobou t dle rovnice

$$s = \tfrac{1}{2} at^2.$$

Také v tomto případě mluvíme o práci $f \,.\, s$, kterou síla, podél dráhy s působící, vykonává. Zavedouce pak kinetickou míru síly

$$f = ma,$$

obdržíme vzhledem k rovnicím hořejším pro tuto práci vzorec

$$f s = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Výraz na pravé straně této rovnice zove se *živou silou* hmoty m. Vhodným a známým příkladem jest padání těles na povrchu země. Působící síla vzniká zde přitažlivostí zemskou a rovná se váze p tělesa. Odpor vzduchu jest obyčejně malý, tak že netřeba jej bráti v počet. Necháme-li tudíž těleso z klidu volně padati, jeví se práce ps síly p působící podél svislé dráhy s živou silou $\frac{1}{2} mv^2$, kterou padající hmota na konci této dráhy s představuje.

Podobně, když hmotu nějakou m silou svého ramene rychlostí v vrhneme, představuje výraz $\frac{1}{2} mv^2$ práci při tom vynaloženou.

Také rozměrově souhlasí živá síla a práce vespolek; neboť jest

$$\text{práce } \mathrm{FL} = \frac{\mathrm{L^2M}}{\mathrm{T^2}} = \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)^2 = \text{živá síla.}$$

Živá síla, jsouc dle významu svého výrazem *práce* silou vykonané, může sloužiti ke srovnávání sil jen tehdy, když tyto působí podél téže dráhy.

§ 111. **Popud síly a hybnost hmoty.**

Práce $f \,.\, s$ měří účinek síly prostorový, vzhledem k tomu, že se síla f uvádí v součin s drahou s, podél které působí. Podobně lze uvésti sílu f v součin s dobou t, po jakou působí, a stanoviti tak účinek $f \,.\, t$ síly časový.

Pak jest
$$f = ma,$$
$$v = at,$$
tudíž
$$f \,.\, t = mv.$$

Výraz $f \,.\, t$ zove se *popud* (impuls) *síly*. Výraz mv zove se *hybnost* (quantitas motus, velikost pohybu) *hmoty*.

Rozměrově jest

$$\text{popud síly } \mathrm{FT} = \frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{T}} = \mathrm{M}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \text{hybnost hmoty.}$$

Pravíme, že jistým popudem síly vzniká určitá hybnost hmoty. Jest tudíž při srovnávání sil hybnost hmoty měřítkem sil těchto tehdy, když síly působí po touž dobu.

Z výrazu pro hybnost hmoty jest patrno, že lze téže hybnosti docíliti buď malou silou po dlouhou dobu působící, nebo při kratinké době silou velmi velikou. Takovýmito silami jsou ráz, výstřel, výbuch a pod. Zoveme je často *síly okamžité*.

Tak působí na př. při výstřelu děla explose, t. j. tlak plynů náhle vzniklých po kratinkou jen dobu, pokud projektil se v hlavni pohybuje. Dle Newtonova principu o stejnosti akce a reakce (»actioni contrariam et aequalem semper esse reactionem«) měří se účinek časový této explose jednak hybností mv projektilu, jednak však také hybností $m'v'$ děla, kteréž výbuchem couvne rychlostí v'; patrně jest tato rychlost tolikráte menší než rychlost v projektilu, kolikrát jest hmota m tohoto menší než hmota m' děla, dle rovnice

$$mv = m'v',$$
$$v' : v = m : m'.$$

Z rovnice pro popud síly a hybnost hmoty lze usouditi dále, že nelze dané hmotě uděliti jistou rychlost v době velmi krátké, není-li síla působící přiměřeně velmi velikou. Koně nemohou náhle rozehnati vůz, leč s vynaložením síly tak veliké, že po případě převyšuje pevnost prostraňků, které se při tom trhají. Téže povahy jest známý úkaz, že kouli vystřelenou se neroztříští tabule skleněná, nýbrž prorazí, aneb že kouli vystřelenou nepohnou se dvéře otevřené a otáčivé, nýbrž též prostřelí.

Rovnici

$$ft = mv$$

odvodili jsme pro případ, že síla f jest stálá. Je-li s časem proměnlivou, nutno časový účinek síly f počítati pro dobu dt nekonečně krátkou a pak tyto elementární účinky summovati, t. j. integrovati, tedy počítati integrál

$$\int_0^t f\,dt.$$

Dosadíme-li zde

$$f = m\frac{dv}{dt},$$

obdržíme

$$\int_0^t m\,dv = m(v - v_0).$$

Jde-li tudíž o změnu ze stavu klidu, jest $v_0 = 0$ a tak opět

$$\int_0^t f\,.\,dt = mv$$

jako nahoře.

Součin mv jest vektor a má směr rychlosti v.

Otázka, zdali živá síla či hybnost jest pravou měrou síly, jakou má hmota v pohybu, byla předmětem vědeckého sporu, kterýž vedli *Descartes* a *Leibnitz* a kterýž dále trval 57 let, ač byl způsoben nedorozuměním onoho názvu »síla hmoty«. Název »quantitas motus« zavedl *Descartes* a přijal též *Newton*. Název živá síla a to pro součin mv^2 zavedl *Leibnitz*, rozeznávaje živou sílu hmoty rozehnané proti mrtvé síle hmoty tlakem působící. Později

Coriolis volil týž název pro součin $\frac{1}{2}mv^2$, jak se ho dosud užívá. Slovo síla má v pojmenování tom význam praegnantní, podobně jako ve významu koňská síla.

§ 112. **Energie.**

Pojem práce nabývá zvláštního důležitého významu v pojmu *energie* *). V životě obecném označujeme již slovem tím schopnost vykonati práci ve smyslu slova nejširším. Ve fysice a vědách přírodních vůbec rozumí se slovem tím mohutnost hmoty vykonati práci. Této mohutnosti nabývá hmota

1. buď svou polohou v poli silovém,
2. aneb svým pohybem.

Dle toho rozeznáváme dva způsoby (dvě modality) energie:

1. Energie *polohy*, též *statická* neb *potenciální*;
2. energie *pohybu*, též *kinetická* neb *aktuální*.

Úhrnná čili totální energie hmoty znamenala by veškerou práci, kterou by hmota jak svou polohou v poli silovém, tak svým pohybem vykonati mohla. Jednotkou energie jest jednotka práce, tedy erg, megaerg aneb Joule. Jinak rozeznáváme různé druhy energie jednoho i druhého způsobu dle povahy působících sil neb hmot v pohybu se nalézajících; mluvíme o energii mechanické, tepelné a světelné, elektrické, magnetické, chemické. Někdy se též rozeznává energie viditelná a neviditelná.

Také při energii rozeznávají mnozí oba faktory pro kvantitu a intensitu, jak při síle byly uvedeny; není však zde jednotnosti. Zřetelně vystupuje jako kvantita faktor značící hmotu; pak by druhým faktorem pro intensitu byl čtverec rychlosti. Jinak lze sílu samu bráti za faktor intensity; pak by byla dráha faktorem kvantity. Mohla by však po případě i plocha neb objem býti faktorem kvantity a faktorem intensity výraz zjednaný dle identity

$$\frac{LM}{T^2}\,.\,L = \frac{M}{T^2}\,.\,L^2 = \frac{M}{LT^2}\,.\,L^3.$$

Názor tento souvisí s rozdělením energie na délkovou, povrchovou a objemovou.

§ 113. **Princip zachování energie.**

Průběh rozmanitých úkazů fysikálních vystihujeme zvláštní společnou jednoduchou formulací, principem o zachování energie. Kořeny jeho sahají do oboru mechaniky. Zde záhy poznán zákon o aequivalenci mezi mechanickou prací a živou silou z ní vznikající. Platnost zákona o aequivalencích analogických zkoumána

*) Slovo řecké, *ἐνεργεία*, *ἡ* značí působnost, činnost, od *ἔργον*, *τό* práce.

dále v oborech hraničních, zejména nejprve mezi mechanikou a thermikou, odtud pak rozšířen zákon ve formulaci všeobecné na všechny obory fysiky i dále, za hranice přímého zkoumání pokusného, na přírodní vědy vůbec. Tím nabyl zákon ten indukcí vždy výše vedenou významu dříve netušeného, významu vědeckého postulátu, principu, jemuž přikládá se význam axiomatický pro fysiku tak, jako pro chemii principu o zachování hmoty *).

Úkazy fysikální, chemické, fysiologické a přírodní vůbec mají při všech svých rozmanitostech jednu stránku společnou. Základem jejím jest energie, mohutnost pracovní. Právě tím vystupuje pojem práce v popředí před jinými. Energie hmot, na nichž úkazy takové pozorujeme, měnívá se jednotlivě; buď jest to energie polohy, buď zase energie pohybu, která se zvětšuje neb zmenšuje. Vždy však energie v jedné formě, jako ztráta, tudíž negativně vystupující, má v zápětí energii v jiné formě jako zisk, tudíž positivně vystupující, tak že úhrnem, summárně, zůstává energie nezměněnou. Jde tedy vždy a všude jen o záměnu energie, avšak celkově, v totalitě své, energie se ani neztrácí ani netvoří, nýbrž zůstává stálou; proto název *zachování* energie. V četných případech můžeme tak dokázati; v mnohých vedeme důkaz na základě logické kontinuity, rozšiřujíce indukcí význam případů zvláštních na všeobecnější. Odtud generalisací nejzazší věta: Energie všehomíra jest nezměnitelnou, jest veličinou stálou.

Na tomto místě jde o to, v jakési souvislosti objasniti význam principu četnými příklady, volenými především z oboru mechaniky, z níž princip vznikl, a pak též z oborů jiných, jak fysiky, tak i chemie a fysiologie.

Mějme hmotu m v poli gravitačním naší země. Vlivem sil gravitačních padá; má-li stoupati buď přímo vzhůru, buď po šikmé rovině, po oblouku kruhovém, jako u kyvadla, aneb po dráze jakékoliv, vždy vyžaduje síly jiné, práci vykonávající. Pravíme, že hmota stoupajíc práci spotřebuje, konsumuje. Za to však zvětšuje se její energie polohy. Neboť jsouc v poli gravitačním výše, může do nižší polohy padati, padajíc pak, může jinou hmotu zvedati, tudíž práci vykonávati, produkovati, právě takovou, jakou konsumovala. A když padá volně, nabývá živé síly stále rostoucí, kteráž jest rovněž aequivalentní práci konsumované. Majíc však živou sílu má tím též mohutnost práci vykonati, má energii pohybu. Může obrácením rychlosti sama do původní výšky vystoupiti, jakoby sama sebe

*) Fysika nemá ovšem k pokusnému zkoumání svého principu přístroje tak universálního a citlivého, jaký má chemie ve vahách pro svůj princip.

zvednouti a tím práci konsumovanou zase produkovati. Obrácení rychlosti může se státi náhle tak, že hmota, jsouc dokonale pružnou, dopadne přímo na podklad dokonale pružný, jako přibližně koule ze slonoviny dopadnouc na desku slonovou; anebo obrací se rychlost ponenáhlu, jako při kyvadle; celý pohyb kyvadlový možno pokládati za neustálé střídání se energie polohy a pohybu; je-li jedna maximum, jest druhá minimum; totálně se však energie nemění.

Pohyb kyvadlový jest typickým pro všechny pohyby oscillační a vibrační, jichž základem jest pružnost. Také v těchto pohybech můžeme viděti stálé střídání se energie pohybu a polohy tak, že energie totální zůstává stálou.

Příklad v jistém smyslu analogický, jako jest pohyb kyvadlový v gravitačním poli naší země, podává pohyb oběžnic a vlasatic v gravitačním poli slunce. Tato tělesa nebeská, přibližujíce se na své dráze slunci, pohybují se vždy rychleji a rychleji; jich energie polohy se umenšuje, za to však jich energie pohybu se zvětšuje. V periheliu jest tato maximum, ona minimum. Při dalším pohybu oddalují se tělesa svou vlastní energií pohybu od slunce, pohyb se uvolňuje, energie pohybu se umenšuje, ale energie polohy se zvětšuje. V apheliu jest tato maximum a ona minimum. Při celém průběhu pohybu jest však energie totální nezměněnou.

V hořejším příkladě tělesa padajícího bylo předpokládáno, že by těleso, dopadnouc na nějaký pevný podklad, změnilo směr své rychlosti, na velikosti ničeho neztrácejíc. Podmínkou toho byla dokonalá pružnost tělesa padajícího i podkladu. Ve skutečnosti však není takových dokonale pružných těles; následkem toho těleso dopadnouc se sice odrazí, ale nikoli s rychlostí plnou, nýbrž zmenšenou; proto nastává též ztráta živé síly, ztráta energie pohybu. Avšak pokusy ukazují, že při nárazech takových nastává oteplení. Bušíme-li kladivem do kusu železa na kovadlině ležícího, zahřeje se železo i kladivo; kule olověná neb ocelová, střelená, dopadnouc na pevnou stěnu, zahřívá se až do žáru červeného. Zde tedy pozorujeme přeměnu energie, a to mechanické v tepelnou, viditelné v neviditelnou; na základě pak mechanické theorie tepla soudíme, že energie pohybu tělesa jako celku přeměnila se v energii pohybu nejmenších jeho částic, v energii pohybu molekulového. Sem náleží všechny případy, kdy třením mechanická energie pohybu se ztrácí, ale jen aby vystupovala ve formě jiné, v energii tepelné. Pro přeměnu pak dokázán byl zákon aequivalence. Na každou jednotku tepla připadá určitý počet jednotek pracovních, tak zvaný mechanický

aequivalent tepla. Ale také naopak můžeme teplem zjednávati si práci mechanickou.

Změny skupenství znamenají změny na molekulové energii polohy a dějí se za současné změny na molekulové energii pohybu, a to za konsumpce tepla při postupu ke skupenství vyššímu, neb za produkce tepla při postupu opačném. Rovněž rozpouštění těles tuhých v kapalinách znamená změnu skupenství a vyžaduje tepla.

V příkladech uvedených šlo o vztahy mezi energií mechanickou a tepelnou; podobně jsou vztahy mezi energií mechanickou a elektrickou ovládány zákonem aequivalence. Četné příklady poskytují elektrogeneratory i elektromotory. Podobně vztahy elektrické a tepelné. Proudem lze teplo vzbuditi a naopak teplem proud.

K těmto fysikálním druhům energie přistupuje velmi důležitý druh energie chemické, který spočívá v chemické příbuznosti, v chemické affinitě.

Při slučování látek chemicky příbuzných proměňuje se tato energie v tepelnou, naopak teplem lze dřívější energii znova zjednati, t. j. látky složené rozloučiti. Také mezi energií chemickou a elektrickou máme četné vztahy, jakož ukazuje vznikání proudu při slučování chemickém v hydroelementech a naopak rozlučování látek proudem při elektrolysi.

Případ zvláště zajímavý výměny různých forem energie poskytuje život organický. Lidé i zvířata mají schopnost vykonávati práci, mají energii. V náhradu za práci vykonanou požívají potravy. Tato pochází buď přímo neb nepřímo z rostlinstva. Látky, jež za potravu slouží, jsou: tuky, uhlohydráty, bílkoviny. Jsou to sloučeniny prvků: H (vodík), C (uhlík), N (dusík) a O (kyslík), něco málo S (síry), jichž stavba, t. j. struktura chemická, jest velmi složitá, kteréž tudíž snadno se rozpadávají ve sloučeniny jednodušší. To se děje vlivem kyslíku, kterýž organismus přijímá dýcháním. Velká affinita kyslíku k prvkům nahoře uvedeným představuje velikou chemickou energii polohy. Sloučením kyslíku s látkami jmenovanými mizí tato energie polohy a mění se v energii pohybu molekulového, v energii tepelnou. Látky hořejší se při tom rozpadávají a tvoří se látky nové, jiné povahy, struktury jednodušší, tudíž sloučeniny stálejší. Jsou to: CO_2 (kysličník uhličitý), H_2O (voda), $CO(NH_2)_2 = CO_2 + 2NH_3 - H_2O$ (močovina, karbamid, kteráž účinkem vody se dále rozpadá na dioxyd uhlíku a ammoniak). Tyto látky, jež zvířata odvrhují, jsou zase základem vzrůstu rostlin. Neboť rostlina z půdy přejímá H_2O, N ze sloučeniny NH_3 a ze vzduchu C, ze sloučeniny CO_2, vybavujíc kyslík a to

vlivem slunečních paprsků. Energie slunečního záření způsobuje tudíž pochod zpáteční. Krátce můžeme říci: Lidé a zvířata jsou organismy, u nichž převládají processy oxydační, rostliny naopak organismy, u nichž převládají processy redukční *). Tyto se dějí vlivem záření slunečního. Jest tudíž *slunce* vlastním *zdrojem energie životní.*

Ale i jinak vidíme ve slunci zdroj energie, jíž užíváme. Tak v něm hledati dlužno původ oněch velikých zásob energie, kteréž představují ložiska uhlí kamenného, zdroje petroleje atd., jichž všude užíváme v životě praktickém k účelům tepla, k účelům práce (motory), k účelům osvětlování (plyn) atd.

Rovněž vlivem slunce vystupují z oceánu páry vodní, kteréž jsouce větrem hnány na pevniny, tam se zhušťují padajíce jako déšť nebo sníh na hory. Jest tudíž sníh na horách a ledovcích analogon závaží zvednutého, luku napiatého, pružného péra nataženého, představující zásoby energie velmi vydatné. Zářením slunečním, zejména v létě, proudí s hor do údolí veliké množství vody, představující onu energii polohy již přeměněnou v energii pohybu. V tomto smyslu lze říci, že energie všech řek na zemi, (zejména bystřin horských), všech vodopádů (jako na př. vodopádu Rýnského, Niagary a pod.) jsou původu slunečního.

Vzniká tu otázka, čím se udržuje energie záření slunečního. O tom můžeme ovšem míti pouze domněnky. Pravdě podobno jest, že se tak děje buď kontrakcí objemu slunce (Helmholtz), anebo padáním meteoritů na slunce (W. Siemens) anebo obou zároveň. Jedno i druhé jest však původu gravitačního.

Tak jest i ohromná zásoba energie, kterouž představuje příliv a odliv moře, původu přímo gravitačního, jsouc způsobena gravitačním vlivem měsíce a slunce. Dle toho by veliká energie světa měla kořen svůj v gravitaci.

Jak zase tuto vysvětliti, jest otázka další, jejíž řešení jest ohromně nesnadné. Pokusy zodpovídati otázku tuto vedly namnoze k vysvětlením, kteráž ne méně zůstávají záhadnými, než otázka, kterou vysvětliti mají.

Jest důležito vytknouti, že zavedením pojmu energie a vyslovením principu o zachování energie zjednána jest *společná půda, společný základ* pro úkazy, které na první pohled nic společného nemají, jako na př. úkazy mechanické a tepelné neb akustické neb elektrické. Právě tímto principem umožněn jest názor důležitý pro studium úkazů přírodních, totiž názor o *jednotě sil přírodních.*

*) Podrobnosti obsahuje Fysiologie Dra. F. Mareše 1906, díl I., oddíl 2.

VII.

Rovnomocnost soustav sil jednotlivých a podvojných.

(Geometrie sil a dvojic.)

§ 114. Úkol všeobecný.

Budiž dána soustava sil P_1, P_2, P_3, . . . působících na nějaké těleso v rozmanitých působištích, směrech i velikostech. Tato soustava sil má určitý účinek buď statický, tlak, napětí, aneb kinetický, urychlení. Jest však možno, že by se *téhož účinku* dosáhlo soustavou sil jiných, P_1', P_2', P_3', . . . Pravíme pak, že soustavy obě jsou *rovnomocné, aequivalentní.*

V následujícím budeme jednati o úkolu, danou soustavu sil nahraditi jinou rovnomocnou. Úkol takový, kdyby nebyl blíže vymezen, mohl by se řešiti způsoby nad míru rozmanitými. Snaha po docílení jednoduchosti vede však přirozeně k tomu, na místo dané soustavy sil hledati jinou *jednodušší*, aneb, jak raději ihned řekneme, *co možná nejjednodušší.*

Chtějíce přehledně a logicky postupovati od případů jednodušších k složitějším, rozdělíme úkol všeobecný v několik úkolů zvláštních, jež obdržíme, stanovíce, že síly dané působí

buď v *témže bodě,*
aneb v *téže přímce,*
aneb v *rovině,*
aneb v *prostoru.*

Projednávajíce úkoly tyto, užíváme známého již geometrického znázorňování síly a způsobu řešení; odtud název *geometrie sil.* Povaha geometrická jeví se ostatně také v abstrakci, s jakou, podobně jako v geometrii, úkoly naznačené řešíme. Vskutku jest to na př. abstrakcí, jednáme-li o tom, že dané síly působí v témže bodě; ve skutečnosti nemáme bodů takových, než atomů, jež však

nelze isolovati. Podobnou abstrakcí jest zavádění útvarů délkových, rovinných a prostorových »*naprosto neproměnných*«.

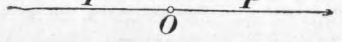
Musí pak býti úkolem zvláštním posouditi, jak dalece výsledky, k nimž geometrie sil vede, přenésti lze na konkretní případy skutečnosti.

Bylo již dříve řečeno, že geometrie sil jest jenom zvláštním případem geometrie vektorů. Vskutku přísluší větám o aequivalenci sil význam všeobecnější, ježto mají platnost též pro pošinutí, rychlosti, urychlení a pod., t. j. pro vektory vůbec.

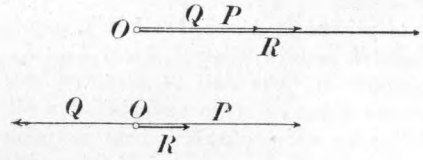
Síly v bodě.

§ 115. Síly dvě, trojúhelník (rovnoběžník) sil.

Dvě síly v témže bodě O působící, velikostí stejné, směrem opačné, se ruší. Větu tuto pokládáme za samozřejmou. Síly takové označujeme stejně (touže písmenou) a připojujeme znamení + (jež lze vynechati) a —, tedy na př. P a $-P$ (obr. 49.). Dvě síly



Obr. 49.



Obr. 50.

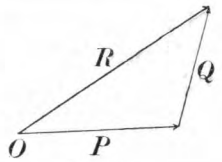
P a Q, působící v témže bodě O velikostí libovolnou, ve směru buď souhlasném nebo opačném, *sečítají se algebraicky.* Součet $P + Q$ zavádíme jakožto sílu novou R, kterouž jmenujeme *výslednicí* (resultantou, vis resultans) a síly dané P a Q, z nichž byla složena, *složkami* (komponentami, vires componentes); píšeme tedy

$$R = P + Q.$$

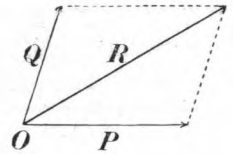
Sestrojujíce pak R připojíme k síle P sílu Q i dle velikosti i dle směru souhlasného či opačného (obr. 50.).

Svírají-li síly P a Q v bodě O působící libovolný úhel (P, Q), sestrojujeme výslednici R opět tak, že k síle P připojíme sílu Q i dle směru i dle velikosti (obr. 51.); pravíme pak, že síly P a Q *sečítáme geometricky.* Výslednice R uzavírá se složkami P a Q trojúhelník, který zoveme *trojúhelníkem sil.* Jinak můžeme věc formulovati, sestrojíce *rovnoběžník sil* (obr. 52.) na místě trojúhelníku.

V podstatě své jest ovšem jedna i druhá konstrukce stejnou. Pravíme pak: Výslednice R dvou sil P a Q v témže bodě O směry libovolnými působících jest dána úhlopříčkou rovnoběžníku, jehož strany jsou síly dané. V této důležité větě o rovnoběžníku sil jsou ovšem případy zvláštní napřed uvedené spolu obsaženy.



Obr. 51.



Obr. 52.

Počtem lze (dle věty Carnotovy) určiti výslednici R rovnicí

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\ cos\ (P,\ Q).$$

Při dané velikosti složek P a Q (na př. $P > Q$) jest

$R = P + Q$ maximum pro úhel $(P,\ Q) = 0$.
$R = P - Q$ minimum pro úhel $(P,\ Q) = 180^0$.

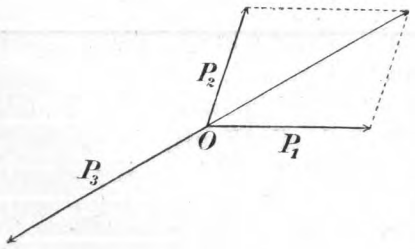
Větu o rovnoběžníku sil poprvé jasně vyslovil *J. Newton*. Dlužno ji pokládati za větu empirickou, kterouž mathematicky dokázati nelze. Viz v té příčině *E. Mach*, Mechanik, pag. 41—45, 1883 (též II. vyd. 1897); zde jest též popsán přístroj, který *Cauchy* sestrojil ke zkoumání věty o rovnoběžníku sil. Viz dále *A. Seydler*, Mechanika, pag. 259—262, 1880. Tak zvané důkazy věty o rovnoběžníku sil zakládají se na předpokladu, že síla jedna ve svém působení není závislou na síle jiné s ní současně působící, tedy totéž, co jest vlastně jádrem věty o skládání sil.

§ 116. Rovnováha tří sil v témže bodě působících.

Jsou-li dány síly P a Q, nastane rovnováha, připojí-li se k nim (čili k jich výslednici R) ještě síla $-R$; jinak jest rovnováha nemožná; neboť síla R se dá jenom silou jí rovnou a protivně působící zrušiti. Jsou tedy síly

$$P,\ Q,\ -R$$

v rovnováze. Při tom jest však patrno, že můžeme jakékoli dvě z těchto tří sil, (na př. také P a $-R$), považovati za složky dané a třetí zbývající sílu (Q) za negativně připojenou výslednici. Vzhledem



Obr. 53.

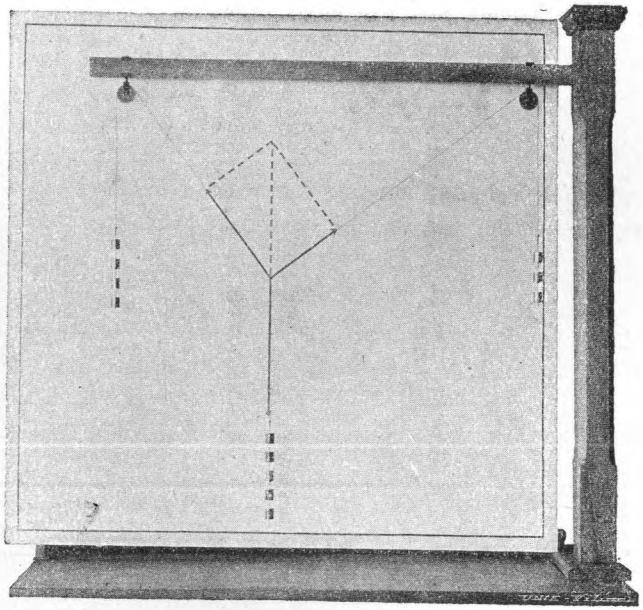
k tomu zaveďme na místo P, Q, $-R$ označení všeobecnější P_1, P_2, P_3 (obr. 53.). Číselně jest *podmínka rovnováhy* takových *tří sil* vyjádřena rovnicí, plynoucí ze známé věty sinusové:

$$P_1 : P_2 : P_3 = sin\ (P_2,\ P_3) : sin\ (P_3,\ P_1) : sin\ (P_1,\ P_2).$$

Jsou-li tudíž síly P_1, P_2 a P_3 dány svým směrem, jest touto podmínkou stanovena jich *relativní* — nikoliv absolutní — velikost. Jsou-li naopak dány svou velikostí, jest touto podmínkou *určitě* stanoven jejich směr; při tom jest ovšem volba veličin P_1, P_2, P_3 omezena touže podmínkou, jako volba tří stran, z nichž se má sestrojiti trojúhelník.

§ 117. Důkaz experimentální.

Správnost věty o rovnoběžníku sil lze experimentálně zkoumati, po případě demonstrovati, rovnováhou tří sil. K pokusu to-


Obr. 54.

muto — jakož i k četným podobným — jest výhodno míti při experimentálním stolu sloup s příčnou latí jako universální stativ (obr. 54.). Na lať nastrčí se dvě kladky, jež lze libovolně pošinovati; přes

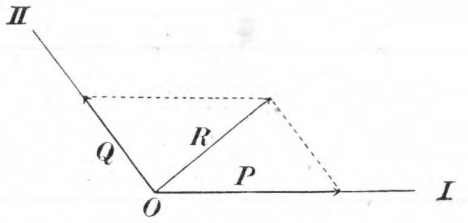
ně vedou se dvě (hedvábné) niti, k nimž je připojena třetí volně visící; na niti zavěsí se závaží. Zkouší se pak platnost rovnice

$$P_1 : P_2 : P_3 = sin\,(P_2,\ P_3) : sin\,(P_3,\ P_1) : sin\,(P_1,\ P_2).$$

Při tom lze experimentovati dvojím způsobem. Buď se volí směry sil a zkoumá se jich velikost v rovnováze, anebo naopak. Případ prvý jest méně jednoduchý; neboť bylo by nutno strany trojúhelníka sil pečlivě vyměřiti a dle jich relativní velikosti síly závažím až do zlomků velmi malých uskutečniti, což by bylo pracnější a nepohodlnější. Jednodušeji volí se tedy velikost sil a zkoumají se jich směry. Při tom jest poučné realisovati síly řadou závaží stejných, na př. stogrammových, poněvadž délka řady upomíná na délku přímky sílu znázorňující. Dle velikosti sil sestrojí se trojúhelník, resp. rovnoběžník sil a zkoumá se, zdali v rovnováze jest koincidence směrů sil se stranami a prodlouženou úhlopříčnou rovnoběžníka na diagrammu sestrojeného. Obr. 53. představuje případ, kdy poměrná velikost sil jest dána čísly Pythagorejskými 3 : 4 : 5. Tření v osách kladek jest přesnosti poněkud na újmu.

§ 118. Rozkládání síly ve dvě složky.

Jest často výhodou na místě síly dané R zavésti naopak její složky P a Q. Úloha jest patrně neurčitou. Stává se však určitou:

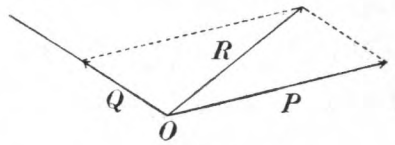


Obr. 55.

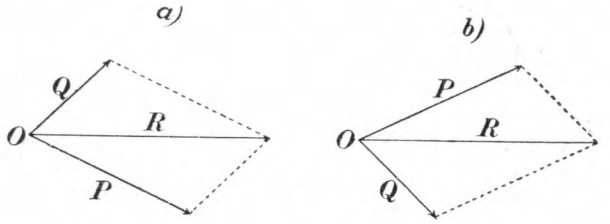
1. Buď jsou-li dány (obr. 55.) dvě přímky I a II libovolné, procházející působištěm O síly dané, do jichž směrů mají padnouti složky hledané; (na př. přímka horizontální a vertikální). Do jakého směru jedné neb druhé přímky (zda do positivního neb negativního) složka padne, rozhodne se již polohou síly dané vzhledem k přímkám I a II.

2. Anebo je-li jedna z obou složek, na př. P, dána i směrem i velikostí (obr. 56.). Oba tyto případy jsou nejobyčejnější.

3. Úloha stala by se též určitou, kdyby byly dány obě složky P a Q svou velikostí, při čemž by bylo vyhověno podmínce $P + Q > R$; úloha však není ve smyslu fysikálním určitou *jednoznačně*, nýbrž *dvojznačně* (obr. 57. *a*, *b*). Případ tento jest méně obvyklým.



Obr. 56.



Obr. 57.

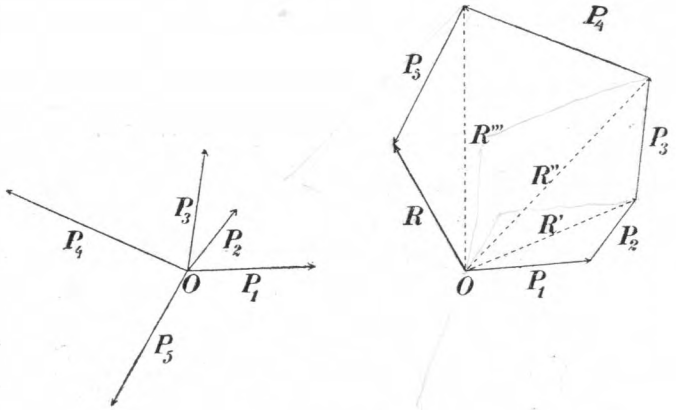
Jak se ve všech třech uvedených případech konstrukcí úloha řeší, vysvítá jasně z obrazů samých. Řešení počtem provedlo by se dle známých vět trigonometrických.

§ 119. Síly v počtu libovolném; mnohoúhelník sil.

Znajíce skládati síly dvě, dovedeme ihned skládati síly v počtu libovolném. Složíme totiž první dvě síly P_1 a P_2 ve výslednou R', k této připojíme sílu třetí P_3 a obdržíme opět výslednou R'', k této připojíme sílu čtvrtou P_4 atd. Jednodušeji dojdeme cíle, připojujíce síly k sobě i dle směru i dle velikosti, t. j. sečítajíce síly geometricky. Tím vzniká mnohoúhelník sil, uzavřený výslednicí R (obr. 58.).

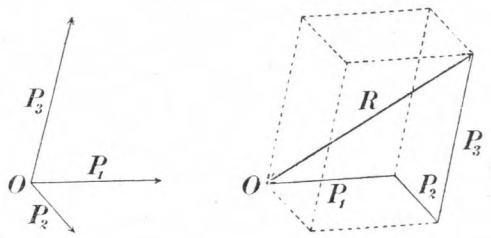
Při této konstrukci jsme mlčky předpokládali, že síly P_1, P_2, P_3 atd. působí v téže rovině (v rovině nákresné). Avšak z celého postupu jest patrno, že zcela tak skládali bychom síly dané, kdyby směry svými libovolně v prostoru byly rozloženy; vznikl by pak mnohoúhelník sil v prostoru. Obr. 59. znázorňuje konstrukci tuto

pro případ tří daných sil P_1, P_2, P_3; výslednice R jeví se tu jakožto



Obr. 58.

úhlopříčka rovnoběžnostěnu, který jest k mnohoúhelníku sil k vůli zřetelnosti přirýsován.



Obr. 59.

§ 120. **Věta o momentech.**

Volíme-li v rovině sil P a Q bod M jakýkoliv (obr. 60.) a utvoříme-li vzhledem k bodu tomuto momenty Pp a Qq těchto sil, jakož i moment výslednice Rr, platí věta

$$Rr = Pp + Qq,$$

t. j.: *Moment výslednice rovná se součtu momentů obou složek vzhledem k jakémukoli bodu jich společné roviny.*

Tuto větu uvádí *Pierre Varignon* (1654—1722), prof. mathem. v Paříži, v díle svém »Nouvelle mécanique ou statique«, které vyšlo tiskem 1725 po jeho smrti.

Věta stává se samozřejmou, vyjádříme-li tyto momenty druhým známým (§ 103.) způsobem, píšíce

$$R^* \,.\, MO = P^* \,.\, MO + Q^* \,.\, MO$$

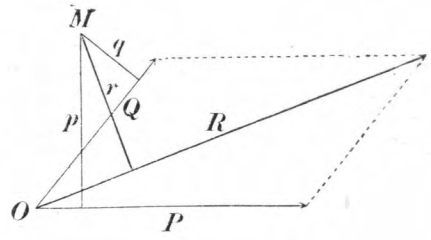
čili

$$R^* = P^* + Q^*,$$

čehož správnost jest patrna (obr. 61.).

Sečítání momentů, právě tak jako průmětů sil, dlužno prováděti algebraicky vzhledem ke znamení.

Leží-li bod M (obr. 62.) ve směru výslednice (positivním nebo negativním), jest $r = 0$, tudíž



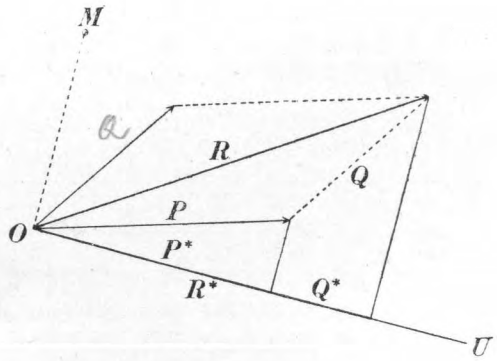
Obr. 60.

$$Pp + Qq = 0,$$

čili

$$Pp = Qq,$$

máme-li zřetel jen k velikosti momentů; svým znamením jsou oba tyto momenty ovšem opačné.



Obr. 61.

Věty této budeme častěji užívati.

Rovnice

$$R^* = P^* + Q^*$$

o průmětech sil R, P a Q má patrně platnost i tehdy, je-li počet sil jakýkoli. Vzhledem k tomu, že R jest geometrický součet složek P (obr. 63.), platí vždy rovnost průmětů

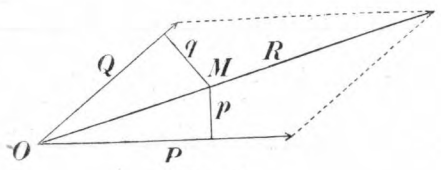
$$R^* = P_1^* + P_2^* + P_3^* + \ldots,$$

tudíž také

$$R^* \,.\, MO = P_1^* \,.\, MO + P_2^* \,.\, MO + P_3^* \,.\, MO + \ldots$$

čili

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots$$



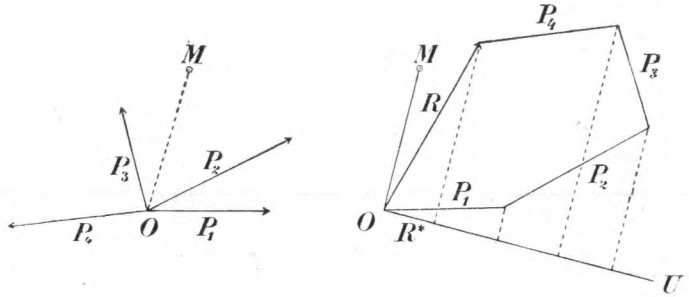
Obr. 62.

místo čehož píšeme, užívajíce symbolu summačního,

$$Rr = \Sigma Pp,$$

při čemž dlužno při summaci přihlížeti ke správnému znamení každého momentu.

Hořejší věta momentová má tudíž platnost i pro libovolný počet složek, ovšem jen pokud složky uspořádány jsou v téže rovině, v níž leží též bod M. Pro složky libovolnými směry v prostoru působící tato rovnice momentová platnosti nemá, poněvadž zde momenty nejsou co do smyslu buď souhlasné neb opačné, nýbrž mají smysl rozmanitý; jich sečítání algebraické není zde na místě,



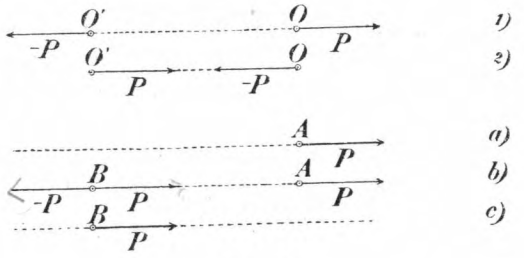
Obr. 63.

poněvadž schází opačnost znamení. Avšak promítají-li se všecky síly i jich výslednice na touž rovinu bodem M vedenou, ale jinak libovolnou, pak pro tyto průměty platí rovnice momentová, poněvadž uvedením sil na společnou rovinu, v níž leží též bod M, vystupují momenty ve dvou opačných smyslech, tak že algebraické jich sečítání má opět své oprávnění.

Síly v přímce.

§ 121. Síly dvě; přímkový útvar neproměnný.

Vyjděme také zde od případu nejjednoduššího, kdy totiž jsou dány síly dvě P a $-P$ sobě rovné a protisměrné, avšak působící nikoli v témže bodě O, jako dříve (obr. 49.), nýbrž ve dvou různých bodech O a O' téže přímky, v níž také leží jejich směry (obr. 64. 1.).



Obr. 64.

Zde však dokonce není samozřejmé, že by takovéto dvě síly nejevily účinku žádného, že by se rušily. Kdyby lineární útvar, jak jej zde abstraktně jako přímku předpokládáme, byl fysikálně dán jemným vláknem, nití, drátem a pod., bylo by snahou sil daných konečné body O a O' vlákna od sebe oddáliti; vlákno by se tím napínalo, snad prodloužilo, málo neb více, snad po případě přetrhlo. A i kdyby přetržení nenastalo a snad ani prodloužení patrné nevzniklo žádné, kdyby tedy vlákno bylo, jak pravíme, dostatečně pevné vzhledem k silám daným, vznikl by přece působením oněch dvou sil ve vláknu stav rozdílný od toho stavu, jaký byl bez působení sil těch, vznikl by stav napětí, jenž by ovšem se nejevil na venek účinkem žádným, ale jehož by jakožto účinku vnitřního nebylo lze nedbati. Jak si stav tento máme představovati, po případě vysvětlovati, není otázkou snadnou a souvisí s názorem o složení hmoty. Přijmouce za základ theorii atomovou, resp. molekulovou, jsme nuceni zaváděti zvláštní síly, tak zvané molekulové, abychom úkazy pevnosti vysvětlili. Zcela podobnou úvahu musili bychom učiniti, kdyby ony síly dané P a $-P$ působily v opačném směru (obr. 64. 2.); na místo napětí nastoupil by tlak.

Jest patrno, že by se postup celého výkladu o aequivalenci sil značně stížil, ba zarazil, kdybychom byli nuceni vnitřní tento zvláštní stav daného útvaru přímkového (a později rovinného a prostorového) již zde vyšetřovati a zkoumati. Abychom tudíž mohli dále pokročiti, zavádíme pojem »*útvaru neproměnného*«, t. j. útvaru takové pevnosti, že proti silám daným napětí neb tlaku v útvaru vznikajícího dbáti netřeba.

Takovýto přímkový neproměnný útvar předpokládajíce můžeme pak vysloviti větu, že síly P a $-P$ se ruší. Z věty této ihned odvodíme jinou, které budeme při útvarech neproměnných často užívati.

Mějmež sílu P působící v bodě A (obr. 64. *a*). Ve směru jejím volme bod B, ve kterémž zaveďme dvě síly P a $-P$ působící v téže přímce AB protisměrně; takovéto dvě síly se ovšem ruší (obr. 64. *b*). Případ prvý *a*) jest tedy týž jako druhý *b*). Nyní však můžeme říci: Je-li přímkový útvar AB neproměnným, ruší se síly $+P$ v A a $-P$ v B; zbude pak síla $+P$ v B (obr. 64. *c*). Srovnáváme-li případ *a*) a *c*), vidíme, že síla P v A jeví se býti ve vlastním směru přeloženou do působiště B.

Při neproměnném útvaru jest tudíž vždy volno, danou sílu P ve vlastním směru (kladném neb záporném) přeložiti z daného působiště A do jiného působiště B.

Jsou-li tudíž dány síly dvě libovolné, P a Q, v přímce neproměnné, přeložíme je do společného působiště, načež dle vět dřívějších algebraický jich součet dává výslednici R.

§ 122. **Síly v počtu libovolném.**

Zcela podobně, jako u sil dvou, stanovíme výslednici libovolného počtu sil P_1, P_2, P_3, . . . v přímce působících. Přeložíme všechny do téhož působiště O, sečteme zde algebraicky a obdržíme tak výslednici R, jakožto

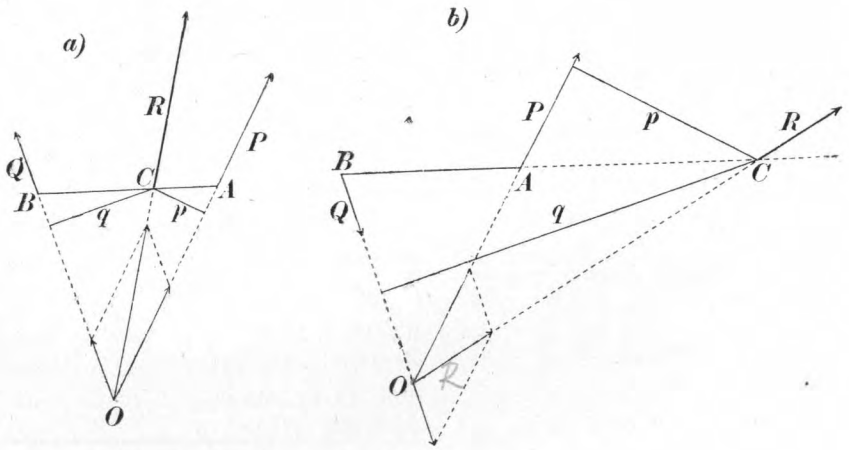
$$R = \Sigma P,$$

čímž jest úloha všeobecně řešena. Rychlé toto řešení úkolu všeobecného má svůj základ jenom v předpokladu, že daný přímkový útvar jest neproměnným; bez tohoto předpokladu bylo by toto řešení právě naopak velmi složitým.

Síly v rovině.

§ 123. **Dvě síly různoběžné v rovině.**

Přecházejíce k úkolu složitějšímu, zkoumati aequivalenci sil rozložených v rovině, vytkněme hned zpředu, že rovinu tuto zavádíme jakožto *útvar neproměnný* z týchž důvodů, jaké byly uvedeny při útvaru přímkovém. S výhradou touto můžeme pak každou sílu, působící v této rovině, z působiště daného přeložiti do jiného, ve směru síly ležícího. Použitím věty této lze pak, jak poznáme, veškeré případy sem náležející řešiti dle vět již známých.



Obr. 65.

Buďtež tedy dány v rovině síly P a Q působící v bodech A a B, a to směry různoběžnými. Případ tento jakožto jednodušší projednáme napřed. Jinak jest jednostejno, zdali síly dané působí v touž stranu přímky AB, na př. hořejší (obr. 65. *a*) anebo každá z nich ve stranu jinou, na př. P v hořejší a Q v dolejší (obr. 65. *b*). Jest však výhodno oba tyto případy míti na zřeteli a řešiti je současně.

Jsou-li směry daných sil různoběžné, pak se protínají v bodě O; i můžeme do bodu tohoto obě síly P i Q přeložiti; tím však převeden jest úkol daný na onen základní o rovnoběžníku sil. Složíme tudíž dané síly P a Q ve výslednici R, působící v bodě O; z tohoto

bodu můžeme ji ve vlastním směru přenésti do bodu jakéhokoliv, na př. do bodu C na přímce AB ležícího.

Konstrukcí řeší se tudíž daný úkol zcela jednoduše. Početně je v platnosti rovnice

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\ cos\ (P, Q),$$

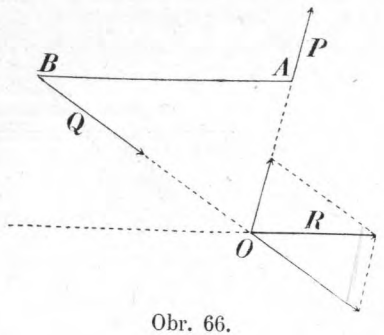
jakož i rovnice momentová

$$Rr = Pp + Qq$$

pro jakýkoli bod M roviny, a tudíž také rovnice

$$Pp = Qq$$

stanovící rovnost momentů (opačných znamení) daných sil vzhledem k jakémukoli bodu výslednice R, jako na př. vzhledem k bodu C.



Obr. 66.

Působí-li síly P a Q v touž stranu přímky AB, leží bod C mezi body A a B; pakli působí síly P a Q na opačné strany přímky AB, padne bod C mimo délku AB.

V posledním případě může se ovšem také státi, že by průsek C na přímce AB padl do nekonečna, t. j., že po přeložení obou sil P a Q do průseku O výslednice R se stane s přímkou AB rovnoběžnou. Případ tento jest znázorněn v obr. 66.

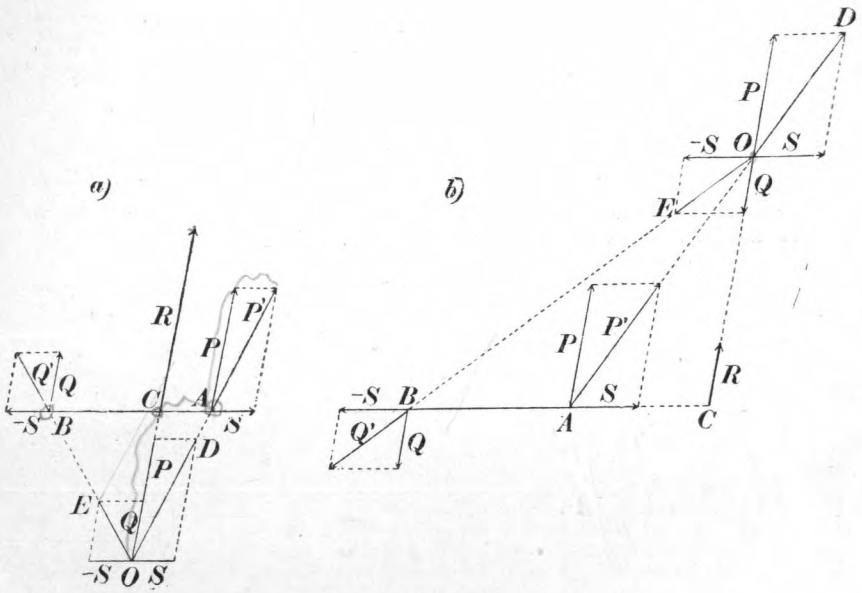
Z konstrukce zároveň jest jasno, že nemusí průsek C padnouti v případě sil v opačné strany působících na stranu síly větší. Kdyby na př. v obr. 66. síla Q jen něco málo se zmenšila, zůstávajíc však větší než P, již by průsek C padl na stranu menší síly P.

§ 124. Dvě síly rovnoběžné v rovině.

Buďtež dané síly P a Q rovnoběžny, co do velikosti na př. $P > Q$. Také zde jest pro postup výkladu jednostejno, zdali obě síly působí v touž stranu přímky AB, na př. hořejší (obr. 67. a), t. j. jsou-li stejnosměrny, anebo každá z nich na stranu opačnou, na př. P v hořejší, Q v dolejší, t. j. jsou-li protisměrny (obr. 67. b). Budeme však také zde oba tyto případy míti na zřeteli a prováděti

konstrukce současně, aby rozdílnost obou případů, pokud jaká jest, tím zřetelněji vynikla.

Poněvadž síly P a Q působí rovnoběžně, neprotínají se jich směry leč v bodě ležícím v dálce nekonečné. Nicméně můžeme i zde, zachovávajíce aequivalenci, jednoduchým obratem převésti tento úkol na předcházející.



Obr. 67.

Připojíme totiž k daným silám P a Q dvě síly $+S$ a $-S$ rovné a ve směru přímky AB opačně působící na př. $+S$ v bodě A, $-S$ v bodě B. Tím se aequivalence nemění. Nyní však lze skládati:

sílu P a $+S$ ve výslednou P',
» Q a $-S$ » » Q'.

Nové tyto síly, P' a Q', rovnomocné s danými P a Q jsou však různoběžné; mají průsek O; i lze je obě do tohoto společného působiště O přeložiti.

Majíce síly P' a Q' v bodě O vrátíme se opačným postupem k silám původně daným *).

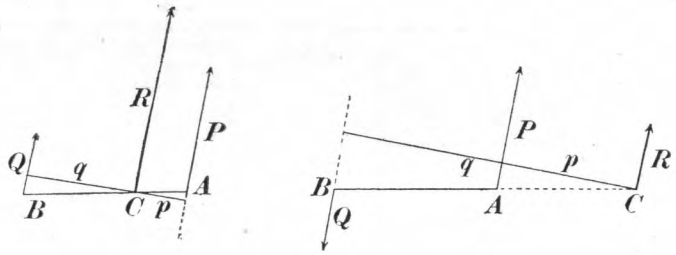
*) Také by se ovšem mohly tyto síly P' a Q' přímo složiti ve výslednici, o níž se snadno dokáže, že jest rovna $P + Q$ resp. $P - Q$.

Rozložíme zase v příslušných směrech:
Výslednou P' v síly P a $+ S$,
» Q' » » Q a $- S$.

Poněvadž se pak síly $+ S$ a $- S$ v bodě O ruší, zůstávají v bodě tomto pouze síly P a Q v přímce působící. Tyto složíme algebraickým sečítáním ve výslednici R, kterouž pak z bodu O lze přeložiti ve směru vlastním do jakéhokoliv bodu jiného, na př. do bodu C ležícího na přímce AB.

Zde již vystupuje různost obou případů a) a b) (v obr. 67.). Sečítajíce totiž síly P a Q algebraicky, obdržíme
v případě a) součet $P + Q = R$,
» b) rozdíl $P - Q = R$.

V poloze pak bodu C jeví se zde tatáž různost jako v úkolu předešlém u sil různoběžných. V případě a) leží bod C mezi body A a B, v případě b) mimo délku AB a to zde vždy na straně síly větší P.



Obr. 68.

Určitěji stanovíme polohu bodu C na přímce AB (z podobnosti příslušných trojúhelníků) rovnicemi:

$$\frac{P}{S} = \frac{OC}{CA}, \qquad \frac{Q}{S} = \frac{OC}{BC},$$

tudíž

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{CA}.$$

Na přímce BA utvoří se bodem C úsečky BC a CA, kteréž jsou v obráceném poměru sil daných P v bodě A a Q v bodě B. Jsou-li síly stejnosměrny (a), jsou také úsečky stejnosměrny, t. j. bod C jest uvnitř délky BA; pakli jsou síly protisměrny (b), jsou také úsečky protisměrný, t. j. bod C jest mimo délku BA na straně síly větší. Úsečky BC a CA jsou zde psány tak, aby positivnímu směru síly (t. j. směru vzhůru) odpovídal positivní směr úsečky (od levé k pravé).

Z poslední rovnice plyne vzhledem k tomu, že jest (obr. 68.)

$$BC : CA = q : p,$$

známá rovnice momentová

$$Pp = Qq.$$

Vlastně bychom byli mohli tuto rovnici přímo napsati, jakož i rovnici všeobecnější

$$Rr = Pp + Qq$$

platnou pro bod M roviny jakýkoliv. Neboť odvození výslednice

$$R = P \pm Q$$

dálo se stále dle pravidla o rovnoběžníku sil, pro který rovnice momentová platí. Moment výslednice R jest týž jako součet momentů sil P', Q' a každý z obou těchto momentů týž jako součet momentů složek $+ S$ a P, resp. $- S$ a Q, tudíž i jako součet momentů P a Q, poněvadž momenty sil $+ S$ a $- S$ v přímce působících se ruší.

§ 125. **Střed rovnoběžných sil.**

Poloha působiště C na přímce AB pro oba případy a) i b) jest stanovena rovnicí

$$BC : CA = P : Q,$$

z níž plyne dále:

$$BC : CA : BA = P : Q : R,$$

kdež jest R algebraickým součtem sil P a Q, podobně jako BA algebraickým součtem úseček BC a CA.

Rozhoduje tedy pro polohu bodu C *relativní velikost* daných rovnoběžných sil P a Q, nerozhoduje však *směr*, v jakém síly tyto působí. Jeho poloha zůstává tudíž nezměněna, když se síla P i Q při dané relativní velikosti vzhledem k přímce AB stáčí do jiného a jiného směru, anebo když se při určitém směru sil P a Q stáčí přímka AB. Pro tuto význačnou vlastnost nabývá působiště C zvláštního jména, zove se *středem* daných rovnoběžných sil.

§ 126. **Střed rovnoběžných sil a věta momentová.**

Vztahujeme-li polohu středu C sil rovnoběžných, jakož i polohu A a B jejich působišť, na určitou rovinu, spustíce kolmice CC', resp. AA' a BB', jest patrně (obr. 69. a neb b)

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{CA} = \frac{EB}{AD} = \frac{B'B - C'C}{C'C - A'A}, \quad \text{resp.} \quad \frac{B'B - C'C}{A'A - C'C},$$

z čehož plyne (násobením a upravením) dále:

$$R \,.\, C'C = P \,.\, A'A + Q \,.\, B'B,$$

kdež jest (a) $$R = P + Q,$$

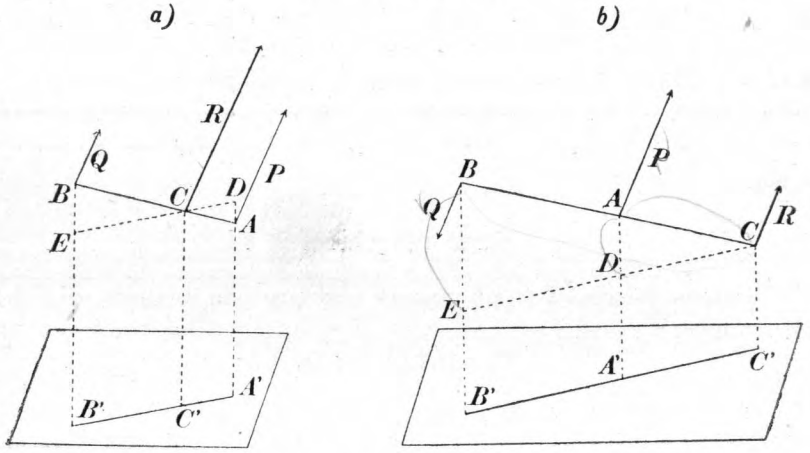
aneb $$R \,.\, C'C = P \,.\, A'A - Q \,.\, B'B,$$

kdež jest (b) $$R = P - Q.$$

Píšeme-li tedy zkráceně:

$$A'A = a, \quad B'B = b, \quad C'C = c,$$

obdržíme $$Rc = Pa \pm Qb.$$



Obr. 69.

Rovnice tato vyjadřuje jinou formou totéž, co již dříve o středu sil rovnoběžných bylo řečeno, že totiž jeho poloha — zde s délkou c souvisící — jest nezávislá na *směru* rovnoběžných sil, a závislá pouze na poloze jich působišť A a B — zde s délkami a a b souvisících — a na *relativní velikosti* daných rovnoběžných sil P a Q, při čemž síla Q, je-li stejnosměrná se silou P, vstupuje do rovnice se znamením kladným, pakli je protisměrná, se záporným.

Součiny Pa, Qb a Rc zovou se, jak již uvedeno, momenty sil vzhledem k rovině dané.

Rovnice momentová stanoví tudíž odlehlost c středu C daných sil rovnoběžných P a Q od roviny libovolně volené, jsou-li dány odlehlosti a, b působišť A a B a relativní velikost sil.

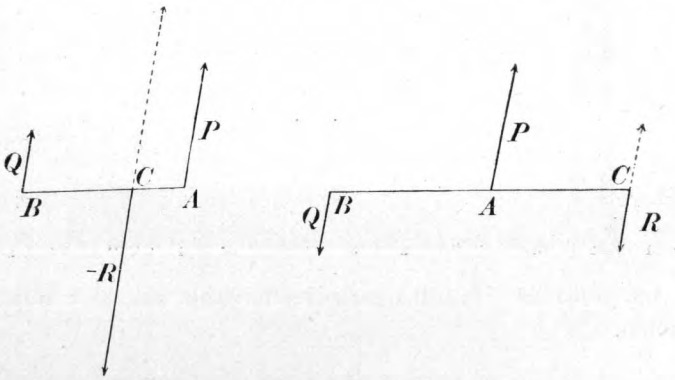
Jedinou kolmicí c není ovšem poloha bodu C určena — proto jsme nahoře pravili toliko, že s ní souvisí. Kdybychom však volili

tři takové roviny, na př. na sobě kolmé a užili pokaždé rovnice momentové, obdrželi bychom tři takové odlehlosti, jimiž by pak poloha bodu určena byla. V analytické geometrii zovou se odlehlosti tyto *souřadnicemi* bodu.

Ona věta momentová stanoví tudíž *souřadnice středu* C, jsou-li dány *souřadnice působišť* A a B a relativní velikost rovnoběžných sil P, Q a R.

§ 127. **Rovnováha tří rovnoběžných sil.**

Jsou-li dány rovnoběžné síly P a Q, nastane rovnováha, když se k silám těmto (čili k jich výslednici R) připojí síla $-R$ (obr. 70.).



Obr. 70.

Zdali síly P a Q byly stejnosměrné či protisměrné, nečiní zde rozdílu žádného. Platí pak rovnice:

$$P : Q : (-R) = BC : CA : AB.$$

Při této rovnováze jest patrně jednostejné, které dvě ze tří sil P, Q a $-R$ chceme za dané složky a kterou třetí za negativně připojenou výslednici pokládati. Zavedeme-li vzhledem k tomu všeobecnější označení P_1, P_2, P_3 pro tři rovnoběžné síly v rovnováze, můžeme hořejší podmínku psáti všeobecně ve formě

$$P_1 : P_2 : P_3 = \overline{P_2P_3} : \overline{P_3P_1} : \overline{P_1P_2},$$

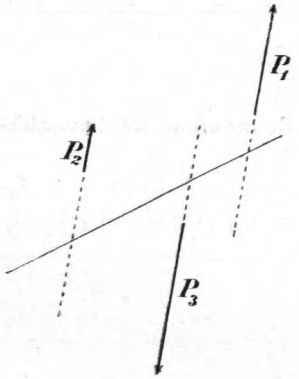
kdež symbolické výrazy na pravé straně úměry značí rovnoběžné, kolmé nebo šikmé odlehlosti příslušných směrů sil (obr. 71.). Při

tom jest

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0$$

právě tak, jako

$$\overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_1} + \overline{P_1P_2} = 0.$$



Obr. 71.

Hořejší rovnice jeví pozoruhodnou analogii s rovnicí

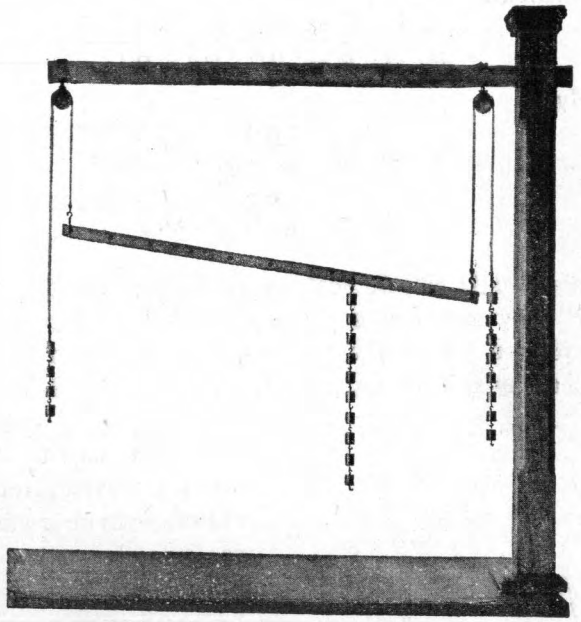
$$P_1 : P_2 : P_3 = sin\,(P_2,\ P_3) : sin\,(P_3,\ P_1) : sin\,(P_1,\ P_2),$$

kteráž má platnost (§ 116.) pro rovnováhu tří sil v témže bodě působících.

§ 128. **Důkaz experimentální.**

Poslední větu o rovnováze tří rovnoběžných sil lze zkoušeti, po případě demonstrovati způsobem v obr. 72. znázorněným. Přímá dřevěná tyč má ve vzdálenostech po 1 decimetru celkem deset příčných mosazných hřebů; na koncích visí tyč na vidlicích, od nichž jdou dostatečně silné niti přes kladky, na kterých visí závaží (v obrazci světleji vyznačená), která tyč (i s vidlicemi) vyvažují. Síly se pak připojí řadou závaží stogrammových, tak že délka řady jest názorně úměrná velikosti síly, při čemž se pro síly krajní P_1 a P_2 závaží přivěšují na ona vyvažující, kdežto závaží pro sílu střední P_3 se pomocí vidlice s jedním závažím pevně spojené přímo zavěšuje na hřeby tyče. Pro střední sílu P_3 volí se na př. 10 závaží; pro krajní P_1 a P_2 dohromady též 10 závaží. Podle toho, na které místo tyče se střední síla umístí, dlužno krajní závaží jinak rozděliti. Po-

šinutí střední síly o decimetr značí přeložení jednoho závaží stogrammového z levé strany na pravou neb naopak.



Obr. 72.

Přístrojem se znázorňuje dobře význam středu rovnoběžných sil. Je-li pro jistou polohu tyče — na př. horizontální — rovnováha zjednána, nemění se, když tyč jakkoli stáčíme, při čemž ovšem pošinováním kladek na lati dlužno rovnoběžnost nití pokaždé zaříditi.

§ 129. **Rozkládání síly ve dvě složky rovnoběžné.**

Úloha rozložiti danou sílu R ve dvě složky rovnoběžné P a Q jest neurčitou. Stává se však určitou:

1. jsou-li dány polohou svou dvě přímky, rovnoběžné se silou danou, do jichž směrů hledané složky mají padnouti;

2. je-li dána jedna z obou hledaných s danou silou rovnoběžných složek svou velikostí i polohou.

Jakým způsobem v obou případech složky P a Q se stanoví, vysvítá snadno z úvah a z rovnic dříve odvozených.

§ 130. **Dvojice sil.**

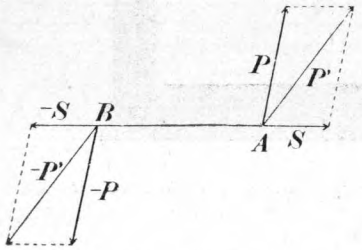
Skládání sil P a Q rovnoběžných a protisměrných, $(P > Q)$, vedlo k rovnicím

$$R = P - Q,$$
$$P : Q : R = BC : CA : BA,$$

z nichž plyne

$$BC = \frac{BA}{P - Q} \cdot P,$$
$$AC = \frac{BA}{P - Q} \cdot Q.$$

Roste-li tudíž síla Q, blížíc se ponenáhlu síle P, stává se výslednice R vždy menší a menší a její působiště C vzdaluje se zároveň na přímce BA vždy víc a více, až konečně uniká pro případ $Q = P$ do dálky nekonečné, co zatím současně výslednice sama R stává se $= 0$.



Obr. 73.

Jest patrno, že se zde jedná o případ mezný, který vyžaduje úvah zvláštních. Dříve jsme dvě síly rovnoběžné převedli na různoběžné připojením sil $+ S$ a $- S$ ve směru přímky AB a odvodili jsme tak ony hořejší rovnice. Jsou-li však dané síly P a Q protisměrné a stejné, jest jasno, že připojením takovýchto sil $+ S$ a $- S$ nové síly P' a Q' (obr. 73.) složením vznikající zůstanou opět protisměrnými a stejnými, tak že oním obratem, jenž jinak vede k cíli, zde není ničeho získáno. Proto také nejsme oprávněni rovnic hořejších na tento mezný případ užiti.

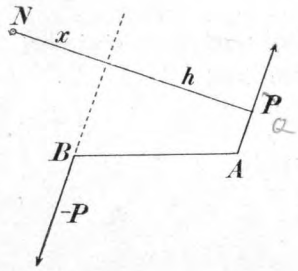
Vskutku představuje takováto soustava dvou sil stejných a protisměrných mechanický útvar zvláštní, kterýž zoveme »*dvojice sil*«.

Zvláštnost tohoto útvaru jeví se již tím, jak se ukazuje jeho moment vzhledem k jakémukoli bodu N roviny. Vyjádříme-li (obr. 74.) moment síly P a moment (opačný) síly Q vzhledem k bodu N a sečteme-li oba momenty algebraicky, obdržíme pro moment soustavy obou sil výraz

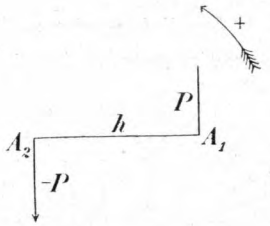
$$P(x + h) - Qx = (P - Q)\, x + Ph.$$

Pokud jsou síly P a Q nestejné, závisí moment celkový na x, t. j. na poloze bodu N; je-li však $P = Q$, jest moment celkový $= Ph$, t. j. konstantní, nesouvisící s volbou bodu N, tudíž *význačný* jen pro *dvojici samu*. Kolmou odlehlost h obou směrů sil nazýváme *ramenem dvojice*; abychom pak označili stejnost a protisměrnost sil dvojice, píšeme $+ P$ a $- P$; působiště pak jejich A_1 a A_2 překládáme na *konce* ramena h, což není žádné omezení všeobecnosti. Rýsujeme tudíž dvojici vždy tak, jak obr. 75. ukazuje, čímž ihned přehlédneme obě síly i jich rameno; součin Ph zavádíme jakožto *moment dvojice*

$$Ph = M.$$



Obr. 74.



Obr. 75.

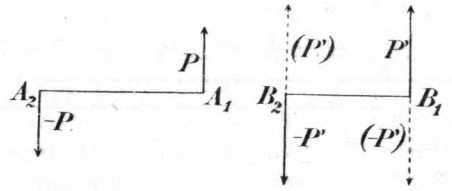
O jeho znamení platí totéž, co bylo řečeno o znamení momentu síly vzhledem k bodu její roviny. Tak jest na př. moment dvojice v obr. 75. positivní, poněvadž směry sil dvojice jsou takové, že se jimi rovina stáčí ve smyslu šipkou označeném, který zavedli jsme jako positivní.

§ 131. **Rovnomocnost dvojic.**

O aequivalenci dvojic jsou v platnosti tři důležité věty, kteréž jsou pro povahu tohoto útvaru zvláště význačné. Při dokazování těchto vět počínáme si způsobem, jejž uvedeme již zpředu ke zkrácení výkladu pozdějšího.

Majíce dokázati, že na př. (obr. 76.) dvojice $(P, - P)$ v bodech A jest rovnomocnou s dvojicí $(P', - P')$ v bodech B, změníme u jedné z těchto dvojic, na př. u dvojice v bodech B směry obou sil P' a $- P'$ v opačné, jak v obrazci jest tečkovaně označeno. I jest samozřejmo, že důkaz aequivalence jest proveden, jakmile se do-

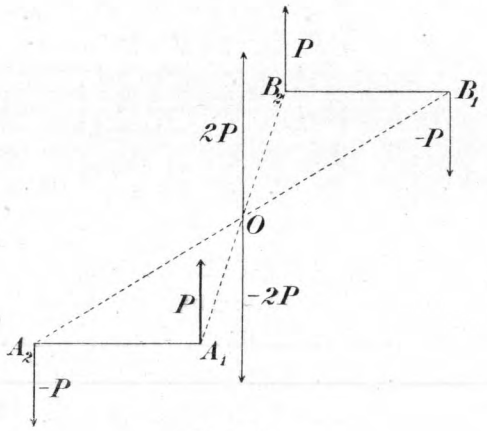
káže, že *opačně* vzatá dvojice v bodech B jest *v rovnováze* s dvojicí v bodech A.



Obr. 76.

Ony tři věty o aequivalenci dvojic vyjadřují se ve formě následující:

1. *Dvojici lze rovnoběžně pošinouti buď ve vlastní rovině nebo do roviny rovnoběžné s onou pevně souvisící.*



Obr. 77.

Dvojice $(P, -P)$ v bodech A budiž dána; pošiňme ji rovnoběžně do bodů B a vezměme místo ní dvojici opačnou $(-P, P)$ v týchž bodech B (v obrazci 77. jest jen tato opačně vzatá dvojice narýsována). Že dvojice původní a dvojice pošinutá opačně vzatá jsou v rovnováze, vysvitne ihned, když složíme

P v A_1 a P v B_2 ve výslednou $+2P$,
$-P$ v A_2 a $-P$ v B_1 » » $-2P$.

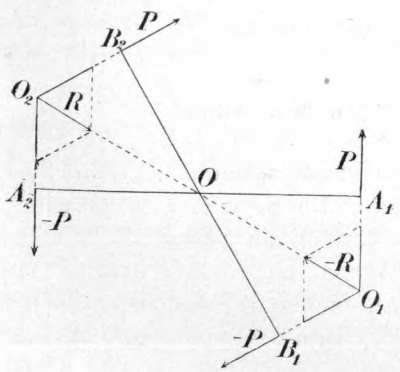
Jest patrno, že obě tyto výsledné padnou do téhož působiště O a že se tudíž ruší.

2. *Dvojici lze ve vlastní rovině kolem středu ramena stočiti.*

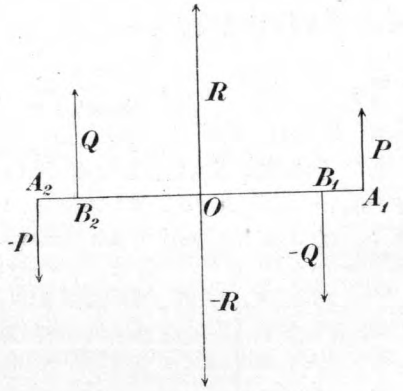
Dvojice $(P, -P)$ v bodech A budiž dána; otočíme ji kolem středu O; přijde do polohy B; zde pak vezměme dvojici opačnou $(-P, P)$ v týchž bodech B (v obr. 78. jest opět jenom tato opačně vzatá dvojice narýsována). Že dvojice původní a dvojice stočená opačně vzatá jsou v rovnováze, vysvitne opět, když přeložíce síly do společného průseku složíme:

P v A_1 a $-P$ v B_1 ve výslednici $-R$ v O_1,
$-P$ v A_2 a P v B_2 » » R v O_2.

Jest patrno ze souměrnosti celého obrazce, že obě tyto výslednice jsou stejné a protisměrné v přímce O_1OO_2 a že se tudíž ruší.



Obr. 78.



Obr. 79.

3. *Dvojice stejných momentů jsou rovnomocné.*

Buďtež dány: dvojice $(P, -P)$ s ramenem h a dvojice $(Q, -Q)$ s ramenem k, a budiž

$$Ph = Qk.$$

Položme ramena dvojic na sebe, aby středy ramen splývaly; tedy do polohy A_1A_2 a B_1B_2 o společném středu O, a vezměme pak opět jednu z obou dvojic opačně, na př. dvojici $(Q, -Q)$ (v obr. 79. jest opět jenom tato opačně vzatá dvojice narýsována). Že dvojice $(P, -P)$ v bodech A a $(-Q, Q)$ v bodech B jsou v rovnováze, vysvitne, když složíme:

P v A_1 a Q v B_2 ve výslednici R,
$-Q$ v B_1 a $-P$ v B_2 » » $-R$.

Obě výslednice jsou patrně stejné velikosti $= P + Q$ a opačného znamení; že však jest

$$lh = Qk,$$

tudíž také $$P \cdot \frac{h}{2} = Q \cdot \frac{k}{2},$$

t. j. $$P \cdot OA_1 = Q \cdot OB_2$$

a právě tak $$-Q \cdot OB_1 = -P \cdot OA_2,$$

tedy jest patrno, že obě výslednice mají totéž působiště, totiž střed O. Tudíž se ruší.

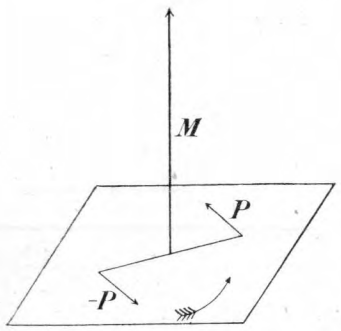
Na základě této věty o aequivalenci dvojic stejného momentu lze každou dvojici momentu $M = Ph$ uvésti na rameno určité délky, na př. délky $= 1$ ($1\ cm$); působící síly jsou v tomto případě patrně $+M$, $-M$, tak že jest:

$$M \cdot 1 = P \cdot h.$$

Při skládání dvojic se k této poznámce vrátíme.

§ 132. Geometrické znázornění dvojice.

Předchozí věty o aequivalenci dvojic vedou k jednoduchému a přehlednému znázorňování dvojice. Dle věty 1. a 2. závisí působnost dvojice jediné na *směru* — nikoli na poloze — kolmice, vztyčené na rovině dvojice (tak zvané normály této roviny). Kolmici tuto zoveme *osou dvojice*. K tomu přijde pak dle věty 3. ještě její *moment* M. Můžeme tedy dle určitého měřítka moment tento nanésti na osu a sice ve smyslu jednom moment positivní a v opačném moment negativní. Tím obdržíme přímku, která svým směrem a svou délkou znázorňuje vše, co o působnosti dvojice rozhoduje (obr. 80.). Přímce té říká se *úsečka momentová*, anebo též *osa*, kdež pak s pojmem tím dlužno spojiti přímku délky omezené. Který směr osy dvojice se volí pro positivní moment dvojice a který pro negativní, jest věcí úmluvy; také není v té příčině dosud sjednocenosti. Vzhledem však k jiným oborům fysiky a k jiným vědám jest nejvhodnějším stanoviti následující pravidlo, kterého také ve všech dalších výkladech budeme šetřiti. Pozorovatel, stoje hlavou ve směru osy vidí, ana dvojice stáčí rovinu u jeho nohou ve smyslu od pravé ruky k levé, tedy obráceně než jak jdou ručičky u hodin.



Obr. 80.

Tak se v analytické geometrii v rovině stanoví též positivní smysl úhlu (od positivní osy úseček k positivní ose pořadnic). Tak se i v astronomii stanoví pohyby těles nebeských za positivní a pohyby ve smyslu opačném za zpětné čili retrogradní. Jest tedy na př. zdánlivý roční pohyb slunce v ekliptice positivním; dívajíce se na pohyb tento máme hlavu obrácenu ve stranu severní a vidíme pak, ano slunce postupuje v ekliptice od pravé k levé, od jednoho souhvězdí zvířetníku (zodiaku) ke druhému ve známém pořádku. Také oběžnice mají zpravidla pohyb positivní, někdy však negativní čili retrogradní. Skutečná rotace země naší by byla zobrazena osou jdoucí k polu severnímu; zdánlivá rotace oblohy nebeské jest pro nás na polokouli severní zpětná, retrogradní. Změníce stanovisko pozorovací můžeme jinými slovy směr osy také takto stanoviti. Pozorovatel *hledě na rotaci ve směru osy* vidí, an pohyb jde od levé k pravé, jako na př. šroubujeme, jako otáčíme klikou atd. Tak na př. pozorovatel, hledě ve směru magnetických silokřivek, viděl by hypothetické rotace aetherových částic jíti od levé k pravé, jak nahoře stanoveno.

Přijmouce tedy zásady zde vyložené poznáme, že mezi geometrickým znázorňováním *síly* a *dvojice* jest veliká *podobnost*; jednu i druhou znázorňujeme *přímkou* určitého *směru* a určité *délky* a ovšem jistého začátku; u síly jest tímto začátkem *působiště*, u dvojice *střed ramene*. Také v tom jest shoda, že tento začátek můžeme ve směru přímky té (positivním nebo negativním) kamkoli přeložiti. Avšak v tom zase jest velmi důležitý rozdíl, že *osu* dvojice můžeme ještě také *rovnoběžně* do jakékoli jiné *polohy* pošinouti, sílu však nikoliv. Vyznačuje se tedy osa dvojice větší volností své polohy.

Při tom nesmí ovšem osa dvojice za osu rotační býti pokládána; neboť u dvojice nejedná se o rotaci kolem *určité osy*, nýbrž vůbec o rotaci *určitého smyslu* a *určitého stupně*, jakýž právě momentem dvojice jest dán.

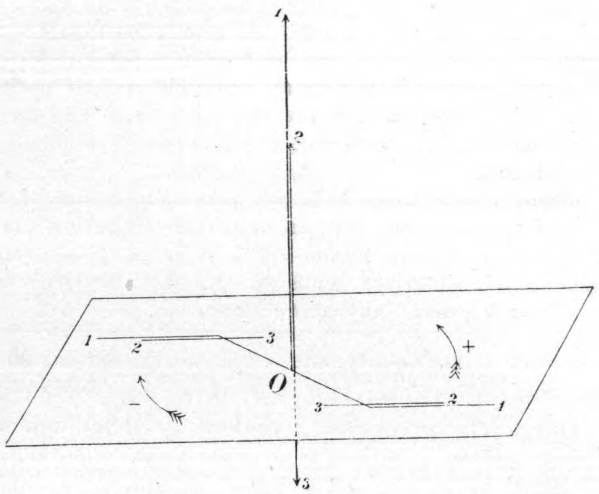
Dvojici sil (couple des forces) zavedl do mechaniky *Louis Poinsot* (1777—1859), professor na École polytechnique později též na Lycée Bonaparte v Paříži. Viz jeho Éléments de statique, Paris 1804. V proslulém pojednání, Théorie nouvelle de la rotation des corps 1834, jedná o rotacích kolem os *určitých* a řeší úkoly o jich skládání a rozkládání, odvozuje věty analogické s větami o dvojicích.

§ 133. Skládání dvojic o osách rovnoběžných.

Dvojice o osách rovnoběžných (stejnosměrných nebo protisměrných) skládáme sečítajíce úsečky momentové algebraicky.

Správnost pravidla tohoto vysvitne ihned, uvedeme-li všechny osy na společný začátek O — t. j. všechny dvojice do téže roviny —

a volíme-li společné rameno délky = 1 (obr. 81.). Síly na obou koncích tohoto ramena působící jsou pak: $M_1 = P_1 h_1$, $M_2 = P_2 h_2$,



Obr. 81.

$M_3 = P_3 h_3$ . . . — jsou stejno- nebo protisměrné, a tudíž se sečítají algebraicky; resultující dvojice má síly $+ \Sigma M$ a $- \Sigma M$, rameno = 1, moment ΣM, což obdržíme přímo, sečítajíce algebraicky úsečky momentové dané.

§ 134. Skládání dvojic o osách různoběžných.

Dvojice o osách různoběžných skládáme sečítajíce úsečky momentové geometricky.

Buďtež dány dvě dvojice o osách různoběžných. Uvedeme osy na společný začátek, a dvojice na společné rameno délky = 1, při čemž položíme toto do přímky, v níž se roviny dvojic protínají (obr. 82.). Na obou koncích tohoto ramena působí pak síly

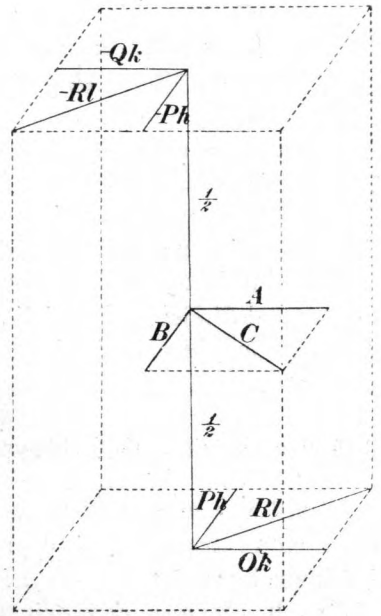
$$A = Ph,$$
$$B = Qk.$$

Tyto složíme ve výslednici

$$C = Rl.$$

Obdržíme tudíž dvojici o silách $+ C$ a $- C$ a ramenu = 1, tudíž

o momentu C; to však obdržíme kratšeji, když osy dané A a B dle pravidla o rovnoběžníku sil skládáme čili geometricky sečítáme.

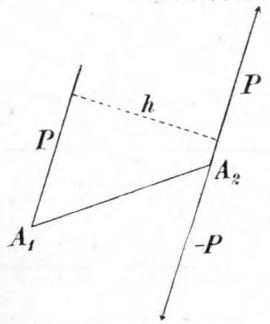


Obr. 82.

Při větším počtu daných dvojic jest — dle analogie se silami v témže bodě působícími — patrno, že osa dvojice výsledné se rovná geometrickému součtu os dvojic daných.

§ 135. Rovnoběžné pošinutí síly jest kompensováno dvojicí.

Sílu P lze z daného působiště přeložiti do jiného ve vlastním směru síly. Jest však možno sílu P také rovnoběžně pošinouti do polohy jiné, když zavedeme za toto pošinutí kompensaci; touto jest dvojice momentu Ph, kdež znamená h kolmou odlehlost mezi původní a novou polohou síly P. Že tomu tak jest, seznáme z obr. 83. Původní síla budiž P v bodu A_1. Pošineme ji rovnoběžně do bodu A_2. Připojíme-li zde sílu $-P$, obdržíme soustavu sil P v A_1 a P, $-P$ v A_2, kteráž jest aequivalentní s původní silou P v A_1. Kombinuje-li se však P v A_1 a $-P$ v A_2 ve dvojici momentu Ph, zbývá síla P pošinutá do A_2.



Obr. 83.

Z věty této vysvítá dobře význam dvojice sil při úkolech mechanických. Zavádějíce tento útvar, můžeme při síle docíliti *téže volnosti v její poloze*, jaká jest u osy dvojice; můžeme jistou sílu pošinouti rovnoběžně kamkoli a to ve vlastním směru jejím bez kompensace, do polohy pak rovnoběžné s kompensující dvojicí správného znamení. Důležitost věty této vysvitne při problému nejvšeobecnějším, při skládání sil v prostoru; i úkoly nejsložitější řeší se její pomocí velmi jednoduše a přehledně.

§ 136. **Síly v rovině v počtu libovolném.**

Znajíce, jak skládati v rovině dvě síly buď různoběžné neb rovnoběžné, můžeme snadno rozhodnouti o případě všeobecném, kdy jest dán v rovině libovolný počet sil $P_1, P_2, P_3, \ldots$ buď různoběžných neb rovnoběžných. Složíme totiž nejprve síly P_1 a P_2 ve výslednici R', k této připojíce sílu P_3 obdržíme další výslednici R'', a tak stále přibírajíce síly další obdržíme konečně závěrečnou výslednici R. Svou velikostí jest tato geometrickým součtem sil daných. Její poloha jest stanovena rovnicí momentovou

$$Rr = \Sigma Pp$$

vzhledem k jakémukoli bodu v rovině.

Jsou-li síly P rovnoběžné, jest jich výslednice R algebraickým součtem sil daných. Rovnice momentová vzhledem k jakémukoli *bodu* v rovině platí zde též; vzhledem pak k jakékoli *rovině* platí rovnice momentová

$$Rc = \Sigma Pa,$$

kdež jest $$R = \Sigma P,$$

tak že $$c = \frac{\Sigma Pa}{\Sigma P},$$

kteroužto rovnicí jest dána poloha *středu* rovnoběžných sil, když jí užijeme ve smyslu, jak v § 125. naznačeno, pro tři na sobě kolmé roviny.

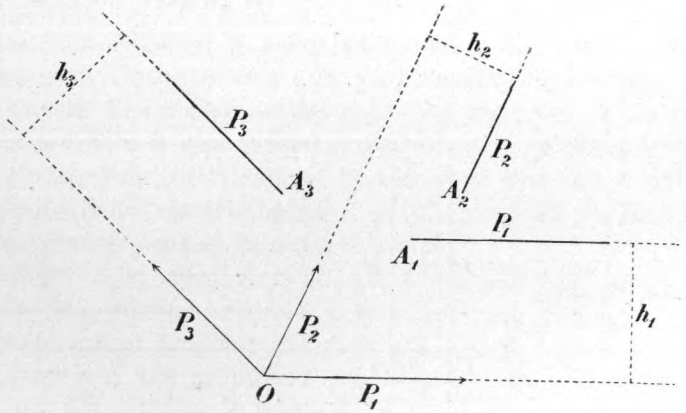
Při skládání sil v rovině může však nastati též případ ten, že, skládajíce síly postupně, přijdeme konečně ke dvěma silám stejným a protisměrným, t. j. ke dvojici sil, momentu M.

Jsou tudíž síly v rovině, počtu libovolného, aequivalentní
buď *jediné síle výsledné* R,
aneb *jediné dvojici výsledné* M.

Síly v prostoru.

§ 137. **Skládání sil různoběžných.**

Buďtež dány síly $P_1, P_2, P_3, \ldots$, působící v bodech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ prostorového útvaru (tělesa), kterýž také zde neproměnným předpokládáme. Směry a velikost sil jsou libovolné. Majíce tyto síly skládati volíme (obr. 84.) libovolně bod O a do tohoto přenášíme



Obr. 84.

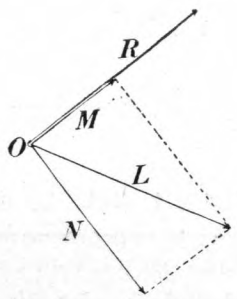
každou sílu $P_1, P_2, P_3, \ldots$ rovnoběžně ji pošinouce. Tím vznikají kompensační dvojice momentů $P_1h_1, P_2h_2, P_3h_3, \ldots$, jež znázorníme příslušnými osami ve správném směru, délek $M_1 = P_1h_1$, $M_2 = P_2h_2$, $M_3 = P_3h_3, \ldots$ Tyto osy můžeme rovnoběžně pošinouti a přenésti též do společného bodu, na př. také do bodu O.

Tím máme pak v bodu O:
soustavu sil $P_1, P_2, P_3, \ldots$,
soustavu os $M_1, M_2, M_3, \ldots$

Sečítajíce jak síly P, tak osy M geometricky, obdržíme konečně v bodě O:

výslednou sílu R,
výslednou dvojici L.

Síla R a osa L jsou k sobě nakloněny v jistém úhlu.



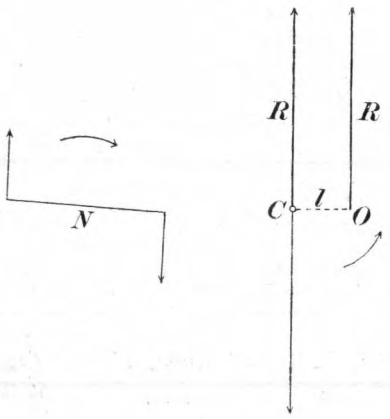
Obr. 85.

Tímto postupem jest tedy celá soustava daných sil P převedena na jedinou sílu výslednou R a jedinou dvojici výslednou L.

Poněvadž bod O byl volen libovolně, jest patrno, že toto převedení jest možné právě dle volby tohoto bodu způsoby rozmanitými.

Jest však jistá podmínka, kteráž ze všech těchto možných způsobů určitý jediný vyznačuje a tím polohu bodu O v jistém alespoň smyslu omezuje.

Osa L jest, jak řečeno, nakloněna k výsledné R. I můžeme v rovině obou těchto přímek (obr. 85.) rozložiti osu L ve dvě složky M a N, z nichž M padne do směru síly R a N jest k němu kolmá. Hledíme-li pak k rovinám přísiušných dvojic, padne síla R patrně do roviny dvojice N (obr. 86.), kdežto jest k rovině dvojice M kolmou. Tu pak jest možno dvojici N pošinutím síly R z bodu O do bodu C zrušiti, což se stane tenkráte, je-li



Obr. 86.

$$-R \cdot l = N.$$

Dvojice N ruší se totiž dvojicí kompensační, vznikající z pošinutí rovnoběžného síly R.

Tím konečně dostáváme: sílu výslednou R v bodě C a dvojici M, jejíž osa jest s touto sílou výslednou stejnosměrná.

Bod C může ovšem ve směru výsledné R býti volen kdekoliv;

jeho poloha není tedy určitou; ale ovšem jest určitou *poloha výsledné síly* R.

Přímka, do níž tato výsledná padá, zove se *centrální osou dvojic*, nebo též *centrální osou momentů*.

Význačnou její vlastností jest, že výsledná dvojice M, jejíž rovina k ní stojí kolmo, jest ze všech možných *minimální*.

Jakmile volíme výslednici v přímce jiné, pošinouce ji tam z osy centrální, vzniká ihned dvojice kompensační N, která geometricky sečtena s dvojicí M tuto vždy *zvětšuje*, poněvadž jest $N \perp M$.

§ 138. Skládání sil rovnoběžných.

Jsou-li síly P_1, P_2, P_3, . . . rovnoběžné, buď stejnosměrné nebo protisměrné, zjednodušuje se úloha, poněvadž dvě a dvě síly rovnoběžné jsou vždy v téže rovině; můžeme tedy postupně síly skládati dle pravidel známých.

Složíme tedy P_1 a P_2 ve výslednou R', jejíž působiště C' stanovíme na přímce $A_1 A_2$ známým způsobem. Pak k výslednici R' připojíme sílu P_3, a obdržíme další výslednou R'', jejíž působiště C'' na přímce $C'A_3$ opět stanovíme způsobem známým. A tak přibírajíce vždy další a další síly P_4, P_5, P_6 . . . vyčerpáme konečně všechny a obdržíme závěrečnou výslednou R, kteráž jest patrně algebraickým součtem daných sil P, a její působiště C. Toto zove se též zde *středem daných sil rovnoběžných*.

Věta o momentech sil vzhledem k danému bodu M zde v prostoru platnosti nemá, poněvadž momenty tak vznikající nemají jenom dvě různá znamení, positivní a negativní, nýbrž smysl jejich je rozmanitý.

Jest však v platnosti druhá rovnice momentová vzhledem k jakékoliv rovině, totiž

$$Rc = \Sigma Pa.$$

Utvoříme-li momenty vzhledem ke třem na sobě kolmým rovinám, tak zvaným souřadnicovým, obdržíme:

$$Rx_0 = \Sigma Px,$$
$$Ry_0 = \Sigma Py,$$
$$Rz_0 = \Sigma Pz,$$

kdež jest

$$R = \Sigma P.$$

Jsou-li tedy souřadnice x_1, y_1, z_1, bodu A_1, x_2, y_2, z_2, bodu A_2 atd. známy, lze souřadnice x_0, y_0, z_0 *středu* A_0 celé soustavy rovnoběžných sil z těchto rovnic vypočísti.

§ 139. Rovnomocnost sil; přehled výsledků.

Přehlédneme-li ke konci celou tuto stať o aequivalenci sil, obdržíme závěrečné výsledky následující:

1. Síly v bodu jsou aequivalentní *jediné síle R.*
2. Síly v přímce jsou aequivalentní rovněž *jediné síle R.*
3. Síly v rovině jsou aequivalentní
buď *jediné síle R,*
nebo *jediné dvojici M.*
4. Síly v prostoru jsou aequivalentní *jediné síle ve spojení s jedinou dvojicí* (*R* a *M*).

Polohu síly lze voliti tak, aby provázející dvojice byla *minimum*. Síla padne pak do *centrální osy dvojic.*

Rovina dvojice jest k ní kolmá čili osa dvojice jest s ní stejnosměrná.

Výsledná síla jest ve všech případech *geometrickým* (speciálně: algebraickým) *součtem* sil daných.

Pokud jsou dané síly v rovině, má platnost věta momentová vzhledem k jakémukoli bodu téže roviny.

O silách rovnoběžných je v platnosti věta momentová vzhledem k jakékoli rovině; touto větou se určuje *poloha středu sil rovnoběžných.*

VIII.

Tíže zemská.

§ 140. Úkazy základní.

Každé těleso hmotné tíhne k zemi, má svou váhu. Tato jeví se buď staticky, tlakem neb napětím, anebo kineticky, urychlením. Směr, v jakém tíže působí, ukazuje se vláknem kokonovým, vhodně zatíženým; směr tento zove se svislým (vertikálním), směr pak k němu kolmý vodorovným (horizontálním). Pokud zemi naši pokládáme za kouli a pokud nepřihlížíme k její rotaci, můžeme říci, že směr svislý směřuje ke středu země. Vskutku tomu přesně tak není. Následkem rotace země, kterou se též koule zemská sploštila, odchyluje se směr vertikální od směru geocentrického; odchylka však, o níž na svém místě bude jednáno podrobně, jest velmi malou, jdouc jen do málo minut úhlových. Nedbajíce jí prozatím, můžeme s velkou approximací zůstati při tom, že směry vertikální se sbíhají ve středu země.

§ 141. Střed hmotný.

Každé těleso tíhne k zemi jako celek, ale také v nejmenších svých částech. Tíže jeví se na př. u pískovce právě tak, pokud jest v celku, jako když jej rozdrtíme na nejmenší zrnka písečná; podobně tíhnou k zemi sebe menší kapky vody, rtuti atd. Na základě toho můžeme dané těleso v myšlenkách si představiti rozděleno v nejmenší částečky hmotné. Je-li m hmota takové částečky a značí-li g skutečné urychlení tíže na jistém místě povrchu zemského, jest mg její váha, jejíž směr směřuje ke středu země. U těles obyčejných rozměrů jsou směry vertikální pro tyto jednotlivé částečky tak malounko různosměrné, že mohou za stejnosměrné býti pokládány. Působí tedy síly mg vesměs stejnosměrně. Takové síly dávají výslednici P (pondus, váha), kteráž se rovná součtu Σmg jednotlivých složek, a působí ve středu C rovnoběžných sil.

Onen součet dává však:

$$\Sigma mg = g \Sigma m = Mg = P,$$

kdež znamená celkovou hmotu tělesa

$$M = \Sigma m.$$

Jest tudíž výslednice P tak veliká, jako by všechna těžká hmota M byla v jejím působišti C soustředěna.

Toto působiště zove se *střed hmotný* (centrum gravitatis) čili *těžiště*. Má tudíž dvojí význam: jeden mechanický, jako střed rovnoběžných sil, druhý fysikální, jako bod, v němž si můžeme celou hmotu tělesa vzhledem k váze celkové mysliti soustředěnu. Tento názor jest v mnohých případech, zejména u těles tuhých, někdy i u kapalin, výhodný; tvar tělesa ustupuje tu úplně do pozadí a místo toho nastupuje jediný hmotný bod.

Z významu těžiště jako *středu rovnoběžných sil* jest patrno, že jeho poloha vzhledem k tělesu samému jest *určitou*, že se nemění, když těleso všelijak stavíme, měníce tím relativně směr sil oproti tělesu; poloha těžiště nezávisí též na absolutní velikosti sil, tudíž také ne na urychlení g; zůstala by tedy poloha tato stejnou, kdybychom v myšlenkách si těleso představili na některé oběžnici, kde jest urychlení g docela jiné než na zemi.

§ 142. Stanovení těžiště počtem.

Těžiště dané soustavy hmotných bodů m lze určiti *methodicky* na základě mechanického významu těžiště jako středu rovnoběžných sil. Pro tento je v platnosti věta o momentech sil vzhledem k rovině. Užijeme věty této pro tři na sobě kolmé roviny souřadnicové. Jsou-li x, y, z souřadnice jednotlivé hmotné částečky m, a podobně x_0, y_0, z_0 souřadnice těžiště, v němž působí výslednice Mg všech jednotlivých rovnoběžných sil mg, obdržíme vztahy platné pro střed rovnoběžných sil ve formě

$$Mg \,.\, x_0 = \Sigma mg \,.\, x,$$
$$Mg \,.\, y_0 = \Sigma mg \,.\, y,$$
$$Mg \,.\, z_0 = \Sigma mg \,.\, z,$$

kdež jest

$$M = \Sigma m.$$

Z rovnic těch krátí se urychlení g; tím se mathematicky vyjadřuje, že poloha středu hmotného jest na tomto urychlení nezávislou. Souřadnice, polohu tuto určující, jsou pak dány rovnicemi

$$x_0 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Prochází-li jedna z rovin souřadnicových, na př. rovina YZ, těžištěm, jest

$$x_0 = 0.$$

tudíž také

$$\Sigma mx = 0.$$

Rovnicí touto jest mathematicky formulována *souměrnost hmotná* vzhledem k oné rovině. Vzdálenosti x jsou na jedné straně roviny počítány kladně, na druhé záporně. Součet všech kladných mx jest roven součtu všech záporných. Je-li těleso homogenní, přejde souměrnost hmotná v souměrnost geometrickou.

Summace v rovnicích předešlých má význam, pokud jde o *konečný* počet *jednotlivých* hmotných bodů m, spojených v jedinou soustavu. U těles fysikálních pozmění se věc potud, že se zde hmotné body m druží k sobě *spojitě* v počtu *nekonečně velkém*, při čemž hmota m *jednotlivých* bodů jest *nekonečně malá*.

Diskontinuita přechází v kontinuitu, summace obyčejná, konečného počtu sčítanců velikosti konečné, následkem toho v summaci zvláštní, nekonečně velikého počtu sčítanců velikosti nekonečně malé, to jest v integraci. Proto jest stanovení těžiště fysikálních těles úkolem počtu integrálního; i v případech takových, kde se úkol ten předvádí v rouchu elementárním, jest způsob odvození vlastně integrací zastřenou.

Rozhoduje při tom geometrický tvar tělesa, kterýž nutno mathematickými vztahy vyjádřiti, a vedle toho rozdělení hmoty tělesa v prostoru geometrickém. Toto rozdělení jest blíže určeno hustotou na určitém místě, platnou pro objem nekonečně malý, a může se v případě všeobecném měniti; hustota jest pak závislou na poloze hmotné částečky. Úkol se ovšem značně zjednoduší, když tato hustota jest pro celý geometrický objem tělesa konstantní, t. j. když těleso jest homogenní. V úvahách následujících, není-li výslovně jinak poznamenáno, vždy případ tento předpokládáme. Při počítání skutečném rozeznávají se pak případy zvláštní. Těleso hmotné může dle rozměrů svých se rozprostírati buď jen v jediném směru, neb ve dvou, neb ve třech; dle toho rozeznáváme hmotné útvary

délkové nebo plošné nebo prostorové. V tomto smyslu počítá se těžiště čar, jistého tvaru a omezení, podobně těžiště ploch, také daného tvaru a omezení, a konečně těžiště těles. Příslušné integrace se dle toho již napřed všeobecně upraví. Hledání těžiště má pak, podobně jako stanovení plošného neb objemového obsahu těles pravidelně omezených, zájem více mathematický než fysikální.

V duchu počtu integrálního nastoupí dm na místě m, a integrace na místě summace. Máme pak rovnice

$$x_0 \int dm = \int x\, dm,$$

$$y_0 \int dm = \int y\, dm,$$

$$z_0 \int dm = \int z\, dm.$$

Je-li S hmota specifická, dv element objemový, jest

$$dm = S \,.\, dv.$$

Všeobecně jest S funkcí polohy (x, y, z) bodu dm. Při tom jest v souřadnicích pravoúhlých

$$dv = dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Element objemový může býti vyjádřen též souřadnicemi polárními.

U ploch volí se za element dv projekce rovinného elementu, na př. $dx \,.\, dy$ na plochu samu. Je-li rovnice dané plochy

$$F(x, y, z) = 0$$

jest

$$dv = dx \,.\, dy \,.\, \frac{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}{\frac{dF}{dz}}.$$

U čar jest elementem dv oblouček čáry ds, t. j.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Integrace jsou určité; meze integrační dlužno úlohou samou pro každý případ stanoviti.

Sestavení výsledků pro některé zvlášť zajímavé případy obsahuje na př. Dr. A. Seydler, Mechanika, I. pag. 212., 1880, přehledně též Červený a Řehořovský, Technický průvodce, I, pag. 126, 1896.

§ 143. Stanovení těžiště konstrukcí.

V mnohých případech zjednodušuje se stanovení těžiště těles homogenních některými podmínkami. Má-li dané těleso rovinu souměrnosti v geometrickém slova smyslu, musí patrně těžiště ležeti v této rovině. Má-li dané těleso dvě roviny souměrnosti, leží těžiště v přímce, ve které se roviny tyto protínají. Přímku tuto zoveme osou. Těžiště leží tudíž na ose tělesa. Obyčejně bývají tyto roviny souměrnosti na sobě kolmé. Má-li konečně těleso tři roviny souměrnosti, jest jich průsekem těžiště dáno. Průsek tento, jenž se zove středem geometrickým tělesa, jest tudíž také středem hmotným. Obyčejně bývají též zde ony roviny na sobě kolmé.

Příkladů k tomu poskytuje ve velkém množství stereometrie a krystallografie. Pravidelné mnohostěny, čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn, dále koule, krychle, ellipsoid a pod. jsou příkladem, kdy střed geometrický jest zároveň těžištěm. U válce kruhového neb elliptického a pod. leží těžiště na ose, a to uprostřed, je-li válec omezen rovinnými řezy rovnoběžnými. Těžiště kužele kruhového neb elliptického a pod. leží na jeho ose. Podobně má se věc u rovnoběžnostěnu a jehlanu.

Těžiště hmotné přímky, jak dle analogie »hmotného bodu« říkáme — tedy na př. tenkého rovného drátu a pod. — jisté délky leží patrně uprostřed.

Těžiště hmotného trojúhelníka, jako na př. trojúhelníkové velmi tenké deštičky, nalezneme jednoduchou konstrukcí. Je-li ABC (obr. 87.) daný trojúhelník, rozdělíme v myšlenkách jeho plochu řezy, se stranou BC rovnoběžnými, na samé hmotné přímky. Těžiště každé z nich jest v jejím středu, a tyto středy leží vesměs na přímce AA' vedené od vrcholu A ke středu A' protější strany BC. I jest patrno, že v této přímce, kteráž se proto *těžná*, *těžnice* (mediána) zove, musí ležeti také těžiště *celého* trojúhelníka. Stejným právem lze říci totéž o těžných přímkách BB' a CC'; protínají se tudíž všechny tři přímky těžné v témže bodě O, kterýž jest těžištěm trojúhelníka. Patrně jest:

$$\frac{C'B'}{BC} = \frac{AC'}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{C'O}{OC} = \frac{B'O}{OB},$$

$$OB' = \tfrac{1}{3}BB', \qquad OC' = \tfrac{1}{3}CC', \qquad OA' = \tfrac{1}{3}AA'.$$

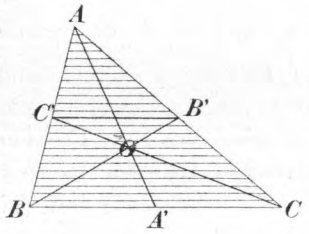
Jsou-li (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) souřadnice vrcholů A, B, C v rovině trojúhelníka samého, jest

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

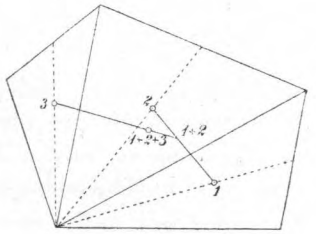
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Těžiště trojúhelníka jest tudíž jednostejné s těžištěm soustavy tří hmotných ve vrcholech trojúhelníka umístěných bodů o stejné hmotě (váze).

Majíce konstrukcí nalézti těžiště mnohoúhelníka (obr. 88.), rozdělíme jej úhlopříčkami z téhož vrcholu vedenými v trojúhelníky; stanovíce pak těžiště každého z nich, soustředíme v něm



Obr. 87.



Obr. 88.

hmotu úměrnou plošnému obsahu toho trojúhelníka 1, 2, 3, . . . Tak obdržíme soustavu hmotných bodů, jichž hmoty m_1, m_2, m_3, . . . a tudíž i jich váhy relativně známe. Hledajíce pak výslednou těchto vah, přijdeme známým způsobem k jejímu působišti, kteréž jest těžištěm daného mnohoúhelníka. Podobně jednoduše lze stanoviti hmotný střed trojbokého jehlance aneb jehlance vůbec, kužele a jiných jednoduchých útvarů stereometrických hmotou stejnoměrně vyplněných.

§ 144. Rovnováha tuhého tělesa těžkého.

Bylo řečeno, že tíže působí na dané těleso tak, jako by celá jeho hmota M byla soustředěna v těžišti O, a zde svou vahou Mg působila. Z toho vysvítá, že se tíží přivádí těžiště tělesa tak blízko k zemi jak možno. To platí rovněž tak o kapalných a vzdušných jako o tuhých tělesech. Často jde o to, udržeti těleso v jisté poloze proti tomuto působení tíže. U kapalin a vzdušin jsou toho podmínky zvláštní. U těles tuhých však, kde jednotlivé hmotné body tvoří jedinou neproměnnou soustavu, jak zde předpokládáme, stačí, když

se ruší síla Mg, čemuž jest vyhověno, když v jejím směru dole nebo nahoře jest v pevném spojení se zemí aspoň jeden bod tělesa, po případě přímka (osa) anebo plocha anebo i řada bodů v rovině určujících rovinný mnohoúhelník. Pravíme pak, že těleso jest vzhledem k tíži *v rovnováze*.

Tato rovnováha může však býti trojího způsobu: buď jest *stabilní* (stálá), anebo *labilní* (vratká), anebo *indifferentní* (volná, neurčitá).

Za účelem rozpoznati rovnováhu vyšiňme těleso z dané polohy rovnovážné do polohy nové, málo rozdílné, tak, aby se vyšinutí toto, jemuž *virtuálné* (možné) říkáme, srovnávalo s danými podmínkami. Vrací-li se pak těleso do polohy původní, byla jeho rovnováha stabilní; nevrací-li se, nýbrž naopak oddaluje-li se ještě dále, od polohy původní, byla jeho rovnováha labilní; zůstává-li konečně i v nové poloze v rovnováze, jest jeho rovnováha indifferentní.

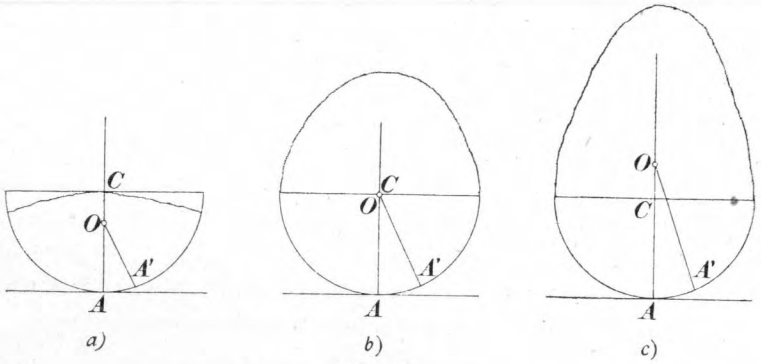
Všeobecné toho kriterium jest, že při vyšinutí tělesa v prvém případě *těžiště* jeho *stoupá*, v druhém *klesá*, v třetím *zůstává na výši stejné*. V prvém případě těleso práci *konsumuje*, jeho energie polohy stoupá, v druhém případě těleso práci *produkuje*, jeho energie polohy klesá a mění se v energii pohybu; proto se těleso oddaluje od polohy původní; v třetím případě není žádné změny energie.

Když je rovnováhy tělesa docíleno pevným bodem, jehož posice vzhledem k tělesu se *nemůže měniti*, anebo pevnou osou, kteráž jest rovněž s tělesem *v neproměnném spojení*, pak lze snadno stanoviti, kdy hořejší tři případy nastávají; záleží tu patrně na poloze těžiště vzhledem k onomu bodu neb k oné přímce, zdali je totiž těžiště níže — stabilnost — nebo výše — labilnost — anebo v onom bodu samém, resp. v přímce samé — poloha indifferentní. V posledním případě chová se těleso tak, jako by bylo bez váhy, jako by tíže na ně neměla vlivu žádného. Proto užíváme tohoto způsobu upevnění, když chceme těleso vymaniti z vlivu tíže.

Ne tak snadno lze rozhodnouti o rovnováze, když se těleso opírá bodem nebo přímkou o rovinu, ale tak, že onen bod neb ona přímka se při pošinutí tělesa mění.

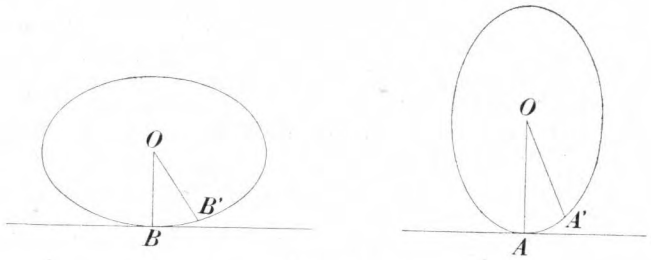
Mějmež na př. skleněnou misku tvaru polokulového, do níž jest nasypáno nějaké soli. Miska spočívá na stole, opírajíc se bodem A. Při vyšinutí misky stane se oporou bod A'. I jest patrno: je-li těžiště O pod středem C polokoule, jest $OA < OA'$, t. j. OA minimum; těžiště při vyšinutí stoupá, poloha jest stabilní (obr. 89. *a*).

Pakli jest těžiště O nad středem C, jest $OA > OA'$, t. j. OA maximum; těžiště při vyšinutí klesá, poloha jest labilní (obr. 89. *c*). Přechod od stability k labilitě polohou indifferentní stane se, když těžiště O padne právě do středu C, tak že jest $OA = OA'$ (obr. 89. *b*).



Obr. 89.

Úvahy podobné možno učiniti u válce, (na př. průřezu elliptického nebo kruhového), kterýž leží na stole opíraje se přímkou (stranou).



Obr. 90.

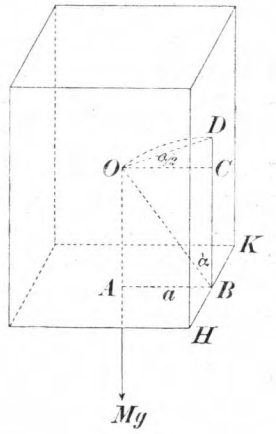
Podobně dává ellipsoid trojosý příklad polohy stabilní neb eventuálně labilní (obr. 90.), ellipsoid dvojosý, při němž delší osa jest osou rotační, příklad současné dvojí rovnováhy, stabilní a indifferentní, homogenní pak koule příklad polohy indifferentní.

§ 145. Míra stálosti polohy.

Měrou stability jest práce, kterouž těleso spotřebuje, když se má ze stabilní polohy uvésti v jinou, při které pak nastává labilnost, tak že se těleso zvrátí. Obyčejně posuzuje se stabilita tělesa v tom

případě, když spočívá na rovině v opěrném mnohoúhelníku, při čemž jest jednostejno, zdali je podepřeno celou plochou tohoto mnohoúhelníka anebo jen jednotlivými jeho rohy (na př. stůl na nohách, stativy na trojnožkách a pod.).

Mějmež na př. kolmý hranol, jenž stojí na své dolejší rovině (obr. 91.). Jde-li o to, zkoušeti, jak se má jeho stabilita, kdyby se hranol otáčením kolem hrany HK měl zvrátiti, tedy jest patrno, že se musí těžiště zvednouti podél oblouku OD až do nejvyšší polohy D, tak že stoupne o výšku $= CD$. Vykonaná práce, kterouž dlužno vynaložiti, jest tudíž: $Mg \,.\, CD$. Zavedeme-li: $AB = a$, úhel $OBD = \alpha$ jest úhel COD jakožto obvodový $= \frac{\alpha}{2}$, tudíž $CD = a \,.\, tg \frac{\alpha}{2}$.



Obr. 91.

Vykonaná práce, t. j. míra stability, jest tudíž dána výrazem

$$W = Mg \,.\, a \,.\, tg \frac{\alpha}{2}.$$

Při téže intensitě g tíže jest tudíž stabilita onoho hranolu — vzhledem k hraně HK — tolikráte větší, kolikrát jest větší jeho hmota M (materiál), kolikrát jest větší délka a (rozměr hranolu kolmo k hraně HK v rovině opěrné), a konečně čím jest větší úhel α, t. j. čím jest těžiště O níže položeno.

Při $\alpha = 90^0$ byla by vynaložená práce maximum $= Mga$.

Za jinak stejných okolností stojí tudíž sloupy na př. železné pevněji než kamenné nebo dřevěné; trojnožky stativů hotoví se těžké a jejich nohy objímají velkou plochu; zvířata na čtyřech nohách stojí stabilněji než člověk na dvou; pyramidy jsou stabilnější než věže; vůz, na němž naloženo cihel, nezvrátí se tak snadno jako vůz se stejně těžkým nákladem sena, snopů obilních a pod.

§ 146. Empirické stanovení těžiště.

Z výkladu o rovnováze stabilní odvodíme snadno pravidlo, dle něhož se lze jednoduše orientovati o poloze těžiště daného tělesa tuhého. Zavěsíme těleso to v nějakém jeho bodě na nit; těleso se

ustálí i musí pak ve směru niti ležeti těžiště. Označíme tedy nějakým způsobem tento směr. Na to zavěsíme těleso v jiném bodě na nit. Těleso se ustálí a opět naznačuje nit směr, ve kterém těžiště hledati dlužno. Protínají se tudíž oba směry niti v těžišti hledaném.

Jistota, s jakou lze tímto způsobem těžiště stanoviti, záleží ovšem na tom, jak přesně lze ony směry v daném tělese označiti.

Podobně lze těžiště určiti průsekem tří rovin, když totéž těleso pevné stavíme na ostrou hranu a poznamenáme při rovnováze polohu příslušné roviny vertikální v tělese.

Mnohdy padne těžiště mimo vlastní těleso, t. j. do prostoru, hmotou nevyplněného. Známým toho příkladem jest prsten, miska, láhev, dutý válec, dutá koule a pod.

Úkoly o těžišti řešil již *Archimedes* (287—212 a. Ch.), stanoviv těžiště rovnoběžníka, trojúhelníka, parabolického úseku, a j. K těžišti hleděly též první samostatné mathematické práce, jež podal *G. Galilei* jako jinoch 19letý na universitě Pisanské, při nichž mu byla statika Archimedova východištěm a základem. Úspěch prací těchto rozhodl opuštění studií medicinských a věnování se oboru mathematicko-přírodovědeckému. Zde budiž též vzpomenuto mechanických prací, jež provedl *Jeroným Cardanus,* (narozený 1501 v Miláně, zemřel 1576 v Římě), proslulý jako filosof a mathematik. Známa jest jeho formule k řešení rovnic (redukovaných) třetího stupně. Cardanus sestrojil pro císařský vůz zvláštní sedadlo, jež zachovávalo polohu vodorovnou při jakémkoli postavení vozu a to v provedení, jehož se dosud užívá při zavěšování lodních lamp, kompasů, chronometrů, barometrů, a j. Při tomto závěsu Cardanově jest těleso otáčivě kuželovitými hroty umístěno ve dvou diametrálně proti sobě položených místech kruhového prstenu, kterýž sám je též podobně umístěn na jiných dvou o 90^0 od dřívějších odlehlých diametrálních hrotech ve vlastním stojanu upevněných. Těleso, jehož těžiště jest co možná hluboko, má tím volnost současného otáčení kolem dvou na sobě kolmých os, což stačí, aby mohlo zůstati v téže poloze, i když onen stojan se všelijak staví. Tak jest na př. ve své skřínce umístěn chronometr (obr. 26.), jenž má úpravu podobnou jako chronometry lodní.

Nahoře bylo řečeno, že vypočítání těžiště má zájem více mathematický než fysikální. Vskutku fysika, jsouc dle povahy své vědou všeobecnou, jedná obyčejně o těžišti vůbec, zřídka o těžišti zvlášť. Jen v applikacích, ve fysice praktické, jde o těžiště, ve smyslu konkretním, pro určitá daná tělesa, a i tu dlužno výsledky počtu přijímati s jistou reservou, poněvadž podmínka *homogenity* u těles tuhých zřídka bývá přesně vyplněna.

Název »střed hmotný« jest obsažnější než obvyklý název »těžiště« a má též přednost všeobecnějšího názoru, ježto platí pro síly rovnoběžné jakékoliv. Při tom odpovídá »střed« výrazům, jimiž se stanoví jeho souřadnice; neboť tyto se jeví jako průměrné (střední) hodnoty souřadnic jednotlivých částic hmotných m_1, m_2, m_3, . . . utvořené vzhledem k jich hmotám. Jsou-li tyto stejné, přejdou ony výrazy v průměrné (střední) v obyčejném slova smyslu. Naproti tomu má název »těžiště« tu přednost, že přímo k tíži poukazuje, tedy k síle, vzhledem ke které se pojmu »středu hmotného« fakticky výhradně užívá.

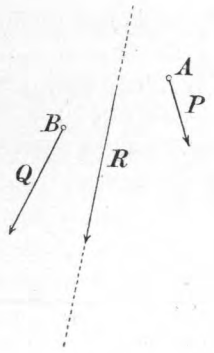
IX.

Jednoduché stroje.

§ 147. Úvahy všeobecné.

Názvu »stroj« užívá se ve významech rozmanitých. Jest proto velmi nesnadno stanoviti definici, která by byla dosti jednoduchou a hodila se na všechny různé druhy strojů, které známe. Nejvšeobecnějším účelem strojů jest zprostředkovati proměnu energie. Příklad podává rovněž tak kladkostroj jako lokomotiva nebo stroj dynamoelektrický.

V tomto oddílu chceme však jednati jen o t. zv. *jednoduchých strojích.* Pro tyto uvádí Poinsot definici tuto: *Stroje jsou hmoty k tomu způsobilé, aby v rovnováze udržovaly síly jakéhokoli směru a jakékoli velikosti.*



Obr. 92.

Pro jednoduchost jest obyčejem voliti síly tyto v *počtu co nejmenším*, t. j. voliti síly pouze dvě. Jedná se tedy u strojů jednoduchých zpravidla o *rovnováhu sil dvou.* Jedna ze sil těchto Q bývá *dána* i co do směru i co do velikosti; nazýváme ji *břemenem*; bývá to na př. váha nějaké těžké hmoty. Druhá síla P, která se pak »silou« zvlášť nazývá, má se stanoviti tak, aby břemeno Q udržela v rovnováze. Při tom se předpokládá, že nemá síla P působiti protisměrně s břemenem Q, ve kterémžto případě by se síla břemenu rovnala a stroj by se stal zbytečným, nýbrž že má působiti v nějakém jiném *pohodlnějším směru* zpravidla *v téže rovině*, a že právě strojem rovnováhy se má docíliti (obr. 92.).

V čem toto prostřednictví stroje záleží, je snadno poznati. Poněvadž, jak řečeno, síly P a Q působí ve směrech do jisté míry libovolných, dávají určitou *výslednici* R. Mají-li tudíž býti v rovnováze, musí se tato jich výsledná *rušiti*; to jest možno jen tím, že stroj má pevný bod nebo pevnou přímku nebo pevnou rovinu, a že právě *pevností* těchto částí se ruší výslednice R. Tomuto »*rušení*« dlužno tak rozuměti, že se výslednice R nejeví *kineticky*; za to však jeví se *staticky* a sice *tlakem*, který ona pevná část stroje musí vydržeti.

Všeobecnou úvahou touto, kterouž zde předesíláme a kteráž pro všechny dále následující zvláštní případy platí, jest již naznačena *cesta*, jakou bráti se dlužno při řešení úloh jednotlivých. Břemeno Q bývá *dáno*; pevná část stroje je též dána, ať jest to již bod nebo přímka neb rovina. Nutno tedy voliti sílu P tak, aby výslednice R sil P a Q onou pevnou částí procházela a tím ve významu nahoře vyloženém se zrušila.

§ 148. **Princip virtuálných posunutí.**

Určujíce sílu P tak, aby s daným břemenem Q byla v rovnováze, držíme silou břemeno. Často jde však o to, břemeno zvedati, tedy překonávati podél jisté dráhy. Nutno pak sílu P zvětšiti o část p; přebytkem p nastane pohyb. Při tom posunují se působiště A a B do poloh nových a nových, následkem čehož se všeobecná konformace na stroji ponenáhlu jinak utváří. Abychom tedy vystihli vztahy, platné pro uspořádání určité, jak jest dáno jistými délkami, jistými úhly a pod., pozorujme, jak se onen pohyb jeví v první chvíli, v době velice (nekonečně) krátké. Posunutí AA' a BB', jež pak jsou též velmi (nekonečně) malá, lze pokládati za přímočará; jich směr a délka jsou určeny danými podmínkami stroje; proto se zovou *posunutí virtuálné*. Jsouce pak stejnodobé, udávají též rychlosti pošinování bodu A a B; odtud též název *virtuálné rychlosti* *).

Pozorujme, jak se virtuálné posunutí jeví ve směrech jednak síly P, jednak břemena Q. Buďtež a, b průměty oněch posunutí AA', BB' do směrů těch. Utvořme součiny Pa, Qb; tyto zovou se *virtuálné práce*, anebo též *virtuálné momenty*.

*) Slovo virtuálný, jehož se ve fysice často užívá, jest odvozeno od latinského virtus ve významu mohutnost, tudíž možnost něco provésti; přídavné jméno virtualis v latině nepřichází, ale ovšem v jazycích s latinou spřízněných, jako virtuel (franc.), virtuale (ital.), virtual (angl.). Znamená tedy tolik jako možné, t. j. srovnávající se s danými podmínkami, souhlasící s danou situací.

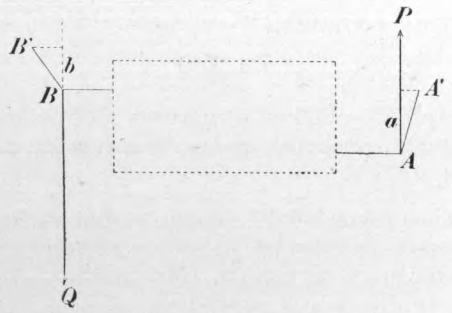
Děje-li se posouvání přírůstkem p síly P, padne (obr. 93.) průmět a do směru této síly a práce $(P + p)\,a$ jest positivní, silou *produkovaná*. Proti tomu padne průmět b do opačného směru břemena Q; práce Qb jest negativní, břemenem *konsumovaná*. Je-li $p = 0$, t. j. rovnováha, a učiníme-li ono posunutí, jež skutečně nenastane, v myšlenkách, pak se ukazuje vztah

$$Pa = Qb,$$

z něhož plyne úměra

$$P : Q = b : a.$$

Dle rovnice této jest poměr síly P ke břemenu Q vyjádřen poměrem dvou délek a, b, totiž *virtuálných posunutí* (rychlostí), *vzatých dle směrů jednak síly, jednak břemena*; i vyjadřuje úměra ta *princip virtuálných posunutí* (rychlostí).



Obr. 93.

Se stanoviska tohoto principu nemusíme bližší uspořádání stroje ani znáti, může tento stroj býti třeba v nějaké skříni uzavřen, tak že vyčnívají jen na př. tyče, na jichž koncích působí síly P a Q (obr. 93.).

Vhodnější jest však formulovati hořejší rovnici — vzhledem ke znamení — ve způsobu

$$Pa + Qb = 0.$$

Rovnicí touto jest pak vyjádřen *princip virtuálných prací* (momentů). Smysl jest zcela jednoduchý. Jest rovnováha, poněvadž *není, z čeho by nastal pohyb*. Není zde při myšleném posouvání žádného *přebytku* práce — a pohyb nemůže jinak vzniknouti než

z práce; kde však práce silou P *produkovaná* $(+ P \cdot a)$ se břemenem Q v plné míře *konsumuje* $(- Qb)$, není žádného přebytku, a tudíž pohyb nenastane.

Uvedlí jsme tyto úvahy již zpředu se stanoviska *povšechného*; přejdouce již ke strojům jednotlivým, můžeme úvahy ty při každém stroji zvlášť opakovati a tím ještě více je objasniti. Mnohdy není onoho omezení na posouvání velice (nekonečně) malé ani třeba, když totiž povšechná situace stroje se oním posunutím nemění, jakož toho příklady dále poznáme.

Je-li počet působících sil libovolný, na př. P_1, P_2, P_3 . . . a jsou-li a_1, a_2, a_3 . . . průměty virtuálných posunutí působišť do směrů těchto sil, vyjadřuje výraz

$$\Sigma Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \ldots$$

veškerou práci virtuálnou vznikající při velice malém posouvání soustavy, jež by vyhovovalo daným podmínkám. Rovnováha jest, když tato úhrnná virtuálná práce buď jest nullová anebo i negativní, t. j. když virtuálné pošinutí systému jest spojeno se spotřebou práce. Obsahuje tedy podmínka

$$\Sigma Pa \leqq 0$$

požadavek rovnováhy ve formě všeobecné. Pohyb nenastane, když při tom není žádného přebytku práce, z něhož by energie pohybu mohla vzniknouti.

Platnost principu virtuálných posunutí vystihl ve zvláštním případě již *Stevin*. Pojednávaje o rovnováze na kladce volné pro případ provazců rovnoběžných, znázorněný v obrazci 94. (jenž jest kopií originálu), praví, že v bodě F provazce držena jest pouze polovice váhy břemena B, a připojuje dále: »Zde ona zásada statická má též místo:

Jak se má dráha síly ke dráze břemena,

tak se má velikost břemena k velikosti síly.

Neboť rukou F, která zde jest jako síla o dvě stopy pošinutou váha, která jest jako břemeno, o jedinou pouze stopu stoupne: čehož příčina zjevna jest *).

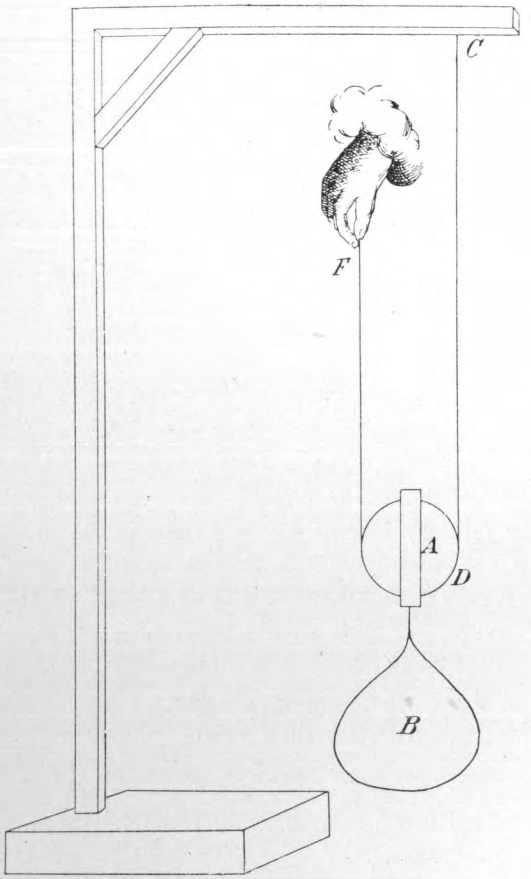
*) »Notato autem hic illud Staticum axioma etiam locum habere:

Ut spatium agentis, ad spatium patientis,

Sic potentia patientis, ad potentiam agentis.

Nam manu F, quae hic agit, duos pedes promota, pondus, quod patitur, unicum duntaxat pedem procedet: cujus causa manifesta est.« Hypomnemata mathematica, Lugduni Batavorum, 1608. De Trochleostatica pag. 171. *Simon Stevinus* (= Steven, Stephan) žil (většinou v Leydenu a v Haagu) v letech 1548 až 1620; původně zaměstnán v obchodu a ve vojenství byl později vrchním dozorcem pozemních a vodních staveb v Hollandsku.

Rovněž *Galilei* při nakloněné rovině mimochodem o principu tom se zmiňuje. Všeobecnou jeho formulaci s poukazem na jeho obecnou platnost uvádí teprve *Jan Bernoulli* (r. 1717) v dopise k *Varignonovi*.



Obr. 94.

Lagrange na principu virtuálných prací ve všeobecné formulaci

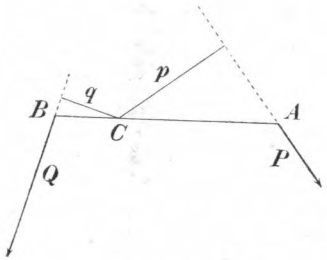
$$\Sigma Pa \leqq 0$$

založil celou mechaniku, podav též důkaz principu všeobecný, anebo spíše *) podav pomocí kladek výklad, jímž smysl a jádro principu se objasňuje, neboť dokázati a priori principu toho nelze. Jest aequivalentní s větou o rovnoběžníku sil, se kterou má to společné, že zkušeností se osvědčuje a nevede nikde k rozporům.

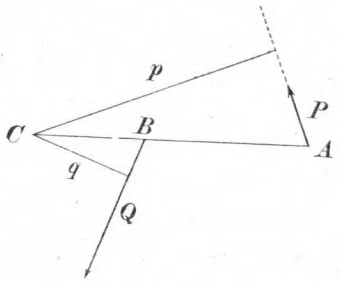
*) Viz E. Mach, Mechanik, pag. 63, 1897.

§ 149. **Páka.**

Pákou může býti každá pevná tyč jakéhokoli tvaru, kterou kolem pevného bodu C (po případě kolem pevné osy C) lze otáčeti (obr. 95. a 96.). V bodě B působí břemeno Q, kteréž jest dáno. Tím dán jest také jeho moment Qq vzhledem k C.



Obr. 95.



Obr. 96.

Hledáme sílu P, kterou by se břemeno Q udrželo v rovnováze. Musí tedy výslednice R sil P a Q se rušiti, t. j. procházeti pevným bodem C. To však vyžaduje, aby obě síly byly v jedné rovině, a aby vzhledem k tomuto bodu C moment $P \,.\, p$ síly P byl téže velikosti, ale opačného smyslu než moment $Q \,.\, q$ břemena Q. Tím jest úloha řešena.

Silou Q a bodem C položíme rovinu a v ní volíme P tak, aby

$$P \,.\, p = Q \,.\, q$$

co do velikosti, při čemž moment síly musí býti s momentem břemena smyslu opačného.

Dle uspořádání sil P a Q rozeznává se často »*páka dvouramenná*« (obr. 95.) a »*páka jednoramenná*« (obr. 96.) dle toho, zdali síly P a Q působí na různých stranách aneb na téže straně bodu C.

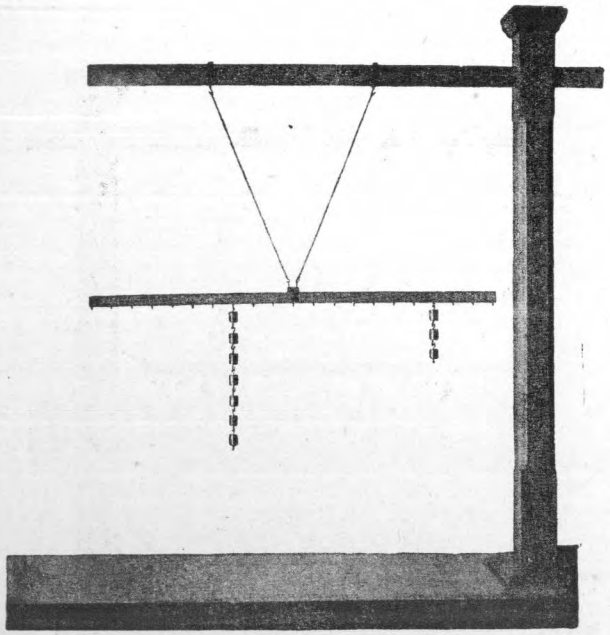
Pro výslednici R, t. j. pro tlak, který musí pevný bod (neb pevná osa) C páky vydržeti, máme vzorec

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (P, Q).$$

Jest tedy $(Q > P)$

$$R = Q + P \text{ maximum při úhlu } (P, Q) = 0,$$
$$R = Q - P \text{ minimum } \text{» } \text{» } (P, Q) = 180^0.$$

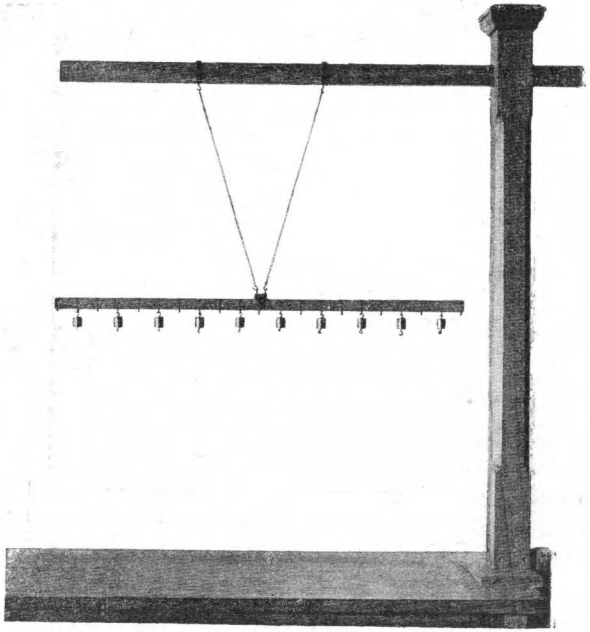
V obrazcích 95. a 96. jsou body A, B, C voleny na téže přímce; tím není všeobecnosti učiněna ujma, poněvadž lze síly ve vlastním směru z působiště daného přeložiti do jiného.



Obr. 97.

Zákony o páce dvouramenné lze experimentálně ukázati způsobem, kterýž znázorňují obrazce 97. a 98. Dřevěná tyč představující páku, jsouc otáčivou kolem osy těžištěm položené, jest jako by bez váhy. Síla a břemeno realisují se opět jako v podobných případech dřívějších, vahou řady hmot stogrammových; délka řady připomíná délku přímky geometricky znázorňující sílu neb břemeno. Zároveň lze pěkně ukázati, jak postupným rozestavováním závaží případ na páce obr. 97. lze převésti na případ 98., v němž rovnováha jest samozřejmou; rozestavení se děje dle zásady, že dvě závaží v různých závěsích působí tak, jak by spojena v jediné působila uprostřed obou závěsů (Archimedes). Jde-li o páku jednoramennou, dlužno tyč páku představující, upevněnou na jednom svém konci, vyvážiti závažím zvláštním na konci druhém. Uspořádání pokusu objasňuje pak obr. 99. Závaží pomocné, jehož váha

se rovná poloviční váze tyče, vystupuje světleji a liší se tak od ostatních. Jest poučno upozorniti na souvislost obrazců 97. a 99. s obrazcem 72.; vynikne tím dobře význam rovnováhy způsobené tím, že výslednice síly a břemena se ruší pevností osy; vynikne zároveň tlak, jaký osa musí vydržeti.



Obr. 98.

Že jest na páce princip virtuálných pošinutí zachován, t. j. že platí

$$P \,.\, a = Q \,.\, b,$$

vysvítá z obr. 100. jednoduchou úvahou geometrickou.

Přeložíme-li jednoduše působiště A a B do konečných bodů ramen p a q a otočíme-li pákou o malý úhel α, jest pošinutí a působiště A ve směru síly P dáno součinem $a = p \,.\, \alpha$, pošinutí b působiště B proti směru síly Q součinem $b = q \,.\, \alpha$.

Poněvadž jest

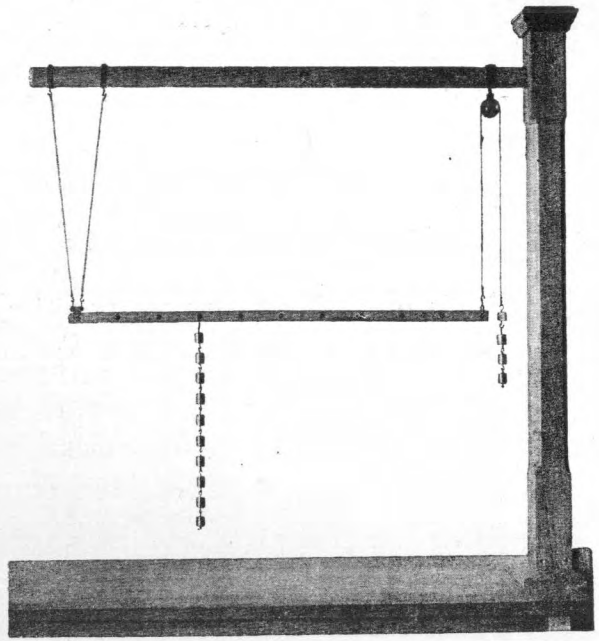
$$P \,.\, p = Q \,.\, q,$$

čili

$$P \,.\, p\alpha = Q \,.\, q\alpha,$$

jest též

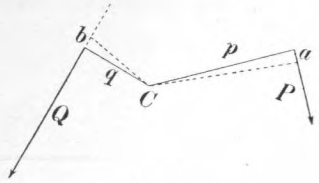
$$P \,.\, a = Q \,.\, b,$$



Obr. 99.

jakož vyžaduje princip virtuálných pošinutí. Práce Pa, kterou by síla P produkovala, konsumovala by se břemenem Q.

Na přístrojích v obr. 97. a 99. lze výklad učiniti ještě názornějším. Zároveň lze upozorniti, proč při formulaci principu nutno pošinutí a a b bráti velmi malá; neboť při větších změní se vzájemné směry sil a páky a tím i délky ramen p a q.



Obr. 100.

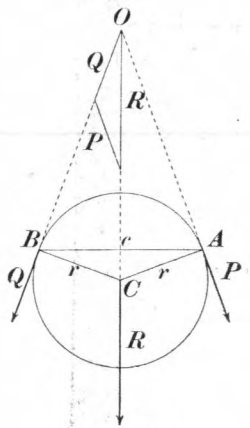
§ 150. **Kladka pevná a volná.**

Pevnou částí kladky, dle níž se kladka sama též pevnou zove, jest její osa C (obr. 101.). Břemeno Q a síla P působí na provazci kolem kladky ovinutém. Jako při páce jest i zde

$$Pr = Qr,$$

tudíž

$$P = Q.$$



Obr. 101.

Vedeme-li tětivu c, má platnost úměra

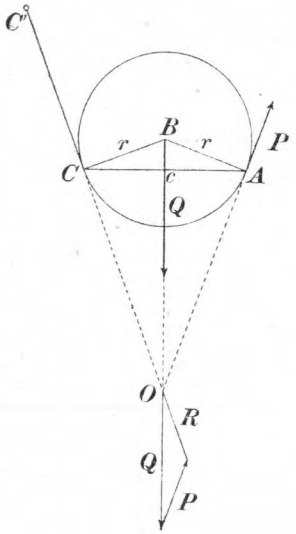
$$\frac{P}{r} = \frac{Q}{r} = \frac{R}{c}$$

t. j. béřeme-li poloměr r kladky za míru sil P a Q, jest tětiva c měrou tlaku, působícího směrem na tuto tětivu kolmým, kterýž osa kladky musí vydržeti.

Že tomu tak, vysvítá z podobnosti trojúhelníku sil (P, Q, R) do společného jich průseku přeložených a trojúhelníku stran (r, r, c).

Patrně jest c maximum $= 2r$, a tudíž R maximum $= 2P$, jsou-li síly P a Q rovnoběžné.

Kladkou pevnou nezmenší se sice síla P oproti břemenu Q, ale může účinkovati ve směru, který by po případě byl pohodlným.



Obr. 102.

Kladka volná nemá žádného pevného bodu. Pevný bod, kterým se výslednice R má rušiti, nalézá se mimo kladku v C' (obr. 102.); od něho jde provazec kolem dolejší části obvodu kladky a odtud obyčejně k nějaké pevné kladce, která slouží ku přeměně směru síly P; břemeno Q působí v ose B kladky směrem obyčejně svislým.

Obr. 102. znázorňuje stav rovnováhy. Z podobnosti trojúhelníku sil (P, Q, R) a stran (r, r, c) plyne (podobně jako u kladky pevné)

$$\frac{P}{r} = \frac{Q}{c} = \frac{R}{r},$$

tedy $$R = P$$

a $$P = \frac{r}{c} Q.$$

Jest tedy P a tudíž i R minimum $= \frac{1}{2} Q$, je-li c maximum $= 2r$ pro případ, že provazce jdou od kladky rovnoběžně.

Srovnávajíce obr. 102. a obr. 101. pozorujeme úplnou analogii obou obrazců; tato jeví se též v rovnicích.

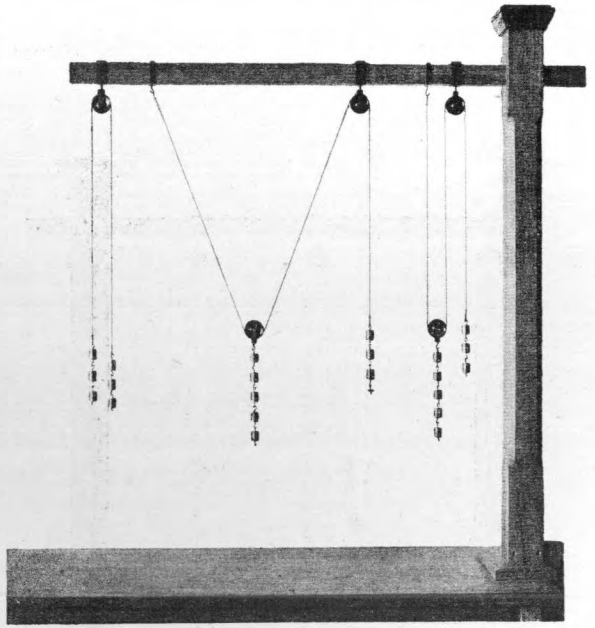
Pro kladku pevnou měli jsme

$$\frac{P}{r} = \frac{Q}{r} = \frac{R}{c};$$

pro kladku volnou pak

$$\frac{P}{r} = \frac{Q}{c} = \frac{R}{r}.$$

Čím jest tedy při kladce volné břemeno Q, tím jest u kladky pevné tlak R, který musí vydržeti její osa.



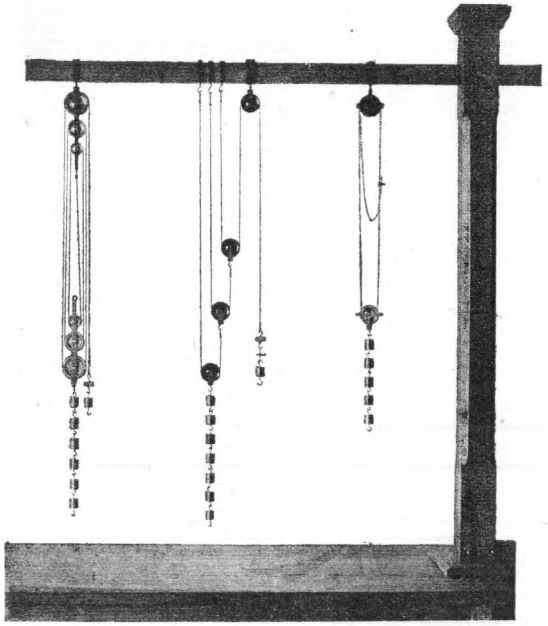
Obr. 103.

Kladka volná podává další vhodný příklad k objasnění toho, proč virtuálná pošinutí zpravidla nutno voliti velmi malá, ač někdy je lze voliti i libovolně veliká. Případ tento nastává, jsou-li provazce rovnoběžné (Stevinus). Pak-li provazce jsou různoběžné, zvedne se kladka na př. při positivním pošinutí působiště síly: provazce tvoří úhel větší a obepíná se tětiva menší; touže měrou musí pak k udržení rovnováhy býti vynaloženo síly větší. Poměry

tyto se názorně vyloží uspořádáním, jež obr. 103. dostatečně objasňuje; zejména lze ukázati, jak rovnováha, při provazcích rovnoběžných zjednaná, se poruší, když se — pošinutím závěsného háčku — provazce stanou různoběžnými; nutno pak k docílení rovnováhy sílu o váhu přívažku jistého zvětšiti, na důkaz, že při provazcích rovnoběžných jest úspora síly největší. Váha kladky volné, kteréž k pokusům těmto užíváme, volí se takovou, jako jest váha jedné stogrammové hmoty; tím platí pak kladka ta za jedno stogrammové závaží.

§ 151. **Kladkostroje.**

Vhodným spojováním kladek pevných a volných vznikají *kladkostroje.*



Obr. 104.

Obr. 104. znázorňuje kladkostroj tak zv. *obecný*, kladkostroj zvaný *Archimedův*, a *Westonův* kladkostroj *differenciální.*

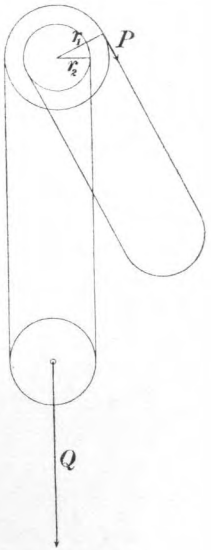
Je-li n počet kladek *volných*, jest

$$P = \frac{Q}{2n} \text{ při kladkostroji obecném,}$$

$$P = \frac{Q}{2^n} \text{ při kladkostroji Archimedově,}$$

a to pro případ nejjednodušší, kdy provazce jsou rovnoběžné.

Dokladné pokusy s kladkostroji dějí se způsobem, jakýž obr. 104. dostatečně znázorňuje. U kladkostroje obecného dlužno váhu kladek dolejších vyrovnati závažím zvláštním, jež v obrazci vystupuje světleji. U kladkostroje Archimedova platí první volná kladka za jedno závaží stogrammové, druhá volná kladka jest vyrovnána závažím dvacetipětigrammovým, třetí pak závažím padesátigrammovým, jež obě v obrazci rovněž světleji jsou vyznačena. Princip virtuálných pošinutí lze demonstrovati velmi dobře.



Obr. 105.

Kladkostroj differenciální (obr. 105.) skládá se ze dvou nestejných kladek pevných a na společné ose jako by v jediný celek spojených. Poloměr větší budiž r_1, menší r_2. K těmto přistupuje ještě kladka volná. Kolem kladek pevných ovinut je řetěz bezkonečný způsobem v obrazci naznačeným, kterýžto zasahuje na obvodě jejich v zuby tak, aby nemohl se smýkati.

Táhne-li se ve směru síly P a otočí-li se při tom obě kladky pevné spolu spojené o úhel α, *odvine* se na straně síly P řetězec s kladky větší v délce $r_1\alpha$; na straně břemena *navine* se v téže délce $r_1\alpha$ na kladku *větší*, ale *současně* se *odvine* s kladky *menší* o délku $r_2\alpha$ tedy celkově se navine v délce $r_1\alpha - r_2\alpha = (r_1 - r_2)\alpha$, při čemž však břemeno, jsouc na kladce volné zavěšeno, vystoupí jen o délku poloviční. Dle principu virtuálných pošinutí máme pak:

$$P : Q = \tfrac{1}{2}(r_1 - r_2)\,\alpha : r_1\alpha,$$

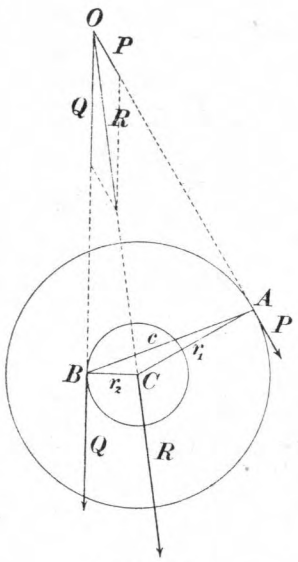
čili

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1 - r_2}{2r_1}.$$

Rozdílem obou poloměrů r_1 a r_2 stanoví se tudíž úspora síly P.

§ 152. Kolo na hřídeli.

Pevnou částí stroje jest zde (obr. 106.) osa válce (hřídele); pevností její ruší se výslednice R; břemeno Q působí řetězem neb provazem na obvodě válce o poloměru r_2, síla pak P rovněž řetězem neb provazem na obvodě kola o poloměru r_1.



Obr. 106.

Pro rovnováhu jest (jako na páce)

$$P \,.\, r_1 = Q \,.\, r_2,$$

čili

$$P = \frac{r_2}{r_1}\, Q.$$

Princip virtuálných pošinutí lze dovoditi jako na páce. Tětiva $AB = c$ udává délkou svou *velikost úhrnného tlaku* R, jakýž musí *osa hřídele* vydržeti; jest totiž:

$$\frac{P}{r_2} = \frac{Q}{r_1} = \frac{R}{c}.$$

Směr tohoto tlaku obdržíme, prodlouživše směry sil P a Q, až se protnou v O, a vedouce OC; na tento směr dlužno nanésti sílu R úměrnou tětivě c.

Patrně jest c maximum $= r_1 + r_2$, tudíž také R maximum $= Q + P$. Obráceně jest c minimum $= r_1 - r_2$, tudíž také R minimum $= Q - P$; v prvém případě jsou provazy stejnosměrné, v druhém protisměrné.

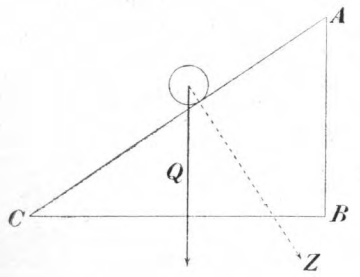
Při *differenciálním* kole na hřídeli užito jest téhož principu jako při differenciálním kladkostroji, že se totiž navinuje provaz na obvod válce o poloměru větším, ale odvinuje s obvodu souosého a s oním pevně spojeného válce o poloměru menším.

§ 153. Nakloněná rovina.

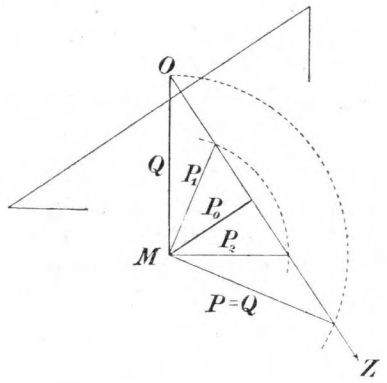
Břemenem Q bývá tu obyčejně váha nějaké hmoty, která se má jakousi silou P *držeti* na rovině, jež jest o úhel α od roviny vodorovné odchýlena. Výslednice R obou těchto sil P a Q má se **rušiti** ***pevností roviny samé***, což vyžaduje, aby směr této výsledné byl na rovinu kolmým (obr. 107.). Jest tedy dáno:

1. Břemeno Q i co do směru (zpravidla svislého) i co do velikosti,

2. směr OZ výslednice R.

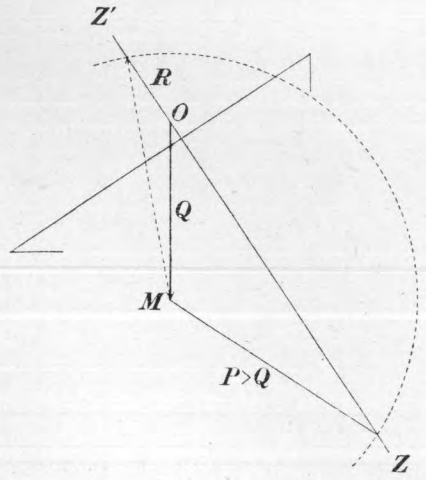


Obr. 107.

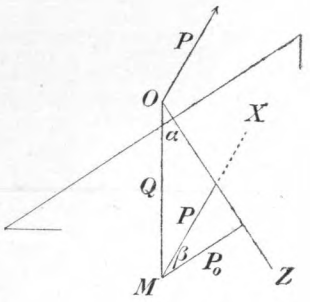


Obr. 108.

Jedná se o sílu P. Úloha není určitou; neboť síly P, Q a R musí tvořiti trojúhelník, z něhož však jest dána jen základna Q a



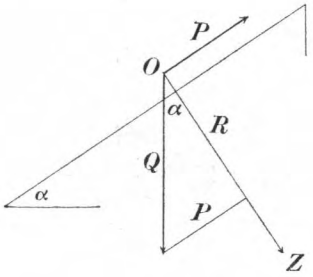
Obr. 109.



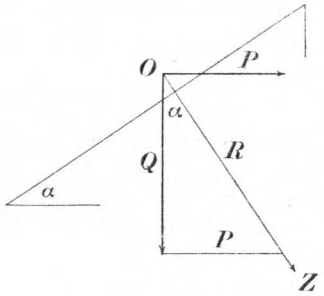
Obr. 110.

směr OZ druhé strany. Ale úloha stává se určitou, když volíme ještě buď *a*) velikost nebo *b*) směr síly P.

a) Volme velikost síly P. Pro úlohu rozhoduje patrně délka P_0 kolmice spuštěné z bodu M na směr OZ. Volíme-li $P < P_0$, (obr. 108.), nestačí síla P k udržení břemena. Teprve když P vzroste aspoň na $P = P_0$, což jest hodnota minimální, jest rovnováha možnou. Je-li $P > P_0$, připouští úloha řešení dvoje, silami P_1 a P_2, jež jsou velikostí svou stejné, ale směrem, v němž působí, rozdílné: jedna, P_1, míříc nahoru (od kolmice P_0), nadlehčuje břemeno a zmenšuje tudíž tlak R_1 na rovinu; druhá P_2, míříc dolů (od kolmice P_0), tlačí břemeno více k rovině a zvětšuje tudíž tlak R_2, kterýž rovina tato musí vydržeti. Při $P = Q$ stává se $R_1 = 0$ a $R_2 = 2\,Q\,cos\,\alpha$. Když se konečně volí $P > Q$ (obr. 109.), zbývá řešení jen silou P_2, neboť R_1 stává se negativní; řešení silou P_1 mělo by fysikální smysl, kdyby rovina reagovala nejen proti tlaku, nýbrž i proti tahu směrem od roviny.



Obr. 111.



Obr. 112.

Zavedeme-li úhel $\beta = (P_0, P)$, jsou všeobecně platnými vztahy

$$\frac{P}{sin\,\alpha} = \frac{Q}{cos\,\beta} = \frac{R}{cos\,(\alpha+\beta)}.$$

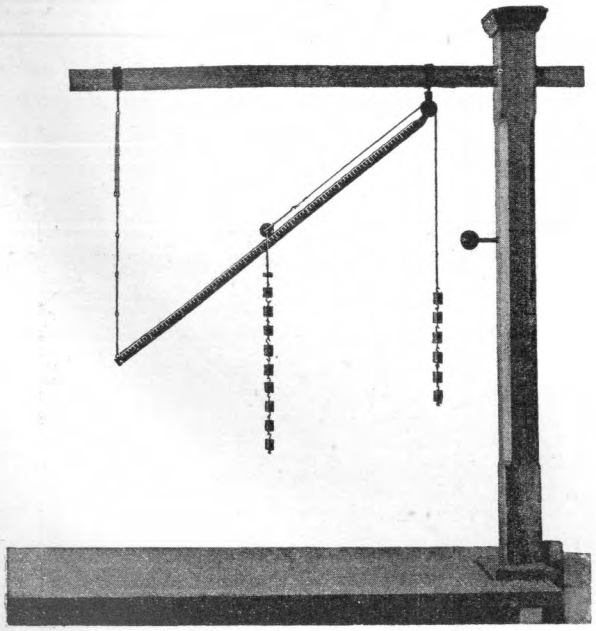
Pro P_1 jest β positivní, pro P_2 jest β negativní. Znamení úhlu β nemá vlivu na poměr $\frac{P}{Q} = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\beta}$,

ale ovšem na poměr $\frac{R}{Q} = \frac{cos\,(\alpha+\beta)}{cos\,\beta}$.

b) Volme směr OX síly P. Vedouce (obr. 110.) ve směru voleném přímku doplníme tím trojúhelník sil a stanovíme ihned jak P tak R. Také zde platí vztahy

$$\frac{P}{sin\,\alpha} = \frac{Q}{cos\,\beta} = \frac{R}{cos\,(\alpha+\beta)},$$

jenom že zde pokládáme úhel β za daný a dle něho počítáme síly P a R.



Obr. 113.

Z libovolných směrů OX vyniká především směr s délkou roviny rovnoběžný, pro který jest $\beta = 0$ (obr. 111.). Máme pak pro tento případ zvláštní

$$P = Q\,sin\,\alpha, \qquad R = Q\,cos\,\alpha.$$

Dále vyniká směr se základnou roviny rovnoběžný (tedy zpravidla vodorovný), pro který jest $\beta = -\alpha$ (obr. 112.). Pro tento případ zvláštní plyne

$$P = Q\,tg\,\alpha, \qquad R = Q\,sec\,\alpha.$$

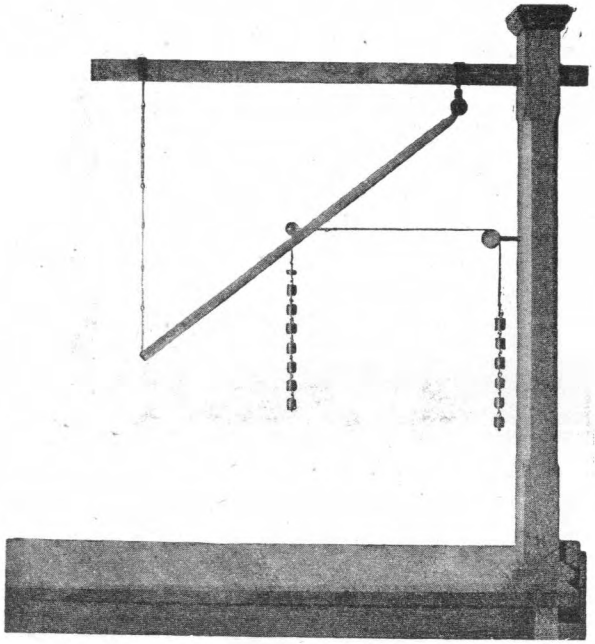
Zavedeme-li na místě goniometrických funkcí úhlu α raději rozměry nakloněné roviny, totiž délku $= AC$, výšku $= AB$, šířku $= CB$, platí úměrnost: v případě obr. 11. znázorněném

$$\frac{P}{\text{výška}} = \frac{Q}{\text{délka}} = \frac{R}{\text{šířka}},$$

v případě v obr. 112. pak

$$\frac{P}{\text{výška}} = \frac{Q}{\text{šířka}} = \frac{R}{\text{délka}}.$$

Výsledky theorie lze experimentálně doložiti a objasniti mnohými apparáty k tomu konci zvláště upravenými a více méně prakticky provedenými. Přístroj jednoduchý témuž účelu sloužící jest znázorněn v obrazcích 113. a 114. Šikmá rovina jest tu zastoupena



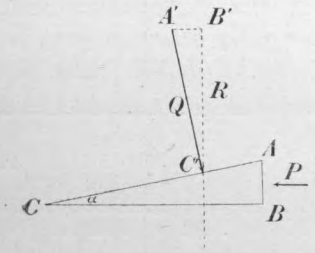
Obr. 114.

mosazným lineálem délky 10 decimetrů, otáčivým kolem osy, která jest zároveň osou pevné kladky. Odchylka α roviny čili výška roviny se řídí řetízkem, jenž v decimetrových vzdálenostech má kroužky větší a který se zavěšuje na háček umístěný v téže rovině horizontální jako jest osa lineálu. Na lineál klade se kladka se dvěma vidlicemi, z nichž lze jednu druhou prostrčiti. Síly, o jichž rovnováhu se jedná, jsou dány vahou závaží 100grammových háčky opatřených, jež se ve vhodně voleném počtu na sebe zavěšují; délka takové řady připomíná opět grafické znázornění síly délkou přímky. Kladka má váhu 50 grammů, tak že ve spojení se závažím ještě

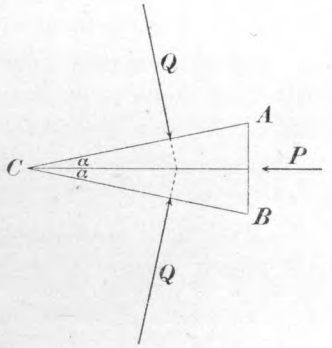
50 grammů zastupuje jedno závaží 100grammové. Lze vyložiti případy zvláštní dříve projednané, pro $\beta = 0$ a $\beta = -\alpha$, ale také případy obecnější; třeba jen ještě nastrčiti na lať kladku a přes tuto vésti provazec napřed a pak teprve přes kladku na ose otáčivé roviny. Pošinováním oné pomocné kladky lze pro působící sílu docíliti směru, který se směrem roviny svírá úhel β libovolný.

§ 154. Klín.

Klín *jednoduchý* jest trojboký přímý hranol, jehož hlavním řezem jest trojúhelník pravoúhlý ABC (obr. 115.). Plochou BC spočívá na pevné rovině, jejížto pevností se výsledná R má rušiti; musí tudíž k ní býti kolmou. Břemeno Q působí kolmo na plochu AC, síla P kolmo na plochu AB.



Obr. 115.



Obr. 116.

Je-li břemeno Q dáno, na př. $Q = A'C' \perp AC$, jest úloha určitou, poněvadž směr síly P, jakož i směr síly R jsou dány; vedeme-li $B'C' \perp BC$ a $A'B' \perp AB$, jest $B'A' = P$, $B'C' = R$, tudíž

$$\frac{P}{AB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{BC},$$

t. j. každá ze sil P, Q, R jest úměrna té straně klínu, na niž kolmo působí. — Je-li úhel klínu α, můžeme též psáti

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{1} = \frac{R}{\cos\alpha}.$$

Plocha AB zove se často čelem klínu.

Obyčejně užívá se klínu dvojitého, totiž trojbokého přímého hranolu, jehožto hlavní řez jest trojúhelník rovnoramenný ABC (obr. 116.). Břemeno Q působí s obou stran kolmo na plochy AC a BC; síla P působí kolmo na plochu čela AB.

Úloha stane se určitou, jakmile Q se udá, poněvadž jest směr síly P dán. V rovnováze jest

$$\frac{P}{AB}=\frac{Q}{BC}=\frac{Q}{AC},$$

t. j. síly jsou úměrny stranám, k nimž kolmo působí.

Je-li 2α úhel klínu dvojitého, možno též psáti:

$$\frac{P}{2\sin\alpha}=\frac{Q}{1}=\frac{Q}{1},$$

t. j.
$$P=2Q\,.\,\sin\alpha.$$

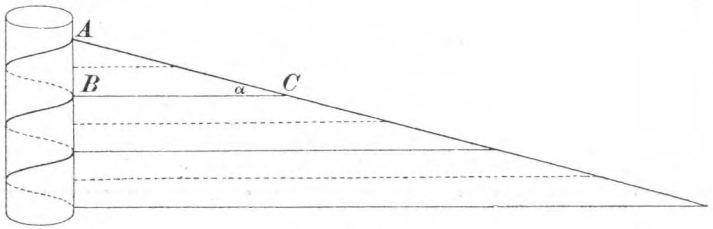
U klínu jednoduchého bylo

$$P=Q\,.\,\sin\alpha.$$

Síla P, majíc u klínu dvojitého v rovnováze držeti břemeno Q s obou stran klínu působící, musí býti dvakrát větší než jest u klínu jednoduchého.

§ 155. **Šroub.**

Myslíme-li si trojúhelník ABC (obr. 117.), značící stranou AC nakloněnou rovinu, navinutý na plášť kruhového válce, jehož osa

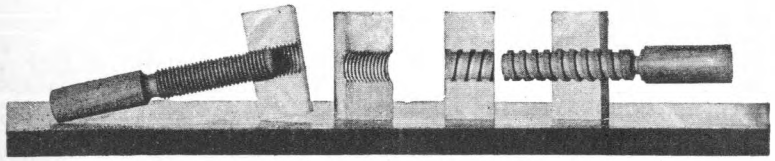


Obr. 117.

jest kolmá na stranu BC souhlasící se šířkou nakloněné roviny, tvoří strana AC na válci určitou křivku, kterou zoveme křivkou *šroubovou* čili *šroubovicí*. Učiníme-li stranu BC rovnou obvodu válce, padne bod B pod bod A na touž stranu válce; odlehlost AB zove se pak *výstupem šroubovice*, její část mezi A a B nazýváme *otočkou šroubovou*; úhel α udává *sklon šroubovice*.

Chtějíce od *šroubovice* přejíti k *šroubu hmotnému*, musíme podél šroubovice vytvořiti *závit šroubový*. Tento bývá buď *ostrý*, když jest jeho průřez trojúhelník, aneb *plochý*, je-li jeho průřez pravoúhelník (obr. 118.).

Ke každému šroubu náleží *matice šroubová*, která jest válcem dutým, do něhož vryty jsou otočky šroubové duté, úplně souhlasící se závity šroubu samého.



Obr. 118.

Břemeno Q působí buď na šroubu nebo na matici a to ve směru osy válce, na nějž šroub jest nanesen; síla pak P působí na obvodě tohoto válce. Uvážíme-li, že plocha šroubu souhlasí se šikmou rovinou, můžeme podmínky rovnováhy na šroubu převésti na podmínky rovnováhy na této šikmé rovině a to pro případ, kde síla působí rovnoběžně se šířkou. Jest pak:

$$\frac{P}{\text{výška}}=\frac{Q}{\text{šířka}}.$$

Výškou roviny jest výstup h šroubovice, šířkou pak obvod $2\pi r$ válce, na němž šroubovice nanesena. Jest tudíž

$$P=\frac{h}{2\pi r}\,Q.$$

Jinak ovšem jsou při šroubu poměry zvláštní, jiné než u nakloněné roviny, analogické spíše těm, jaké jsou při kole na hřídeli. Jest totiž při šroubu matice pevnou, tak že se šroub v ní otáčí kolem určité osy. (Eventuálně jest naopak šroub pevným, tak že matice na něm vystupujíc otáčí se kolem jeho osy.) Působí tudíž jak břemeno tak i síla *momentem rotačním*, podobně jako při kole na hřídeli. Proto se také zpravidla u šroubu působívá proti břemenu nikoli silou jedinou, nýbrž *dvojicí sil*. Aby se pak moment této dvojice zvýšil, prodlužuje se průměr válce, na němž šroubovice navinuta, na rameno značně větší. Často bývá tímto ramenem delší pevná tyč, kteráž sama jest prodloužením průměru válce po obou stranách jeho osy stejně dlouhým. Šroubujíce stáčíme na př. oběma

rukama za onu tyč šroub, jako u lisu otiskovacího a pod. U menších šroubů, jak jich ve fysice v přečetných případech užíváme (šrouby mikrometrické, upevňovací, svírací atd.), bývá na válci šroubu soustředně připevněna kolmá kruhová destička (hlavička šroubu) s krajem obyčejně vroubkovaným, jejížto průměr jest pak prodloužením průměru válce šroubového. Také zde šroubujíce působíme dvojicí sil, berouce onu destičku do ruky palcem a ukazováčkem a točíce oběma prsty zároveň. U velkých šroubů vstupuje na místě takové destičky pevné velké kolo, jako u hydraulických šroubových lisů atd. V poslední rovnici pro P dlužno pak připojiti faktor $\frac{r}{L}$, kdež jest L délka tyče od osy válce počítaná, nebo poloměr takového kola, a když se působí dvojicí sil, připojiti ještě faktor $\frac{1}{2}$. Tak lze velké břemeno Q udržeti v rovnováze silou P velmi nepatrnou anebo naopak malou silou P způsobiti tlak Q velmi velký. Rozsáhlé užívání šroubu ve fysice spočívá dále na té jeho zvláštnosti, že, je-li jeho výstup malým, značným otočením šroubu vzniká pošinutí jen velmi malé; lze tudíž šroubem pošinování takové ovládati a říditi velice jemně a přesně, při čemž značné tření v závitech zaručuje samo sebou stálost každé polohy. V tomto smyslu užíváme šroubů upevňovacích, svíracích, stavěcích, mikrometrických, jak jsme je seznali v oddílu o strojích měřících.

§ 156. **Kombinace jednoduchých strojů.**

Stroje, v předešlých odstavcích popisované, jsou určité typy, jsou jako by základní elementy, z nichž lze sestaviti stroje úpravy složitější. Zákon o rovnováze pro celek lze však vždy jednoduše odvoditi ze zákonů o rovnováze pro jednotlivé části. U těchto se vždy břemeno Q udržuje v rovnováze silou, kterou lze vyjádřiti součinem kQ, kdež jest k převodním koefficientem zpravidla menším než jednička. Je-li tudíž dána soustava strojů jednoduchých, jest u stroje I. s převodním koefficientem k_1 břemeno Q udržováno v rovnováze silou k_1Q; tato jest břemenem pro stroj II. s převodním koefficientem k_2; zde tedy břemeno k_1Q se udržuje v rovnováze silou k_2k_1Q; tato jest opět břemenem pro stroj III. s převodním koefficientem k_3; udržuje se tedy v rovnováze silou $k_3k_2k_1Q$ atd. U posledního n-tého stroje s převodním koefficientem k_n působí tudíž síla

$$P = k_1 \,.\, k_2 \,.\, k_3 \,.\, .\, .\, k_n \,.\, Q.$$

Příkladem takového kombinování jednoduchých strojových elementů ve stroj komplikovanější jest již kladkostroj Archimedův; zde jest

$$k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = \frac{1}{2},$$

tudíž
$$P = k^n Q,$$

čili
$$P = \frac{Q}{2^n}.$$

Jiným příkladem jest šroub ve spojení s pákou jednoramennou, délky L.

Zde jest

pro šroub
$$k_1 = \frac{h}{2\pi r},$$

pro páku
$$k_2 = \frac{r}{L},$$

tudíž
$$P = \frac{h}{2\pi L} \,.\, Q,$$

tak že se délkou páky L poloměr válce r, na němž šroub navinut, prodlužuje.

Podobné, velmi často užívané kombinace, jsou ozubená kola s hřídelem, ozubené kolo se šroubem a pákou atd. Principem virtuálných pošinutí lze často rychle se orientovati o poměru síly P ke břemenu Q.

§ 157. **Úvahy závěrečné.**

Ve všech jednotlivých případech, o nichž jednali jsme v odstavcích předcházejících, řešili jsme *problém statický* hledajíce sílu P, jež by při daném uspořádání stroje udržela dané břemeno Q v rovnováze. Vlastní příčina rovnováhy dána jest *rovností práce*, která by při myšleném pohybu na jedné straně silou P byla produkována a na druhé straně břemenem Q konsumována. Součet práce jedné i druhé jest tudíž roven nulle: není tedy, z čeho by pohyb povstal. Jinak se však má věc, když sílu P o nějakou část p zvýšíme. Práce silou $(P + p)$ produkovaná jest pak větší než práce silou Q konsumovaná, jest zde tedy *přebytek práce*, a tímto vzniká pohyb všech hmotných částí na stroji se nalézajících.

Dle toho zdálo by se, že postačí sebe menší přírůstek síly p, aby pohyb nastal. Pokud hledíme ke strojům, jak o nich v theorii

uvažujeme, jest tomu vskutku tak; avšak u strojů skutečných, u strojů, jak jich v životě praktickém užíváme, má se věc jinak.

Při *vznikání* pohybu vznikají totiž současně síly nové, které v klidu nepůsobily, které teprve pohybem se *budí*, síly, které pohybu *odporují*. Jsou to rozmanité překážky pohybu. Zejména dlužno tu uvésti *tření, tuhost provazů a lan* a pod.

Má-li tudíž u strojů skutečných pohyb vzniknouti, musí přírůstek p síly P vzrůsti především na takový stupeň p_0, aby překážky pohybu byly překonány, teprve přebytkem síly nad p_0 vzniká pohyb.

Jinak řečeno: Neproměňuje se celá práce síly p v energii pohybu hmot: jistá *část* této práce spotřebuje se ku překonávání oněch rozmanitých překážek pohybu a teprve, co potud zbude, obrátí se na způsobení pohybu vlastního.

Otázka pohybu u strojů je velmi důležitou; neboť jedná se mnohem častěji o to, strojem vykonati práci, což jest možno jenom v pohybu, nežli držeti dané břemeno v rovnováze.

Budiž však zřejmě vytčeno, že překážky pohybu nemají žádného účinku na poměry *statické*, jinými slovy: výsledky, jichž jsme pro *rovnováhu* nabyli v předcházejících odstavcích theorie strojů, mají platnost také o strojích, jak ve skutečnosti bývají, byť by u nich při eventuálním pohybu bylo tření atd. sebe větší. Neboť tření a pod. vzniká teprve při pohybu; jednáme-li však o klidu, tedy pohyb vylučujeme, čímž přestávají také překážky pohybu. Vliv jejich jeví se však tím, že rovnováha ještě *trvá*, když se síla P, theoreticky stanovená, buď ještě až do $P + p_0$ zvětší anebo až do $P - p_0$ zmenší. Má tudíž rovnováha platnost pro jakoukoli sílu P, jejíž hodnota jest v intervallu $P - p_0$ až do $P + p_0$.

Dle principu o zachování energie nepřichází ovšem nikterak na zmar ta práce, která se konsumuje překonáváním překážek pohybu. Je-li ztracena pro pohyb, t. j. neproměňuje-li se v energii pohybu, tedy jest tomu tak rozuměti, že neproměňuje se v energii *pohybu viditelného* čili v energii *mechanickou* — za to však z velké části mění se v energii *pohybu neviditelného*, v energii *tepelnou*. Poněvadž však právě tato přeměna není úmyslem, nutno, aby tření bylo vhodnými prostředky sníženo na *míru nejmenší*.

X.

Váhy a vážení.

§ 158. Úvahy základní.

Rovnováha na jednotlivých strojích vede k podmínce, kterouž lze vždy vyjádřiti rovnicí tvaru

$$P : Q = b : a.$$

V rovnici této jest *poměr dvou sil* určen *poměrem dvou délek*. Lze-li délky tyto měřiti, jest dána možnost, rovnováhou samou zkoumati, po případě číselně stanoviti *poměr dvou sil* původu jakéhokoliv, a je-li jedna z obou známa, druhou určiti.

Má-li se určování toto díti se žádoucí přesností, musí stroj býti povahy takové, aby i nejmenší pozměnění poměru silového, pro který rovnováha má platnost, ihned způsobem očividným se ukázalo, aby tedy ihned nastal pohyb, ale nikoli pohyb bez ustání, stále se urychlující, jako by tomu bylo na př. u kladek neb kladkostrojů, nýbrž jen pohyb do *nové rovnovážné polohy*. To pak vyžaduje především, aby překážky tohoto pohybu, jak o nich u strojů bylo jednáno, byly sníženy na míru nejskrovnější a pak, aby stroj změnou rovnovážné polohy novým poměrům vyhověl. Podmínkám těmto může dokonale vyhověti *páka*.

V oddílu, kterýž začínáme, jedná se o síly určitého původu, totiž o *váhu* jistých hmot. Značí-li M jakoukoli z hmot těch, g intensitu gravitačního pole zemského, jest Mg váha této hmoty, působící směrem svislým. Srovnávání sil Mg na místě, kde gravitační intensita jest jakákoli, ale konstantní, znamená pak srovnávání hmot; a právě toto srovnávání jest účelem *vážení*.

Budiž přímka A_2OA_1 (obr. 119.) pákou mathematickou, otáčivou kolem bodu O, na kteréž v bodech A_1 a A_2 působí ve vertikální rovině nákresné směrem svislým váhy M_1g a M_2g hmot M_1

a M_2. Je-li páka v poloze vodorovné, jsou $OA_1 = L_1$, $OA_2 = L_2$ její ramena; i jest rovnováha podmíněna rovností momentů

$$M_1 g \,.\, L_1 = M_2 g \,.\, L_2.$$

Je-li této podmínce vyhověno, *zůstane* páka v rovnováze také *v každé jiné poloze* než vodorovné; když se na př. ve svislé rovině nákresné otočí o úhel φ, platí též rovnost momentů

$$M_1 g \,.\, L_1 \cos\varphi = M_2 g \,.\, L_2 \cos\varphi,$$

poněvadž se ramena L na obou stranách zkrátí touže měrou. Kdyby se pak ke hmotě na př. M_1 přidala malá hmota m_1, přibyl by na pravo moment

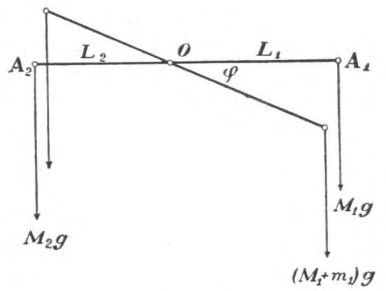
$$m_1 g \,.\, L_1 \cos\varphi,$$

proti němuž na levo není žádného momentu opačného; vznikl by tedy účinkem onoho nového momentu pohyb do nové rovnovážné polohy, jež by konečně nastala při

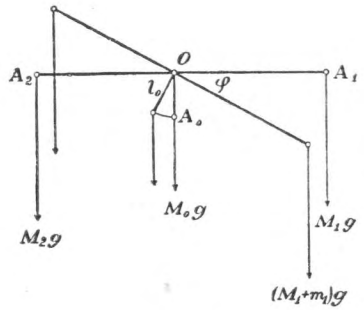
$$m_1 g \,.\, L_1 \cos\varphi = 0,$$

t. j. při $\varphi = 90^0$

páka postavila by se vertikálně.



Obr. 119.



Obr. 120.

Jako ona páka mathematická chovala by se také páka fysická, kteráž by těžiště své měla v ose O, t. j. kteráž by byla v poloze indifferentní.

Zcela jinak měla by se však věc u páky fysické, jež by *sama o sobě* měla polohu *stabilní*.

Budiž dána (obr. 120.) páka fysická, A_0 budiž její těžiště svisle pod osou O v odlehlosti $OA_0 = l_0$, působiště A_1 a A_2 buďtež s bodem O umístěna na téže přímce a to tak, že v rovnovážné poloze páky, kdy přímka OA_0 se stává vertikální, ona přímka A_2OA_1 jest horizontální. V těžišti můžeme si hmotu M_0 celé páky fysické myšliti soustředěnou; zde působí váha její $M_0 g$ vertikálně. Ve vodorovné poloze páky ruší se váha tato pevností osy.

Budiž opět splněna podmínka

$$M_1 g \,.\, L_1 = M_2 g \,.\, L_2$$

pro polohu páky vodorovnou. Kdyby se páka otočila o úhel φ, platila by opět rovnost

$$M_2 g \,.\, L_1 \cos\varphi = M_2 g \,.\, L_2 \cos\varphi,$$

ale zároveň by přibyl moment

$$M_0 g \,.\, l_0 \sin\varphi,$$

proti němuž není nikde momentu opačného. Vznikl by tudíž zpětný pohyb do polohy rovnovážné, jež by nastala při

$$M_0 g \,.\, l_0 \sin\varphi = 0,$$

t. j. při $\varphi = 0.$

Působením *vlastní váhy* vrací se tudíž páka *zatížená* do své *původní* polohy vodorovné, tak jako když jest nezatížena.

Kdyby se pak opět ke hmotě na př. M_1 přidala malá hmota m_1, přibyl by na pravo moment

$$m_1 g \,.\, L_1 \cos\varphi,$$

proti němu by však na levo vahou páky samé působil moment opačný

$$M_0 g \,.\, l_0 \sin\varphi.$$

Spolupůsobením obou momentů nastal by tudíž pohyb do *nové polohy rovnovážné*, jež jest určena podmínkou

$$M_0 g \,.\, l_0 \sin\varphi = m_1 g \,.\, L_1 \cos\varphi,$$

$$tg\,\varphi = \frac{m_1}{M_0}\frac{L_1}{l_0}.$$

V rovnicích odvozených jest obsažen princip vážení. Rovnováhou na páce lze stanoviti *poměr vah* a tím i *poměr hmot* těles daných; a je-li páka rovnoramennou, t. j. je-li $L_1 = L_2$, lze ihned rozhodnouti z rovnováhy samé, jsou-li dvě hmoty M_1 a M_2 *stejny* čili nic. Určování takovéto zoveme *vážením*; ona páka zove se *vahadlem*, a celý přístroj, pro vážení zvláště vhodně sestrojený, *vahami* *). Ze

*) Slovo »váhy« jako stroj jest v češtině »plurale tantum«, oproti pojmu »váha« jakožto síla. To dlužno připomenouti, poněvadž za dob našich dle německého »die Wage« se mnohdy píše a mluví o »váze«, že se na př. váží na »městské váze«, což jest nečeské. Nesprávnost tato netkla se deminutiva »vážky«, kteréhož slova se jinak než jako »plurale tantum« neužívá.

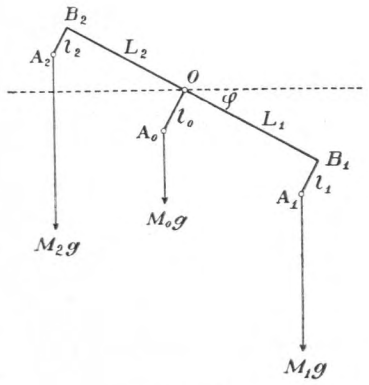
hmot srovnávaných jest zpravidla jedna, na př. M_1 známou a jest dána řadou hmot dle jednotky gramm upravených, t. j. závažím. Vážením pak stanovíme, že těleso M_2 váží tolik jako jistý počet M_1 jednotek grammových; jest tudíž číslo nalezené nikoli vahou, nýbrž hmotou tělesa M_2.

§ 159. **Citlivost vážení.**

Má-li toto srovnávání hmot dle jich váhy se díti se žádoucí citlivostí, musí sebe menší porušení správného poměru působících sil vzniklé na př. přívažkem m_1 se jeviti patrně značnou odchylkou φ vahadla z polohy vodorovné. O velikosti této odchylky poučuje rovnice

$$tg\,\varphi = \frac{m_1 L_1}{M_0 l_0}.$$

Jest tudíž citlivost vah, měřená tangentou úhlu φ, tolikrát větší, kolikrát jest větší přívažek m_1 a rameno L_1 a kolikrát jest menší hmota M_0 vahadla a odlehlost l_0 jeho těžiště od osy. Nezávislá jest však citlivost na zatížení vahadla vahou srovnávaných hmot M_1 a M_2.



Obr. 121.

Výsledky tyto o citlivosti vážení můžeme za *orientační* pokládati; vskutku orientují *v hlavní věci*, oč zde jde. Avšak *definitivními* nejsou, ježto se zakládají na podmínce, kteráž ve skutečnosti nebývá, ba ani nemůže býti splněna.

Předpokládali jsme (obr. 120.), že body A_1 a A_2 leží s bodem O na téže přímce, kteráž jest vodorovnou, když jest vahadlo samo v poloze rovnovážné, t. j. když jeho těžiště A_0 jest svisle pod bodem O. Dlužno ovšem vytknouti, že praxis se snaží co možná tento případ realisovati; avšak jest třeba též vyšetřiti, jak by se poměry změnily, kdyby body A_1 a A_2 padly buď nad nebo pod přímku vedenou bodem O kolmo na OA_0. Neboť jednak může se státi, že by skutečné provedení vahadla zůstalo za onou snahou, jednak i kdyby skutečně provedení bylo bezvadné, může se státi, že by vahadlo, následkem své pružnosti, zatížením samým se poněkud prohnulo — což ovšem by smělo býti jen dočasné, v mezích pružnosti, — čímž by body A_1 a A_2 se snížily. Nutno tudíž vzhledem k těmto důvodům za vahadlo schematické pokládati vahadlo $A_2B_2OB_1A_1$ (obr. 121.).

Zaveďme obdobné označení:

$$OB_2 = L_2 \qquad OB_1 = L_1$$
$$B_2A_2 = l_2 \qquad B_1A_1 = l_1$$
$$OA_0 = l_0.$$

V poloze rovnovážné budiž, jako dříve,

$$M_1 g \,.\, L_1 = M_2 g \,.\, L_2.$$

Připojme opět na pravo přívažek m_1. Vahadlo se skloní o úhel φ účinkem momentu tohoto přívažku. Sestavíme-li veškeré momenty v jednom i druhém smyslu působící, obdržíme pro rovnováhu rovnici následující:

$$(M_1+m_1)\,g\,(L_1\cos\varphi - l_1\sin\varphi) = M_2 g\,(L_2\cos\varphi + l_2\sin\varphi) + M_0\,g\,l_0\sin\varphi$$

čili vzhledem k rovnici předešlé

$$m_1 g\,L_1\cos\varphi - (M_1+m_1)\,g\,l_1\sin\varphi = M_2 g\,l_2\sin\varphi + M_0 g\,l_0\sin\varphi.$$

V rovnici této můžeme malý additivní přívažek m_1 proti velké hmotě M_1 opomenouti. Upravíce pak obdržíme

$$tg\,\varphi = \frac{m_1 L_1}{M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2}.$$

Urychlení g odpadne; na místě momentů silových nastupují momenty hmotné.

Definitivní rovnici tuto pro citlivost lze snadno pamatovati a vyložiti. Odchýlená poloha, úhlem φ stanovená, jest jakousi střední mezi polohou vahadla horizontální a vertikální. V poloze horizontální působí jen přívažek m_1 momentem m_1L_1. V poloze vertikální působí ve smyslu opačném

hmoty	M_0,	M_1,	M_2,
na ramenu	l_0,	l_1,	l_2,
momenty	M_0l_0,	M_1l_1,	M_2l_2.

V šikmé poloze vahadla se umenšují momenty

$$m_1L_1 \text{ na } m_1L_1\cos\varphi,$$
$$M_0l_0 + M_1l_1 + M_2l_2 \text{ na } (M_0l_0 + M_1l_1 + M_2l_2)\sin\varphi,$$

až se vyrovnají; odtud pak rovnice pro $tg\,\varphi$.

Přehledně obdržíme, zavedouce symbol summační,

$$tg\,\varphi = \frac{m_1 L_1}{\Sigma\, Ml}$$

a ovšem analogicky

$$tg\,\varphi = \frac{m_2 L_2}{\Sigma Ml},$$

kdyby se přídavek m_2 dal na stranu levou.

Odvodili jsme rovnici pro citlivost vah vycházejíce od vahadla jakožto páky nerovnoramenné, poněvadž všeobecnější případ tento není nikterak složitějším než obvyklý případ vahadla jakožto páky rovnoramenné. Předpokládáme-li, že jest $L_1 = L_2$, tudíž pak také $M_1 = M_2$, $l_1 = l_1$, obdržíme, vynechávajíce indexy, jichž pak k rozeznávání pravé a levé strany vahadla není potřebí, na místě všeobecné rovnice tuto zvláštní:

$$tg\,\varphi = \frac{mL}{M_0 l_0 + 2Ml},$$

ve kteréž však souměrnost výrazu ve jmenovateli jest zastřena.

§ 160. **Doba kyvu vah.**

Jak později seznáme, děje se vážení k přesným účelům vědeckým methodou zvláštní, totiž pozorováním kyvů vah. Jest tudíž též důležito přihlédnouti, s čím doba kyvu vah souvisí, tím spíše, poněvadž veličina tato jest v těsném spojení s citlivostí.

Váhy jsou kyvadlo fysické. Doba t kyvu takového kyvadla, jak později bude dokázáno, jest stanovena vzorcem

$$t = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}},$$

kdež jest λ redukovaná délka kyvadla. Tato jest pak určena poměrem, v jakém jsou momenty hmotné stupně druhého k momentům hmotným stupně prvého.

Moment hmotný druhého stupně jest moment setrvačnosti; závisí jednak na vahadle samém, jednak na jeho zatížení.

Je-li L_0 poloměr setrvačnosti vahadla samého, jest jeho moment setrvačnosti dán výrazem

$$M_0 L_0^2.$$

K tomuto přistupuje moment setrvačnosti zatěžujících hmot M_1 a M_2. Vzhledem k tomu, že závěs hmot zatěžujících jest volně pohyblivý kolem závěsných bodů (resp. přímek), můžeme si ony hmoty mysliti jako by soustředěny v bodech A_1 a A_2 ve vzdálenostech $\sqrt{L_1^2 + l_1^2}$ a $\sqrt{L_2^2 + l_2^2}$ od osy O, místo nichž lze vždy psáti L_1 a L_2, poněvadž délky l_1 a l_2 jsou proti oněm zcela nepatrné.

Momenty setrvačnosti hmot zatěžujících jsou tedy

$$M_1 L_1^2 \text{ a } M_2 L_2^2.$$

Úhrnný moment hmotný druhého stupně jest tudíž

$$M_0 L_0^2 + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2.$$

Moment stupně prvého jest týž, který způsobuje stabilitu hmoty kývající, totiž

$$M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2.$$

Z toho plyne délka redukovaná

$$\lambda = \frac{M_0 L_0^2 + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2}{M_0 l_0 + M_1 l_1 + M_2 l_2}$$

čili přehledněji

$$\lambda = \frac{\Sigma ML^2}{\Sigma Ml}$$

všeobecně pro kyvadlo jakožto páku nerovnoramennou.

Ve zvláštním případu, je-li $L_1 = L_2$, $M_1 = M_2$, $l_1 = l_2$, obdržíme, vynechávajíce indexy, jichž pak k rozeznávání pravé a levé strany vahadla není potřebí,

$$\lambda = \frac{M_0 L_0 + 2ML^2}{M_0 l_0 + 2Ml}.$$

§ 161. **Rozbor rovnice o citlivosti vah a době kyvu.**

Přestaňme zde na případu obyčejnějším, kdy vahadlo jest pákou rovnoramennou. Pak tedy je v platnosti rovnice

$$tg\,\varphi = \frac{mL}{M_0 l_0 + 2Ml}$$

$$\lambda = \frac{M_0 L_0^2 + 2ML^2}{M_0 l_0 + 2ML}.$$

Rozeznávejme dva hlavní případy:

1. l_0 a l mají znamení souhlasná,
2. l_0 a l mají znamení opačná.

Případ 1. jest jednoduchý. Fysikální smysl má zde jen positivní znamení. Citlivosti $tg\,\varphi$ ubývá s rostoucím zatížením. Naproti tomu délky redukované λ může buď též ubývati se zatížením nebo přibývati, nebo může zůstávati konstantní. To vynikne lépe z rovnice poslední, když ji píšeme ve tvaru tomto:

$$\lambda = \frac{M_0 + 2M\dfrac{L^2}{L_0^2}}{M_0 + 2M\dfrac{l}{l_0}} \cdot \frac{L_0^2}{l_0}.$$

Je-li tedy

$$\frac{l}{l_0} = \frac{L^2}{L_0^2},$$

vychází nezávisle na zatížení

$$\lambda = \frac{L_0^2}{l_0}.$$

Dle toho pak, je-li

$$\frac{l}{l_0} < \frac{L^2}{L_0^2} \quad \text{anebo} \quad \frac{l}{l_0} > \frac{L^2}{L_0^2},$$

stoupá nebo klesá λ se zatížením; zároveň jest

$$\lambda > \frac{L_0^2}{l_0} \quad \text{anebo} \quad \lambda < \frac{L_0^2}{l_0}.$$

Případ 2. jest charakterisován tím, že zde může jak citlivost $tg\,\varphi$ tak redukovaná délka λ býti $= \infty$, totiž tehda, kdy

$$\pm M_0 l_0 \mp 2Ml = 0$$

čili

$$2M = M_0 \frac{l_0}{l}.$$

Tím jest stanoveno určité *mezní zatížení vah.*

Je-li l_0 positivní a l negativní, stoupá citlivost i doba kyvu se zatížením až do mezního zatížení, kdy pak vah nelze dále potřebovati. Je-li l_0 negativní a l positivní, nelze s počátku vah potřebovati než až zatížení dostoupí oné mezní hodnoty, od které pak při dále stoupajícím zatížení citlivosti i doby kyvu se zatížením od hodnoty nekonečné ubývá.

Mezní zatížení má dle toho dvojí význam. Značí zatížení, buď *do kterého* (končíc) anebo *od kterého* (počínajíc) lze vah užívati.

Při tomto rozboru předpokládali jsme, že odlehlosti l_0 a l zůstávají při stoupajícím zatížení M vah konstantními. Při l_0 jest podmínce této vyhověno měrou dostatečnou — je-li nějaká změna, bývá v případech, jak ve skutečnosti jsou, velice nepatrná. Jinak je tomu však při l. Pružností může se vahadlo poněkud při rostoucím zatížení dočasně prohnouti. Tím se může značně modifikovati případ 2., je-li l s počátku negativní. Stoupá-li zatížení, začíná se toto negativní l znenáhla (absolutně) umenšovati, stává se $= 0$ a pak nabývá hodnoty positivní. Tím citlivost s počátku vzrůstá, ale vždy méně a méně, pak stává se téměř konstantní

$$tg\,\varphi = \frac{mL}{M_0 l_0}$$

a pak dále zase klesá. Případ tento, kterýž pro praxis vážení není nevýhodný, poněvadž citlivost pro jisté střední zatížení jest konstantní, vskutku se vyskytuje.

Z krátkého tohoto rozboru jest patrno, že otázka citlivosti vah a s ní souvisící otázka doby kyvu nejsou zcela tak jednoduché, jak v úvahách orientačních bylo řečeno. Zejména není správné, že by váhy stávaly se nepotřebnými, kdyby vahadlo samo mělo polohu labilní; účinkem positivního l a přiměřeného stálého zatížení, jakéž jest dáno miskami vah, bylo by lze také takových vah dobře potřebovati.

Snahou konstruktérů jest vždycky sestrojiti váhy, jež by v mezích co možno širokých měly citlivost konstantní; dlužno přiznati, že se tomuto ideálu přiblížili dosti značně.

Mendělějev dociluje konstantní citlivosti jednoduše konstantním zatížením. Na jednu (levou) misku klade hmotu (na př. 1 *kg*) odpovídající maximálnímu zatížení vah, na druhou pak těleso, jehožto váhu doplňuje až na toto maximální zatížení (tedy na př. též na 1 *kg*). Ovšem že se pak pracuje při době kyvu vah mnohdy zbytečně veliké.

K úplnému porozumění výkladů těchto jest nezbytno, míti *číselné představy* o tom, *jakého řádu* jsou veličiny zde rozhodující, zejména odlehlosti l_0 a l. Proto jest ke konci celého oddílu tohoto uveden příklad na základech konkretních propočítaný, který tuto otázku objasňuje. K orientaci budiž zde *povšechně* poznamenáno, že u jemných vah analytických odlehlost l_0 těžiště jde asi do desetin, odlehlosti l pak asi do setin millimetru. Že pak mizí čtverec l^2 proti čtverci L^2 celé na decimetry čítající délky L ramena vahadlového, jest ihned patrno, jakož i ne méně, že prohnutí vahadla v mezích pružnosti jest číselně téhož řádu, jako odlehlosti l samé.

§ 162. Zařízení vahadla.

Z theoretických úvah dosavadních lze dobře posouditi, jak třeba vypracovati vahadlo jakožto nejdůležitější část vah, aby bylo vyhověno všem požadavkům přesného vážení.

U vah sestrojených k účelům vědeckým jest vahadlo pákou *rovnoramennou*. Aby otáčejíc se zůstávalo v téže rovině (vertikální), otáčí se kolem *osy*, dané hranou trojbokého hranolu ve vahadle blízko u těžiště A_0 upevněného, tak že těžiště zůstává pod osou v malé vzdálenosti, kterou lze dodatečně ještě poněkud měniti.

Vahadlo má podélnou rovinu souměrnosti; střední hranol jest do vahadla tak zasazen, aby jeho hrana, tvořící osu, byla k této rovině kolmo. Tato rovina jest totožná s rovinou nákresnou při dřívějších úvahách theoretických. V ní leží těžiště A_0 vahadla a osa se do ní promítá bodem O. Působiště sil nejsou body, nýbrž rovněž hrany trojbokých hranolů zasa-

zených do vahadla tak, aby jich hrany k oné rovině souměrnosti byly kolmo, tudíž s hranou středního hranolu rovnoběžné. Šroubky lze jich polohu dodatečně jemně korrigovati. Je-li vahadlo ve své poloze rovnovážné, mají hrany postranních hranolů býti v rovině vodorovné, v níž leží též osa vahadla; není však závadou, jde-li rovina tato o malou délku l pod osu neb nad osu, raději nad osu, jak patrno z úvah dřívějších, zvláště u vahadla jemně pracovaného, kteréž se větším zatížením spíše dočasně prohýbá.

Jinak žádá se, aby vahadlo bylo dlouhé a lehké. Obě podmínky jsou patrně v odporu: vahadlo delší jest povšechně těžší. Přijde tudíž na to, má-li se větší důraz položiti na délku neb na lehkost vahadla. Vahadlo dlouhé kývá velmi volně; účinek členu $2ML^2$ na dobu kyvu převládá. Poněvadž se pak při vážení tyto kyvy pozorují, jest jasno, že velmi volné kývání jest postupu práce na újmu. Proto jest rozumnější, klásti důraz na lehkost vahadla, pracovati je tudíž velmi jemně a užiti materiálu lehkého, tedy na př. aluminia, když se z důvodů jiných neužije mosazi. Avšak tato jemnost v mechanickém provedení nesmí jíti tak daleko, že by se vahadlo jsouc zatíženo trvale prohnulo. Proto musí *především* býti rozhodnuto o tom, až do jakého *největšího zatížení* se má vah užívati. Jinak se pracuje vahadlo, má-li vydržeti (na obou stranách) ještě zatížení 5 *kg* neb 1 *kg*, a opět jinak pro 250 *g*, 100 *g*, 50 *g* neb jenom 20 *g*; to jsou údaje v praxi obvyklé.

Pravili jsme, že lze vzdálenost $OA_0 = l_0$ poněkud měniti. Za tím účelem bývá na vahadle upevněn šroub, na němž se matice jakožto hmota posuvná nahoru neb dolů dá pohybovati, čímž se poloha těžiště A_0 mění. Jiná menší na šroubu posuvná matička slouží ke korrekci rovnovážné polohy vahadla. Tato rovnovážná poloha pozoruje se pomocí ukazovatele na vahadle upevněného zpravidla směrem dolů obráceného na zvláštní stupnici. S vahadlem bývá konečně na přední straně spojen lineál, rozdělený na 10 neb též 20 dílců, nejlépe výřezy označených, v té délce, kteráž odpovídá vzdálenosti $2L$ hran postranních hranolů. Na tomto lineálu pošinuje se tak zvaný jezdec, malé závažíčko 10- neb 5milligrammové. Zařízení takové jest velmi výhodné, poněvadž pak netřeba velmi malých a tím právě nepohodlných závažíček milligrammových užívati; na místě toho pošinuje se jezdec při uzavřených vahách do vzdálenosti $\frac{1}{10}L$, $\frac{2}{10}L$ atd. od osy C. Upevnění lineálu na přední části vahadla ruší ovšem jeho souměrnost; proto shledáváme u mnohých vah, že lineál jest upevněn nad vahadlem v jeho prvé rovině symmetrie, anebo že vahadlo samo v hořejší části je pracováno rovně a děleno, aby se ho přímo k pošinování jezdce mohlo užiti. Dlužno však vytknouti, že vzhledem k methodě vážení, kteráž pomocí kyvů stanoví rovnovážné polohy, jak o tom níže obšírně jednáme, nelze zásadně jiné upevnění lineálu za správné uznati než to, kde lineál jest v rovině hran všech tří hranolů.

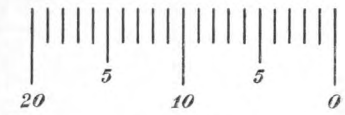
§ 163. Úprava vah.

Osa vahadla spočívá na lůžku, jež jest u jemných vah rovinné, u hrubších (bez arretace) úžlabovité. Lůžko jest upevněno na hlavním sloupu vah. Libellou vhodně umístěnou aneb olovnicí staví se sloup tak, aby osa spočinouc na lůžku byla vodorovnou. Na hranách hranolů postranních spočívají závěsy s lůžky, jež jsou též u jemných vah rovinné, u hrubších úžlabovité. Na závěsích visí misky vah. Závěsy a misky tvoří stálé zatížení vahadla; při vážení netřeba tohoto zatížení si všímati; jde pak o to, aby *přírůstek* momentu na př. na levé straně, způsobený hmotou, kterouž vážíme, se rovnal *přírůstku* momentu na pravé straně způsobenému závažím. Na dobu kyvu a na citlivost má však zatížení vahadla závěsy a miskou určitý vliv, kterýž při upotřebení příslušných formulí nutno bráti do počtu.

Důležitou část vah tvoří mechanismus, kterým lze váhy zabaviti (arretovati). Účel jest dvojí. Jednak má se tím docíliti, aby hrany všech tří hranolů, když se neváží, nebyly zbytečně zatíženy a tím aby se neotupovaly. Důležitější jest však účel druhý, aby se vahadlo svým hranolem *vždy stejně* položilo na příslušné lůžko, jakož i aby lůžka závěsů *vždy stejně* se položila na postranní hranoly. Zabavení vah děje se v určitém pořádku: nejprve vahadlo, pak závěsy, naposled misky. Vybavení děje se v pořádku opačném: nejprve misky, pak závěsy, naposled vahadlo. Zabavení (podchycení) misek není sice nutné, ale jest velmi pohodlné. Přidávání závaží děje se jenom, jsou-li váhy arretovány; když pak jsou též misky podepřené, lze klásti na ně i větší hmoty bez obavy, že by neopatrným, prudším nárazem hmoty na misku kladené mohlo nějaké poškození vah vzniknouti. Arretace vah má jíti zcela jemně; při vybavení vah mají se misky i závěsy zcela současně spustiti a naopak při zabavení zachytiti. Ukazovatel vah arretovaných má státi nad středním bodem stupnice. Jak vybavení tak zejména zabavení vah nesmí se díti prudce, zvláště jsou-li váhy značně zatíženy; zabavení nechť se děje v té poloze, kdy ukazovatel vah je velmi blízký onomu střednímu bodu stupnice. Udaný zde pořádek při vybavení vah jest jediný možný; hledíc však k zabavení vah, byl by pořádek opačný vhodnější. Váhy jemné musí vždy býti montovány ve skříni; nejenom proto, aby byly chráněny před prachem, sazemi atd., kterýmž v obyčejných našich laboratořích nelze se ubrániti, nýbrž hlavně proto, aby při vážení proudy vzduchové nerušily volné a pravidelné kývání vah. Definitivní vážení děje se vždy při skříni zavřené a ne přímo po uzavření, nýbrž po jisté přestávce, aby se vzduch uvnitř ve skříni uklidnil. Na skříni jest pak umístěn přístroj k pošinování jezdce na lineálu vahadla často důmyslně upravený, aby se pošinování dálo jistě, aby se na vahadlo nemohl učiniti při tom náraz a aby se jezdec na lineálu sedící jistě podchytil a zvedl. Na vhodném místě jest ve skříni zavěšen teploměr, po případě též postaven malý vlhkoměr.

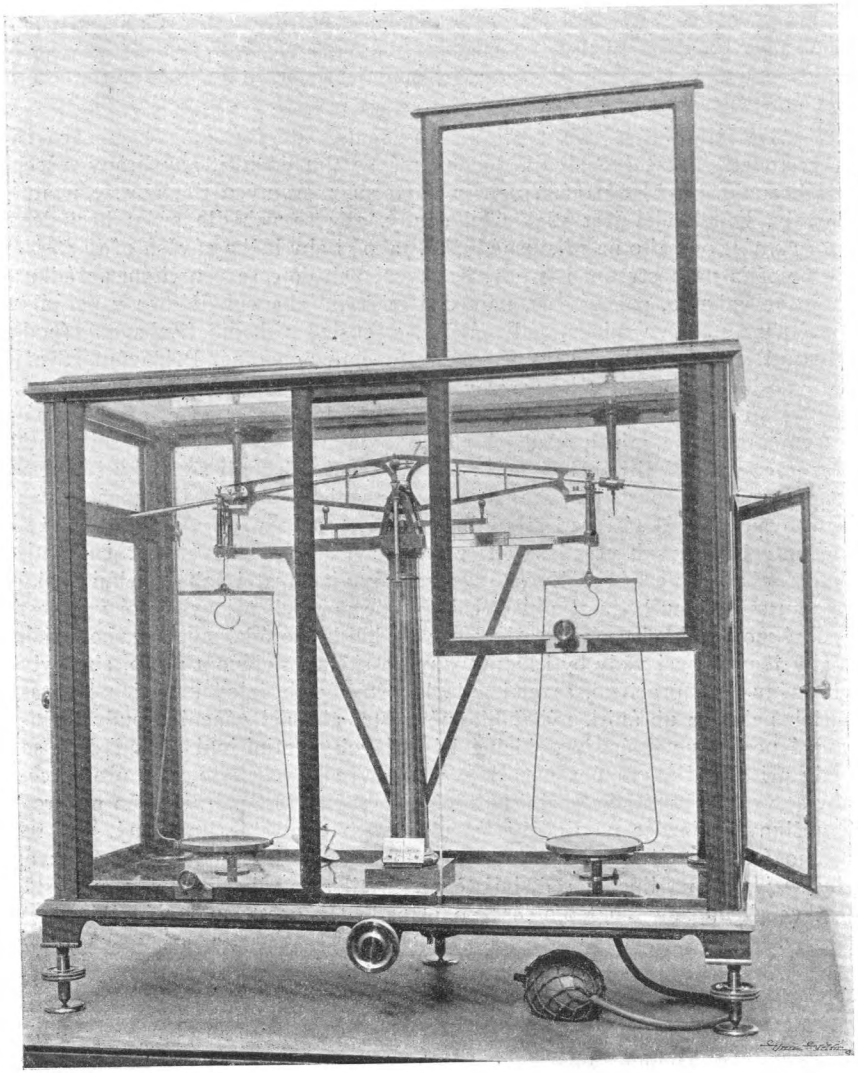
V době novější hotoví se u skříní vah též mechanismus, kterým lze při zavřené skříni klásti závaží — daná ve formě malých válečků — na pravou misku vah, kteráž pak ovšem nabývá k účelu tomu zcela zvláštní úpravy.

Dole na sloupu, kde končí ukazovatel vahadla, jest upevněna malá stupnice (obr. 122.). Dílce její bývají dvoumillimetrové, někdy, zvláště užívá-li se optického zvětšení, mohou dílce býti millimetrové nebo ještě menší. Střední dílec přísluší (alespoň velmi blízce) rovnovážné poloze vah, jsou-li nezatí-



Obr. 122.

ženy, t. j. jsou-li misky vah prázdny. Od středního tohoto dílce jest pak zpravidla deset dílců na pravo a deset na levo. Aby při odčítání nenastaly



Obr. 123.

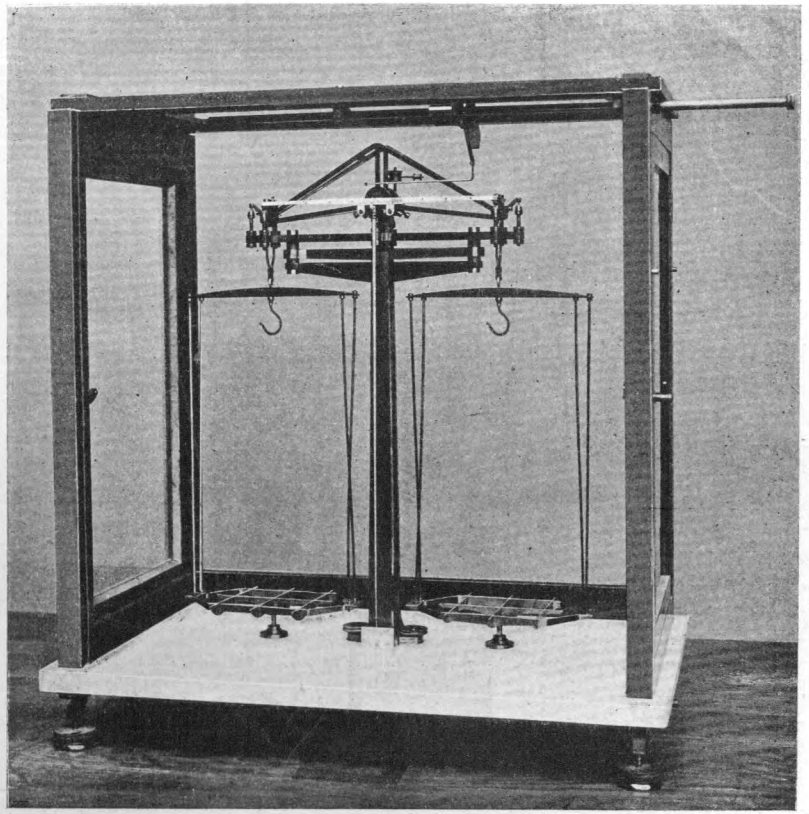
chyby parallaxou, jest žádoucno, aby konec ukazovatele byl těsně před stupnicí anebo ještě lépe nad stupnicí v téže s ní rovině.

Odčítání stupnice děje se při nejpřesnějším vážení pozorovacím dalekohledem; postačí však i pro účely velmi přesné postaviti do skříňky vah

odčítací velkou konvexní čočku přiměřené dálky ohniskové, na př. $f = 15\ cm$, montovanou na malém stojánku.

K objasnění toho, co o úpravě jemných vah bylo řečeno, buďtež připojeny následující příklady:

Obr. 123. ukazuje analytické váhy (Rueprecht), při nichž lze jíti do největšího oboustranného zatížení 250 *g*. Vážení zaručuje ještě několik

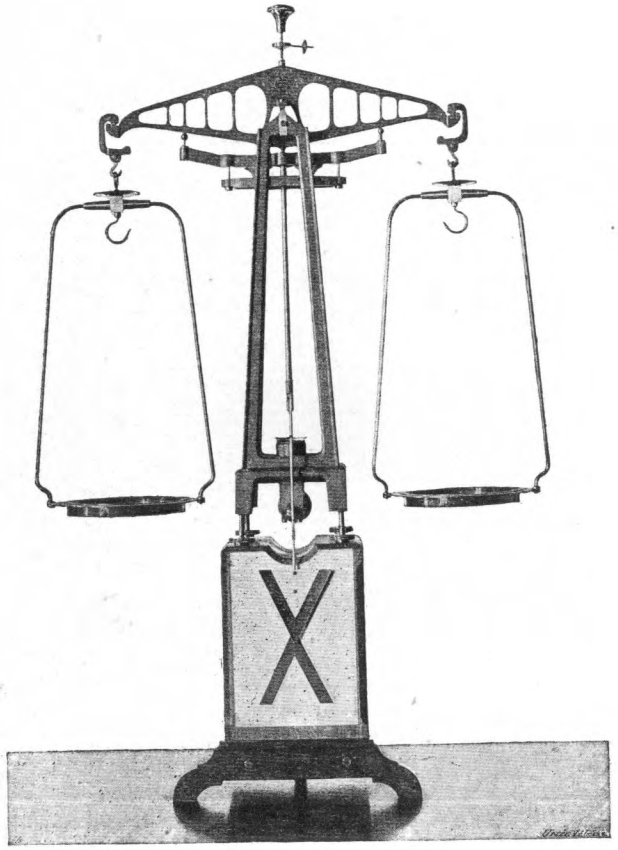


Obr. 124.

(asi 3) setin *mg*. Pošinování jezdce jest zařízeno na obou stranách a děje se na vahadle samém, kteréž má na ramenu pravém i levém dělení od o do 100 dílců pokračující. Arretace jest trojí. Skříň vah jest celá mosazná. To jest výhodou, poněvadž lze kov přesněji zpracovati než dřevo, tak že dvířka se pohybují volněji a desky skleněné vpředu na pošinování vzhůru a dolů zařízené a vyvážené jdou rovněž jemněji než by tomu bylo ve dřevě. Aby pak při vážení dle kyvů mohl pozorovatel docíliti snadno, bez nového zabavování a vybavování a také ovšem bez otvírání skříně vhodné amplitudy,

jest dole po ruce gumový ballonek, jímž lze jemný proud vzduchu říditi proti misce na pravé straně.

Obr. 124. ukazuje velké fysikální váhy (Bunge) krátkoramenné, při nichž lze jíti do největšího oboustranného zatížení až 1000 *g*. Jsou montovány na velké desce mramorové. Prostranná skříň jest dřevěná, zasklená; přední i zadní skleněná stěna jsou zařízeny na zvedání a dají se vyndati



Obr. 125.

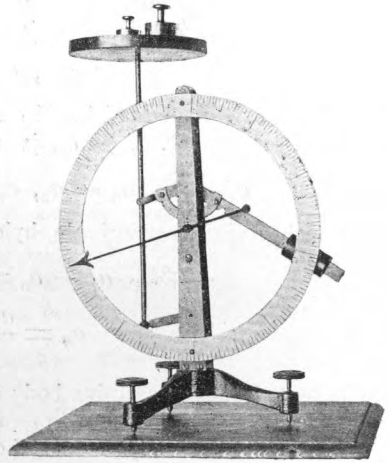
úplně; po stranách jsou dvířka. Na pošinování jezdce jest lineál zvláštní před vahadlem, rozdělený na 100 dílů a opatřený v dělicích bodech jemnými výřezy, do nichž jezdec určitým vždy způsobem zasedne. Hranoly, lůžka, jakož i podchycující polokulovité části arretace jsou vesměs achatové. Při obyčejném způsobu odčítání (lupou) jest i při zatížení největším zaručena jedna neb dvě desetiny *mg*. Jest zde však na vahadle upevněno též zrcátko pro pozorování dalekohledem se svislou stupnicí. Tím se přesnost *odčítání*

dá zvětšiti značnou měrou, avšak přesnost *vážení* nelze zde vésti dále než nanejvýše na půl desetiny *mg*, poněvadž stálost poloh rovnovážných při značnějším zatížení nelze s větší přesností zaručiti.

Pro účely fysikálních experimentů v přednáškách hodí se velmi dobře váhy demonstrační (Rueprecht) v obrazci 125. znázorněné. Vydrží zatížení oboustranné až 5000 *g*. Aby změny rovnovážné polohy také z daleka bylo lze pozorovati, slouží zařízení z obrazce samého patrné. Misky na levo i na pravo lze vyndati a vložiti na jich místo nádoby skleněné aneb zavěsiti na drátkách tělesa jakákoli, na př. ke stanovení hmoty specifické a pod.

V mnohých případech jest při experimentech přednáškových pohodlnější užívati demonstračních vah na lati sloupu zavěšených, které tudíž směrem dolů visí zcela volně a umožňují zde rozestavení apparátů v úplné volnosti. Váhy takové seznáme při experimentech hydrostatických.

Služby velmi dobré konají váhy, jichž ukazovatel ihned výsledek vážení stanoví na stupnici, jež před tím empiricky se graduovala. U vah takových zvedá se při zatížení páka a přechází do nové polohy rovnovážné, se kterou pak poloha ukazovatele souvisí. Takové váhy ukazuje obr. 126. Odčítání jde do 1000 *g* a lze ještě odhadnutím 1 *g* stanoviti. Váhy takové orientují tedy rychle o hledané hmotě tělesa, která se pak definitivně na vahách jemných stanoví; to znamená jednak úsporu času a práce, jednak větší šetření jemných vah samých. Rozmanité modifikace vah takových jsou rozšířeny jako vážky listovní, nákladní a pod.



Obr. 126.

Pro velká břemena jsou zařízeny váhy decimální anebo centesimální, jichž konstrukce stává se velmi složitou, když jde o vážení břemen velmi velikých, na př. železničních waggonů s nákladem a pod. Váhy takové, u nichž již základy musí býti velmi solidní, montují se na určitých místech na nádražích; spouštění nákladů a zvedání děje se strojem buď parním nebo elektrickým.

§ 164. **Methoda pozorovací.**

Vybavíme-li váhy buď nezatížené anebo na obou miskách stejně, po případě i téměř stejně zatížené, kývají; tyto kyvy pozorujeme ukazovatelem na stupnici; dějí se kolem jisté *rovnovážné polohy*, na kteréž by se konečně váhy ustálily; neboť odporem vzduchu a jinými překážkami výkyvů ubývá. Avšak čekati, až by se váhy ustálily a pak polohu rovnovážnou odečísti, bylo

by nejen ztrátou času, ale vedlo by též k nesprávnostem; neboť když jsou výkyvy již zcela malé, může se zastavení státi nahodilou nějakou a jinak nepatrnou překážkou právě na místě, kteréž od skutečné polohy rovnovážné jest poněkud odchylné. Proto jest i z tohoto důvodu správnosti nutné tuto polohu *počtem* stanoviti na základě pozorování kyvů samých.

K účelu tomu třeba dílce stupnice číslovati. Mohli bychom dílec střední označiti jakožto nullový a počítati dílce na př. na pravo za positivní, na levo za negativní. Dvojí takové znamení bylo by však pro počítání nepohodlné a vedlo by k častým omylům. Proto jest lépe onen střední dílec označiti číslem 10 a bod nullový položiti stranou, buď na levo neb na pravo. Jest rozumné položiti jej tak, aby, když *závaží přidáváme,* kteréž se klade na misku *pravou,* pohyb ukazovatele se dál na stupnici směrem k číslům *stoupajícím.* Je-li tedy ukazovatel obrácen dolů, jak to bývá u vah jemných, jest přirozeno položiti nullový bod stupnice na pravo (obr. 122.).

Polohu rovnovážnou stanovíme z bodů obratu; sledujeme tedy okem pohyb ukazovatele a hledíme až na $\frac{1}{10}$ dílce stanoviti bod, kde se při kývání ukazovatel obrátil. Znamenejme tyto body obratu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

Hledaná poloha rovnovážná budiž a_0.

Je-li tedy na př. $a_1 > a_0$, jsou výkyvy následující:

$$a_1 - a_0,\ a_0 - a_2,\ a_3 - a_0,\ a_0 - a_4,\ \ldots$$

Kdyby těchto výkyvů neubývalo, bylo by

$$a_1 - a_0 = a_0 - a_2,$$

tudíž

$$a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Stačilo by tedy pozorovati dva body obratu a z odečtení obou vzíti arithmetický průměr.

Avšak výkyvů ubývá následkem překážek pohybu, hlavně odporu vzduchu; jest tedy

$$(a_1 - a_0) > (a_0 - a_2) > (a_3 - a_0) > (a_0 - a_4) > \ldots$$

Zákon, dle kterého tato čísla se umenšují, závisí na tom, jak překážky pohybu působí. Obyčejně se předpokládá, že jsou úměrny rychlosti pohybu. Na tomto základě pak vychází, že ony amplitudy tvoří klesající *řadu geometrickou.* Dle toho jest

$$\frac{a_0 - a_2}{a_1 - a_0} = \frac{a_3 - a_0}{a_0 - a_2} = \frac{a_0 - a_4}{a_3 - a_0} = \ldots = k.$$

Stálý koefficient k, charakterisující kývání tlumené, zove se *poměrem útlumu*; jeho logarithmus zove se *logarithmickým dekrementem* amplitud.

Dlužno však uvážiti, že u vah překážky pohybu jsou uvedeny na míru nejskrovnější. Následkem toho jest poměr k jen o velmi málo menší než 1, tak že lze psáti

$$k = 1 - \varkappa,$$

kdež jest $\varkappa$ číslo velmi malé.

Nazveme-li ještě první výkyv $a_1 - a_0$ krátce $= e$, obdržíme pro výkyvy, jež následují, hodnoty tyto:

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= e \\ a_0 - a_2 &= e\,(1 - \varkappa) \\ a_3 - a_0 &= e\,(1 - \varkappa)^2 \\ a_0 - a_4 &= e\,(1 - \varkappa)^3 \\ a_5 - a_6 &= e\,(1 - \varkappa)^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z těchto rovnic plyne dále:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + e \\ a_2 &= a_0 - e\,(1 - \varkappa) \\ a_3 &= a_0 + e\,(1 - 2\varkappa + \varkappa^2) \\ a_4 &= a_0 - e\,(1 - 3\varkappa + 3\varkappa^2 - \varkappa^3) \\ a_5 &= a_0 + e\,(1 - 4\varkappa + 6\varkappa^2 - 4\varkappa^3 + \varkappa^4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na základě rovnic těchto lze posouditi, kolik bodů obratu a nutno nejméně pozorovati, aby se rovnovážná poloha určila a jak se určení toto má díti. Číslo $\varkappa$ jest jak praveno malé, tak že lze nikoli ovšem prvé, ale všech vyšších mocností tohoto čísla pomíjeti.

Vzhledem k této možnosti soudíme, že postačí pozorovati body obratu tři,

$$a_1,\ a_2,\ a_3;$$

neboť jest:

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_0 + e\,(1 - \varkappa + \frac{\varkappa^2}{2}),$$

$$a_2 = a_0 - e\,(1 - \varkappa),$$

tedy arithmetický průměr obou

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_3}{2} + a_2\right) = a_0 + e \cdot \frac{\varkappa^2}{4},$$

tedy $= a_0$ až na velmi malou hodnotu $e \cdot \frac{\varkappa^2}{4}$, kterouž lze zanedbávati.

Početní schema pro tři pozorované body obratu jest patrno z následujícího příkladu *):

$$\begin{array}{ccc} 9{\cdot}6 & 11{\cdot}25 & 9{\cdot}7 \\ & 9{\cdot}65 & \\ \hline & 10{\cdot}45 & \end{array}$$

*) U následujících příkladů ze skutečnosti vzatých byly desetiny dílce odhadnuty; kde vznikla nejistota, má-li se na př. vzíti 11·2 neb 11·3, vzal se arithmetický průměr 11·25; jinak setiny se ovšem pozorovati nemohly, naproti tomu *počet,* jak je vždy pravidlem, vedl se o jedno decimální místo *dále* než jde pozorování, tedy zde na setiny.

Pozorovaná tři čísla píší se tedy do jedné řádky; pod druhé napíše se arithmetický průměr obou krajních a spojí se s oním druhým číslem v průměr definitivní udávající polohu rovnovážnou.

Ještě přesněji lze polohu rovnovážnou a_0 určiti ze čtyř bodů obratu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4.$$

Zde máme:

$$a_1 + a_4 = 2a_0 + e\,(3x - 3x^2 + x^3)$$
$$3\,(a_2 + a_3) = 6a_0 - e\,(3x - 3x^2),$$

tudíž součet obou:

$$a_1 + a_4 + 3\,(a_2 + a_3) = 8a_0 + e\,.\,x^3.$$

Zde lze ještě větším právem než nahoře zanedbávati malou hodnotu $e\,.\,x^3$; tím vychází:

$$\tfrac{1}{8}\,(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4) = a_0.$$

Početní schema pro čtyři pozorované body obratu vysvítá z následujícího příkladu:

11·15	4·75	10·9	5·1
	14·25	32·7	
	63·20 : 8 = 7·90		

Pozorovaná čtyři čísla napíší se do jedné řádky, pod prostřední dvě dá se jich trojnásobné, pak utvoří se součet těchto trojnásobných a krajních a dělí osmi. Toto schema početní vychází z formule. Avšak tím přijdou do počtu zbytečně velká čísla, která mimo to nemají žádného zájmu, ničeho fysikálně neznamenajíce. Proto se daleko výhodněji počítá dle schematu následujícího:

11·15	4·75	10·9	5·1
	8·13		
	7·83 / 7·98		7·90.

To znamená, že se výpočet rovnovážné polohy vede *postupně* z arithmetických průměrů dvou a dvou čísel. Utvoří se totiž arithmetický průměr z bodů obratu krajních a pod ten hned z bodů obratu středních; z obou utvoří se opět průměr, z tohoto pak a předchozího vypočítá se průměr definitivní, jenž jest hledanou polohou rovnovážnou. Pozorovatel jen poněkud cvičený tvoří ze dvou čísel průměr arithmetický bez skutečného teprve sečítání přímo z pohledu na čísla daná způsobem velmi rychlým. Zde pak jde výpočet proto ještě rychleji, poněvadž, když daná čtyři pozorování jsou do řádky napsaná, průměr krajních a průměr středních již téměř souhlasí; — jich rozdíl dává průměrný úbytek výkyvů. — Počítání další má tudíž vlastně jen ještě rozhodnouti poslední místa decimální. Průměr oněch bodů obratů středních vstupuje do definitivního výsledku dvakrát vzhledem k tomu, že body obratu krajní hlasují pro výsledek jako by každý jedním hlasem, body obratu střední však každý jako by třemi hlasy. Z toho také

plyne naučení, že na správné odečtení bodů obratu středních dlužno zvláště dbáti.

V případu zde voleném byly výkyvy dosti značné a rovnovážná poloha dosti se lišila od středního dílce stupnice. Váhy byly zatíženy.

Příklad následující dává pozorování u vah nezatížených:

9·65	11·25	9·75	11·1
	10·38		
	10·50 / 10·44		10·47.

Rovnovážná poloha vah nezatížených zove se jich *bodem nullovým*.

Kdyby se tento byl odvodil pouze z prvých tří pozorování, bylo by vyšlo = 10·48; kdyby se prvé pozorování vynechalo, vyšlo by z tří dalších = 10·47, tedy v mezích chyb pozorovacích totéž.

Když se pozoruje pět bodů obratu

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,$$

vede se výpočet tak, že se prostě utvoří průměr ze tří pozorování na jedné a ze dvou na druhé straně, tedy dle schematu

a_1	a_2
a_3	a_4
a_5	
$\frac{a_1 + a_3 + a_5}{3}$	$\frac{a_2 + a_4}{2}$

a že rovnovážná poloha a_0 se vypočte jako střed z obou těchto průměrů

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a_1 + a_3 + a_5}{3} + \frac{a_2 + a_4}{2}\right] = a_0.$$

Jest však:

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5}{3} = a_0 + e\left(1 - 2x + \frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4\right)$$
$$\frac{a_2 + a_4}{2} = a_0 - e\left(1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)$$

tudíž

$$\text{střed} = a_0 + e\left(\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^4\right).$$

Výsledek jest zajímavý. Je-li x malá veličina řádu prvého, jest rovnovážná poloha a_0 stanovena při třech bodech obratu až na malou veličinu druhého řádu $\left(e\frac{x^2}{4}\right)$, při čtyřech až na malou veličinu třetího řádu $\left(e\frac{x^3}{8}\right)$, při pěti pak až na malou veličinu opět jen druhého řádu $\left(e\frac{5}{12}x^2\right)$, tak že dokonce

chyba u pěti bodů obratu jest větší než u tří bodů obratu $\left(\frac{5}{12}x^2 > \frac{x^2}{4}\right)$.

Theoreticky — *při obvyklém způsobu počítání* — se tedy ničeho nezíská, když se ke třem bodům obratu přiberou ještě další dva.

Předeslavše tuto úvahu orientační, můžeme otázku, mají-li se pozorovati tři body obratu nebo čtyři nebo pět, jednoduše rozhodnouti. Tři pozorování, jsou-li správná, postačí i pro vážení velmi přesná. Pozorují-li se čtyři body obratu, kontrolují se navzájem dva na pravo a dva na levo, tak že nahodilý omyl při odečtení se ihned prozradí, kdežto při pozorování jen tří bodů obratu zůstává na jedné straně pouze odečtení jediné, tudíž může nahodilé pochybení zůstati spíše nepovšimnuto, při čemž právě toto pochybné, nekontrolované odečtení působí na výsledek dvěma hlasy. Když se pozoruje pět bodů obratu, jest kontrola odečtení ovšem ještě větší, ale přesnost výsledku — při obvyklém způsobu počítání — není větší než u tří bodů obratu. Lze však připustiti, že mechanismus početní jest u pěti (nebo tří) bodů obratu poněkud jednodušší než u čtyř. Celkem rozhoduje mnoho zvyk a početní obratnost. Také to je důležité, že tři body obratu a také ještě čtyři lze si pamatovati, více však již ne s jistotou; při větším počtu musil by tedy pozorovatel po každém odečtení bodu obratu psáti, tudíž oko obrátiti na papír, pak opět na ukazovatele a opět na papír atd., tedy střídavě brzy sem, brzy tam, což oko velmi unavuje a způsobuje neklid, kterým pak snadno chybná pozorování vznikají.

§ 165. **Zkouška vah.**

Veškeré vážení vztahuje se k nullovému bodu vah. I jest jedním ze základních požadavků, jimž jemné váhy musí vyhověti, aby *nullový bod* byl *stálým*. Proto jest zkouška *stálosti bodu nullového* první, kterou u vah třeba provésti.

Když tedy váhy byly vhodně umístěny, zařízeny a když teplota se ustálila, vybavíme váhy, necháme je stále kývati a zaznamenáváme body obratu a_1, a_2, a_3 . . . Již zde nesmí se jeviti žádné nápadnější ubývání výkyvů. Na to kombinujeme je vždy po čtyřech a počítáme nullový bod, tedy na př. z čísel a_1 až a_4, pak a_5 až a_8 atd. Nullový bod musí v mezích, jež jsou dány chybami pozorovacími, vycházeti souhlasně.

Týž souhlas musí se jeviti, když se váhy střídavě vybaví a zabaví, po případě i poněkud prudčeji zabaví; nullový bod po novém vybavení musí býti týž jako před zabavením.

Konečně se váhy zatíží, vybaví, nechají kývati, zabaví a opět vybaví, atd.; nullový bod určený po tom, když se závaží sejmou, musí rovněž souhlasiti s původním.

Vzhledem k tomu, že chyby pozorovací nejsou větší než $\frac{1}{10}$ dílce, a že nullový bod se určuje kombinací několika pozorování, nesmí nesouhlas mezi jednotlivě určenými body nullovými činiti více než málo setin dílce, nebo nanejvýše též $\frac{1}{10}$ dílce, což by souhlasilo s případem pravdě velice nepodobným, že by veškerá pozorování byla jednostranně o $\frac{1}{10}$ dílce nesprávná.

Ukazují-li se odchylky větší, jest to znamením, že váhy jsou citlivěji zařízeny než to dle jich mechanického provedení jest oprávněno. V tom případě jest tato větší citlivost zcela illusorní a lépe jest (hlavně se zřetelem k rychlejšímu kývání vah) ji zmenšiti a uvésti v souhlas se stálostí nullového bodu.

Hrubší odchylky ve výsledcích pozorování poukazují k nějaké chybě mechanické; na př. nějaký šroubek není dotažen a viklá se, hranoly nejsou dobře očištěny neb brouseny a pod.

Umístění vah jest při tom ovšem důležité. Mají býti postaveny na konsole, jež jest upevněna na *hlavní* zdi budovy, možná-li, ne blízko okna ani ne blízko kamen, poněvadž v zimě účinkem obou nastávají značné jednostranné rozdíly teploty.

Požadavku stálosti nullového bodu nesmí se však rozuměti tak, jako by nullový bod *průběhem celého dne* neb měsíce a roku musil býti stálým. Působí zajisté na bod nullový rozdělení teploty ve skříni vah; nejmenší nesouměrnost teploty prozrazuje se v bodu nullovém. Když tedy teplota — dle daných poměrů laboratoře — jednostranně stoupá (účinkem kamen) neb klesá (účinkem okna a pod.), jeví se to velmi pravidelně jistým chodem bodu nullového. Proto by bylo také zpozdilé chtíti snad nullový bod tak regulovati, aby byl přesně = 10·00; i kdyby se to jednou podařilo, záhy se odchylka objeví znovu. Proto se také při přesném vážení musí bod nullový určiti před i po vážení a základem počtu učiniti hodnota průměrná.

Vše to, co zde řečeno o souhlasu jednotlivě určených bodů nullových, platí všeobecněji o souhlasu rovnovážných poloh, když jsou váhy zatížené. Tyto polohy, několikráte jsouce pozorováním určeny, musí vespolek souhlasiti v mezích pozorovacích chyb. Také v této příčině dlužno provésti zkoušku vah; zejména dlužno zkusiti, zdali tato poloha rovnovážná se nemění, když se závaží na různá místa misky položí, na př. jednou na střed, podruhé blíže kraje a pod.

§ 166. **Jak se stanoví citlivost vah.**

V předběžných úvahách theoretických byla odvozena rovnice

$$tg\,\varphi = \frac{mL}{M_0 l_0 + 2Ml}.$$

Touto rovnicí se udává, na čem citlivost vah závisí, nelze však z ní citlivost počítati, poněvadž malinké délky l_0 a l nejsou přímému měření přístupny. Proto se citlivost vah stanoví pokusem.

Buďtež váhy na obou stranách stejně zatíženy. Určíme na stupnici rovnovážnou polohu. Na to přidáme na př. na pravo přívažek u (v milligrammech) a určíme znova rovnovážnou polohu. Je-li rozdíl obou rovnovážných poloh = n dílců a je-li R délka ukazovatele od osy C počítajíc, jest patrně

$$tg\,\varphi = \frac{n}{R}.$$

Číslo n jest citlivosti úměrné; u týchž vah jest tudíž měrou citlivosti; a po-

něvadž ovšem roste s přívažkem μ, přepočítá se dělením $\frac{n}{\mu}$ na přívažek *jednoho milligrammu. Citlivost vah jest dána rozdílem rovnovážných poloh pro přívažek jednoho milligrammu.*

Aby se vyšetřilo, jakou měrou citlivost závisí na zatížení vahadla, určí se pro zatížení různá. Pro praxis jest výhodno voliti jakožto zatížení nullové to, které jest dáno vahou závěsů a misek a odtud počínajíc zvětšovati zatížení na př. na 50, 100, 150, 200, 250 gramm, neb jinak, dle toho, jaké největší zatížení jisté váhy připouštějí.

Výsledky takovéto práce sestaví se tabellárně a znázorní graficky; dostane se tak *křivka citlivosti,* kteráž jest pro určité váhy charakteristickou. Z jejího průběhu lze souditi na povahu vzdáleností l_0 a l.

Křivka citlivosti mění se poněkud teplotou; ale poněvadž teplota síně, v níž se vážení děje, jen v úzkých mezích se měnívá, netřeba k účinku jejímu přihlížeti. Je-li jednou křivka citlivosti určena, může se jí při vážení po dlouhá léta užívati, při čemž ovšem ob čas některé kontrolní pozorování se provede. Rozumí se však samo sebou, že se s vahami nesmějí státi žádné jakékoliv změny, kteréž by mohly míti na citlivost vliv, zejména pak, že se vzdálenost těžiště vahadla od osy nesmí regulační maticí změniti *).

Aby se výkyv při přidávání přídavku μ milligramm nestal jednostranně velikým, zařídí se zatížení — pomocí jezdce — tak, že prvá rovnovážná poloha padne as tak daleko před nullový bod jako druhá (po přidání přívažku μ) za ním. Na př. prvá na 7·65, druhá na 12·17, rozdíl 4·52 na 3 milligrammy, tudíž citlivost = 1·51.

§ 167. **Příklady citlivosti vah.**

Vzhledem k zajímavosti a důležitosti věci buďtež zde uvedeny některé konkretní příklady. Pozorovatel: V. Šťastný, 1887.

1. Váhy Bungovy (obr. 124.). Největší zatížení 1000 *g*. Křivku citlivosti lze sestrojiti z dat následujících:

Zatížení:	0	200	400	600	800	1000 *g*
Citlivost:	1·03	0·95	0·89	0·84	0·78	0·73

Váhy jsou zařízeny zúmyslně méně citlivě, aby doba kyvu byla menší.

2. Váhy Rueprechtovy (obr. 123.). Největší zatížení 250 *g*. Užívá se jich však jen pro málo více než 200 *g*. Křivka citlivosti sestrojí se z čísel následujících:

Zatížení:	0	50	100	150	200 *g*
Citlivost:	1·53	1·37	1·29	1·24	1·23

3. Váhy Herzbergovy (nástupce firmy Bunge). Velice jemné. Největší zatížení jen 20 *g*. Křivka citlivosti udá se z dat následujících:

Zatížení:	0	5	10	15	20 *g*
Citlivost:	9·14	8·06	7·37	6·85	6·29

*) Předpis, že se má citlivost při každém vážení regulační maticí zařídíti dle zatížení, jest zcela absurdní.

V příkladech těchto jsou zastoupeny váhy pro velké, střední a malé zatížení. Křivky citlivosti, jež snadno a rychle lze sestrojiti, ukazují spád citlivosti se zatížením s počátku prudší, pak vždy mírnější.

§ 168. **Methoda vážení.**

Methoda vážení objasní se nejlépe následujícím konkretním příkladem. Bylo přesně stanoviti váhu daného kusu křišťálu *K*. Užito vah Bungových, jichž největší zatížení smělo býti jen 50 grammů; v souvislosti s tím byla jejich citlivost značná; udávaly ještě setiny milligrammu. Výpis z protokollu jest následující:

	Nullový bod . . . . . 8·61
K 10·005 *g*	Rovnov. poloha . . . . . 5·24
K 10·006 *g*	» » . . . . 13·20
	Nullový bod . . . . . 8·61

Jest tedy:

Odchylka rovnov. polohy od středn. nullového bodu . . . . . 3·37

Citlivost . . . . . 13·20 — 5·24 = 7·96

Tudíž odchylka přepočtena na *mg* . . . . . 3·37 : 7·96 = 0·423

a výsledek

$$K = 10{\cdot}005\,423\ g.$$

Příklad tento podává úplné schema vážení. Obsahuje čtyři pozorování. Při tom nullový bod jest ke kontrole stanoven dvakráte, na začátku a na konec vážení. Kdyby citlivost z tabulky anebo z křivky citlivosti byla známa, redukovalo by se vážení na tři pozorování; ale jest lépe, zejména při velmi přesném vážení, citlivost způsobem udaným určiti zvlášť. Vážení se pak jakoby dokončí počtem. Poslední decimála výsledku přibírá se, jako vždy, jen k zajištění decimály předposlední.

§ 169. **Jak se zkoumá správnost vah.**

Z rovnováhy na páce jsme oprávněni souditi jen na *rovnost statických momentů.* Přidáme-li na pravou misku vah hmotu M_1 a na levou hmotu M_2, zvětšíme moment při vahadle, které jest již zatíženo závěsy a miskami, na pravo o M_1gL_1, na levo o M_2gL_2. Je-li rovnovážná poloha tatáž jako nullový bod, lze psáti

$$M_1 L_1 = M_2 L_2.$$

My však jsme zvyklí z rovnováhy oné souditi na *rovnost hmot,* t. j. klásti

$$M_1 = M_2.$$

To pak předpokládá

$$L_1 = L_2$$

a v rovnici této jest obsažen požadavek *správnosti vah.*

Dle toho *stačí* pro správnost vah, když jest vahadlo pákou přesně rovnoramennou, t. j. když hrany hranolů postranních jsou od hrany středního hranolu stejně vzdáleny.

Obyčejně se však požadavek správnosti *stupňuje*: žádá se *úplná symmetrie* vahadla vzhledem k rovině dané těžištěm A_0 a hranou O středního hranolu. Vyšší tento požadavek má ovšem dobrý smysl se zřetelem na vliv teploty. Jde o to, aby rovnoramennost vah, byla-li zjednána pro jistou teplotu, se *zachovala* při *teplotě jakkoli rozdílné*; úplná pak souměrnost vahadla zaručuje nejlépe stejnou změnu obou ramen při vzrůstání neb klesání teploty.

Jak dalece rovnici $L_1 = L_2$ jest u daných vah vyhověno, rozhodne se nikoli snad měřením těchto délek, nýbrž vážením, které jest daleko přesnějším než měření délková.

Položme na levou misku hmotu M a na pravou závaží A, aby byla rovnovážná poloha souhlasná s bodem nullovým; i jest

$$M \,.\, L_2 = A \,.\, L_1.$$

Položme pak hmotu M na misku pravou, a závaží A na levou; velmi zřídka obdržíme rovnovážnou polohu stejnou; zpravidla jest nutno závaží to poněkud pozměniti na B, o něco (málo) zvětšiti neb zmenšiti, aby opět byla rovnovážná poloha souhlasnou s bodem nullovým; platí pak

$$B \,.\, L_2 = M \,.\, L_1.$$

Z obou těchto rovnic plyne, když se vespolek násobí, při čemž se M krátí,

$$B \,.\, L_2^2 = A \,.\, L_1^2,$$

odkudž

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Na místě tohoto výrazu přesného lze psáti vždy výraz velmi přibližný, je-li na př. $A > B$,

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{A - B}{A + B}$$

anebo

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(A - B)}{\frac{1}{2}(A + B)}.$$

Měrou nerovnoramennosti vah čili nesprávnosti vah jest tedy poloviční rozdíl obou závaží *procentuální*, t. j. vzatý vzhledem k hodnotě průměrné. Tak se výhodněji počítá.

Je-li totiž touto hodnotou arithmetický průměr

$$C = \tfrac{1}{2}(A + B),$$

uchylují se A i B od hodnoty té v opačném smyslu o rozdíl δ, který jest vzhledem k hodnotě C velmi malý. Platí pak rovnice

$$\frac{B}{A} = \frac{C - \delta}{C + \delta} = \frac{1 - \frac{\delta}{C}}{1 + \frac{\delta}{C}}.$$

Provedouce dělení aneb užívajíce věty binomické, obdržíme

$$\frac{1}{1 + \frac{\delta}{C}} = 1 - \frac{\delta}{C} + \frac{\delta^2}{C^2} - \ldots$$

Pomíjejíce tedy vyšších mocností poměru $\frac{\delta}{C}$ obdržíme

$$\frac{B}{A} = \left(1 - \frac{\delta}{C}\right)^2,$$

tudíž

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = 1 - \frac{\delta}{C} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(A - B)}{\frac{1}{2}(A + B)}.$$

Příkladem budiž opět vážení onoho křišťálu z odstavce předešlého. Vážení opakováno, při čemž křišťál K položen na misku pravou. Výpis z protokollu ukazuje následující:

		Nullový bod . . . . 8·60
10·005 *g*	*K*	Rovnov. poloha . . . 12·70
10·006 *g*	*K*	» » . . . 4·77
		Nullový bod . . . . 8·65

Jest tedy:

Odchylka rovnov. polohy od středn. nullového bodu . . . . . 4·08
Citlivost . . . . . 12·70 — 4·77 = 7·93
Tudíž odchylka přepočtená na *mg* . . . . . 4·08 : 7·93 = 0·515

a výsledek

$$K = 10{\cdot}005515.$$

V tomto příkladě jest tudíž:

$$\begin{aligned} A &= 10{\cdot}005423 \\ B &= 10{\cdot}005515 \\ \tfrac{1}{2}(A - B) &= -\,0{\cdot}000046 \\ \tfrac{1}{2}(A + B) &= 10{\cdot}0 \end{aligned}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 + 0{\cdot}0000046.$$

Poměr ramen vahadla není dokonce konstantou vah. Praxis ukazuje, že souvisí již se zatížením samým, hlavně však s rozdělením teploty ve skříni vah.

Tak byl poměr tento u vah Rueprechtových (do 250 g) určen jistého dne v souvislosti pro různá zatížení, kdy teplota se neměnila. Výsledky byly následující:

$$\frac{L_1}{L_2} = \begin{array}{ll} 1 - 0{\cdot}0000055, & \text{zatížení } 200\ g \\ 1 - 0{\cdot}0000076 & \text{» } 100\ g \\ 1 - 0{\cdot}0000101 & \text{» } 50\ g \\ 1 - 0{\cdot}0000117 & \text{» } 20\ g. \end{array}$$

Následujícího dne pokračováno v těchto měřeních dále, tak že se onen poměr stanovil pro zatížení 10 g. Dle postupu čísel očekávalo se číslo větší než 117, avšak vyšlo:

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - 0{\cdot}0000084, \quad \text{zatížení } 10\ g.$$

Patrně bylo rozdělení teploty ve skříni vah již poněkud jiné.

§ 170. Jak lze vážiti správně na vahách nesprávných.

1. Zdálo by se býti nejjednodušším, určiti číselně stupeň nesprávnosti vah, t. j. poměr $\frac{L_1}{L_2}$ a pak na základě rovnice

$$M_1 L_1 = M_2 L_2$$

počítati

$$M_2 = M_1 \frac{L_1}{L_2}.$$

Avšak pravili jsme již, že poměr obou ramen není konstantou vah, že se mění dle zatížení a hlavně dle rozdělení teploty ve skříni vah. Nelze tudíž číselně hodnoty jednou určené užiti také jindy.

Přes to slouží však takovéto určení poměru L_1/L_2 za *orientační*, aby bylo lze posouditi, kdy by se ho mělo přece užiti a kdy by se na ně vůbec nemusilo míti zření.

Tak na př. při oněch vahách Rueprechtových bylo co do hlavního čísla

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - 0{\cdot}00001.$$

Korrekce $M \,.\, 0{\cdot}00001$ činila tudíž

2·0	mg	pro	$M = 200\ g$
1·0	»	»	$M = 100$ »
0·1	»	»	$M = 10$ »
0·01	»	»	$M = 1$ »

Váhy udávaly ještě přesně desetinu, při menším zatížení půl desetiny mg. Z toho tedy patrno, že nerovnoramennost vah by se byla nesměla zanedbávati při zatížení kolem 200 neb 100 grammů, kde vliv její šel do celých mg, že však při zatížení jenom několika grammů vliv její byl menší než chyby pozorovací.

A tak to bývá u všech jemných vah. Pro jistá malá zatížení lze je považovati za rovnoramenné, tudíž za správné; jest to věcí pozorovatele určením poměru obou ramen se orientovati o tom, až do kterého zatížení váhy mohou prakticky za zcela správné platiti. Tvar oné rovnice

$$M_2 = M_1 \frac{L_1}{L_2},$$

ve které M_1, pro pravou misku, znamená závaží, motivuje zároveň, proč se má počítati vždy poměr L_1/L_2 a nikoli snad obráceně L_2/L_1.

2. Při větším zatížení vah lze nerovnoramennost vymýtiti dvojím vážením, jednou se závažím A na misce pravé, po druhé se závažím B poněkud jiným na misce levé. (Gauss.) Platí pak opět rovnice

$$M \,.\, L_2 = A \,.\, L_1,$$
$$B \,.\, L_2 = M \,.\, L_1,$$

z nichž plyne

$$M = \sqrt{AB}.$$

Správná hmota M jest tudíž geometrickým průměrem závaží A a B.

Místo geometrického lze přibližně vzíti též průměr arithmetický:

$$C = \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Dle označení již dříve užívaných jest totiž

$$AB = (C + \delta)(C - \delta) = C^2 - \delta^2 = C^2\left(1 - \frac{\delta^2}{C^2}\right)$$

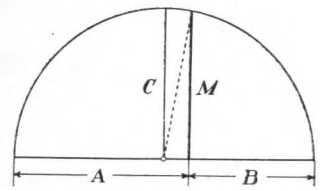
$$\sqrt{AB} = C\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{C^2}\right) = C.$$

Jednoduchou geometrickou interpretací těchto vzorců podává obr. 127. Sestrojíme-li nad součtem $A + B$ polokruh, jest C poloměr, M polotětiva, tudíž vždy $M < C$, ale v blízkosti středu kruhového, kde hořejší oblouček kruhový je téměř s průměrem rovnoběžný, velmi blízce $M = C$.

Tak byla hmota onoho křišťálu dvojnásobným vážením nalezena.

$$A = 10{\cdot}005423$$
$$B = 10{\cdot}005515$$
$$C = 10{\cdot}005469$$

jakožto správná hmota křišťálu.



Obr. 127.

3. Ještě jinak lze na vahách nesprávných vážiti správně *tarováním* (Borda). Na misku pravou položí se hmota K a vyváží se na misce levé nějakou jinou hmotou

(starším sebe nedokonalejším závažím, zrnky granátovými a pod.) tak, aby váhy kývaly v mezích stupnice. Určí se rovnovážná poloha, kteráž pak platí za bod nullový.

Na to se sejme hmota K a na *touž misku*, kde byla, klade se tolik závaží M, až rovnovážná poloha jest opět tatáž; to znamená, že se klade závaží, až váhy kývají v mezích stupnice, určí se rovnovážná poloha, počítá se, o kolik dílců stupnice se ještě liší od dřívější, t. j. od tohoto jaksi nullového bodu a dle známé citlivosti se dělením dopočítá, kolik by se bylo mělo závaží ještě přidati neb ubrati.

Jak patrno, jest methoda tato methodou *substituční*; klade se hmota známá M, t. j. závaží na místo hmoty neznámé K, až jest rovnovážná poloha táž jako před tím.

Jest vhodné za taru užiti na levé misce závaží, třeba staršího, poněvadž toto udává s velkou přibližností, jak mnoho závaží pak na pravo položiti dlužno.

Jinak lze též tak si počínati. Na levou misku položí se největší závaží, jež váhy ještě vydrží, na př. 200 g, neb 100 g, 50 g atd. a na pravo součet všech ostatních závaží, který se nominálně onomu velkému rovná. Určí se rovnovážná poloha, která pak platí za nullový bod.

Pak se opět závaží na pravé misce všechna — anebo jen kolik je třeba — sejmou, položí se tam hmota K a přidá se tolik závaží, až se rovnovážná poloha shoduje s dřívější.

Jest patrno, že zde difference závaží při obou váženích na misce pravé užitých dává správnou váhu M.

Když se tímto způsobem váží na vahách stále, pracuje se při konstantním zatížení a tudíž při konstantní citlivosti.

4. Srovnáváme-li obě methody Gaussovu a Bordovu, shledáme, že poslední jest jednodušší. Vede k cíli rychle, vyžadujíc jen dvojího pozorování. Methoda Gaussova vyžaduje pozorování tří, neb čtyř, když se nullový bod vah ke konci vážení chce ještě kontrolovati. Za to však methoda Gaussova dává více než Bordova; neboť dovoluje počítati též poměr L_1/L_2, kterýž jest v jistém smyslu kontrolou vážení, jakož i jinak cenným vedlejším výsledkem.

Kdyby při methodě Gaussově šlo jenom o hmotu M a nikoli též o poměr L_1/L_2, dalo by se pozorování též jenom na dvě redukovati, neboť nullový bod se vymýtí.

V onom příkladu, kdy šlo o správnou váhu křišťálu K, bylo by postačilo vážiti a počítati dle schematu tohoto:

K . . . 10·005,	rovnov. poloha . . .	5·24
10·005 . . . K,	rovnov. poloha . . .	12·70
poloviční rozdíl obou rovnov. poloh	. . .	3·73
přepočtený na mg, 3·73 : 7·94 =	. . .	0·469

$$K = 10{\cdot}005469.$$

Nullový bod vah netřeba pozorovati; ovšem že se předpokládá, že při vážení zůstane konstantním.

Když se tedy váží methodou Gaussovou a pozoruje se jen co je nutné ke stanovení hmoty M, pak se vážení redukuje též jen na dvě pozorování a nejeví se tudíž methoda ta býti méně jednoduchou než Bordova. Vskutku jsou obě rovnocenné, a jen důvody vedlejší mohou vésti k tomu, které se má dáti v případech konkretních přednost.

Methody vážení, zde popisované, nejsou tak všeobecně užívané, jak by býti měly. I tam, kde jde o účely vědecké (technické analyse, stanovení hustoty a pod.), váží se obyčejně tak, že se jezdec trpělivě postrkuje na lineálu, až vážení souhlasí, t. j. až výkyvy na levo a na pravo od středního dílce škály jsou stejné. Předpokládá se tedy, že s tímto středním dílcem nullový bod souhlasí, že je stálým a že výkyvů neubývá. Nehledíc k nepřesnosti vědecké v tom obsažené, jest tento způsob vážení též zdlouhavý a unavující. Pozorovatel zvyklý na způsob vážení, jak zde byl popsán, ani nechápe, jak by kdo měl vážiti jinak. Příčinou toho, proč mnohý se neodhodlá k pozorování kyvů, jest jakási nechuť k počítání i tak jednoduchému, jakého se zde vyžaduje. Ovšem také při tom primitivním způsobu vážení pozorovatel nikdy nemůže zjistiti, jak přesnými váhy jsou, jimiž pracuje, ač na druhé straně přesnosti výsledků, jež obdrží, důvěřuje.

§ 171. Kdy není nerovnoramennost vah na závadu.

V případech velmi četných, jak ve fysice tak i v chemii, lze i na vahách sebe nesprávnějších vážiti docela správně i vážením obyčejným, lze vůbec otázku správnosti vah ignorovati. Při mnohých pracích jde totiž o *poměr* dvou hmot; na př. při chemické analysi, při určování hustoty atd. Provádíme pak vážení *relativní*. Že při takovém vážení eventuální nerovnoramennost vahadla nemá žádného vlivu na výsledek, který hledáme, jest patrno. Máme totiž

$$M_1 L_1 = M_2 L_2,$$

$$M_1' L_1 = M_2' L_2,$$

tudíž

$$\frac{M_1}{M_1'} = \frac{M_2}{M_2'},$$

bez ohledu na jakékoliv L_1 neb L_2. Ovšem se předpokládá, že se

poměr L_1/L_2 od jednoho vážení ke druhému nezměnil, což zase vyžaduje, aby se vážení druhé konalo co možná brzy po prvém.

Vážení, které není *relativní*, zove se *absolutní*. Při tomto jde o stanovení hmoty v grammech; zde jest nutno vážiti buď methodou Gaussovou anebo Bordovou, touto nejvhodněji v té modifikaci, kde netřeba žádného závaží výpomocného. Tak na př. jde-li o stanovení množství stříbra neb mědi elektrolysou vyloučeného, nutno vážiti absolutně.

§ 172. Účinek vzduchu při vážení absolutním i relativním.

Vážíce srovnáváme váhu hmot ve vzduchu umístěných. Avšak v tomto prostředí jsou hmoty ty nadlehčovány, nepůsobí svou vahou plnou. Následkem toho dlužno jak absolutní tak i relativní vážení přepočísti, redukovati na vacuum. Tato redukce předpokládá, že známe hustotu jak hmoty, kterou vážíme, tak i závaží, a to aspoň přibližně. Redukce dopadne tím větší, čím více se hustoty od sebe liší. Příslušné formule a tabulky, jimiž se redukce tato provádí, uvedeme později v souvislosti se stanovením hustoty.

Sestrojují se také »váhy vakuové« pro vážení fundamentální důležitosti, na př. srovnávání normálních kilogrammů. Skříň u vah takových musí vůči velmi značnému tlaku vzduchu míti kostru železnou velmi pevnou a desky skleněné velmi silné; musí též býti postaráno o mechanismus, kterým by se i při zavřených vahách daly hmoty na misky klásti a dle methody Gaussovy překládati. Vzhledem k vysoké ceně takových vah bývají jimi opatřeny jen ústavy metronomické prvého řádu. Avšak zkušenosti zde učiněné ukázaly, že výsledky, při vážení v prostoru vzduchoprázdném nabyté, dlužno přijímati s velikou kritičností a obezřelostí, poněvadž jest velice málo takových tuhých látek, které vacuum beze změn svého stavu vydrží.

§ 173. Kontrola závaží.

Říkává se plným právem, že váhy náleží k nejpřesnějším fysikálním apparátům, jež známe; neboť váhy, jdoucí do 1 *kg* maximálního zatížení, udávají snadně ještě 1 *mg*, t. j. $\frac{1}{1000000}$ celku; lze však dobře upraviti váhy ty tak, aby udávaly ještě 0·1 *mg*, čímž stupeň přesnosti stoupne na $\frac{1}{10000000}$. Kdyby na př. délka 1 metru měla býti stanovena s touže přesností, musila by se zaručiti ještě $\frac{1}{10000}$ *mm*, t. j. 0·1 μ, což jest možné jen interferenčními methodami optickými, nikoli na př. komparatorem.

Nemá-li však tato přesnost, jakéž při vážení lze dosáhnouti, býti illusorní, nutno dbáti toho, aby také závaží bylo tak přesně vyrovnáno, jak se to nominálně udává. Zde pak největší opatrnost tím více má místo, poněvadž se závaží užívá, a to ne všech kusů stejně. Užíváním se však nominální jich hodnota může dosti značně změniti, tak že chyby v závaží jsou pak značně větší než chyby pozorovací při vážení samém. Snadno stává se, že pozorovatel snaží se vážiti správně na $\frac{1}{10}$ *mg* a v závažích, jichž užívá, jsou chyby mnoha desetin neb i celých milligrammů. Jest tudíž důležitou úlohou čas od času závaží, jichž pozorovatel užívá, kontrolovati.

Tato kontrola provádí se tím způsobem, že se od největšího kusu počínajíc každý jednotlivý kus závaží srovnává s následujícími, po případě se součtem tolika následujících, aby nominálně byla tatáž hodnota zjednána. Kusy, kteréž se vyskytují dvakrát, nutno nějakým označením (bodem, hvězdičkou a pod.) rozlišovati. Srovnávání velkých kusů dlužno prováděti methodou Gaussovou dvojího vážení. Redukce na vacuum při tom odpadá, poněvadž hmoty srovnávané jsou z téhož materiálu, tudíž téže hustoty. Malé kusy, zejména deci- a centigrammy, dlužno vážiti na vahách velmi citlivých, aby možno-li ještě setiny milligrammu byly zajištěny. Jakožto výsledek všech těchto vážení obdržíme tolik rovnic, kolik kusů závaží má. Rovnice tyto tvoří pozorovací materiál, který se má propočítati.

Když se chce způsob počítání objasniti všeobecně, přichází se k rovnicím a formulím velmi nepřehledným a složitostí svou odstrašujícím. Při počítání číselném tato složitost úplně odpadá, poněvadž se čísla vespolek kombinují opět v čísla, jež výsledek jednoduše udávají. Proto jest daleko výhodnějším předvésti určitý, ze skutečnosti vzatý početní příklad a na tomto způsob počítání objasniti. Spolu jest pak na příkladě takovém viděti, jak značné ony odchylky jednotlivých kusů závaží od hodnoty nominální bývají.

Aby se odchylky tyto obdržely *absolutně*, bylo by nutno, aby jeden kus závaží, nejlépe kilogramm, se srovnal s kilogrammem normálním. Kde běží o vážení absolutní, jest srovnání toto nezbytné. Avšak při pracích chemických a při velmi četných pracích fysikálních jde jen o vážení relativní. V případě tomto stačí, když se úhrnný součet všech kusů závaží pokládá za správný, čímž se chce jen říci, že se odchylky po jednotlivých kusech závaží přiměřeně rozdělí; odchylky ty jsou tedy jen *relativní*. Způsob počítání jest však v obou případech stejný.

Bylo kontrolováno (pozorovatel *V. Šťastný*, 1887 v říjnu) závaží Bungovo (Hamburg), jehož se málo let (od r. 1884) při pracích fysikálních užívalo. Největší kusy byly srovnávány methodou Gaussovou na vahách Bungových, udávajících ještě desetiny *mg*; malé a nejmenší kusy na vahách Herzbergových, udávajících ještě setiny *mg*. Počítáno bylo na tisíciny *mg*, aby se setiny zajistily; ve výsledku se ovšem třetí decimální místo jako korrekční vynechá.

Výsledek jednotlivých vážení až do grammu ukazují rovnice následující:

									mg
1000	=			500	+ 200 +	200*	+ 100		− 0·160
500	=				200 +	200*	+ 100		− 1·171
200	=					200*			+ 0·081
200*	=	100	+ 50	+ 20 +	20*	+ 10			− 0·825
100	=		50	+ 20 +	20*	+ 10			− 0·533
50	=			20 +	20*	+ 10			+ 0·044
20	=				20*				+ 0·047
20*	=	10	+ 5	+ 2 +	2*	+ 1			− 0·293
10	=		5	+ 2 +	2*	+ 1			− 0·277
5	=			2 +	2*	+ 1			− 0·165
2	=				2*				− 0·048
2*	=	1	+ σ						+ 0·012
1	=		σ						− 0·019

Při takovémto srovnávání vyniká zvlášť výhoda soustavy 5, 2, 2, 1. Značka σ značí součet všech decigrammů rovnající se jednomu grammu. Tento gramm přijme se jako by za neznámou veličinu x a touto se vyjádří všechny ostatní kusy závaží postupnou substitucí. To dává rovnice následující:

				mg
1	=	x	−	0·019
2*	=	$2x$	−	0·007
2	=	$2x$	−	0·055
5	=	$5x$	−	0·246
10	=	$10x$	−	0·604
20*	=	$20x$	−	1·224
20	=	$20x$	−	1·177
50	=	$50x$	−	2·961
100	=	$100x$	−	6·499
200*	=	$200x$	−	13·290
200	=	$200x$	−	13·209
500	=	$500x$	−	34·169
1000	=	$1000x$	−	67·327.

Kdyby se nyní některý kus závaží, na př. 1000gramm, srovnal s normálním kilogrammem, obdržela by se odchylka onoho kusu od správné hodnoty nominální a tím také hodnota neznámé x.

Jinak přijmeme součet všech kusů za správný. Sečítajíce tedy všechny předcházející rovnice vespolek obdržíme

$$2110\,g = 2110\,x - 140{\cdot}787\,mg$$
$$x = 1\,g + 0{\cdot}066724\,mg.$$

Tím jest hodnota x určena; odchylku její nutno počítati na tolik decimál, aby v jejím největším násobku, zde 1000 x, ještě tolik decimál ciferně zůstalo, na kolik se počet vede, zde tedy na 3 decimály. Zbývá ještě jen dosaditi hodnotu za x vypočítanou do rovnic, v nichž jednotlivé kusy závaží touto veličinou x jsou vyjádřeny. Tak vyjde konečně výsledek závěrečný následující:

				Odchylka
1	=	1 *g*	+ 0·048 *mg*	+ 0·05 *mg*
2*	=	2 *g*	+ 0·126	+ 0·13
2	=	2 *g*	+ 0·078	+ 0·08
5	=	5 *g*	+ 0·088	+ 0·09
10	=	10 *g*	+ 0·063	+ 0·06
20*	=	20 *g*	+ 0·110	+ 0·11
20	=	20 *g*	+ 0·157	+ 0·16
50	=	50 *g*	+ 0·375	+ 0·38
100	=	100 *g*	+ 0·173	+ 0·17
200*	=	200 *g*	+ 0·055	+ 0·06
200	=	200 *g*	+ 0·136	+ 0·14
500	=	500 *g*	− 0·807	− 0·81
1000	=	1000 *g*	− 0·603	− 0·60.

Srovnávání malých závažíček, decigrammů a centigrammů, se k těmto výsledkům připojí. Pozorovací materiál obsahují následující rovnice, vážením zjednané:

								mg
1	=		0·5	+ 0·2	+ 0·2*	+ 0·1		− 0·019
0·5	=			0·2	+ 0·2*	+ 0·1		+ 0·038
0·2	=				0·2*			+ 0·002
0·2*	=	0·1	+ 0·05	+ 0·02	+ 0·02*	+ 0·01		+ 0·110
0·1	=		0·05	+ 0·02	+ 0·02*	+ 0·01		+ 0·078
0·05	=			0·02	+ 0·02*	+ 0·01		− 0·023
0·02	=				0·02*			− 0·002
0·02*	=	0·01	+ 0·01*					− 0·073
0·01	=	0·01*						− 0·034.

Zavedeme-li hodnotu 0·01* za neznámou y, kterou pak všechny jednotlivé kusy malých závažíček vyjádříme, obdržíme postupnou substitucí

			mg
0·01	=	y	− 0·034
0·02*	=	$2y$	− 0·107
0·02	=	$2y$	− 0·109
0·05	=	$5y$	− 0·273
0·1	=	$10y$	− 0·445
0·2 *	=	$20y$	− 0·858
0·2	=	$20y$	− 0·856
0·5	=	$50y$	− 2·121
1	=	$100y$	− 4·299.

Avšak kus poslední, 1 jest již určen. Jeho hodnota jest

$$1 = 1\ g + 0{\cdot}048\ mg.$$

Z toho se tedy vypočte

$$y = 0{\cdot}01\ g + 0{\cdot}04347\ mg.$$

Když pak výsledek tento opět postupně dosazujeme, obdržíme jakožto závěrečný výsledek následující:

			Odchylka
0·01 *	= 0·01 g	+ 0·043 mg	+ 0·04 mg
0·01	= 0·01 g	+ 0·009	+ 0·01
0·02 *	= 0·02 g	− 0·020	− 0·02
0·02	= 0·02 g	− 0·022	− 0·02
0·05	= 0·05 g	− 0·056	− 0·06
0·1	= 0·1 g	− 0·010	− 0·01
0·2 *	= 0·2 g	+ 0·011	+ 0·01
0·2	= 0·2 g	+ 0·013	+ 0·01
0·5	= 0·5 g	+ 0·052	+ 0·05.

Nazvali jsme malá ta výsledná čísla *odchylkami* a nikoli korrekcemi; neboť nejedná se o to, hledati *korrekce* závaží, t. j. stanoviti, mnoho-li dlužno k nějakému kusu přidati nebo od něho ubrati, aby kus ten měl tu hmotu *fakticky*, jakou má *nominálně*, nýbrž jen stanoviti, jaká jest jeho *hmota skutečná*, oč váží, jak říkáme, více nebo méně, než jak jest při něm udáno. Korrekce by měly patrně opačné znamení než ony odchylky.

§ 174. Jak lze pozorováním číselně stanoviti konstanty vah.

Vraťme se ke konci oddílu tohoto o vahách k základům theoretickým, jimiž jsme výklad začali. Pro citlivost a dobu kyvu, jež pro práci s vahami mají hlavní význam, odvodili jsme rovnice

$$n = R\ tg\ \alpha \qquad tg\ \alpha = \frac{mL}{M_0 l_0 + 2Ml}$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \qquad \lambda = \frac{M_0 L_0^2 + 2ML^2}{M_0 l_0 + 2Ml}$$

Z rovnic těchto poznáváme, jaké to jsou veličiny, jež zde rozhodují. Vedle vahadla, t. j. jeho hmoty M_0, délky $2L$ a poloměru setrvačnosti L_0, a vedle

jeho zatížení $2M$, jsou to odlehlosti l_0 a l (obr. 121.). O těchto bylo již z výkladu samého patrno, že jsou vzhledem k délkám L a L_0 velmi malé. Mají-li však ony vzorce býti zcela jasnými, jest velice žádoucno, aby se na nějakém případu konkretním, pro jisté určité váhy, jak se jich k účelům vědeckým užívá, číselně ukázalo, jak jsou malými, jakého řádu. K tomu je třeba provésti *pozorování*, jak *citlivosti* tak *doby kyvu*, pro *zatížení rozličná*; pozorování ta se doplňují a zároveň navzájem se kontrolují, čímž se úkol, sám sebou důležitý, stává zajímavějším.

Za příklad buďtež uvedena pozorování, jež Dr. *Vlad. Novák* provedl na vahách Rueprechtových (obr. 123.). Váhy tyto, jdoucí do zatížení až 250 g, byly k účelu tomu citlivěji regulovány než jak bylo původně a jak v § 167. udáno. Ukázalo se, že s tímto zvýšením citlivosti jest jich provedení mechanické v úplném souhlasu. Číselné konstanty určeny takto:

Hmota vahadla	$M_0 =$	140·353 g,
délka vahadla	$2L =$	29·02 cm,
délka ukazovatele	$R =$	27·50 cm.

Vykonána pak mnohá pozorování orientační jak citlivosti tak doby kyvu. Za urychlení vzata hodnota (Praha)

$$g = 981{\cdot}0\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Mezi výsledky, odvozenými jednak z citlivosti, jednak z doby kyvu, nebylo žádoucího souhlasu. Ukázalo se však, že délka l, kteráž vyšla positivní, nejevila se býti konstantní, nýbrž v mezích pružnosti se zatížením měnlivou; při větším zatížení se tedy vahadlo poněkud více prohýbá. O jak malinká prohnutí zde však jde, objasní se výsledky níže uvedenými. Z okolnosti, že vahadlo se v mezích pružnosti většímu zatížení poddává, usouzeno, že zde asi také bude rozhodovati doba působení a že tudíž, aby docíleno bylo souhlasu, nutno pracovati jako by s prohnutím limitním, jaké se dostaví teprve po uplynutí doby dostatečně dlouhé. Na základě toho učiněn zvláštní plán pozorovací, jehož provedením, jak dále viděti, docíleno souhlasu tak dobrého, že tím zase naopak správnost onoho soudu se dotvrdila. Váhy zatíženy a vybaveny; učiněna malá korrekce, aby rovnovážná poloha souhlasila se středním dílcem stupnice. Na to se nechaly váhy volně kývati $^1/_4$ hodiny; tím se prohnutí vahadla ustálilo; teprve potom přikročeno, — *bez arretace vah* — ke stanovení doby kyvu. Pozorováno chronometrem Bröckingovým (obr. 26.) 13 průchodních okamžiků, t. j. stanoven vždy okamžik, kdy ukazovatel prošel právě přes střední dílec stupnice. Na to pak — *opět bez arretace vah* — stanovena citlivost ($m = 1$ mg), jako by v přímé souvislosti s pozorováním doby kyvu při témže prohnutí vahadla. Rovnovážné polohy počítány ze čtyř bodů obratu. Dílce stupnice jsou millimetry. Na to doba kyvu opětně — *bez arretace vah* — určena ke kontrole ještě jednou. Do počtu pak zavedeny hodnoty průměrné, při nichž decimála poslední má ovšem jen početní význam, byvši podržena tak, jak z průměrných hodnot vyšla bez zaokrouhlení.

Takovým způsobem zjednána mezi stanovením citlivosti a mezi určením doby kyvu jako by přímá *souvislost*, arretace vah mezi pozoro-

váním způsobila by *diskontinuitu*, následkem kteréž by nebylo lze pozorování kombinovati.

Pozorování definitivní konána v únoru 1900. Nejprve určeno n a t pro $M = 0$, t. j. pro vahadlo samotné, nezatížené (ani miskami). Vyšlo:

$$n = 3{\cdot}372\ mm \qquad t = 9{\cdot}0087\ sec.$$

Na základě těchto dat, vzhledem k rovnici

$$n = \frac{RL}{M_0 l_0} \text{ vypočteno } l_0 = 0{\cdot}08431\ mm.$$

a vzhledem k rovnici

$$\lambda = \frac{L_0^2}{l_0} \text{ vypočteno } L_0 = 82{\cdot}47\ mm.$$

Čísla tato udávají další konstanty vahadla, určujíce polohu jeho těžiště pod osou a jeho poloměr setrvačnosti.

Na to zavěšeny na vahadlo jeho misky se závěsy. Jich hmota byla před tím určena a nalezena,

hmota misky a závěsu v pravo . . . 36·3613 g,
» » » » v levo . . . 36·3609 » .

Po tom provedeno ve způsobu dříve vylíčeném pět řad pozorování citlivosti i doby kyvu, a to pro zatížení miskami a závěsy samotnými a pak pro zatížení o 50, 100, 150 a 200 grammů větší.

Výsledek práce a výpočty odlehlosti l jak z pozorování citlivosti tak z pozorování doby kyvu udává přehledně tabulka následující:

Citlivost a doba kyvu vah Rueprechtových.

Výpočet odlehlosti l.

	M	n	l	t	l
	g	mm	mm	sec	mm
1	0	3·372		9·0087	
2	36·361	3·133	0·0124	14·0854	0·0106
3	86·361	2·878	0·0118	18·3558	0·0109
4	136·361	2·652	0·0118	21·1000	0·0121
5	186·361	2·415	0·0126	23·2847	0·0121
6	236·361	2·219	0·0130	24·6305	0·0132

Srovnávajíce výsledky pro l, jak vyšly jednak z citlivosti, jednak z doby kyvu, shledáváme souhlas velmi dobrý.

Dlužno zajisté uvážiti, že se l počítá z *přírůstku* $2Ml$ momentu celkového $M_0 l_0 + 2Ml$, tudíž z hodnot *differenčních*; proto jest také souhlas lepší tam, kde tyto přírůstky jsou větší, t. j. kde zatížení M jest větší. Čísla ukazují se zatížením chod, který se pravidelněji jeví z pozorování doby kyvu. Jest to pochopitelné, poněvadž dobu kyvu t lze stanoviti přesněji než citlivost n. Redukce doby kyvu na vacuum, zde velice nesnadná, jde do chyb pozorovacích. Také redukce na amplitudy »nekonečně malé« nebyla nutná, poněvadž amplitudy byly již velmi malé. Onen chod čísel l jest však mírný. Pozorování tudíž ukazují, že se vahadlo větším zatížením poněkud prohýbá, ač prohnutí nečiní více než asi 3 tisíciny millimetru. A i jinak jest odlehlost l samotna velmi malá, činíc asi osminu odlehlosti l_0 těžiště, něco málo přes setinu millimetru. A přec vidíme, jak i tyto nepatrné délky způsobují v citlivosti ubývání dosti značné, totiž od $n = 3{\cdot}37$ při zatížení vahadla nullovém až do $n = 2{\cdot}22$ při zatížení vahadla miskami a závažím 200gramm. Tím se vysvětluje, proč jest prakticky nemožno zhotoviti váhy, jichž citlivost by byla konstantní.

Grafickým znázorněním výsledků pozorovaných, jehož zde neuvádíme, vynikne průběh veličin n a t, jakož i průměrných hodnot l velice poučně.

XI.

Tíže všeobecná.

Gravitační pole.

§ 175. Rozvoj historický.

Tíži zemskou pozorujeme v nížinách i na výšinách, pokud jsou nám přístupny; z četných úkazů soudíme na její působnost i ve výškách nám nepřístupných, ve výškách, v nichž se tvoří oblaky, v nichž meteory prolétají vzduchové vrstvy, odkud po případě na zem padají; i jest blízkou myšlenka, že působnost tíže sahá ještě dále, že sahá na př. až k měsíci. Přesvědčení toto pronikalo poměrně záhy, již proto, že navzájem působení měsíce na zemi, jak se jeví přílivem a odlivem, ode dávna bylo poznáno. Myšienku, že působí země na měsíc a naopak, rozšířiti v tom smyslu, že podobně slunce působí na své oběžnice a naopak, nebylo krokem tak nesnadným; zakončením pak tohoto postupu myšlenkového bylo, vlastnost tuto připsati hmotě vůbec, a tak dojíti zákona o tíži čili o gravitaci všeobecné. Tento krok poslední, toto dovršení díla, víže se na jméno *I. Newton.*

O gravitaci všeobecné měl již tušení jakési *M. Kopernik*; alespoň nasvědčuje tomu jedno místo v jeho slavném spise: De Revolutionibus Orbium coelestium (1543): »Já však domnívám se, že není tíže ničím jiným, než přirozenou jakousi snahou vloženou v částice božskou prozřetelností Tvůrce veškerenstva, aby v jednotu a celek se spojily, nabývajíce tvaru koule. I jest pravdě podobno, že tato snaha i v slunci, měsíci a při jiných oběžnicích se nalézá, tak že jejím působením v tom kulatém tvaru, v němž se nám jeví, setrvávají, vykonávajíce při tom mnohými způsoby oběhy své.«

Také *J. Kepler* ve spise Astronomia nova 1609 četné uvádí výroky, z nichž vysvítá, že hledal sílu ze slunce jakožto středu světa vycházející, kteráž by ovládala oběžnice; avšak představoval sobě sílu tu jako magnetickou. Neznaje pak zákona setrvačnosti hmoty v pohybu vysvětloval pohyb

oběžnic kolem slunce, jak bychom nyní řekli, spolupůsobením síly centrální, od slunce vycházející, a jiné ještě síly tangenciální přímo oběžnici vrozené. Nadpis hlavy XXXIII. spisu výše uvedeného na př. zní: »Síla, kteráž oběžnice v pohyb uvádí, sídlí v tělese slunečním.« Analogicky praví pak o zemi naší: »Měsíc zemí se v oběhu pohání, ne však slunce neb ostatní: země však sluncem« *). Co se pak týče otázky o povaze oné síly centrální, dokazuje v následující hlavě XXXIV. větu: »Těleso sluneční jest magnetické.« Hledí tudíž neznámou sílu gravitační vysvětliti známější magnetickou. Jak této myšlenky došel, naznačuje sám slovy: »ježto země sama, jak Angličan Vilém Gilbert dokazuje, velkým jakýmsi jest magnetem« **). Byl tudíž pod dojmem spisu, kterýž krátce před tím vydal *W. Gilbert* již ke konci svého života ***).

Nedlouho po J. Keplerovi pronikalo poznání setrvačnosti hmoty v pohybu vždy jasněji a tím odpadla pro jeho nástupce nutnost pátrati po oné síle tangenciální, která by oběžnice vedla kolem slunce anebo měsíc kolem země. Tím větší pozornost mohla býti věnována síle centrální. V tomto smyslu učinili mnohé pokroky někteří vrstevníci I. Newtona, jako *Halley, Hooke, Wren* a jiní. Než přes to plným právem zakončení celého díla přičítá se I. Newtonovi samému, kterýž nepřestal na pouhém vyslovení myšlenky, nýbrž pátral po číselném důkazu a teprve, když tento se zdařil, formuloval zákon o tíži všeobecné kvantitativně v té formě, jak dosud jí užíváme, a jak jest obsažena ve slavném spise Newtonově: Philosophiae naturalis principia mathematica. Spis tento vyšel roku 1687, a lze tudíž tento rok pokládati za datum objevu zákona o všeobecné gravitaci †).

---

*) Virtutem, quae Planetas movet, residere in corpore Solis. — Lunam a Tellure circumagi at non Solem aut caeteros: Tellurem vero a Sole.

**) Corpus Solis esse magneticum; cum ipsa Tellus Gulielmo Gilberto Anglo demonstrante magnus quidam sit magnes.

***) »De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellure physiologia nova« (London, 1600). První vědecký spis o magnetismu, zejména zemském. *William Gilbert* (1540—1603) žil většinou v Londýně, jsa lékařem královny Alžběty a krále Jakuba I.

†) *Isaac Newton* narodil se $^5/_1$ 1643 ve Whoolstorpe v Lincolnshire. Jako jinoch 18tiletý přišel na Trinity College v Cambridge, kdež se věnoval hlavně studiu mathematiky; učitelem jeho byl Barrow. Do doby těchto studií připadá první pokus o numerické zkoušce zákona gravitačního vzhledem k měsíci, ke kteréž byl prý veden pozorováním padajícího jablka; avšak zkouška ta nevedla k výsledku očekávanému, poněvadž do počtu byl vzat průměr země (10 500 *km*) nepřesný; teprve po 20 letech, když Picard ve Francii na základě měření poledníkových odvodil hodnotu správnou, obnovil počet, jenž pak souhlasil. Do doby jeho studií v Cambridge připadají též první jeho práce optické. Roku 1669 stal se nástupcem svého učitele mathematiky, jenž se místa svého v jeho prospěch vzdal. V tomto postavení setrval Newton až do roku 1703, kdy přesídlil do Londýna, kdež se stal předsedou Royal Society. Zemřel $^{31}/_3$ 1727 na svém sídle v Kensingtonu. Srovnej obšírné vypsání jeho života a ocenění jeho hlavního díla ve spise Isaak Newton a jeho principia, A. Seydler (1887); dále Bohatýrové ducha, F. J. Studička (1898).

§ 176. Základní výraz zákona gravitačního.

Základní formulace zákona gravitačního stanoví sílu f, jakou na sebe působí, k sobě gravitují, dvě hmoty m_1 a m_2 roměrů tak malých, že je lze ve známém již smyslu za hmotné body pokládati; tím jest určitě dána jich odlehlost D. I jest pak vzorec

$$f = \varkappa \frac{m_1 \cdot m_2}{D^2}$$

základním pro všeobecnou gravitaci. Při tom jest $\varkappa$ číselná konstanta, podmíněná volbou jednotek; zove se konstantou gravitační.

Zákon gravitační lze uvésti na formu jinou, když na místě síly f zavedeme urychlení. Zde však dlužno rozeznávati. *Síla* f jest pro gravitující hmoty m_1 a m_2 stejná; silou touto přitahují se hmoty navzájem. *Urychlení* jsou však různá. Značí-li a_1 urychlení, které hmota m_2 udílí hmotě m_1 a podobně a_2 urychlení, které hmota m_1 udílí hmotě m_2, jest

$$a_1 = \frac{f}{m_1}, \qquad a_2 = \frac{f}{m_2}.$$

Anebo vzhledem k rovnici hořejší

$$a_1 = \varkappa \frac{m_2}{D^2}, \qquad a_2 = \varkappa \frac{m_1}{D^2}.$$

Tudíž urychlení vzájemné

$$a = a_1 + a_2,$$

t. j.

$$a = \varkappa \frac{m_1 + m_2}{D^2}.$$

Rovnice tato udává druhou základní formulaci zákona gravitačního.

Pro urychlení a_1 a a_2 plyne:

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1.$$

Poměr urychlení jest tudíž dán obráceným poměrem hmot, a naopak. Dle toho bylo by možno hmoty m srovnávati dle urychlení a, jež udílí sobě navzájem.

§ 177. Intensita pole gravitačního.

Mějmež libovolnou hmotu m v bodě soustředěnou. Dle výkladů předešlých vzniká v okolí této hmoty pole silové, zde *gravitačním zvané*, jevící se tím, že jakákoli hmota v tomto poli podléhá určité síle, která jest této hmotě samé vždy úměrnou. Proto jest

pole silové dostatečně charakterisováno, je-li známo, jaké síle podléhá *jednotka* hmotná. Tuto sílu zoveme *intensitou pole gravitačního.*

Podle základního zákona gravitačního jest tato intensita a gravitačního pole hmoty m stanovena výrazem

$$a = \varkappa \frac{m}{D^2}.$$

Podobným způsobem stanovíme intensitu pole magnetického, elektrického, tedy silového vůbec. Zavedení tohoto pojmu má výhodu formální; při úvahách gravitačních netřeba stále v počet bráti hmotu druhou, kterou jako by za passivní považujeme, tak že tím více vynikne význam hmoty prvé, kterou za aktivní pokládáme, v tom smyslu, jako by od ní působení gravitační vycházelo. Rozumí se ovšem samo sebou, že působení gravitační jest vždy vzájemné; přes to užíváme často onoho způsobu mluvy, abychom právě význam jisté hmoty vyznačili. Tak pravíme, že slunce ovládá pohyby oběžnic, považujeme tedy slunce jako by za aktivní a oběžnice za passivní, ačkoli se ovšem pohyby tyto na působení vzájemném zakládají.

Pro silové pole *gravitační* jest intensita pole číselně stejná jako urychlení, poněvadž jde o jednotkové množství *hmotné*; proto v následujících úvahách označujeme intensitu pole stejnou písmenou a jako urychlení. Je-li silové pole elektrickým neb magnetickým, jde o jednotkové množství elektrické neb magnetické, tak že pojem intensity pole se od pojmu urychlení liší.

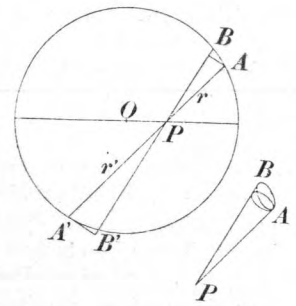
§ 178. Gravitační pole homogenní kulové vrstvy.

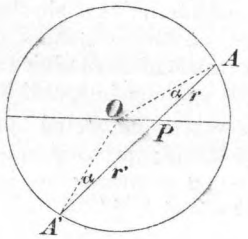
Vycházejíce od základního zákona gravitačního, platného pro hmoty bodové, odvodíme snadným mathematickým rozborem výraz pro gravitační působení homogenní kulové vrstvy hmotné, tloušťky velice (nekonečně) malé; konstantní hmota povrchové jednotky budiž ϱ.

Majíce stanoviti intensitu gravitačního pole takové vrstvy v libovolném bodě P, rozeznávejme případy dva. Bod P jest buď vnitř nebo vně dané vrstvy kulové.

1. Budiž bod P vnitř kulové vrstvy (obr. 128.). Položme bodem tím kruhový kužel otvoru velice (nekonečně) malého. Tento vytne z kulové vrstvy na opačných stranách plošky velice (nekonečně) malé AB a $A'B'$. Lze snadno poznati, že působení obou těchto hmotných plošek na jednotkovou hmotu v bodě P jest stejné a protisměrné, tak že výsledek jest nullový. Neboť působení toto jest úměrno výrazu *plocha*: $(vzdálenost)^2$. Avšak touže měrou, kterou při stejném sklonu k přímce AA' na př. ploška $A'B'$ jest větší než

AB, jest také čtverečná odlehlost r'^2 větší než r^2. Intensita pole v bodě P, pokud pochází od plošek AB a $A'B'$, jest tedy nullová. A poněvadž podobnými malými kuželi lze celou kulovou vrstvu rozděliti a vyčerpati, jest patrno, že intensita gravitačního pole uvnitř dané kulové vrstvy vůbec jest nullová.





Obr. 128.

Podrobnější výklad jest následující. Prostorový úhel kužele budiž $d\omega$; jest to plocha vyseknutá kuželem na kouli poloměru = 1; na koulích poloměru r a r' byla by vyseknutá ploška $r^2\,d\omega$ a $r'^2\,d\omega$. Jedna i druhá jest k ploškám AB a $A'B'$ nakloněna o týž uhel α. Máme pak:

$$AB = \frac{r^2 d\omega}{\cos\alpha}, \qquad A'B' = \frac{r'^2 d\omega}{\cos\alpha}.$$

Gravitační působení na jednotkovou hmotu v bodě P jest dáno výrazem:

$$\varkappa \frac{\varrho \,.\, AB}{r^2} = \varkappa\varrho \frac{d\omega}{\cos\alpha},$$

$$\varkappa \frac{\varrho \,.\, A'B'}{r'^2} = \varkappa\varrho \frac{d\omega}{\cos\alpha}.$$

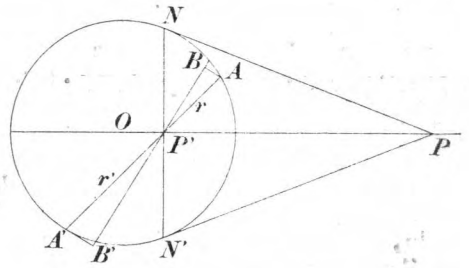
Jest tedy stejné a protisměrné a dává tudíž výsledné působení nullové.

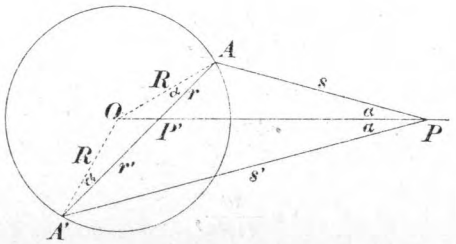
2. Budiž bod P vně kulové vrstvy (obr. 129.). Abychom podobným způsobem jako při 1. zjednali dvě plošky AB a $A'B'$, jichž působení na jednotkovou hmotu v bodě P by bylo stejné, stanovme k tomuto vnějšímu bodu P vnitřní bod P' sdružený, vedouce centrálu PO a mimo to v rovině nákresné přímky PN a PN' tečné ke kruhu rovinou nákresnou z kulové vrstvy vyříznutému a spojice body tečné N a N'; průsek P' spojnice NN' s centrálou PO jest bodem k danému vnějšímu P vnitř sdruženým.

Položme opět tímto bodem P' kruhový kužel velice malého otvoru; tento vytne na kulové vrstvě plošky AB a $A'B'$, jichž odlehlost od bodu P jest s a s'. Lze snadno dokázati, že působení každé z těchto vrstev na jednotkovou hmotu v bodě P jest stejné a že působení výsledné obou padne do směru centrály. Když pak celou kulovou vrstvu rozdělíme na podobné podvojné plošky, vychází, že také úhrnné působení celé kulové vrstvy padne do směru centrály a že jest takové, jako by celá hmota vrstvy byla v jejím středu O soustředěna.

Jako dříve jest i zde

$$AB = \frac{r^2 d\omega}{\cos\alpha}, \qquad A'B' = \frac{r'^2 d\omega}{\cos\alpha}.$$





Obr. 129.

Gravitační působení na jednotkovou hmotu v bodě P jest dáno výrazem

$$\varkappa \frac{\varrho \,.\, AB}{s^2} = \varkappa\varrho \frac{r^2}{s^2} \frac{d\omega}{\cos\alpha},$$

$$\varkappa \frac{\varrho \,.\, A'B'}{s'^2} = \varkappa\varrho \frac{r'^2}{s'^2} \frac{d\omega}{\cos\alpha}.$$

Aby oba účinky byly stejně veliké, závisí na úměře

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'},$$

kteráž plyne z podobnosti trojúhelníků jednak OPA a $OP'A$, jednak OPA' a $OP'A'$. Základem této podobnosti jest společný úhel a úměra

$$OP' : R = R : OP$$

plynoucí z konstrukce bodu P'. Z oné podobnosti vychází však:

$$\frac{r}{s} = \frac{R}{OP'}, \qquad \frac{r'}{s'} = \frac{R}{OP}.$$

Působení plošky AB i $A'B'$ jest tedy dáno týmž výrazem

$$\varkappa\varrho \frac{R^2}{OP^2} \cdot \frac{d\omega}{\cos\alpha}.$$

Při stejnosti úhlu $\alpha = OPA = OPA'$ jest patrno, že výslednice obou sil padne do směru centrály PO a že každá z obou plošek přispívá k výslednici složkou

$$\varkappa\varrho \frac{R^2}{OP^2} \cdot \frac{d\omega}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \varkappa\varrho \frac{R^2}{OP^2} \cdot d\omega.$$

Tato složka jest tedy konstantní pro všechny plošky vyříznuté jakýmkoli velice malým kuželem, který položíme bodem P. — Úhrnné působení obdržíme sečtouce tyto složky pro všechny kužele otvoru $d\omega$, kterými celá plocha dané kulové vrstvy se vyčerpá. Toto sečítání patrně přejde na sečítání všech plošek $d\omega$, které vyplňují kouli poloměru jednotkového, povrchu 4π. Jest tedy úhrnné působení dáno výrazem

$$\varrho \frac{4\pi R^2}{OP^2}.$$

Zde však jest ϱ hmotou jednotky povrchové dané vrstvy kulové, $4\pi R^2$ jest celý celý její povrch, tedy $\varrho \cdot 4\pi R^2$ jest úhrnná její hmota m.

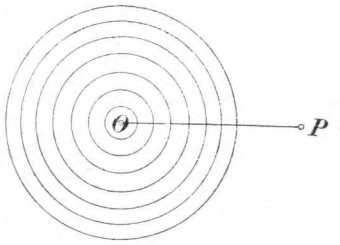
Intensita gravitačního pole v bodě P jest tudíž dána výrazem

$$\varkappa \frac{m}{OP^2},$$

tak že jest taková, jako by celá hmota dané kulové vrstvy byla v jejím středu O soustředěna.

§ 179. Gravitační pole koule z homogenních kulových vrstev složené.

Výsledků odstavce předcházejícího lze užiti na hmotnou kouli, složenou z jednotlivých kulových vrstev, kteréž jednotlivě jsou homogenní, mezi sebou však mohou býti heterogenní. Intensita gravitačního pole v bodě P, pokud tento bod leží mimo kouli (obr. 130.), jest taková, jakoby hmota každé jednotlivé kulové vrstvy a tudíž i úhrnná hmota celé koule v jejím středu byla soustředěna. Blíží-li se tudíž bod P z velké dálky ke středu O koule, roste intensita jako čtverec reciproké hodnoty odlehlosti OP.



Obr. 130.

Představíme-li si však, jako by bod P vnikal do vnitř koule, odpadá pro intensitu pole působení těch vrstev, proti kterým bod P jest vnitř, naproti tomu zvyšuje se působení těch vrstev, proti kterým jest bod P vně, poněvadž vrstvy tyto jsou mu blíže.

Otázka, stoupá-li i dále intensita pole či klesá-li, závisí patrně na tom, zdali působení vrstev, kteréž pro intensitu pole odpadají, jest více než vyváženo větší blízkostí a eventuálně větší poměrně hmotností vrstev zbývajících. Ve středu O samém jest intensita gravitačního pole nullová; proto musí intensita pole při pokračujícím přibližování bodu P ke středu O po eventuálním vystoupení na hodnotu maximální zase klesati až k hodnotě nullové. Velmi instruktivně vynikne tato věc v konkretním případě, když se applikuje na naši zemi.

§ 180. Průměrná hustota země.

Intensitu gravitačního pole na *povrchu* země pro hladinu mořskou, čili urychlení tíže ryze gravitační, lze stanoviti. Skutečné urychlení g_0 tíže na *rovníku*, jak se vypočítá z pozorování kyvadlových, jest totiž

$$g_0 = 978{\cdot}10 \frac{cm}{sec^2}.$$

Připočteme-li k tomu centrifugální urychlení γ_0 na rovníku, o němž v oddílu o pohybu středoběžném budeme jednati,

$$\gamma_0 = 3{\cdot}39 \frac{cm}{sec^2},$$

obdržíme urychlení G_0 pouze gravitační pro rovník

$$G_0 = 981{\cdot}49 \frac{cm}{sec^2}.$$

Urychlení skutečné g_1 na *polu*, kde urychlení centrifugální $\gamma_1 = 0$, jest identické s urychlením G_1 pouze gravitačním, a činí

$$G_1 = 983{\cdot}11 \frac{cm}{sec^2}.$$

Pro hodnotu průměrnou $\frac{1}{2}(G_0 + G_1) = G$ vychází tudíž

$$G = 982{\cdot}30 \frac{cm}{sec^2}.$$

S tímto průměrným urychlením lze s přibližností, jež pro účely naše úplně stačí, identifikovati urychlení vypočtené pro zemi naši jakožto kouli poloměru středního R dle rovnice

$$G = \varkappa \frac{\overset{+}{\circlearrowleft}}{R^2},$$

kdež znamená $\overset{+}{\circlearrowright}$ úhrnnou hmotu země jako by v jejím těžišti soustředěnou. Formulace tato jest dovolena, poněvadž zemi naši s velkou přibližností lze pokládati za kouli složenou z homogenních vrstev kulových. Zavedeme-li pak průměrnou specifickou hmotu S všech těchto vrstev, čili celé země naší, můžeme psáti

$$\overset{+}{\circlearrowright} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 . S$$

tak že

$$G = \tfrac{4}{3}\varkappa\pi RS.$$

V rovnici této zůstávají neznámými veličiny $\varkappa$ a S, jichž součin lze počítati z rovnice

$$\varkappa S = \frac{G}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Rozměr tohoto součinu jest

$$\frac{1}{T^2} \text{ všeobecně}, \qquad \frac{1}{sec^2} \text{ zvlášť};$$

není tedy podmíněn volbou jednotky délkové a hmotné. Číselná jeho hodnota závisí ještě na středním poloměru R země (§ 23.). Obyčejně brává se pro tento hodnota starší Besselova. Rozhodneme-li se pro novější Fayeovu, máme číselně

$$G = 982{\cdot}30\ \frac{cm}{sec^2}, \qquad R = 6371{\cdot}103\ km,$$

$$\varkappa S = 3{\cdot}6808 . 10^{-7}\ \frac{1}{sec^2}.$$

Další určení konstant $\varkappa$ a S jest možno jen na základě pokusů zvláštních. Patrně jest to jednostejné, řekne-li se, že pokusy těmito stanovíme $\varkappa$ anebo že jimi stanovíme S, poněvadž hodnota jedna se dá ihned počítati z druhé. Konstanta gravitační jest počtu bližší, vstupujíc do příslušných vzorců přímo; za to jest průměrná hustota země číselnou hodnotou svou přehlednější a i významem svým jednodušší, a proto také oblíbenější. Přes to není vhodné, do vzorců, jež při oněch zvláštních pokusech se odvozují, konstantu S skutečně zaváděti, poněvadž se tím vzorce tyto zbytečně komplikují; lépe jest podržeti vesměs konstantu $\varkappa$ a pak hustotu S dle posledního, jednou pro vždy odvozeného vzorce číselně počítati.

Dle nynějšího stavu věcí jeví se býti pravdě nejpodobnějšími hodnoty

$$\varkappa = 6{\cdot}69 . 10^{-8}\ \frac{cm^3}{g . sec^2}, \qquad S = 5{\cdot}50\ \frac{g}{cm^3}.$$

Objem země činí (H. Faye, § 23.), v kubických metrech

$$V = 1{\cdot}08326 . 10^{21} . m^3.$$

Násobíce toto číslo specifickou hmotou S v jednotkách

$$S = 5{\cdot}50\ \frac{t}{m^3},$$

obdržíme hmotu země naší

$$\overset{+}{\circlearrowright} = 5{\cdot}9579 . 10^{21} . t,$$

tedy okrouhle šest tisíc trillionů tun.

§ 181. **Gravitační jednotka hmoty.**

Hmota m v bodu soustředěná způsobuje v okolí svém gravitační pole, jehožto intensita v odlehlosti D jest dána výrazem

$$a = \varkappa\ \frac{m}{D^2}.$$

Výraz tento zjednodušil by se formálně, kdybychom zavedli za hmotu m vyjádřenou v grammech, novou číselnou hodnotu m^* dle relace

$$\varkappa m = m^*,$$

tudíž založenou na jednotce hmotné, rovnající se $\frac{1}{\varkappa}$ gramm. Tato jednotka hmotná, určená konstantou gravitační, zove se dle toho jednotkou gravitační. Její rozměr jest

$$\frac{L^3}{T^2} \text{ všeobecně}, \qquad \frac{cm^3}{sec^2} \text{ zvlášť}.$$

Číselná pak její hodnota $\frac{1}{\varkappa}$ činí

$$0{\cdot}1495 . 10^8\ g = 14950\ kg = 14{\cdot}95\ t.$$

Kdyby se gravitační jednotka hmoty, jakožto odvozená, zavedla do fysiky, tak že by základními jednotkami zůstaly toliko dvě, jednotka délky a času, změnily by se výrazy rozměrové všech odvozených jednotek tak, že by v nich přicházely jen celé mocnosti délky L a času T. Tak byl by na př. rozměr síly L^4/T^4, rozměr práce L^5/T^4 a pod. Zejména — předbíháme-li do jiných oborů fysiky — byl by rozměr jednotky pro množství magnetické a elektrické týž jako pro množství hmotné, což jest pochopitelno, poněvadž základní zákon Coulombův pro vzájemné působení určitých v bodě soustředěných množství magnetických a elektrických jest parafrase gravitačního zákona Newtonova.

Počítejme ještě, jak veliký by byl poloměr r koule z daného materiálu vytvořené, kterou by se astronomická jednotka realisovala. Je-li s speci-

fická hmota materiálu toho, platí rovnice

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 . s = \frac{1}{\varkappa}.$$

Pro olovo na př. jest

$$s = 11{\cdot}30\ \frac{g}{cm^3}, \qquad r = 68{\cdot}10\ cm.$$

Olověná koule, představující astronomickou jednotku hmoty, měla by tedy průměr přes $1\frac{1}{3}$ metru.

Kdybychom chtěli kouli takovou vytvořiti z materiálu naší země, průměrné hmoty specifické, obdrželi bychom

$$S = 5{\cdot}50\ \frac{g}{cm^3}. \qquad r = 86{\cdot}56\ cm.$$

Koule tato měla by tudíž průměr $1\frac{3}{4}$ metru. Přehlednější vztah obdržíme pro tento případ, kladouce

$$S = \frac{\overset{+}{\bigcirc}}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

čímž vyjde

$$\frac{r^3}{R^3} = \frac{\frac{1}{\varkappa}}{\overset{+}{\bigcirc}},$$

kterážto rovnice má jednoduchý význam.

§ 182. Gravitační jednotka času.

Úvahami podobnými, jaké učiněny v odstavci předešlém, bylo by lze odvoditi ze zákona gravitačního novou jednotku časovou, když by se přijala určitá jednotka pro délku a hmotu, na př. centimetr a gramm. V sekundách činila by

$$\sqrt{\frac{1}{\varkappa}} = 3866\ sec = 1^h\ 4^m\ 26^s.$$

Rozměr její byl by

$$\sqrt{\frac{L^3}{M}}\ \text{všeobecně}, \qquad \sqrt{\frac{cm^3}{g}}\ \text{zvlášť}.$$

Souvisela by tudíž se specifickým objemem $\frac{1}{s}$. Proto by se neměnila, kdyby se současně

na místě	*cm*	volil	*mm*	neb	*dm*	neb	*m*
a na místě	*g*	volil	*mg*	neb	*kg*	neb	*t*.

Nová jednotka časová charakterisovala by svou velikou hodnotou číselnou (podobně jako konstanta $\varkappa$ svou velmi malou hodnotou číselnou) pole gravitační jednotky hmotné, grammu v odlehlosti jednotky délkové, centimetru. Jakákoli hmota, jsouc v této odlehlosti pod vlivem gravitačním oné jednotky hmotné, podléhá jisté síle. Kdyby tato síla *konstantně působíc* po $1^h\ 4^m\ 26^s$ uváděla onu libovolnou hmotu z klidu v pohyb, dosáhla by hmota tato rychlosti, kterou by pak, jsouc své setrvačnosti přenechána, za následující dobu $1^h\ 4^m\ 26^s$ urazila dráhu jednoho centimetru.

Netřeba připomínati, že by se ze zákona gravitačního dala konečně také gravitační jednotka délková odvoditi na základě jednotek hmoty a času. Případ tento jest však méně zajímavý. Předešlý případ naproti tomu ukazuje, jak by se z působení gravitačního hmot dala restituovati doba rotace naší zeměkoule, když by konstanta $\varkappa$, na základě této doby rotační vypočítaná, zůstala zachována.

Jak již na svém místě vytčeno, jsou tyto jednotky gravitační zajímavé svým odvozením, avšak významu metronomického nemají.

§ 183. Hustota jednotlivých vrstev zemských.

Průměrná hustota $S = 5{\cdot}5$ celé země naší vychází značně větší než hustota vrstev, na nichž bydlíme a kteréž jsou přístupny našemu zkoumání. Pro vrstvy tyto dostáváme výsledky, jež celkově se blíží hodnotě značně menší $S = 2{\cdot}0$. Z toho následuje, že hustota vrstev vnitřních zase značně jest větší, než hustota průměrná.

Pokládáme-li zemi naši za složenou z kulových vrstev jednotlivě homogenních, mezi sebou však heterogenních, můžeme hustotu S_r každé vrstvy poloměru r pokládati za závislou na relativní hodnotě $\frac{r}{R}$ poloměru vrstvy k poloměru R celé zeměkoule, tudíž položiti

$$S_r = f\left(\frac{r}{R}\right).$$

O funkci této mohou býti hypothesy různé. Vhodným příkladem jest zákon, jehož došel *Ed. Roche* na základě úvah astronomických *). Dle něho jest

$$S_r = 10{\cdot}0\left[1 - \frac{4}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

Užijeme příkladu tohoto k výpočtům dalším, hledajíce na jeho základě intensitu gravitačního pole uvnitř země.

§ 184. Gravitační pole uvnitř země.

Intensita gravitačního pole v bodu P uvnitř země ve vzdálenosti $OP = r$ od středu zemského jest určena působením všech vrstev až do poloměru r. Úhrnná jich hmota m jest stanovena integrálem

$$m = \int_0^r 4\pi r^2\, dr\ .\ S_r.$$

*) Ed. C. Roche, C. R. de l'académie des Sciences, t. 39, p. 1215, 1854. Korrigováno dle průměrné hustoty 5·50.

Dosadíce výraz pro S_r a provedouce integraci obdržíme:

$$m = 4\pi \,.\, 10{\cdot}0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{4}{5}\frac{1}{R^2} \cdot \frac{r^5}{5} \right].$$

Násobíce konstantou gravitační $\varkappa$ a dělíce čtvercem odlehlosti r od středu země, v němž aequivalentní hmotu m si myslíme soustředěnou, obdržíme intensitu G_r pole gravitačního

$$G_r = \varkappa \,.\, \tfrac{4}{3}\pi \,.\, 10{\cdot}0 \,.\, r \left[1 - \frac{12}{25}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right].$$

Abychom obdrželi výraz přehlednější, zaveďme intensitu G pro povrch zemský $r = R$, totiž

$$G = \varkappa \,.\, \tfrac{4}{3}\pi \,.\, 10{\cdot}0 \,.\, R \,.\, \frac{13}{25}.$$

Pro hodnotu relativní plyne pak:

$$\frac{G_r}{G} = \frac{25}{13}\frac{r}{R}\left[1 - \frac{12}{25}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right],$$

čili

$$\frac{G_r}{G} = 1{\cdot}923\,\frac{r}{R}\left[1 - 0{\cdot}48\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right],$$

kteroužto relací jest úkol mathematicky řešen.

§ 185. Řešení numerické a grafické.

Poučnější jest však nepřestávati na tomto řešení mathematickém, nýbrž odvoditi z něho řešení numerické a grafické. Jde tedy o to, propočítati obě rovnice předešlých dvou odstavců:

$$S_r = 10{\cdot}0 \left[1 - \frac{4}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right].$$

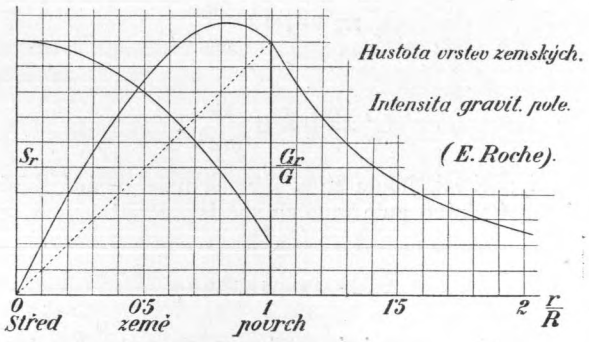
$$\frac{G_r}{G} = 1{\cdot}923\,\frac{r}{R}\left[1 - 0{\cdot}48\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right].$$

Tabulka následující uvádí výsledek počtu provedeného pro aequidistantní hodnoty relativní odlehlosti $\frac{r}{R}$ jednotlivých vrstev od středu zemského, po desetinách od 0 do 1 pokračující.

Hustota vrstev zemských a intensita gravitačního pole uvnitř země.

$\frac{r}{R}$	S_r	$\frac{G_r}{G}$	$\frac{r}{R}$	S_r	$\frac{G_r}{G}$
0	10·00	0·000	0·5	8·00	0·846
0·1	9·92	0·191	0·6	7·12	0·954
0·2	9·68	0·377	0·7	6·08	1·030
0·3	9·28	0·562	0·8	4·88	1·066
0·4	8·72	0·710	0·9	3·52	1·059
0·5	8·00	0·846	1·0	2·00	1·000

Na základě tohoto číselného materiálu jest v obr. 131. nakreslen diagramm, jímž se průběh veličin S_r a G_r ukazuje názorně graficky. Maximum intensity gravitační vystupuje velmi zřetelně, nastávajíc při $r = 0{\cdot}84\ R$. Jinak jest $G_r < G$ teprve asi od $r = \frac{3}{4}R$ počínajíc.



Obr. 131.

Výsledky tyto doznaly by jistých modifikací, kdyby se za základ vzal jiný zákon pro přibývání specifické hmoty S_r než zákon za příklad volený. Celkově však, zejména co se týče maximální hodnoty pro intensitu tíže zemské, zůstanou výsledky v platnosti. Přibývání intensity G_r do hloubky bylo pokusy dokázáno.

§ 186. Gravitační pole vně země.

Pro intensitu gravitačního pole vně země platí jednoduše

$$G' = \varkappa \frac{\overset{+}{\circlearrowleft}}{L^2}$$

anebo pro hodnotu relativní, vzhledem k intensitě pole G na povrchu země,

$$\frac{G'}{G} = \frac{R^2}{L^2}.$$

V obr. 131. připojena jest čára značící ubývání intensity G' s odlehlostí L. Ve spojení s čarou pro vnitř země platnou jeví se diskontinuita na povrchu země, a to z té příčiny, poněvadž ubývání specifické hmoty S_r nepostupuje až k hodnotě nullové, nýbrž k jisté hodnotě (2·0) konečné.

Kdybychom chtěli na př. počítati G' pro střední vzdálenost měsíce od země, kterážto vzdálenost činí *)

$$= 60{\cdot}2745$$

poloměrů aequatoreálních naší země, měli bychom

$$\frac{G'}{G_0} = \frac{1}{(60{\cdot}2745)^2},$$

kdež znamená G_0 urychlení na rovníku, jaké by bylo, kdyby se země neotáčela. Jak dříve uvedeno, jest

$$G_0 = 981{\cdot}49 \frac{cm}{sec^2},$$

tudíž

$$G' = 0{\cdot}270 \frac{cm}{sec^2}.$$

Chceme-li počítati, jakou silou f země naše ovládá měsíc, násobíme intensitu G' gravitačního pole hmotou měsíce. Proti hmotě $\overset{+}{\circlearrowleft}$ naší země jest (Hansen)

$$\frac{\mathbb{C}}{\overset{+}{\circlearrowleft}} = 0{\cdot}0125522,$$

což vyjádřeno zlomkem obyčejným činí 1/79·667, tedy okrouhle 1/80. Dříve jsme vypočetli (§ 180.)

$$\overset{+}{\circlearrowleft} = 5957{\cdot}9 \,.\, 10^{24} g,$$

z čehož plyne

$$\mathbb{C} = 74{\cdot}785 \,.\, 10^{24} g.$$

*) Pro data číselná, týkající se našeho měsíce, jest autoritou astronom *Petr O. Hansen* (1795—1874), v letech 1825—1874 ředitel hvězdárny v Gotě, jehož Tables de la lune (1857) jsou dílem základním.

Násobíce tedy tuto hmotu urychlením G' dříve vypočteným, obdržíme sílu

$$f = 20{\cdot}20 \,.\, 10^{24}\ dyn,$$

t. j. země ovládá měsíc silou 20 trillionů megadyn.

§ 187. Gravitační pole v malé výšce nad povrchem země.

Ve výšce h nad hladinou mořskou umenší se urychlení G tíže o část γ. Vzhledem k poloměru R země naší a vzhledem k výškám, do jakých výstup takový vůbec jest možný, jest relativní hodnota $\frac{h}{R}$ oné výšky, a v souhlasu s tím také relativní hodnota $\frac{\gamma}{G}$ onoho úbytku urychlení zlomkem tak malým, že čtverec jeho již mizí. Proto lze klásti:

$$\frac{G-\gamma}{G} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{h}{R} + 3\left(\frac{h}{R}\right)^2 - \ldots = 1 - 2\frac{h}{R},$$

z čehož plyne vzorec velmi jednoduchý

$$\frac{\gamma}{G} : \frac{h}{R} = 2.$$

Relativně (procentuálně) ubývá tudíž urychlení dvakráte více než přibývá relativní (procentuální) výšky.

Koefficient 2 souvisí s tím, že urychlení G klesá *čtverečně* s odlehlostí R dle zákona

$$G = \frac{const.}{R^2}.$$

Když rovnici tuto logarithmujeme a pak differencujeme, vyjde ihned

$$\frac{dG}{G} = -2\frac{dR}{R},$$

kdež jest — dG identické s hořejším γ a dR s hořejším h.

Dle toho lze posouditi, jak se umenší urychlení na př. ve výškách, do nichž lze vystoupiti ballonem. Položíme-li za příklad $h = 8\ km$, máme číselně

$$h = 8000\ m \qquad R = 6371103\ m,$$

$$\frac{h}{R} = 0{\cdot}001256,$$

z čehož pak vychází

$$\frac{\gamma}{G} = 0{\cdot}002512.$$

Vyvýšení činí tedy asi $\frac{1}{8}$ procenta, tudíž úbytek urychlení asi $\frac{1}{4}$ procenta.

Avšak jinak má se otázka, jde-li o stanice nikoli isolovaně nad povrchem zemským položené, nýbrž na vysočinách, po případě na horách, kde tedy pod stanicí se rozestírá pevnina, působící přitažlivě jako celá země. Jest samozřejmo, že zde ubývá urychlení s vyvýšením mírněji. V mnohých případech nelze počtem tento úbytek vystihnouti; nezbývá, než určiti je přímo, pokusem. Často bývá však rozloha horizontální takové vysočiny daleko větší než vyvýšení vertikální, tak že jest to, jako by se vysočina šířila horizontálně do dálek velmi (nekonečně) velikých. Pro tento případ lze odvoditi *) vzorec následující:

$$\frac{\gamma}{G} : \frac{h}{R} = 2 - \frac{3}{2}\,\frac{s}{S}.$$

Koefficient dřívější 2 jeví se tedy býti umenšeným o část, která souvisí jednak s průměrnou hustotou S celé země, jednak s hustotou s horstva samého. Obyčejně brávají se početně hodnoty

$$S = 5{\cdot}50, \qquad s = 2{\cdot}75,$$

pak jest

$$\frac{\gamma}{G} : \frac{h}{R} = \frac{5}{4}.$$

Proti dřívějšímu koefficientu 2 stojí tudíž koefficient menší $\frac{5}{4}$, platný pro orientační hodnotu $s = \frac{1}{2}S$. Kdyby bylo $s = \frac{4}{3}S$, stal by se koefficient nullou, urychlení by zůstávalo konstantním.

Pro početní applikaci upravují se rovnice hořejší tak, že se pro R v metrech hodnota

$$\frac{1}{R} = 0{\cdot}000\,000\,157$$

do vzorce jednou pro vždy zavede. Tím vyjde jednak pro stanice isolované, jednak pro stanice na horách, ve výšce h rovněž v metrech vyjádřené

$$\frac{\gamma}{G} = 0{\cdot}000\,000\,314\,.\,h,$$

$$\frac{\gamma}{G} = 0{\cdot}000\,000\,196\,.\,h.$$

Skutečné urychlení G_h ve výšce h jest pak $G - \gamma$, tudíž pro oba případy

$$G_h = G\,(1 - 0{\cdot}000\,000\,314\,.\,h),$$
$$G_h = G\,(1 - 0{\cdot}000\,000\,196\,.\,h).$$

Pro Prahu, $h = 200\ m$, činí umenšení tíže asi 4 tisíciny procenta.

*) S. D. Poisson, Traité de Mécanique, 2. ed. I. pag. 495, Paris 1833.

§ 188. **Gravitační pole koule homogenní.**

Kdyby země naše byla veskrze homogenní, t. j. specifická hmota S_r konstantní $= S$, platila by patrně rovnice

$$G_r = \varkappa\,\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\,.\,S}{r^2},$$

t. j.

$$G_r = const.\ r.$$

Pro nitro země nastoupila by tedy v obr. 131. přímka (tečkovaná) na místo křivky. Pro pole vnější zůstaly by výsledky ovšem v platnosti.

§ 189. **Gravitační pole slunce.**

Intensita a gravitačního pole slunce jest určena rovnicí

$$a = \varkappa\,\frac{\odot}{L^2}.$$

Pro výpočet číselný jest výhodno intensitu a uvésti v poměr s intensitou G_0 země naší na rovníku, kteráž jest

$$G_0 = \varkappa\,\frac{\overset{+}{\bigcirc}}{R_0^{\,2}}.$$

Z obou rovnic plyne

$$\frac{a}{G_0} = \frac{\odot}{\overset{+}{\bigcirc}} : \left(\frac{L}{R_0}\right)^2.$$

Astronomické tabulky *) dávají

$$\frac{\odot}{\overset{+}{\bigcirc}} = 324439,$$

kteréžto číslo jest konstantou pro všechny další výpočty.

1. Pro povrch slunce jest

$$\frac{L}{R_0} = 109{\cdot}36, \qquad \frac{a}{G_0} = 27{\cdot}16,$$

$$G_0 = 981{\cdot}49\ \frac{cm}{sec^2}, \qquad a = 26655\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Urychlení tíže na povrchu slunce jest tudíž 27·16kráte větší než urychlení tíže na rovníku zemském, předpokládajíc, že ani slunce ani země nemají rotace. Hmota jednoho kilogrammu způsobuje na povrchu slunce tlak $26655 \times 1000\ dyn$, t. j. velmi blízce 27 megadyn.

*) Pro výpočty tohoto odstavce přijata astronomická data dle Annales de l'Observatoire de Paris 1900.

2. Pro odlehlosti, v jakých obíhá země naše kolem slunce, udává výsledek počtu tabulka následující:

Intensita gravitačního pole slunce v odlehlosti naší země.

Z e m ě	Relativní vzdálenost	$\frac{L}{R_0}$	$a\ \frac{cm}{sec^2}$
v periheliu	0·9832289	23046·1	0·5996
ve střední odlehlosti	1	23439·2	0·5796
v apheliu	1·0167711	23832·3	0·5606

3. Znajíce intensitu a pro střední vzdálenost země od slunce, kteráž pro aequatoreální parallaxu slunce 8·80″ činí 149501000 *km* (§ 39.) a kteráž jest astronomickou jednotkou, počítáme snadno intensitu pro vzdálenosti planetární vůbec, dělíce čtvercem odlehlosti v astronomické jednotce vyjádřené.

Výsledek počtu jest obsažen v tabulce následující. Tato obsahuje též kolumnu pro sílu f, jakou slunce jednotlivé oběžnice ovládá. Sílu tuto počítáme nejprve pro hmotu země, kteráž jest (§ 180.)

$$\oplus = 5{\cdot}9579\ .\ 10^{27}\ g,$$

u ostatních pak oběžnic vyjmeme z tabulek astronomických poměrná čísla hmoty každé oběžnice ke hmotě naší země, násobíme tato čísla příslušnou intensitou pole a konečně též hmotou země.

Oběžnice	Střední vzdálenost od slunce	Intensita gravitačního pole slunce	Hmota oběžnice v dílech země	Síla, kterou slunce ovládá oběžnici
Značka	relativní	$\frac{cm}{sec^2}$	relativní	trilliony megadyn
☿	0·387 098	3·868	0·061	1406
♀	0·723 332	1·108	0·787	5194
♁	1	0·579 6	1	3453
♂	1·523 691	0·249 7	. 0·105	156
♃	5·202 800	0·021 41	309·816	39524
♄	9·538 856	0·006 370	91·919	3489
♅	19·183 29	0·001 575	13·518	127
♆	30·055 08	0·000 642	16·469	63

Výsledky tyto jsou velmi poučné. Ubývání intensity pole gravitačního v prostorách planetárních ukazuje se velmi názorně; v končinách, kde Neptun kolem slunce krouží, jest intensita pole již jen 6·4 $\frac{\mu}{sec^2}$. Nicméně síla, která v tomto již slabém poli Neptuna ovládá, jest přece velmi veliká, jdouc do trillionů megadyn, poněvadž hmota Neptuna jest značná.

§ 190. Gravitační pole měsíce.

Intensita a gravitačního pole měsíce jest určena rovnicí

$$a = \varkappa\ \frac{\mathbb{C}}{L^2}.$$

Také zde jest výhodno počítati hodnoty relativní vzhledem k intensitě G_0 na rovníku zemském

$$G_0 = \varkappa\ \frac{\oplus}{R_0^2}.$$

Z obou rovnic plyne

$$\frac{a}{G_0} = \frac{\mathbb{C}}{\oplus} : \left(\frac{L}{R_0}\right)^2.$$

Tabulky astronomické *) dávají

$$\frac{\mathbb{C}}{\oplus} = 0{\cdot}0125522,$$

což zůstává pro další výpočty konstantou.

1. Pro povrch měsíce jest

$$\frac{L}{R_0} = 0{\cdot}272957, \qquad \frac{a}{G_0} = 0{\cdot}16847,$$

$$G_0 = 981{\cdot}49\ \frac{cm}{sec^2}, \qquad a = 165{\cdot}35\ \frac{cm}{sec^2}.$$

2. Pro odlehlosti, v jakých bývá země naše vzhledem k měsíci, podává výsledek počtu tabulka následující.

Intensita gravitačního pole měsíce v odlehlosti naší země.

M ě s í c	Relativní vzdálenost	$\frac{L}{R_0}$	$a\ \frac{cm}{sec^2}$
v perigeu	0·94509193	56·9650	0·003797
ve střední odlehlosti	1	60·2745	0·003391
v apogeu	1·05490807	63·5841	0·003047

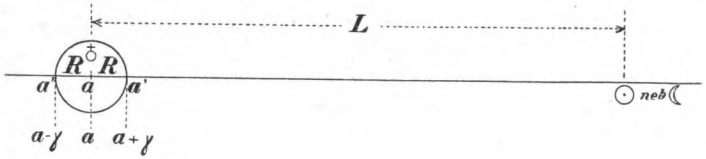
*) Pro výpočty tohoto odstavce přijata jsou data Hansenova, jak je přijímá též observatoř Pařížská i jiné.

Změny intensity a postavením měsíce vzhledem k zemi naší působené jsou dle toho dosti značné; jich význam vynikne, když se položí za základ úvahám o přílivu a odlivu, kteréž s výklady právě učiněnými přímo souvisí.

Příliv a odliv.

§ 191. Různosti gravitačního pole slunce a měsíce na povrchu zemském.

V oddílech předcházejících počítali jsme intensitu a gravitačního pole slunce a měsíce, jak se při střední neb maximální neb minimální vzdálenosti L země od slunce nebo měsíce jeví *ve středu země*. Jest však patrno, že na povrchu země, na přímce spojující střed země se středem slunce nebo měsíce, bude vzhledem k poloměru zemskému R urychlení větší a' nebo menší a'', dle toho, jsme-li na straně ke slunci, resp. měsíci obrácené neb



Obr. 132.

od něho odvrácené (obr. 132.). Patrně jest

$$\frac{a'}{a} = \frac{L^2}{(L-R)^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \ldots$$

$$\frac{a''}{a} = \frac{L^2}{(L+R)^2} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + \ldots,$$

kdež jest $\varepsilon = \frac{R}{L}$ malý zlomek. Přestáváme-li na druhé mocnosti tohoto zlomku, vyšších zanedbávajíce, obdržíme:

$$a' = a + a\,(2\varepsilon + 3\varepsilon^2),$$
$$a'' = a - a\,(2\varepsilon - 3\varepsilon^2).$$

Rozdíl $a' - a$ není tedy, přísně vzato, týž jako $a - a''$; vzhledem k průměrné hodnotě $\gamma = 2a\varepsilon$ obou, jest onen o $3a\varepsilon^2$ větší, tento o $3a\varepsilon^2$ menší. Poněvadž však tyto odchylky jsou velice malé, můžeme vzhledem k úvahám dalším přestati na průměrné hodnotě γ oněch rozdílů, kterouž vyjadřuje vzorec

$$\gamma = 2a\frac{R}{L}.$$

Jak viděti, není rozdíl γ ani vzhledem ke slunci ani vzhledem k měsíci veličinou konstantní, poněvadž se pohyb země kolem slunce a pohyb měsíce kolem země děje nikoli v kruhu, nýbrž v ellipse, tak že odlehlost L a tím také intensita pole a se mění. Pro důležitý význam, jakýž difference γ má na zemi, jest dobře, hodnotu γ numericky stanoviti jak pro střední vzdálenost L tak i pro extremy této vzdálenosti. Výsledek počtu provedeného na základě dat uvedených v § 189. a 190. ukazuje tabulka následující:

Rozdíly intensity gravitačního pole měsíce na povrchu zemském.

Měsíc	$\frac{L}{R_0}$	$a\,\frac{cm}{sec^2}$	$\gamma\,\frac{cm}{sec^2}$
v perigeu	56·9650	0·003797	0·0001333
ve střední odlehlosti	60·2745	0·003391	0·0001125
v apogeu	63·5841	0·003047	0·0000958

Rozdíly intensity gravitačního pole slunce na povrchu zemském.

Slunce	$\frac{L}{R_0}$	$a\,\frac{cm}{sec^2}$	$\gamma\,\frac{cm}{sec^2}$
v perigeu	23046·1	0·5996	0·0000520
ve střední odlehlosti	23439·2	0·5796	0·0000495
v apogeu	23832·3	0·5606	0·0000470

Zavedeme-li pro γ přiměřenější jednotku $\frac{\mu}{sec^2}$ na místě $\frac{cm}{sec^2}$, obdržíme přehledně čísla tato:

Rozdíly intensity gravitačního pole měsíce a slunce na povrchu zemském.

postavení	měsíce γ		slunce γ	
v perigeu	1·333	$\frac{\mu}{sec^2}$	0·520	$\frac{\mu}{sec^2}$
ve střední odlehlosti	1·125	„	0·495	„
v apogeu	0·958	„	0·470	„

§ 192. **Příliv a odliv.**

Dle výkladů předešlých nalézá se země naše v gravitačním poli měsíce, kteréž však v prostoru zemí zaujatém není homogenním; na té straně zemské, která jest k měsíci obrácena, jest silnější než ve středu zemském a zde zase silnější než na té straně zemské, která jest od měsíce odvrácena. A co vzhledem k měsíci platí, lze opakovati též vzhledem ke slunci. Tyto různosti v intensitě gravitačního pole nejevily by se žádnými následky, kdyby země naše byla hmotou zcela strnulou, jako jest na př. náš měsíc. Avšak na povrchu země rozestírá se moře, jehož vodstvo, jsouc pohyblivým, může na ony různosti v intensitě pole reagovati. Způsob reakce byl by však jiný, kdyby země byla v relativním klidu k měsíci neb ke slunci, a jest jiným, kdy země jest proti oběma tělesům v relativním pohybu.

Představme sobě pro jednoduchost, jako by země byla celá mořem oblitou. V případě prvém šlo by o zjev statický; vodstvo by se zvedlo na straně k měsíci obrácené a opadlo by na straně opačné. Vskutku však platí případ druhý; jde o zjev kinetický, jde o pohyb. Země naše relativně padá k měsíci. Je-li a urychlení pádu pro střed zemský, padá vodstvo na straně k měsíci obrácené s urychlením $a + \gamma$ a na straně opačné s urychlením $a - \gamma$. Onde tedy vodstvo padajíc předbíhá se proti středu země, *tudíž se zvedá*, na straně opačné padajíc zůstává za středem země zpět, *tudíž se zvedá také*. V okolnosti poslední jeví se právě rozdíl mezi problemem statickým a kinetickým nejzřetelněji. Zvednutí vodstva oceánového zoveme *přílivem*, opadnutí *odlivem* (aestus maris, fluxus et refluxus maris).

Dle výkladu tohoto nastává příliv pro všechna místa povrchu zemského, pro kteráž jest měsíc v *kulminaci* hořejší neb dolejší. *Vrcholy* pak přílivu budou na těch místech, na kterých měsíc při kulminaci své jest v zenitu neb nadiru. Geometricky jsou vrcholy určeny oběma body, v nichž centrála země a měsíce povrch zemský protíná.

Měsíc obíhá však zdánlivě — následkem rotace zemské — kolem země od východu k západu, při čemž současně — následkem svého pohybu vlastního — postupuje na své dráze od západu k východu, tak že se v kulminaci proti hodinám našim denně asi o 50 minut opozďuje. Dobu od hořejší kulminace měsíce ke kulminaci hořejší nejblíže příští zoveme *dnem lunárním*. Střední jeho délka jest $24^h\ 50^m\ 28{\cdot}5^s$ středního času slunečního. Souhlasně s tím postupuje vydmutí a za ním opadnutí vodstva oceánového od východu k západu, tak že za den lunární na určitém místě povrchu zemského dvakrát nastává příliv a dvakrát odliv v časových intervallech $12^h\ 25^m$.

Avšak dvojí tento příliv během dne lunárního není — všeobecně — stejně mohutný, a v tom záleží *nestejnost* tak zvaná *denní*. Ta souvisí s polohou obou vrcholů přílivu. Je-li měsíc v rovníku nebeském, pak padnou oba vrcholy do rovníku zemského a v tomto zvláštním případě odpadá nestejnost denní pro jisté určité místo povrchu zemského. Všeobecně není však měsíc v rovníku nebeském; oba vrcholy padnou pak na opačné strany rovníku zemského, jeden na polokouli severní, druhý na jižní. Proto se na jistém místě na př. polokoule severní z obou přílivů během dne patrně ten jeví mohutněji, jehož vrchol se nalézá též na polokouli severní; druhý příliv jest mnohdy tak slabý, že ani zvlášť nevynikne.

K této nestejnosti denní druží se *nestejnost* druhá, zvaná *měsíční*, kteráž vzniká vlivem slunce.

Svrchu již bylo řečeno, že, co o měsíci platí, lze týmž způsobem přenésti na slunce. Vliv slunce jest ovšem značně slabší než měsíce; stojí tu pro urychlení γ, jak v § předešlém vypočítáno, proti sobě *střední* čísla $\left(\frac{\mu}{sec^2}\right)$

$$\text{pro měsíc} \quad \gamma = 1{\cdot}125,$$
$$\text{pro slunce} \quad \gamma = 0{\cdot}495.$$

Proto pokládáme zjevy měsícem způsobené za hlavní a uvažujeme, jak se modifikují sluncem. Jest patrno, že nastává sesílení zjevu nebo seslabení, podle vzájemného postavení slunce a měsíce. Na-

lézá-li se měsíc se sluncem současně v kulminaci, buď dolejší neb hořejší, nastává sesilování přílivu, jež přísluší summační hodnotě

$$\gamma = 1{\cdot}125 + 0{\cdot}495 = 1{\cdot}620.$$

Pakli hořejší neb dolejší kulminace měsíce nastává v době střední mezi hořejší a dolejší kulminaci slunce, vzniká seslabování přílivu, jež přísluší differenční hodnotě

$$\gamma = 1{\cdot}125 - 0{\cdot}495 = 0{\cdot}630.$$

Prvý případ má platnost pro *syzygie* *), t. j. pro úplněk neb novoluní, druhý pro *kvadratury*, t. j. pro čtvrt prvou neb poslední.

Rozdíly v mohutnosti přílivu jsou značné; stojí tu proti sobě čísla $\gamma = 1{\cdot}620$ a $\gamma = 0{\cdot}630$, jichž poměr jest

$$\frac{1{\cdot}620}{0{\cdot}630} = 2{\cdot}57.$$

Nestejnosti tyto zovou se *měsíčními*, též *poloměsíčními*, poněvadž od úplňku k novému měsíci uplyne doba asi půl měsíce. Rozeznává se tu doba »vod živých« (přílivu zvýšeného) a »vod mrtvých« (přílivu sníženého).

Při tom jsme pro γ vzali hodnoty střední. V extremech jeví se rozdíly ty ještě větší měrou. Maximum vydmutí obdržíme při maximech γ pro slunce i měsíc, tedy

$$\gamma = 1{\cdot}333 + 0{\cdot}520 = 1{\cdot}853.$$

Minimum pak, když od minimálního γ pro měsíc odečteme maximální γ pro slunce, tedy

$$\gamma = 0{\cdot}958 - 0{\cdot}520 = 0{\cdot}438.$$

Zde tedy stojí proti sobě čísla 1·853 a 0·438, jichž poměr jest

$$\frac{1{\cdot}853}{0{\cdot}438} = 4{\cdot}23.$$

Poznáváme tudíž, že dle poměrů kosmických, dle vzájemného postavení měsíce a slunce a dle místa, jež zaujímají na svých drahách, mohou nastati přílivy velmi značné (příboje) anebo zase jen velmi mírné.

Při výkladech dosavadních, více schematických, předpokládali jsme, jako by celá země byla oblita mořem; a již zde jevila se v úkazech přílivu a odlivu veliká rozmanitost. Daleko větší vzniká však rozdělením pevnin a moří, nestejností hloubky moře, tvárností

*) Z řeckého *σύν* spolu a *ζεύγνυμι* spřežuji, *ζυγόν τό* jařmo.

pevnin, ostrovů a poloostrovů, konečně také překážkami pohybu vodstva. Líčili jsme zjev tak, jako by vydmutí vod postupovalo s *měsícem*; vskutku však jde *za měsícem*, opozdujíc se následkem rozmanitých překážek pohybu. Příliv nastává, nikoli když měsíc kulminuje (nahoře neb dole), nýbrž když již kulminoval, tedy nějakou dobu po kulminaci. Ale ani tato doba není pro určité místo stálou, nýbrž mění se poněkud vlivem slunce dle fasí měsíce. Je-li měsíc v úplňku neb na nově, uplyne po kulminaci jeho do přílivu jistá pro určité místo pobřežní určitá doba, která se zove *rovnicí přístavní*. (Etablissement, establishment of port, Hafenzeit). Pro dny mezi úplňkem a novým měsícem nastávají od této rovnice jisté úchylky, kteréž se empiricky jako korrekce hledí vystihnouti (nestejnosti poloměsíční). Vzhledem k tomu, že měsíc, je-li úplněk neb novoluní, kulminuje se sluncem zároveň, udává patrně rovnice přístavní, v kolik hodin odpoledne nebo po půlnoci toho dne příliv nastává. Korrigovaná pak rovnice přístavní pro jakékoli fase měsíce udává, jak brzy po kulminaci měsíce hořejší neb dolejší příliv nastane.

Průměrné hodnoty korrekce udává tabulka následující:

Doba kulminace měsíce	Korrekce rovnice přístavní	Doba kulminace měsíce	Korrekce rovnice přístavní
h	*m*	*h*	*m*
0	0	6	— 63
1	— 13	7	— 44
2	— 29	8	— 15
3	— 43	9	+ 9
4	— 55	10	+ 16
5	— 63	11	+ 11
6	— 63	12	0

§ 193. **Podrobnosti o rovnici přístavní.**

Co se týče rovnice přístavní, budiž poznamenáno vzhledem k pobřežním městům nám nejbližším, francouzským, anglickým, hollandským a německým následující. Pro nejzápadnější místo *Brest* počítá bureau des longitudes v Paříži dobu přílivu pro každý

den v roce. Pro místa východněji ležící, k nimž kanálem la Manche dojde příliv se značným opozděním, udává pak dobu tohoto opozdění proti Brestu.

V Brestu samém nastává příliv — je-li měsíc v úplňku neb na nově — odpoledne po třetí anebo někdy až po 4. hod., což se řídí dle bližších poměrů astronomických. Rovnice přístavní pro toto město činí tedy 3 až 4 . *Opozdění* pak proti Brestu činí jak následuje pro některá místa východně ležící:

Saint-Malo	+ 1^h	41^m
Cherbourg	+ 4	0
le Havre	+ 5	41
Calais	+ 7	40
Dunkerque	+ 8	7
Ymniden (canal d'Amsterdam)	+ 11	27
Emden	+ 20	47
Wilhelmshaven	+ 21	20
Bremerhaven	+ 21	30
Cuxhaven	+ 21	25
Hamburk	+ 25	38

Na straně pak anglické:

Plymouth	+ 0	57
Portsmouth	+ 7	21
Dover	+ 6	47
Harwich	+ 20	17
Londýn	+ 22	24

Z příkladů těchto dobře jest viděti, jak vlna podél měst francouzských, hollandských a německých na jedné straně a měst anglických na druhé od velkého oceánu postupuje zpět na východ, kdežto jinak v oceánu samém vydmutí ovšem pokračuje za měsícem od východu k západu.

Zavedením zvláštních přístrojů, tak zvaných *vydmoměrů* neb *limnimetrů* *) jest možno studovati též amplitudu stoupání a klesání vod mořských, t. j. výšku, o kterou vody *nad jistý průměrný stav* buď vystoupí neb sestoupí (amplituda periodické oscillace). Dvojamplituda udává pak variaci výšky úhrnnou, tedy rozdíl mezi

*) Z řeckého: *λίμνη ἡ* jezero, moře (u Homera).

výši maximální a minimální *). Z důvodů dříve uvedených jest amplituda tato dle poměrů astronomických a kosmických velmi rozmanitou. Zajímavo jest, jaké největší amplitudy, pro syzygie, asi mohou přicházeti.

V kanálu la Manche má značnou amplitudu Saint-Malo (5·7 *m*) a blízké Granville (6·2 *m*). Podobně v kanálu Bristolském, na př. Portishead (6·1 *m*). V těchto místech činí tedy úhrnná variace až přes 12 metrů. Největší variace pozorovány v Novém Skotsku ve Fundybai až přes 15 metrů, podobně na východním pobřeží Patagonie a j. V moři Středozemním činí úhrnná variace sotva 1 metr. Vytknouti dlužno, že na širém moři jest amplituda též jen skrovná, asi 1 až 2 metry, jak lze zjistiti na ostrůvkách v oceánu isolovaně ležících. Vlna jest zde patrně více plochou, ale za to rozsáhlou; když pak dojde na pobřeží, kdež při svém postupu narazí na překážky, pak teprve vzniká značné vydmutí do výšky **).

Příliv v moři adriatickém, pokud se jedná o břehy Dalmatské, zkoumal *Robert v. Sterneck* ***) v době nejnovější a došel výsledků zajímavých. Příliv, přicházející od jihu a vstupující do čáry vedené od Dubrovníka k Monte Gargano působením tohoto poloostrova odbočí k břehům Dalmatským a pokračuje přes četné ostrovy k Istrii a zde kolem severních břehů přejde k břehům Italským a postupuje na jih. Vykonává tedy na severních březích oběh od východu přes sever na západ.

Při tom je dvojamplituda u břehů Dalmatských malá, v centimetrech na př. 24 (Rogožnica), 32 (Lussin picc.), stoupá však v Istrii na 60 (Rovigno) až 98 (Pirano). Jest to zajímavý příklad, jak značně povahou břehů průběh přílivu se modifikuje.

Výklad o přílivu a odlivu zde podaný jest jenom elementární. Problémem o úkazu tak imposantním, jakým jest příliv a odliv, zanášel se již *J. Kepler* a *G. Galilei*, podrobněji pak *I. Newton* (1687), jenž užil na úkaz ten theorie gravitační. Roku 1738 vypsala akademie Pařížská cenu na theorii úkazu toho. Mezi pracemi došlými vynikala ta, kterou předložil

*) Amplituda jest zde definována tak jako ve fysice při pohybech oscillačních vůbec; mnozí zavádějí však zde amplitudu jakožto úhrnnou differenci mezi výškou moře maximální a minimální, označujíce pak rozdíly od stavu středního jako poloamplitudu.

**) O přílivu a odlivu srovnej v literatuře české: *F. Studnička*, Zeměpis přírodnický, 1883, *Gruss*, Z říše hvězd, stručně též *A. Seydler*, Theorie potencialu, 1885.

***) Sitz.-Ber. der kais. Akad. d. Wiss. Band 117, pag. 151, 1908. Velmi poučná jest mapka připojená k tomuto pojednání a objasňující postup přílivu kolem břehů Dalmatských a protějších Italských.

D. Bernouilli. Základní práci ve smyslu theorie dynamické podal *P. S. Laplace* 1774. V jeho smyslu pokračovali ve století 19tém *J. W. Lubbock, W. Whewell, G. B. Airy*, hlavně pak *Sir W. Thomson* (*Lord Kelvin*). Problém jest řešen v rysech hlavních, v podrobnostech, pokud vznikají zvláštní konfigurací břehů, jak R. v. Sterneck uvedeným příkladem ukázal, není možno řešení napřed theoreticky stanoviti. Viz na př. Encyklopädie der mathem. Wissensch. VI. 1. B., pag. 6, 1908.

Dojmy, jakéž při břehu mořském zejména znenáhla stoupajícím (Scheweningen) činí vydmutí vod mořských na pozorovatele úkaz ten ponejprv pozorujícího, jsou velmi mohutné. V této příčině jest též zajímavo čísti plastické líčení takových dojmů z dob dávných, jaké podává *Q. Curtius Rufus* v díle: Historia Alexandri Magni libri X (IX cap. 9). Vypráví se tu o plavbě vojínů Alexandra Velikého po Indu.

»Tam (Alexander) nucen byl déle setrvati, ježto uprchli jim vůdcové, kteréž poněkud nebedlivě hlídali; i vyslal lidi, aby opatřili jiné; a když žádných nenalezli, přiměla jej tvrdošíjná touha spatřiti oceán a dostati se až k hranicím světa k tomu, že bez lidí, znalých toho kraje, svěřil neznámé řece i hlavu svou i život tolika statečných mužů. Pluli tedy, neznalí jsouce naprosto krajin, jimiž se brali. Jak daleko odtud vzdáleno je moře, jací kmenové tam obývají, je-li ústí řeky klidné, je-li splavné pro dlouhé lodi, toho domýšleli se jen pochybným a nejistým dohadem; jedinou útěchou jich nerozvážného podniku bylo jich stálé štěstí. Již pokročili 400 stadií, když kormidelníci oznámili králi, že cítí vzduch mořský a že dle jich zdání není daleko oceán. On počal radostně napomínati lodníky, aby statně veslovali, že přiblížil se konec jich klopot všemi vytoužený; nic že již slávě jich neschází, nic statečnosti jich nepřekáží, bez nebezpečenství boje, bez krveprolití že okres zemský si podmaňují; ani příroda již dále nemůže pokročiti; v krátce že spatří to, co známo jest pouze nesmrtelníkům. Přece však poslal po lodi několik lidí na břeh, aby chytli některé venkovany na polích, doufaje, že od nich může zvěděti něco určitějšího. Ti, prohledavše všecky chýše, konečně nalezli je v úkrytech. Když se jich tázali, jak daleko je odtud moře, odpověděli, že žádného moře ani z doslechu neznají; ale že za tři dni lze dojíti k hořké vodě, která kazí sladkou. Poznali, že označují tím moře, neznajíce jeho povahy.

A proto s velikou čilostí veslaři veslují a každým dnem, čím více se blížila naděje, rostla lidí horlivost. Již třetího dne dosahovala jich voda mořská, smíšená s vodou řeky, ježto mírný dosud příliv mísil různé vlny. Tu připluvše k jinému ostrovu ležícímu uprostřed řeky, přirazí s loďstvem ku břehu poněkud volně, poněvadž lodi byly přílivem zpět odráženy, a rozběhnou se opatřit si potravu netušíce příhody, která je mimo nadání zastihla.

Byly asi tři hodiny, když oceán vzrůstaje přílivem pravidelně se vracejícím začal se tlačiti do řeky a zpět hnáti její proudy. Příliv nejprve proud řeky zadržel, potom tak mocně naň dolehl, že řeka s větší prudkostí hnala se zpět než řítí se bystřiny srázným svým řečištěm. Neznáma byla lidem povaha moře i zdálo se jim, že vidí přízraky a znamení hněvu božího. Znova a znova přibývalo moře i rozlévalo se po půdě, jež nedávno před tím byla suchá. Již zdviženy byly vlnami lodi a všechno loďstvo roz-

ptýleno, když tu ti, kdož vyšli na břeh, se všech stran se sbíhají poděšeni a ohromeni tou nenadálou nehodou. Ale ve zmatku i spěch působil zdržování. Jedni lodi odstrkovali tyčemi (se břehu), jiní usedli na nich pokoušejíce se upraviti k plavbě vesla, někteří hledíce se spěšně dostati od břehu, ale nevyčkavše těch, kteří měli býti s nimi, jen pomalu poháněli lodi vpřed, jimiž (pro nedostatek veslařů) těžko bylo hýbati a vládnouti; jiné lodi nestačovaly zase pojmouti mužstvo nerozvážně na ně se hrnoucí, i zároveň tu přebytek, onde nedostatek lidí zdržoval je ve spěchu. Křik jedněch nařizujících, aby čekali, jiných, aby spěchali, zmatené hlasy lidí brzy o to, brzy o ono se pokoušejících, působily, že přecházel zrak i sluch. Ani u kormidelníků nebylo pomoci, ježto jejich hlasu nemohli slyšeti pro povyk, kterýž působili, ani rozkazy vykonávati pro zděšení a zmatek. Proto vrážely do sebe lodi a navzájem urážely si vesla a jedni začali narážeti na lodi druhých. Člověk byl by soudil, že nepluje tu loďstvo jednoho vojska, nýbrž že loďstva dvou vojsk utkala se v bitvě námořské. Přídi lodí vrážely do zádí jiných; kdo uvedli ve zmatek jiné před nimi plující, sami tísněni byli těmi, kdož pluli za nimi; hádali se a hněv dohánět je až ke rvačce. Již příliv zatopil všechnu půdu kolem řeky i vyčnívaly jen pahorky jako malé ostrovy, na kteréž většina mužstva zanechavši lodí snažila se ve strachu se dostati spěšným plováním. Loďstvo roztroušené dílem stálo ve vodě velmi hluboké, kde pod vodou byly úvaly, dílem vázlo na mělčinách, podle toho, jak nerovnou půdu země zatopily vlny: tu padne na ně náhle hrůza nová a větší hrůzy dřívější. Moře začalo ustupovati, ježto voda mocným proudem do svého koryta zpět odtékala, i vystupovala opět země nedávno před tím v hlubokých vlnách potopená. Proto z opuštěných lodí jedny kácely se na příď, jiné lehaly na bok. Pokryta byla půda zavazadly, zbraněmi a troskami odervaných prken a vesel. Vojínové neodvažovali se ani vstoupiti na zemi ani setrvati na lodi očekávajíce každé chvíle, že nastane ještě něco horšího než co je již potkalo. Sotva zraku svému věřili, vidouce, co se jim děje, totiž troskotání lodí na suchu, moře v řece. A nebyl to konec hrůz: neboť nevědouce, že příliv brzo opět mořskou vodu přižene, jíž lodi se zvednou, báli se hladu a věcí nejhorších. Také strašná zvířata vlnami zanechaná kolem lezla.

A již se blížila noc a také krále zoufajícího nad zachráněním pojala tesknost. Ale starost nemohla udolati nepřemožitelného ducha jeho, i seděl po celou noc na výhledech a jezdce posílal napřed k ústí řeky, aby, jakmile by znamenali, že opět nastává příliv, před tím přišli to oznámiti. Rozkázal také, aby lodi porouchané opravili a vlnami překocené zvedli a aby byli hotovi a pozorni, až by opět moře zemi zatopilo. Celá ta noc strávena hlídkami a napomínáním, když tu jezdci nesmírným klusem zpět přichvátali a nastal opět příliv. Ten počal nejprve, dokud vody mírným proudem přitékaly, zvedati lodi, brzy však po zatopení vší půdy uvedl v pohyb: i rozléhal se po březích moře i řeky tleskot vojínů i lodníků nesmírnou radostí vítajících neočekávané zachránění. S podivem se tázali, odkud se vrátila náhle mořská voda tak mocně vzrostlá, kam předešlého dne ustoupila, jaká jest živlu toho povaha, jež brzy je vzpurná, brzy podléhá vlivu času. Král usuzuje z toho co se stalo, že po slunce východu je pravidelná doba přílivu, o půlnoci, aby předešel příliv, s několika málo loďmi vyplul dolů po řece. Dostihnuv jejího ústí plul 400 stadií do moře, dosáhnuv konečně toho, čeho

si žádal; vykonav pak oběť bohům, kteří byli ochránci i moře toho i míst, vrátil se k loďstvu.«

Stanovení konstanty gravitační čili průměrné hustoty země naší.

§ 194. Srovnávání polí gravitačních.

K porozumění method, jimiž experimentálně určena byla konstanta gravitační a tím i průměrná specifická hmota naší země, učiňme k orientaci úvahu předběžnou. Mějmež malou kuličku na př. mosaznou, zavěšenou na vláknu kokonovém. Její vahou mg napíná se vlákno a ustálí ve směru svislém. Položme pak stranou od kuličky m nějakou velkou kouli, na př. olověnou, hmoty M. Ke kouli této gravituje kulička m kvalitativně právě tak, jako k ohromné kouli naší země; možno mluviti právě tak o váze kuličky m vzhledem ke kouli M, jako mluvíme o váze kuličky m vzhledem k zemi naší ♁; také formálně můžeme jednu i druhou váhu stejně vyjádřiti.

Váha kuličky m vzhledem k zemi ♁ jest dána součinem mg. Podobně vyjádříme váhu kuličky m vzhledem ke kouli M součinem $m\gamma$; činitelé g a γ značí intensity polí gravitačních pro danou polohu kuličky m, při čemž jest

$$g = \varkappa \frac{♁}{R^2}, \qquad \gamma = \varkappa \frac{M}{L^2}.$$

Zde znamená souhlasně ♁ hmotu země, M hmotu postranní koule; podobně znamená poloměr země R odlehlost středu kuličky m od středu země, jako L odlehlost středu kuličky m od středu koule M. Počítajíce takto urychlení g nehledíme k rotaci a ke zploštění země, pokládajíce faktické urychlení za stejné s urychlením ze zákona gravitačního pro kouli vypočteným, což pro tuto orientační úvahu úplně stačí.

Obě váhy mg a $m\gamma$ se sečítají geometricky, dávají váhu výslednou, a ve směru této výsledné ustálí se vlákno kokonové odchýlíc se o úhel ε od původního svého směru svislého.

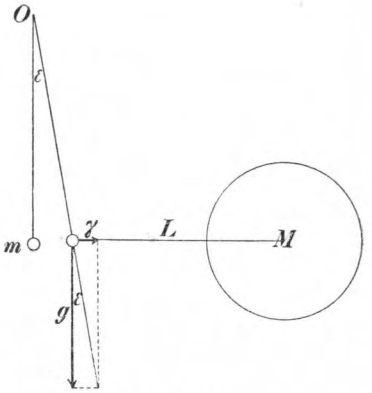
K jednoduchosti volme na př. střed koule M ve stejné výšce se středem kuličky m, — ač by i jiný případ libovolný se rovněž jednoduše dal řešiti. — Pro tuto zvláštní polohu jest rýsován

obr. 133. Úhel ε jest pak dán rovnicí

$$tg\ \varepsilon = \frac{m\gamma}{mg},$$

čili

$$tg\ \varepsilon = \frac{\gamma}{g}.$$



Obr. 133.

Hmota m ze vzorce odpadne. To jest pochopitelno, uvážíme-li, že vlastně srovnáváme intensity g a γ obou polí gravitačních, totiž země a koule M. Původní vertikální směr vlákna označoval silopřímky gravitace zemské; k těm se připojily silopřímky gravitace koule postranní; do výsledného směru se ustálí vlákno a ukazuje svou odchylkou ε na poměr obou intensit. Zcela tak srovnáváme boussolou tangentovou intensity magnetických polí proudu a země a soudíme z úchylky magnetky, dle téhož vzorce, na jich poměr. Kdybychom tedy pokusem stanovili pro jistý konkretní případ úhel ε, mohli bychom počítati intensitu γ a z této pak dále jednoduše konstantu gravitační $\varkappa$.

Abychom se orientovali o tom, jak veliký tento úhel ε lze očekávati, považujme naopak $\varkappa$ za známé a počítejme ε.

Dle § 180. jest

$$\varkappa S = 3{\cdot}6808 \,.\, 10^{-7} \frac{1}{sec^2}.$$

Přijmeme-li

$$S = 5{\cdot}50 \frac{g}{cm^3},$$

jest

$$\varkappa = 6{\cdot}69 \,.\, 10^{-8} \frac{cm^3}{g \,.\, sec^2}.$$

Ustanovme určité hodnoty. Volme za M kouli olověnou hmoty jedné tuny $=$ 1000000 g. Při specifické hmotě olova $11{\cdot}3 \frac{g}{cm^3}$ vypočítáme, že by poloměr koule této byl $27{\cdot}64\ cm$. Položme kouli tuto stranou tak, aby, když se vlákno v nové poloze ustálí, bylo

$$L = 100\ cm.$$

Pak vypočteme ihned intensitu dle příslušného vzorce

$$\gamma = 6{\cdot}69 \,.\, 10^{-6} \frac{cm}{sec^2},$$

proti tomu jest (pro geografickou šířku střední)

$$g = 980{\cdot}6 \frac{cm}{sec^2},$$

z čehož plyne

$$\varepsilon = 0{\cdot}00141''.$$

Úchylka ε jest tedy ohromně malá. Mohli bychom s koulí M jíti blíže, aby pak kulička m byla »na povrchu« této koule M, jako je na povrchu země. Vzhledem k hodnotě $27{\cdot}64\ cm$ poloměru dříve vypočteného mohli bychom jíti na př. až

$$L = 28\ cm,$$

pak by byla intensita γ větší $\left(\frac{100}{28}\right)^2 = 12{\cdot}8$ krát,

a úhel ε by stoupl na hodnotu i tak velmi malou

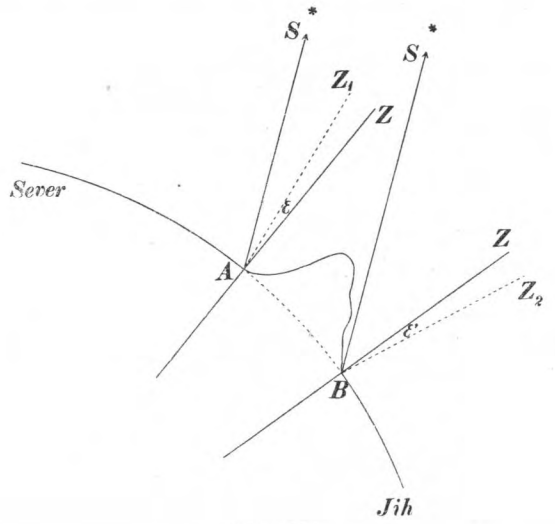
$$\varepsilon = 0{\cdot}018''.$$

Z orientační a poučné úvahy této poznáváme, že většího úhlu ε nelze docíliti přiblížením koule M, nýbrž jenom jejím zvelič ením. Kdybychom tedy poloměr koule této zvětšovali, pak by gravitační působení koule na jejím povrchu vzhledem k rostoucí hmotě stoupalo s třetí mocností poloměru, ale zároveň vzhledem ke vzdalujícímu se středu koule klesalo s druhou mocností poloměru, tak že by $tg\ \varepsilon$ se zvětšovala jen s prvou mocností poloměru, tudíž vzhledem k objemu koule prudce rostoucímu jen volně. Aby na př. úhel ε stoupl na $1{\cdot}8''$, musila by koule M býti zvelič ena na million tun.

§ 195. **Měření na základě odchylky svislice.**

Velikými hmotami jsou v přírodě osamělé mohutné hory. Na úpatí svém mají vliv podobný jako ona postranní koule; způsobují malou změnu směru vertikálního, tudíž pošinutí zenitu, o úhel ε. Souhlasně ustálí se též libella v poloze, kteráž od horizontální se o týž úhel odchyluje. Na tento vliv osamělých hor poukázal již *Bouguer* a *La Condamine*. Roku 1738 konstatoval *Bouguer* na úpatí hory Chimborasso úchylku svislice o úhel $7\frac{1}{2}''$. Úplné však měření, se zřetelem ke konstantě gravitační čili průměrné hustotě země,

provedli (1774) *Maskelyne* a *Hutton* *). Volili k tomu cíli horský hřbet Shehallien, dosti isolovaný, rozestírající se ve směru východozápadním ve Škotsku, (severovýchodně od Perthu). Na úpatí severním a jižním určeny dvě stanice A, B (obr. 134.), ležící na témž



Obr. 134.

poledníku. Z obrazce, schematicky narýsovaného, vysvítá ihned, že každé měření zenitové distance **) hvězdy S jakékoli, kulminující na př. na straně severní, dopadne na severní stanici A o úhel ε menší, a na jižní stanici B o úhel ε' větší, než by dopadlo na rovině. Rozdíl obou zenitových distancí se tedy působením hory zvětší o $(\varepsilon + \varepsilon')$. Poněvadž pak tento rozdíl jest jinak identický s rozdílem geografických šířek obou stanic, lze ono zvětšení počítati. Nalezeno z kulminací hvězdy polární $\varepsilon + \varepsilon' = 11{\cdot}66''$. Z přibližného odhadnutí hmoty M hory a polohy jejího těžiště na základě geognostickém bylo možno počítati průměrnou hustotu země; vyšla $= 4{\cdot}7$.

*) *Nevil Maskelyne* (1732—1811) byl pátým ředitelem hvězdárny Greenwichské a král. astronomem anglickým. Založil Nautical Almanac, jehož ročníky 1767—1815 sám vydal. U jména *Hutton* musí býti rozeznáváni vrstevníci *James Hutton* (1726—1797), geolog, a *Charles Hutton* (1737—1823), mathematik; tento byl účastníkem měření. Příslušná pojednání jsou obsažena ve Phil. Trans., 1775 (Maskelyne), 1778, 1780, 1821 (Hutton).

**) Pro jednoduchost názoru jest vhodné vykládati věc tak, jakoby se přímo měřily dinstance zenitové hvězd; fakticky se měří jich výšky, což jsou úhly komplementární.

Měření podobná úhlu ε ale bez applikace na problém gravitační provedena byla též na úpatí Alp (v Ženevě 6·41″, v Bernu 7·73″), dále na úpatí Kavkazu (ve Vladikavkazu 35·8″) a j. *).

§ 196. **Měření z přibývání intensity gravitační do hloubky.**

Při methodě předešlé srovnává se působení hmoty osamělého horstva s působením země ostatní. Myšlenka analogická jest obsažena v methodě, dle níž první měření prováděl *Airy*; jejím základem jest srovnávání gravitační intensity G naší země *na jejím povrchu* s gravitační intensitou G' v *dané hloubce* h pod povrchem zemským.

Početní rovnice této methody odvodíme snadno, znajíce, jaké jest gravitační působení kulových vrstev na venek i do vnitř.

Budiž V objem zemské koule poloměru R. Je-li S průměrná specifická její hmota, udává intensitu gravitační G na jejím povrchu rovnice

$$G = \varkappa \frac{VS}{R^2}.$$

Sestupujeme-li do hloubky h, působí jen koule zemská poloměru $R - h$, nikoli však vrstva kulová tloušťky h; neboť uvnitř vrstvy kulové jest intensita pole gravitačního nullou. Je-li tedy v objem a s specifická hmota této kulové vrstvy, udává intensitu gravitační G' v hloubce h rovnice:

$$G' = \varkappa \frac{VS - vs}{(R-h)^2}.$$

Pro poměr obou intensit obdržíme tedy

$$\frac{G'}{G} = \frac{VS - vs}{VS} \cdot \frac{R^2}{(R-h)^2}.$$

Majíce rovnici tuto dále upraviti, mějme na mysli, že hloubka h, do níž lze sestoupiti, mizí téměř proti poloměru R země naší; rovněž tak mizí objem v oné kulové vrstvy proti objemu V celé země. Jsou tudíž zlomky

$$\frac{h}{R}, \qquad \frac{v}{V},$$

tak nepatrné, že jich čtverce (a tím více jich vyšší mocnosti), jakož i jich součin lze zcela zanedbávati.

*) F. J. Studnička, Zeměpis hvězdářský, pag. 374.

V souhlasu s tím jest také urychlení G' jen velmi málo rozdílné od urychlení G. Víme již, že jest poněkud větší. Můžeme tedy psáti

$$G' = G + \gamma.$$

Na tomto základě vyjádříme hořejší oba faktory, jednak přesně, jednak přibližně takto:

$$\frac{VS - vs}{VS} = 1 - \frac{v}{V} \cdot \frac{s}{S}$$

$$\left(\frac{R}{R-h}\right)^2 = \left(1 - \frac{h}{R}\right)^{-2} = 1 + 2\frac{h}{R}.$$

Pak jest dále

$$1 + \frac{\gamma}{G} = \left(1 - \frac{v}{V} \cdot \frac{s}{S}\right)\left(1 + 2\frac{h}{R}\right),$$

z čehož

$$\frac{\gamma}{G} = 2\frac{h}{R} - \frac{v}{V} \cdot \frac{s}{S}.$$

Ježto

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$
$$V - v = \tfrac{4}{3}\pi (R-h)^3,$$

jest

$$v = \tfrac{4}{3}\pi [R^3 - (R-h)^3],$$
$$\frac{v}{V} = 1 - \left(1 - \frac{h}{R}\right)^3,$$

tudíž

$$\frac{v}{V} = 3\frac{h}{R}.$$

Obdržíme tedy:

$$\frac{\gamma}{G} = 2\frac{h}{R} - 3\frac{h}{R} \cdot \frac{s}{S},$$

aneb definitivně

$$\frac{\gamma}{G} : \frac{h}{R} = \frac{2S - 3s}{S}.$$

Rovnice tato vystihuje formou elegantní a způsobem velmi poučným jádro methody, stanovíc poměr, jaký jest mezi procentuální změnou intensity gravitační a procentuální změnou vzdálenosti od středu zemského.

Počtem differenciálním lze odvození rovnice této zkrátiti. Zejména vychází vztah

$$\frac{v}{V} = 3\frac{h}{R}$$

ihned logarithmováním a differencováním výrazu pro V, když klademe v a h na místo dV a dR.

Kdyby bylo

$$S = s,$$

t. j. kdyby země byla homogenní, vyšlo by

$$\frac{\gamma}{G} : \frac{h}{R} = -1,$$

t. j. intensity gravitační by *ubývalo*, a to v témže poměru jak by přiblížení ke středu zemskému vzrůstalo. Bylo by, nehledíc ke znamení,

$$\frac{\gamma}{G} = \frac{h}{R}.$$

Kdyby bylo

$$S = \tfrac{3}{2}\, s,$$

vyšlo by

$$\gamma = 0.$$

t. j. intensita G zůstávala by při stoupání do (malé) hloubky konstantní.

Fakticky jest γ od nully rozdílné a positivní, z čehož vychází, že jest jistě

$$S > \tfrac{3}{2}\, s.$$

Zaveďme ke zkrácení koefficient číselný η pro poměr

$$\frac{\gamma}{G} : \frac{h}{R} = \eta;$$

máme pak

$$\eta = 2 - 3\,\frac{s}{S}.$$

Dlužno ještě promluviti o tom, jak stanovíme poměr $\frac{\gamma}{G}$. Jednáme v pozdějších odstavcích o kyvadle, kteréž se často označuje jako přístroj geognostický. Kyvadlem můžeme totiž studovati nejjemnější variace v intensitě gravitačního pole. Budiž g tato intensita, jak jest skutečně, vzhledem k otáčení se země naší a vzhledem k urychlení centrifugálnímu tím vznikajícímu. Doba kyvu kyvadla jest určena rovnicí

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kdež jest l délka kyvadla redukovaná. Zavedeme-li frekvenci N, t. j.

počet kyvů za sekundu místo doby kyvu, jest

$$N = \frac{1}{t},$$

tudíž zkrátka

$$g = const.\ N^2.$$

Intensita gravitační g měří se tedy čtvercem frekvence kyvů. Zcela podobně měří se intensita magnetického pole čtvercem frekvence kyvů magnetky deklinační. Sestoupíme-li tudíž s kyvadlem, t. j. s hodinami kyvadlovými, do hloubky h, pozorujeme zvýšení frekvence o n kyvů. Pak jest

$$g = const.\ N^2$$
$$g + \gamma = const.\ (N + n)^2,$$

z toho

$$\gamma = const.\ [(N + n)^2 - N^2]$$
$$\frac{\gamma}{g} = \left(1 + \frac{n}{N}\right)^2 - 1,$$

t. j.

$$\frac{\gamma}{g} = 2\,\frac{n}{N},$$

vzhledem k tomu, že poměr $\frac{n}{N}$ mezi přírůstkem frekvence a původní frekvencí jest zlomek tak malý, že možno čtverec jeho a vyšší mocnosti zanedbávati.

Také tento vztah vychází ihned, když logarithmujeme a differencujeme rovnici

$$g = const.\ N^2,$$

kladouce γ a n na místě dg a dN.

Pohyb kyvadla řídí se urychlením skutečným g; naproti tomu v rovnicích dříve na základě zákona gravitačního odvozených přichází urychlení G pouze gravitační. Jest však patrno, že *změna* γ vzhledem k nepatrným hloubkám h, do nichž vůbec můžeme sestoupiti, jest identická pro urychlení jedno i druhé. A i jinak jde rozdíl mezi g a G jen do desetin procenta, tak že v mezích přesnosti této methody můžeme eventuálně jedno urychlení klásti za druhé.

Dle toho máme

$$\eta = 2\,\frac{n}{N} : \frac{h}{R}.$$

Poněvadž jde o relativní frekvence, uvádí se n obyčejně pro celý střední den sluneční, t. j. pro

$$N = 86400.$$

Stanovení experimentální koefficientu η nečiní obtíží žádných. Neboť hloubku h lze stanoviti dosti přesně, tudíž i číslo $\frac{h}{R}$. Akcelerace hodin n bývá velmi malá, několik málo sekund za den. Ale poněvadž pozorování časové lze prostředky spolehlivými, na př. elektrickou registrací, prováděti velmi přesně, lze i číslo $\frac{n}{N}$ dosti spolehlivě udati. Tím jest pak určen koefficient η a z něho počítáme

$$\frac{S}{s} = \frac{3}{2 - \eta}.$$

Z koefficientu η obdržíme tedy poměr hustot $\frac{S}{s}$. Tím však jest stanovení hledané hustoty S celkové podmíněno stanovením hustoty s té kulové vrstvy, uvnitř kteréž pozorovací stanice ve hloubce se nalézá. Zde pak vznikají obtíže, kteréž celou methodu, jinak velmi duchaplnou, činí méně významnou. Neboť stanovení hustoty s může se díti, ovšem se zřetelem na poměry geologické, přece pouze odhadem a tudíž nikdy s tou přesností, jak by zde bylo žádoucí.

Poučný toho doklad dává první pozorování, kteréž na tomto základě provedl *Airy* *). Stanice jeho byla v uhelných dolech na Harton Colliery poblíž South Shieldsu ve Walesu, ve hloubce 383 *m*. Hodiny předbíhají zde za den o $2^1/_4$ sekundy.

Z těchto dat vychází koefficient η následovně:

$$h = 383\ m, \qquad 2n = 4{\cdot}5,$$
$$R = 6371103\ m, \qquad N = 86400,$$
$$\frac{h}{R} = 0{\cdot}0000601, \qquad \frac{2n}{N} = 0{\cdot}0000521,$$

$$\eta = \frac{2n}{N} : \frac{h}{R} = 0{\cdot}866,$$

odtud pak vychází dále

$$\frac{S}{s} = \frac{3}{2 - \eta} = 2{\cdot}646.$$

Šlo tedy ještě o hodnotu s. Airy dal prozkoumati vrstvy

*) *George B. Airy, Sir*, slavný hvězdář anglický, ředitel observatoře v Cambridgi a pak v Greenwichi, muž neobyčejné činnosti vědecké a literární, narodil se $^{27}/_{7}$. 1801 a zemřel $^{2}/_{1}$. 1892 ve vzácném věku více než 90 let. Pojednání, hledící k pokusům zde popisovaným, má název:

Pendulum experim. in t. Harton colliery for determ. t. mean density of t. earth 58 p. Phil. Trans. 1856.

zemské v blízkosti své pozorovací stanice a přijal pak za hodnotu pravdě nejpodobnější

$$s = 2{\cdot}50,$$

ze kteréž pak vyšlo

$$S = 6{\cdot}62,$$

Oproti tomu *S. Haughton* přivedl při diskussi pozorování Airyho k platnosti, že při hustotě s nelze přihlížeti jen k vrstvám, jež jsou pozorovací stanici nejbližšími, nýbrž i k vrstvám vzdálenějším, že tato stanice byla pod hladinou mořskou a že tudíž vzhledem k malé hustotě vod dlužno pro s přijmouti hodnotu značně menší. Za pravdě nejpodobnější přijal

$$s = 2{\cdot}06,$$

ze kteréž pak následuje

$$S = 5{\cdot}45.$$

Zde tedy jest jasně viděti, jak i při téže pozorovací stanici mohou odhady pro touž veličinu s se značně od sebe lišiti.

Pozorování podobná prováděl u nás v novější době (1882) generalmajor (tehdy major) *Robert Daublebsky ze Sternecků*, v šachtě sv. Vojtěcha v Příbrami. Sestoupil s kyvadlovým apparátem, který pro účely takové sám sestrojil, do hloubky 561 *m* a 972 *m* pod povrchem půdy. Při tom se ukázal zvláštní zjev, že kyvadlo v hloubce větší neukazovalo souhlasně větší akceleraci, jak by se očekávalo, nýbrž téměř jen takovou, jako v hloubce poloviční. Následkem toho, na základě hodnoty $s = 2{\cdot}75$, vyšlo pro S nesouhlasně

pro hloubku 516 *m* . . . $S = 6{\cdot}28$,
» » 972 *m* . . . $S = 5{\cdot}01$.

Z tohoto příkladu vychází jasně, že nelze výsledkům dle této methody nalezeným přikládati významu jiného než jen orientačního, právě tak jako výsledkům dle methody v předešlém odstavci popsané. Vskutku mají obě methody to společné, že se na hledanou střední hustotu země soudí z hustoty zemských hmot nám sice přístupných, ale ve vnitřním složení svém neznámých, pro kteréž tudíž nelze hustotu přesněji než jen odhadem ustanoviti.

Budiž ještě poukázáno na zajímavé analogie. Koefficient η v tom významu, jak zde byl zaveden, jakožto poměr mezi relativní změnou $\frac{\gamma}{G}$ intensity gravitační a relativní změnou $\frac{h}{R}$ odlehlosti od středu zemského, jsme již seznali (§ 187.).

Stoupáme-li do stanic isolovaných, na př. v ballonu, jest h positivní, γ negativní a koefficient

$$\eta = 2.$$

Rozestírá-li se pod stanicí horstvo horizontálně velmi rozsáhlé, hustoty s, umenší se koefficient η, tak že jest

$$\eta = 2 - \frac{3}{2}\frac{s}{S}.$$

Analogicky má se věc, když sestupujeme do hlubin. Zde jest h negativní, γ positivní. Kdyby se celá hmota země rozestírala pod hlubší stanicí, byl by koefficient

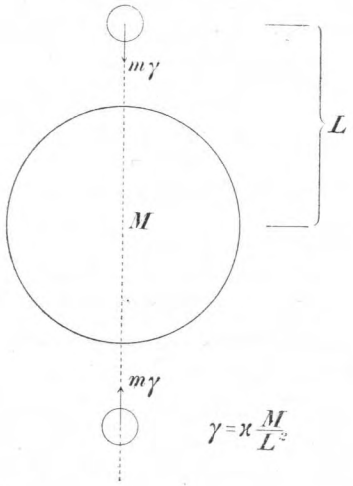
$$\eta = 2;$$

avšak vrstvou kulovou, uvnitř kteréž stanice leží, hustoty s, umenší se opět koefficient η, tak že jest

$$\eta = 2 - 3\frac{s}{S}.$$

Srovnávajíce umenšení koefficientu η zde i nahoře, vidíme, že zde jest dvojnásobné. Vrstva, rozestírající se jen horizontálně do dálek velmi velikých, tedy jako by jen do tvaru polokulovitého, působí vlivem polovičním. Poznámka tato má význam mnemotechnický.

§ 197. **Měření vážením na jemných vahách pákových.**



Obr. 135.

Při uspořádání úvodního pokusu, jak o něm v § 194. bylo jednáno, sečítaly se váhy $m\gamma$ a mg koule m geometricky *). Snadno lze však uspořádání pozměniti tak, aby se obě váhy sečítaly algebraicky; třeba jen středy obou koulí, m a M, zaříditi do směru svislého (obr. 135.). Je-li tedy koule m nad koulí M v odlehlosti středové L, zvětší se její váha mg vzhledem k zemi ♁ o váhu $m\gamma$ vzhledem ke kouli M, tak že jest úhrnem

$$m(g + \gamma).$$

*) Zde velice ruší, že symbol mg značí též milligramm; proto se v dalším tomuto označení vyhýbáme.

Je-li koule m stejně daleko jednou nad, po druhé pod koulí M, přistupuje k váze mg hmoty m její váha $m\gamma$ vzhledem ke kouli M jednou additivně po druhé subtraktivně, tedy celkově

$$m(g + \gamma), \quad m(g - \gamma),$$

tak že rozdíl činí $2\,m\gamma$.

Jak veliký tento rozdíl lze očekávati, rovná-li se hmota M jedné tuně, o tom poučují data uvedená v § 194. Kdybychom s koulí m šli až do odlehlosti $L = 30\ cm$, bylo by

$$\gamma = 74{\cdot}3\ .\ 10^{-6}\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Volme za m na př. jeden kilogramm, tedy v grammech

$$m = 1000,$$

pak jest

$$m\gamma = 74{\cdot}3\ .\ 10^{-3}\ dyn.$$

Váha mg koule m by se tedy o tolik jednou zvětšila, podruhé zmenšila. Počítejme, jakému přívažku μ to přísluší. Přívažek μ působí vahou μg, musí tedy býti

$$\mu g = m\gamma,$$

čili

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\gamma}{g},$$

t. j. kolik procent činí γ proti g, tolik procent činí μ proti m.

Pro vypočítanou hodnotu γ vyjde v grammech

$$\mu = \frac{74{\cdot}3}{980{\cdot}6}\ 10^{-3},$$

čili v milligrammech

$$\mu = 0{\cdot}076,$$

anebo

$$2\mu = 0{\cdot}152.$$

Orientační tato úvaha ukazuje, že jest možno jemnými vahami tento rozdíl ve váze zjistiti; neboť setinu milligrammu lze vahami velmi jemnými (opatřenými zrcátkem a odčítacím dalekohledem se stupnicí) dobře zaručiti; zde pak rozdíl činí 15 setin milligrammu. Kdyby se hmota M vzala větší než jedna tuna, byl by přírůstek ovšem větší. Při počítání pak definitivním nutno též přihlédnouti k malinkým změnám intensity g zemského pole gravitačního, jež vznikají tím, že se pozoruje v různých hladinách.

První měření na tomto základě prováděl (1879—1880) *Jolly* *) ve věži universitní budovy Mnichovské. Schody ve věži této jsou vedeny po zdi vnější, následkem čehož jest uvnitř věže volná prostora, jejíž strana jest 1·5 *m*, výška 25 *m*. Zde umístil Jolly jemné váhy, do 5 *kg* maximálního zatížení, opatřené zrcátkem na příč k vahadlu upevněným, tak že bylo lze při vážení pozorovati nejjemnější optickou methodou, dalekohledem a stupnicí. Váhy měly na každé straně dvě misky, z nichž dolejší, o 21 *m* níže, visela na drátu (mosazném, zlaceném), který od hořejší byl veden trubicí z plechu zinkového. Na jedné straně byla blízko pod dolejší miskou umístěna velká koule *M* olověná průměru 1 metru, jejíž hmota byla v kilogrammech

$$M = 5775,$$

tedy bez mála 6 tun. Za hmotu *m* volena rtuť v baňce skleněné; s touto bylo vždy současně užíváno stejné baňky prázdné, aby účinek vzduchu při vážení byl vymýcen. Pro druhou stranu vah byla rovněž připravena jedna baňka se rtutí a druhá prázdná ve stejném způsobu. Hmota *m* rtuti netto činila v grammech

$$m = 5009{\cdot}45,$$

tedy okrouhle 5 kilogrammů. Při začátku pozorování byly baňky plné na miskách hořejších, prázdné na dolejších; pak se baňky vyměnily, dolejší za hořejší, jednou na straně koule *M*, po druhé na straně opačné. V obou případech shledán přírůstek na váze, v souhlasu s tím, že gravitační pole země jest intensivnější v poloze dolejší proti hořejší; ale na straně koule *M* shledán přírůstek větší, o přívažek v milligrammech

$$\mu = 0{\cdot}589.$$

Pro hořejší polohu baňky mizí sice účinek koule *M*, vzhledem k značné odlehlosti, ale vystupuje v bezprostřední blízkosti, jako by na povrchu této koule, v odlehlosti středové

$$L = 56{\cdot}86\ cm.$$

Z uvedených dat vypočítal Jolly se zřetelem k některým korrekcím

$$S = 5{\cdot}69.$$

Methoda Jollyho, jednoduchá svou základní myšlenkou, činila v provedení mnohé obtíže, jež vznikaly velikou rozlohou výškovou, v níž bylo pracovati. Proudy vzduchové, před nimiž váhy co možná dobrým uzavřením musily býti chráněny, změny teploty, vlhkosti a pod. způsobovaly mnohé zdroje chyb.

*) *Ph. v. Jolly*, professor university Mnichovské, žil v letech 1809—1884.

Pokusy podobné prováděl v době novější (1878 a 1891) *Poynting* v Londýně a obdržel ze dvojí řady měření hodnotu

$$S = 5{\cdot}493.$$

Methodou poněkud pozměněnou, ale v podstatě na témže základě, obdržel *Wilsing* (1887) v Postupimu hodnotu

$$S = 5{\cdot}58.$$

V době nejnovější provedli velmi přesná, mnoho let trvající měření *F. Richarz* a *O. Krigar-Menzel* *) v kasemattě pevnosti Spandavské methodou, která proti methodě Jollyho byla zdokonalena, ve smyslu hořejší úvahy orientační, tím, že vliv velké hmoty *M* stanoven nikoli jednostranně, nýbrž oboustranně. Při své práci měli zřetel ke všem zkušenostem, jež Jolly učinil a jež v práci své podrobně popisuje. Místnost zaručovala velmi dobře stálost i teploty i vlhkosti vzduchu. Hmota *M* byla = 100 tun. Sestavena totiž veliká krychle, o straně něco větší než 2 metry, objemu téměř 9 krychlových metrů, z olověných menších pravoúhlých kusů a umístěna na zvláštních velmi pevných základech. Koule *m* byla platinová, hmoty jednoho kilogrammu. Vážení prováděno ovšem dle optických method nejpřesnějších a nejjemnějších, vhodně kombinovaných. Vliv vzduchu eliminován opět tím, že vždy současně s koulí *m* massivní byla vážena koule stejného objemu a stejného materiálu, ale dutá, lehká; když tedy koule plná byla nad olověnou krychlí, zaujala koule dutá místo pod krychlí; pak se vyměnily. Podobně i na druhé straně vah bylo užíváno stejné koule i plné i duté. Vážení kombinováno dle methody Gaussovy. Krychle olověná byla středem svisle provrtána, aby skrze ni se protáhly spojovací tyče vah. Tyto váhy a celý prostor kolem massy olověné byl zvlášť uzavřen skříní z dvojnásobného zinkového plechu. Z měření tohoto vyšla definitivní hodnota

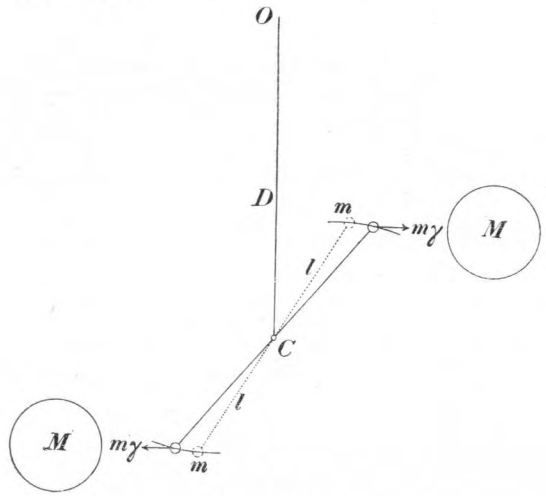
$$S = 5{\cdot}505 \pm 0{\cdot}009.$$

§ 198. **Měření vážením na jemných vážkách točných.**

Váha $m\gamma$ koule *m* vzhledem k velké kouli *M* nemůže přijiti tak k platnosti, když vedle ní anebo proti ní spolupůsobí její daleko značnější váha *mg* vzhledem k zemi naší. Proto jeví se býti výhodnějším, účinek země eliminovati, a měření vzájemné attrakce obou koulí *m* a *M* upraviti v rovině nikoli vertikální, nýbrž hori-

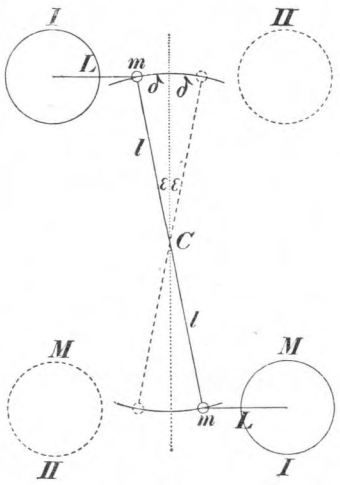
*) Publikováno v Pojedn. Akademie Berlínské 1893, 1896, též ve Wied. Ann., svazek 51., 1894, a svazek 66., 1898.

zontální. Na základě tomto provedl v letech 1797—98 pokusy s tak zvanými točnými vážkami *Cavendish* *), srovnávaje účinek oné attrakce s torsí drátu.



Obr. 136.

Uspořádání pokusu jeho objasňují schematicky obrazce 136. a 137. Zvoleny dvě stejné koule m, malé, a proti nim souhlasně dvě stejné koule M, velké, všechny olověné. Ony koule malé spojeny v jediný hmotný systém tyčinkou z jedlového dřeva, délky $2\,l$, velmi lehkou, kteráž uprostřed byla zavěšena na dlouhém a tenkém drátku stříbrném. Také velké koule M byly spolu spojeny soustavou tyčí měděných takové úpravy, aby se celek dal kolem osy vertikální otáčeti a tudíž koule M do blízkostí koulí m buď s jedné neb s druhé strany postaviti. Vzájemnou přitažlivostí koulí M a m na obou stranách vzniká dvojice sil, otáčející určitým momentem tyčinku dřevěnou s kuličkami m; tím se však kroutí drátek a kroucení působí mo-



Obr. 137.

*) *Henry Cavendish* žil v letech 1731—1810 v Londýně jako soukromník, zanášeje se pracemi chemickými, fysikálními a astronomickými.

mentem opačným; nastane tudíž v jisté odchylce ε tyčinky rovnováha. V mathematické formulaci této rovnováhy spočívá vlastní úkol, odvoditi základní rovnice pro daný problém.

Koule m gravituje ke kouli M na jedné i druhé straně silou $m\gamma$. Obě síly působí tudíž při délce $2l$ tyčinky momentem $2m\gamma l$. Proti tomuto momentu působí otáčivý moment drátu. Je-li D direkční síla kroucení čili direkční moment torse, činí otočení tyčinky o úhel ε faktický moment otáčivý $D\varepsilon$.

Máme tedy základní rovnici

$$2m\gamma\, l = D\,.\,\varepsilon,$$

při čemž jest

$$\gamma = \varkappa \frac{M}{L^2},$$

značíc intensitu gravitačního pole velké koule M ve vzdálenosti L od středu jejího, v níž se nalézá střed kuličky m.

Jednou pro vždy určí se hmoty m a M koulí. Při pokusech, jež Cavendish prováděl, bylo v grammech

$$m = 730, \qquad M = 158000.$$

Jednou pro vždy určí se též délka l; byla 8 angl. palců.

Dále nutno, též jednou pro vždy, předběžným pozorováním určiti direkční moment D drátu. To se děje z doby kyvu. Když se totiž soustava kuliček m na tyčince, jak je zavěšena na drátku, vychýlí o malý úhel z rovnovážné polohy, co zatím koule M jsou v poloze symmetrické, v rovině k tyčince aequatoreální, aby na postavení tyčinky neúčinkovaly, vrací se torsí drátku tyčinka s kuličkami do polohy rovnovážné, přejde přes ni na druhou stranu, vrací se opět, atd., tak že vykonává kyvy v době t dosti dlouhé, jež jest určena rovnicí

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}.$$

V této značí K moment setrvačnosti systému hmotného, který jest v pohybu kývavém. Poněvadž hmota tyčinky dřevěné jest velmi malá, rozhodují hlavně obě kuličky m a dávají v odlehlosti l od osy moment setrvačnosti

$$K = 2ml^2.$$

Tento moment K se vypočítá; když se pak stanoví pokusem doba t, může se dle vzorce direkční moment D počítati.

Po těchto pracích předběžných záleží pak vlastní pozorování v tom, konstatovati, v jaké odchylce ε se ustálí tyčinka, když se koule M dají ke kuličkám m do vzdálenosti středové L.

Odchylku úhlovou ε stanovil Cavendish z lineární δ, z malinkého obloučku, dle rovnice

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l}.$$

Odlehlost L stanovil rovněž z odlehlostí krajů koulí vzhledem k jich poloměrům.

Zaváděti všechny tyto pomocné veličiny do hlavního vzorce není výhodné, poněvadž se tím vzorec stává komplikovaným a nepřehledným, jevícím se pak oku jako seskupení nejrozmanitějších písmen, označujících věci hlavní i vedlejší smíšeně. Také se dle takových komplikovaných vzorců nikdy číselně nepočítá.

Cavendish užíval při pokusech svých dvojího drátu; při drátku slabším byla doba kyvu asi 14 minut, při silnějším 7 minut. Poloha rovnovážná nenastane při jemnosti celého uspořádání vlastně nikdy; musí se tedy počtem odvoditi z pozorovaných bodů obratu, jako při vážení na jemných vahách. Že celek byl uzavřen ve skříni, aby se vliv proudění vzduchu odstranil; že pak všechny manipulace musily býti konány z venčí, a že také odčítání se dálo z venčí, rozumí se samo sebou. Celý způsob pozorování podobá se tomu, jakého při manipulaci jemnými vahami užíváme. Proto není nevhodný název říkati celému přístroji »vážky« točné. Vskutku se stanoví váha jemných těch kuliček, a to vzhledem k velkým koulím; jest tedy pozorování také jakýmsi vážením.

Uváděti podrobná data z měření, jež Cavendish provedl, nemělo by žádného zájmu; přestáváme na hlavních rysech jeho methody, velmi důležité, uvádějíce níže ještě jen výsledek, kterého z 29 pozorování nabyl.

První měření točnými vážkami konal Cavendish v posledních letech století předešlého; od těchto let uplynulo století další, a v době té, zejména v druhé její polovici, byly prováděny pokusy touže methodou s největší péčí a vytrvalostí, překonávající všechny ty četné obtíže, kteréž ukázal jednak průběh prací samých, jednak kritický rozbor jich výsledků. Uvádíme zde experimentátory následující, připojujíce výsledek, který za definitivní uznali, jakož i letopočet, kdy výsledek publikovali. Při tom přestáváme na průměrné hustotě S země, z níž lze konstantu gravitační snadno určiti.

Pozorovatel	$S, \frac{g}{cm^3}$
Cavendish . . (1798, Londýn)	5·48
Baily . . . . (1842, Londýn)	5·67
Reich . . . . (1837, Freiberg)	5·44
„ . . . . (1849, „)	5·58
Cornu a Baille (1878, Paříž)	5·53
Boys . . . . (1894, Londýn)	5·53
Braun . . . (1896, Šejnov)	5·53

Každý z těchto experimentátorů hleděl zabezpečiti pro svá pozorování přesnost co největší, zejména vzhledem k účinkům takovým, kteréž lze velmi nesnadno v počet uvésti.

Sem náleží především vliv teploty. Pozorování vyžadují doby dlouhé, často několika let; neboť nutno dlouho čekati, než se poměry uklidní a ustálí. Při tom má se teplota udržovati co jen možná stálou, poněvadž změny teploty vždy rušivě na fysikální měření působí. Zejména jest to elasticita drátu a vše, co s tím souvisí, která by teplotou se měnila způsobem pro korrekce velmi nepřístupným. Proto se pozorování konala v místnostech podzemních, sklepních anebo v dolech hluboko pod zemí (Reich ve Freiberku).

Pro sledování pohybů celého pohyblivého systému hmotného na drátku zavěšeného zavedl již Reich methodu Gaussovu, užívání odčítacího stupnicí opatřeného dalekohledu, který jest namířen proti zrcátku spojenému pevně v ose otáčecí s onou soustavou hmotnou. Rovnovážná poloha určována z bodů obratu; neboť klid nenastává zde nikdy. Doba kyvu stále kontrolována; neboť z této se počítala veličina zde nejvíce rozhodující, direkční moment drátu. Tato doba kyvu jest vždy velmi dlouhá. Neboť má-li attrakcí hmot býti způsobena značnější úchylka, musí direkční moment býti velmi malý, následkem čehož pak doba kyvu jest velmi značná. Činí mnoho minut, na př. 7 až 14 (Cavendish), 6·8 (Cornu a Baille) atd. Proto užíváno při měření této doby kyvu registrace elektrické (Cornu a Baille). Doba tato nemá se během celého roku měniti než jen v desetinách sekundy.

Odchylka, attrakcí velkých hmot postranních způsobená stanovila se rozdílem rovnovážných poloh, pozorováním bodů obratu. Ale právě velmi citlivý způsob odčítání objevil obtíže nové, dříve netušené. Ukázalo se, že nová poloha rovnovážná, způsobená attrakcí postranních hmot, nenastává ihned, nýbrž až po dlouhé

době, následkem toho, že se drát vlivům točivým jen znenáhla poddává. A právě tak po oddálení postranních hmot vrací se drát v původní polohu rovnovážnou jen ponenáhlu. Úkaz zde popisovaný má základ svůj v dopružování se drátů, vlastnosti i všeobecněji vystupující. Vzhledem k obtížím těmto zavedl Boys na místě obyčejně užívaných drátů (stříbrného, mosazného žíhaného, a j.) vlákno křemenové. Tím získal i výhody jiné. Vlákno toto jest oproti silám otáčivým nad míru citlivé. Proto bylo lze síly tyto voliti slabší, t. j. manipulovati s hmotami značně menšími. Vlákno není hygroskopické. Hlavní však přednost jeho spočívá v tom, že jest dokonale pružným, neukazujíc dopružování než jen v míře velice skrovné.

Vskutku vyžadovaly hmoty, jak ony uchylované, tak ony uchylující, také zvláštního zřetele. Při hmotách uchylovaných, malých, jež se upevňovaly na tyčinku aluminiovou, musilo se pomýšleti na eventuální změny povrchové, oxydaci a pod. Proto užito kovových koulí zlacených (Braun) anebo malých kuliček zlatých (Boys). Při hmotách pak uchylujících, velkých, musilo býti dbáno jich homogenity. U olova toho dobře nelze; proto užíváno rtuti (Cornu a Baille), která proti olovu jest také specificky hmotnější. Tím pak docíleno ještě výhody jiné. Bylo možno těsně vedle koulí uchylovaných umístiti pevně, jednou pro vždy, čtyři duté koule železné, které tudíž nebylo nutno teprve otáčeti a stavěti; rtuť pak hnána bez otřásání do nich tlakem vzduchu, střídavě buď na jednu nebo druhou stranu, anebo z nich ven, když se měla kontrolovati doba kyvu.

Přítomnost vzduchu bývá při pozorování též zdrojem nesnází a chyb; proto umístil Braun celý přístroj pod velký recipient, z něhož pak vzduch byl vyčerpán.

Veškerá tato a podobná opatření měla pro pozorovatele ten výsledek, že jednotlivá pozorování, jichž počet u některých až do tisíců šel (Bailly více než 2000), souhlasila mezi sebou dosti dobře; následkem toho pravděpodobná chyba výsledku se vypočítala velmi skrovná. Tak na př. udává Braun svůj výsledek

$$S = 5{\cdot}5273 \pm 0{\cdot}0012.$$

A přece vidíme, že v resultátech pozorovatelů různých jsou rozdíly daleko značnější než jest udaná pravděpodobná chyba výsledků. Z toho dlužno souditi, že se zde velmi snadno dostavují chyby stálé, systematické, které se ovšem nevymýtí ani sebe větším počtem jednotlivých pozorování.

§ 199. **Výsledek závěrečný.**

Ke stanovení výsledku závěrečného bylo by nutno provésti kritickou diskussi všech dotud vykonaných měření a to nikoli jen dle methody jediné, nýbrž dle method všech *). Diskusse taková, ovšem velice nesnadná, dosud provedena není; tím se stává, že různí autorové pro konstantu gravitační aneb, což jest aequivalentní, pro průměrnou hustotu S země přijímají hodnoty různé. V novějších spisech německých **) přijímá se

$$S = 5{\cdot}516,$$

jakožto hodnota resultující z měření nejnovějších (Richarz, Poynting, Braun, Wilsing). Ve spisech anglických volí se hodnota (Boys)

$$S = 5{\cdot}527,$$

Oproti tomu přijímá Bureau des longitudes v Paříži hodnotu menší

$$S = 5{\cdot}50.$$

Patrně rozhodoval pro volbu tuto také zřetel k výsledkům starším a zejména také k pozorováním astronomickým. Vskutku jest pozoruhodno, že methody, při nichž se hodnota S počítá na základě působení hmot přírodou samou daných, tedy hor, vrstev zemských, (Maskelyne, Airy), vedou k výsledkům rozhodně menším (4·7 až 5·48) než methody ostatní, při nichž se počítá s hmotami, jež si experimentátor sám připraví. Konečně jest zajímavo, že pozorování nejnovější, jež provedli Richarz a Krigar-Menzel v dlouhé době 14 let (1884—1898) methodou rozhodně nejpřesnější a při němž vládli všemi prostředky nejjemnější mechaniky, vedlo k hodnotě

$$S = 5{\cdot}505 \pm 0{\cdot}009,$$

kteráž se tedy shoduje (v mezích udané pravděpodobné chyby) s onou, již přijímá bureau des longitudes. Z tohoto důvodu byla také v této knize za pravdě nejpodobnější uznána a výpočtům za základ položena.

Jisto jest, že tím, alespoň na málo desetin procenta přesně, vystižena konstanta, kteráž má význam kosmický a jejížto určování právě pro tento význam působilo zvláštním kouzlem. Znáti tuto konstantu znamená vážiti světy, vážiti hmoty těles nebeských.

*) O methodách těchto pojednal též Dr. Vlad. Novák v článku: Měření konstanty gravitační a střední specifické hmoty země, Časopis J. Č. M., XXIX., pag. 10, 1899. Methodu zvláštní, na základě interferencí optických založenou, udal V. Láska, kteráž však dosud prakticky nebyla provedena.

**) Srovnej na př. Dr. Auerbach, Kanon der Physik, 1899, pag. 57.

Relativně toho dovedla astronomie, vzhledem ke hmotě země neb slunce jako jednotce; zásluhou pak měření fysikálních jest, že lze toto stanovení provésti též v jednotce absolutní.

Vedle pokusů vztahujících se k přesnému určení gravitační konstanty, dlužno uvésti ještě jiné, jichž účelem bylo blíže zjistiti *povahu síly gravitační*. Vedly k nim úvahy analogisující gravitaci s jinými podobnými silami — elektrickou a magnetickou. Především bylo by myslitelno, že gravitace by mohla míti jistý charakter *selektivní*. Jako magnet přitahuje železo, nikl, kobalt, nepřitahuje však látek jiných, tak mohla by i gravitace působiti vyšší měrou na určité nějaké látky. Tato otázka rozhodnuta negativně již *Newtonovými* pokusy o kyvadle s dutou koulí, kam vkládány různé látky (Principia, kniha III., prop. 6.), kteréž byly s největší přesností opakovány *Besselem* (Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht, Pojednání berl. akademie 1830, str. 41). Gravitace působí tedy na nejrůznější látky stejně.

Další otázka mohla by vzniknouti analogií s pokusem o magnetické síle uvnitř dutého železného válce. Víme, že železo má na magnetické siločáry zvláštní vliv, který se jeví tím, že tyto jakoby snáze železem procházejí, než na př. vzduchem; říkáme, že železo a ostatní látky *paramagnetické* mají *větší permeabilitu* než vzduch, resp. vzduchoprázdný prostor. Opačný vliv mají látky *diamagnetické*. Následek toho je, že v pokusu svrchu zmíněném uvnitř železného válce magnetická síla se velmi značně — při vhodném uspořádání až na zlomky procenta síly původní — seslabí. Zcela podobný pokus pro gravitaci uspořádali *Austin* a *Thwing* (Physical Review 5, str. 294, 1897). Apparát jejich byl podoben *Boysovu* — točné vážky s křemenovým závěsem, na němž visely dva drátky zlaté, které podrobeny byly dvojici pocházející od přitažlivé síly dvou velikých hmot olověných. Celý závěs bylo lze obklopiti pláštěm z různých látek, vsunutým mezi točné váhy a olověné hmoty za jinak nezměněných podmínek (teploty, vzdálenosti hmot a pod.). Plášť z nejrůznějších látek (o různých hmotách specifických, různé dielektrické konstantě a magnetické permeabilitě) jako na př. z olova, zinku, rtuti, vody, glycerinu, alkoholu a železa, neměl na velikost dvojice vlivu přesahujícího chybu pozorovací $0{\cdot}2\,^0/_0$. Nemohou tedy tyto různé látky jeviti pro gravitaci různou permeabilitu, alespoň ne v míře takové, jako látky paramagnetické pro sílu magnetickou, ačkoli ovšem rozdíly dosahující podobné velikosti, jako na př. magn. permeabilita u vody a alkoholu, dosud vyloučeny nejsou.

Konečně stojí za zmínku ještě pokusy, které se vztahují ke gravitačnímu chování se látek krystallinických. Víme, že na př. v křemenu jest rychlost šíření se žlutého světla rovnoběžně s osou a kolmo k ní různá, lišíc se asi o 1/170. I u gravitace nemusilo by být vyloučeno, že by na př. gravitační síla vycházející z krystallu mohla dle různého směru vzhledem k ose jeviti různou velikost. Za tím účelem, aby tuto okolnost zjistil, vykonal *Mackenzie* (Physical Review 2., str. 321, 1895) pokusy s Boysovými točnými vážkami, kde přitahující hmotou byly veliké koule vápencové (průměru asi 5 *cm*), které přitahovaly malé kuličky olověné ($^1/_2$ *gr*) a jednou postaveny kolmo ke krystallografické ose, podruhé rovnoběžně s ní. Rozdíly v attrakci nepřesahovaly chyby pozorovací ani v tomto případě, ani ve druhé variaci pokusu, kde také přitahované kuličky (asi $^1/_2$ *gr* vážící) byly z vápence. Jiným způsobem řešil tento problem *Poynting* a *Gray* (Philosophical Transactions 192, str. 245, 1899), kteří zkoumali, zdali se dva krystally křemenové, tak postavené, že jejich osy se křižují, snaží postaviti tak, aby osy byly rovnoběžné. Kdyby totiž gravitační síla měla zmíněnou vlastnost, musila by taková snaha existovati, jak se snadno dokáže. Autoři neužili stálých výchylek, nýbrž nechali krystall attrahující (ovšem ve tvaru koule) otáčeti se kolem osy, čímž by musely u krystallu přitahovaného (malé křišťálové kuličky) vzniknouti za určitého jednoduchého poměru vibračních period torsní vibrace. Tato methoda, daleko přesnější než *Mackenzieova*, ukázala, že, je-li mezi gravitací za skřížených os a rovnoběžných os rozdíl, nemůže přesahovati 1/16000 původní hodnoty.

XII.

Pád volný a po šikmé rovině.

§ 200. Úvod.

Pojednavše o poli gravitačním vůbec a země naší zvlášť vzhledem ke stránce statické, budeme v oddílech následujících jednati o některých význačných pohybech, jež se dějí v poli gravitačním naší země. Aby vynikly především *hlavní typy pohybů* takových, činíme jisté jednoduché předpoklady, přihlédajíce zároveň, jak dalece jim ve skutečnosti lze vyhověti. Především předpokládáme, že *pole gravitační*, v němž pohyby se dějí, jest *homogenní*. Poněvadž intensita pole gravitačního souvisí se vzdáleností od středu země, jest předpokladu tomuto dostatečně vyhověno, když se ony pohyby dějí ve svislých odlehlostech, jež mizí proti poloměru naší země; obyčejné svislé odlehlosti, v jakých pokusy lze konati, vyhovují tomuto požadavku plnou měrou. Dále předpokládáme, že se pohyby dějí *bez jakýchkoli překážek*, zejména že se dějí v prostředí, jež pohybu neklade žádného odporu. Tomuto předpokladu vyhovuje *přesně* ovšem jen vakuum; *přibližně* však často i vzduch obyčejné hustoty, když totiž pohybující se tělesa při velké hustotě vlastní mají povrch malý. Není-li tomu tak a vznikají-li ještě snad jiné překážky, na př. tření, pak ovšem může se ráz oněch pohybů změniti velmi značně, což v případech jednotlivých nutno zvlášť vyšetřiti. Konečně nepřihlížíme ke změnám velmi nepatrným těchto pohybů, kteréž vznikají tím, že země naše, na jejímž povrchu pohyby tyto pozorujeme, se otáčí.

§ 201. Pád volný.

Těleso v poli gravitačním naší země, jsouc v rovnováze, vybaví-li se z této své rovnovážné polohy, počne padati. Vylučme jakýkoli náraz, vylučme též pohyby cizí, na př. rotační, vibrační, jež

při tomto vybavení mohou vzniknouti a předpokládejme, že veškeré body tělesa se pohybují v přímkách svislých tak jako jeho těžiště. Stačí pak určiti jen pohyb tohoto těžiště a mysliti si v něm hmotu m tělesa soustředěnou.

Je-li pole gravitační homogenním, jest jeho intensita konstantní a tím i urychlení g. Pád tělesa volný jest tudíž pohyb *rovnoměrně urychlený*. Pro tento mají platnost rovnice:

$$a = g$$
$$v = gt$$
$$s = \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$\tfrac{1}{2} v^2 = gs.$$

Při volném pádu vzrůstá rychlost úměrně s prvou, dráha úměrně s druhou mocností času, stoupající pak energie pohybu $\frac{1}{2}mv^2$ rovná se práci mgs síly mg podél dráhy s vykonané; hmota m z rovnice této vymizí v souhlasu s tím, že hmoty všechny, padajíce současně, nabývají stejných rychlostí, čili, že stejné dráhy proběhnou za týž čas.

Tabellárně jeví se hořejší rovnice pro urychlení

$$g = 9{\cdot}81 \frac{m}{sec^2} \text{ (Praha)},$$

jak následuje.

Průběh volného pádu číselně.

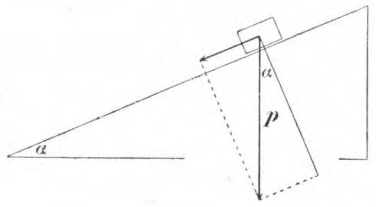
t	v	s	$\frac{1}{2}v^2$
sec	$\frac{m}{sec}$	m	$\left(\frac{m}{sec}\right)^2$
1	9·81	4·91	48·12
2	19·62	19·62	192·47
3	29·43	44·15	433·06
4	39·24	78·48	769·89
5	49·05	122·63	1202·92
6	58·86	176·58	1732·25
7	68·67	240·35	2357·79
8	78·48	313·92	3079·56
9	88·29	397·31	3897·56
10	98·10	490·50	4811·80

Z tabulky této dobře jest viděti prudké stoupání dráhy s a živé síly $\frac{1}{2}mv^2$ pro jednotku hmotnou $m = 1$ gramm. Odporem vzduchu se ovšem čísla ta značně zmenšují. Padající kapky dešťové, kroupy atd., nemají té živé síly, jak by dle výšky, s níž padají, počtem vycházelo.

Směr volného pádu jest svislým alespoň velmi přibližně; nepatrná odchylka vzniká rotací zemskou; dlužno tudíž zásadně směr volného pádu od směru svislého rozeznávati.

§ 202. **Pád po šikmé rovině.**

Pevná rovina, odchýlená o úhel α od roviny vodorovné, připouští padání těles jen po své délce. Jako při volném pádu tak dlužno i zde vyloučiti jakékoli pohyby cizí a předpokládati, že veškeré body tělesa padajícího se pohybují v přímkách s délkou roviny rovnoběžných. Nesmíme tudíž, jde-li o pád po šikmé rovině, pomýšleti na př. na padající po rovině kouli neb válec a pod.; neboť tělesa taková, padajíce, zároveň se otáčejí, čímž se věc komplikuje. I kdybychom při tom jen pohyb těžiště takového valícího se tělesa měli na zřeteli, nebyly by pro tento pohyb v platnosti zákony, jež dále uvádíme. Některé takové případy projednáme později zvlášť. Zde tedy dlužno předpokládati těleso po rovině šikmé se smýkající, a tu ještě s podmínkou, že v pohybu takovém není zdržováno třením. Požadavku tomuto lze však jen přibližně vyhověti. Proto rovnice a vztahy, jež dále odvozujeme, mají význam mezný, jemuž se blížíme ve skutečnosti více neb méně dle toho, jak dovedeme podmínky zde uvedené realisovati. Poněvadž rovina svou pevností přejímá (obr. 138.) z celé váhy $p = mg$ tělesa kolmou složku $mg\cos\alpha$, zůstává účinnou složka zbývající $mg\sin\alpha$, jež působí po délce roviny. Pád je tedy ovládán urychlením $g\sin\alpha$. Jsou tudíž v platnosti rovnice:



Obr. 138.

$$a' = g\sin\alpha$$
$$v' = g\sin\alpha \,.\, t'$$
$$s' = \tfrac{1}{2}g\sin\alpha \,.\, t'^2$$
$$\tfrac{1}{2}v'^2 = g\sin\alpha \,.\, s'.$$

§ 203. **Zákon o rychlostech.**

Srovnávajíce pro pád volný a po šikmé rovině rovnice

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gs, \qquad \tfrac{1}{2}v'^2 = g\sin\alpha \,.\, s',$$

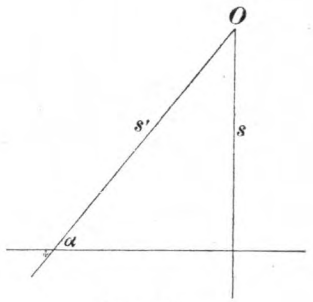
vidíme, že jest

$$v = v',$$

je-li

$$s = s'\sin\alpha.$$

Výsledek tento znamená geometricky, že konečné body svislé dráhy s a šikmé dráhy s' z téhož bodu vycházející (obr. 139.) leží v téže rovině horizontální, v téže hladině.



Obr. 139.

Těleso padajíc buď volně směrem svislým, nebo po rovině směrem šikmým, probíhá touže hladinou se stejnou rychlostí.

V odvození tohoto výsledku spočívá i jednoduchý jeho význam. Práce mgs plné váhy tělesa mg podél svislé dráhy s jest táž jako práce $mg\sin\alpha \,.\, s'$ složky $mg\sin\alpha$ této váhy podél oné dráhy šikmé $s' = \frac{s}{\sin\alpha}$. Proto i energie pohybu $\frac{1}{2}mv^2$ a $\frac{1}{2}mv'^2$ z této práce získaná musí býti stejnou a tím i rychlost pohybu.

Padají-li tedy hmoty po rozmanitých nakloněných rovinách — a můžeme dodati všeobecněji, i po jakýchkoli křivých plochách — dopadnou do téže hladiny s rychlostí stejnou, ovšem za dobu rozdílnou.

§ 204. **Zákon o tětivách.**

Srovnávajíce pro pád volný a po šikmé rovině rovnice

$$s = \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad s' = \tfrac{1}{2}g\sin\alpha \,.\, t'^2,$$

vidíme, že pro

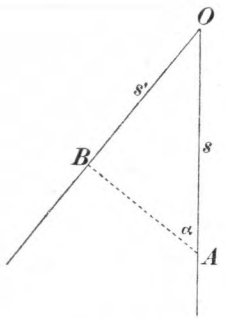
$$t = t'$$

vychází

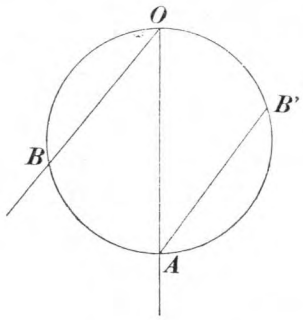
$$s \,.\, \sin\alpha = s'.$$

Dráhy s a s' vykonané za touž dobu zoveme stejnodobé neb isochronní. Geometrická jich konstrukce jest velmi jednoduchou. Majíce dráhu $s = OA$ svislou, obdržíme isochronní dráhu $s' = OB$

šikmou spustíce kolmici $AB \perp OB$ (obr. 140.). Anebo opíšeme nad s jako průměrem kruh, jenž vytne ze směru šikmého tětivu $OB = s'$ isochronní (obr. 141.). Podobně by byla isochronní tětiva $AB' \parallel BO$

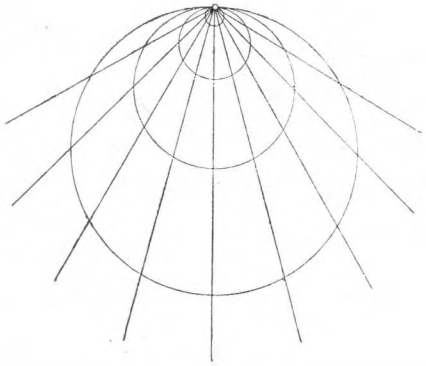


Obr. 140.



Obr. 141.

jakož vůbec každá tětiva téhož kruhu, kterou vedeme buď od horního bodu O svislého průměru nebo k dolnímu bodu A. Pravíme tedy:



Obr. 142.

Svislý průměr kruhu jest isochronní s kteroukoli tětivou vedenou jedním z obou konečných bodů.

Tomuto zákonu o isochronismu tětiv lze dáti ještě jinou poučnou formulaci (G. Galilei).

Rozmanité hmotné body, jež si můžeme jako světlé mysliti, začnou-li od téhož bodu současně padati v rovině svislé ve směrech různě šikmých, tvoří v každém okamžiku kruh, jehož průměr čtverečně s časem roste.

Obr. 142. ukazuje v měřítku $\frac{1}{2000}$ vzrůstání tohoto kruhu po 1., 2., 3. a 4. sekundě dle skutečného urychlení.

§ 205. **Padostroje.**

Úkolem padostrojů jest zkoumati experimentálně zákony v předešlých odstavcích uvedené, pokud ovšem lze vyhověti předpokladům, na nichž zákony ty spočívají.

Urychlení g pádu volného jest velmi značné. Z tabulky dříve uvedené jest viděti, jak dráhy již po několika málo sekundách jsou velikými. Vzhledem k tomuto urychlení jest časová jednotka sekunda příliš dlouhou. Proto nezbývá nic jiného — má-li se *pád volný* experimentálně zkoumati — než na místě sekundy zavésti jinou jednotku časovou τ velmi krátkou, kterouž by bylo možno se sekundou srovnati, a pak založiti padostroj na této jednotce zmenšené. K tomu se hodí dobře, jak ponejprv *Thomas Young* poznal, doba vibrace ladičky neb pružného péra. Nechá-li se tedy padati na př. skleněná podlouhlá úzká deska, černí lampovou začazená, tak aby se na padající desce v této černi vláskem kreslila svislá přímka, mohou se na této přímce vibracemi jiným vláskem na černě deskovou přenášenými graficky odměřovati tytéž kratinké doby τ a mohou se pak měřiti a srovnávati dráhy za jistý počet těchto zmenšených časových jednotek vykonané. Na této myšlence zakládají se padostroje, jež konstruovali *Labord*, *Lippich*, *Babo*.

U jiných padostrojů, jak je zavedl *Wheatstone*, měří se kratinká doba, v níž proběhne na př. koule těžká, padajíc, danou (poměrně krátkou) drahou, jemnými chronoskopy, jež se elektricky vybavují a zabavují. K pokusům takovým hodí se též velmi dobře ladička ve spojení s registrátorem elektrickým; ladička i registrátor píší na válci přibližně rovnoměrně třebas jen rukou otáčeném, na který jest navinut papír sazemi na př. z plamene terpentinového počerněný. Ladička jest chronoskopem velice jemným a spolehlivým. Jde pak o to, aby onen registrátor elektrický také přesně registroval oba okamžiky, kdy pád nějakého tělesa, na př. kovové koule, danou dráhu začal a skončil. To lze provésti buď elektromagneticky, anebo jiskrami indukčními. V obou případech koule začínajíc padati, galvanický proud jistým mechanismem přeruší a dopadnouc uzavře. Elektromagnetem se tak způsobuje pohyb kotvy; induktorem se indukují malé jiskřičky, jež přeskočí na kovový válec a zanechávají stopy na počerněném papíře.

Všechny takovéto padostroje, vyžadující velké obezřelosti a kritičnosti, hodí se pro studium *subjektivní*, méně pro objektivní, když jde na př. o to, ukázati experiment většímu auditoriu. K tomuto účelu hodí se již lépe padostroj, který sestrojil (1833) generál

dělostřelecký *Arthur Morin*, ředitel konservatoře »des arts et métiers« v Paříži. Při padostroji tomto jest volný pád graficky časově rozvinut; hmota padajíc píše na papíře, navinutém na svislý, přes 2 metry vysoký válec, který se hodinovým strojem přesně jednou za sekundu otáčí; díly sekundy lze pak jednoduše odměřiti. Apparát dává tedy přímo diagramm volného pádu, ovšem jen pro málo více než půl sekundy. Všeobecnému užívání tohoto padostroje, jehož originál v konservatoři »des arts et métiers« v Paříži má výšku přes 3 metry, vadí jeho massivnost a poměrně vysoká cena; neboť požadavek přísně rovnoměrného otáčení válce jednou právě za sekundu vyžaduje praecisního stroje hodinového; rovněž i vybavení padajícího závaží žádá dobrého mechanického provedení.

Mnohdy však postačí, zejména k účelům vyučovacím, ukázati experimentálně zákony nikoli pádu *skutečného*, nýbrž pádu *zmírněného*. Zmírniti pak urychlení jest možno způsobem dvojím. Jest totiž urychlení dáno všeobecně poměrem síly ke hmotě. Buď se tedy zmenší síla, nebo zvětší hmota. Prvý způsob je proveden u padostroje *Galileova*, druhý u padostroje *Atwoodova*. Onen jest důležitý svým významem historickým, tento svým velmi rozšířeným užíváním. Proto pojednáme o obou obšírněji.

§ 206. **Padostroj Galileův.**

Při padostroji Galileově zmenší se síla, způsobující padání hmoty dané, tím, že se z váhy této hmoty jen malá složka přivádí pro pád k platnosti, na základě zákonů pro šikmou rovinu platících.

Šikmou rovinou, jakéž k prvním pokusům tohoto druhu užíval *Galileo Galilei*, bylo dřevěné prkno, délky 12 sáhů, šířky $\frac{1}{2}$ sáhu, tloušťky $\frac{1}{8}$ sáhu; jest zde míněn původní sáh florentský, jehož délka byla as 0·60 *m*. Rozměry oné roviny byly tedy v míře metrické 7·2 *m*, 0·3 *m*, 0·075 *m*.

V prkně byl vyhlouben žlábek a potažen hladkým pergamentem, ve žlábku pak padala bronzová koule, buď celou délkou dráhy neb určitou její částí, při čemž byla výška roviny buď jeden nebo dva sáhy. Dobu pádu určoval Galilei množstvím vody, vyteklé z velkého, vodou naplněného sudu, úzkou trubičkou ve dně sudu umístěnou a kohoutem opatřenou. Srovnávaje pak množství vody vyteklé a délky, po které koule padala, nalezl zákon, že dráhy přibývá jako čtverce doby příslušné.

Jak již ze způsobu stanovení času patrno, nejednalo se při pokusech těchto o pád po rovině s *určitým* urychlením, nýbrž o pohyb *urychlený vůbec*. V tom případě není na závadu, že padající těleso, zde koule, zároveň se valí; její těžiště vykonává pohyb rovnoměrně urychlený, ale ovšem urychlení není takové, jaké by z výšky a délky roviny počtem vycházelo. Proto také pro pád valící se koule neplatí ani zákon o rychlostech, ani o tětivách. Vskutku došel Galilei zákonu o rychlostech úvahami zcela jinými. Galilei realisoval padání koule bez současného se jejího otáčení, ovšem nikoli v dráze přímkové, nýbrž v oblouku kruhovém, zavěsiv kouli na nit; pokusy, o nichž bylo již jednáno (§ 98.), stanovil pak, že rychlost konečná koule padající závisí jen na výšce, se které koule padala, a že koule touto rychlostí zase na touž výšku vystoupí, bez ohledu na dráhu, po jaké padání neb stoupání se děje.

Obyčejné nakloněné roviny, jichž se při vyučování k pokusům užívá, nemohou býti tak dlouhé, jako byla rovina Galileova. Za to nechává se několik koulí, na př. 4 neb i 5 ve žlábcích na prkně rovnoběžně po jeho délce vyhloubených padati současně. Odměří-li se délky těchto drah již napřed v poměru 1 : 4 : 9 : 16 : 25, a omezí-li se vhodnými svěráky, lze i akusticky — nárazem koulí — poznati, že koule, současně spuštěné, dopadají v okamžicích aequidistantních. Kyvadla sekundového k pokusům takovým užívati nelze, spíše metronomu Maelzelova. Mají-li však pokusy jen poněkud býti přesnější, musí prkno býti zcela rovné, žlábek pak hladký a tak pracovaný, aby padající koule se nezachycovaly stranou, tedy aby padaly po svém největším kruhu. Urychlení, s jakým koule padají, není však $g \sin \alpha$, nýbrž jest o 40 procent menší. Jde-li o to alespoň přibližně ukázati platnost zákona o urychlení $a' = g \sin \alpha$ a tím i o rychlostech a tětivách, nutno užívati roviny dané dvěma kolejnicemi na př. železnými, po kterých padá vozíček, jehož kolečka jsou proti ostatní hmotě vozíčku velmi lehounká.

Spis, ve kterém G. Galilei popisuje pokusy se svým padostrojem, má název: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e ai movimenti locali, 4°, Leida 1638; pokusy samé datují se však již od roku 1602 a 1604. Stanovisko Galileovo bylo ovšem při pokusech těchto zcela jiné než s jakého nyní, pokusy ty opakujíce, na ně pohlížíme *).

Vědouce, že se pohyb děje v gravitačním poli homogenním, dedukujeme, že pohyb jest rovnoměrně urychlený a posuzujeme, jak dalece s tím pokus souhlasí. Galilei však hledal, jakým pohyb jest, cestou induktivní a tvořil pojmy dotud neznámé.

---

*) Dr. *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch und kritisch dargestellt, 1897.

§ 207. **Padostroj Atwoodův.**

U padostroje, který sestrojil *G. Atwood* *), uvádí se malou silou v pohyb velká hmota; tím se proti urychlení volného pádu docílí urychlení tolikrát menšího, kolikrát jest menší ona síla pohyb způsobující a kolikrát jest větší ona hmota v pohyb uváděná.

Základní tato myšlenka padostroje jest provedena tímto způsobem.

Přes kladku pevnou vedena jest jemná, hedvábná nitka, jejíž hmotu proti hmotám jiným, zde rozhodujícím, lze zanedbávati. Na koncích této nitky jsou zavěšena dvě stejná závaží m; každé z nich má váhu mg; vespolek jsou v rovnováze.

Přiloží-li se však na jedno z nich malý přívažek hmoty μ, uvede se vahou μg tohoto přívažku daná soustava hmot v pohyb a to rovnoměrně urychlený, poněvadž účinná síla, totiž váha onoho přívažku, jest stálou. Urychlení γ tohoto pohybu obdržíme ze vzorce

$$\gamma = \frac{\text{síla}}{\text{hmota}}.$$

Účinná síla jest μg. Úhrnná hmota budiž M. Máme tudíž

$$\gamma = \frac{\mu}{M} g.$$

Úhrnná hmota M skládá se z několika hmot jednotlivých. Jsou to především hmoty $2m$ a μ, jež jsou v urychleném pohybu postupném. Vedle těchto uvádí se však také kladka v urychlený pohyb otáčivý. Úhlové urychlení jest při tom pro všechny části kladky stejné; lineární však urychlení jest pro části blíže obvodu větší než pro části blíže osy. Kdyby se smělo předpokládati, že veškerá hmota kladky jest rozložena na obvodě, přes který jde nitka, platilo by urychlení γ pro celou hmotu kladky, kteráž by se pak ke hmotám $2m + \mu$ přičetla. Mnohdy lze přibližně tak učiniti. Jinak dlužno však zavésti do počtu hmotu N menší, kterou zoveme aequivalentní; myslíme-li si hmotu tuto přidanou k závažím, polovičkou $\frac{1}{2}N$ na každé straně k závaží m, děje se pohyb s urychlením γ takovým, jako by kladka byla nehmotnou.

Jest tedy celkem:

$$M = 2m + \mu + N.$$

*) *George Atwood* (1745—1807) působil na Trinity College v Cambridge, později žil v Londýně. Padostroj svůj sestrojený r. 1781 popsal ve spise: On the rectilinear motion and rotation of bodies 1784.

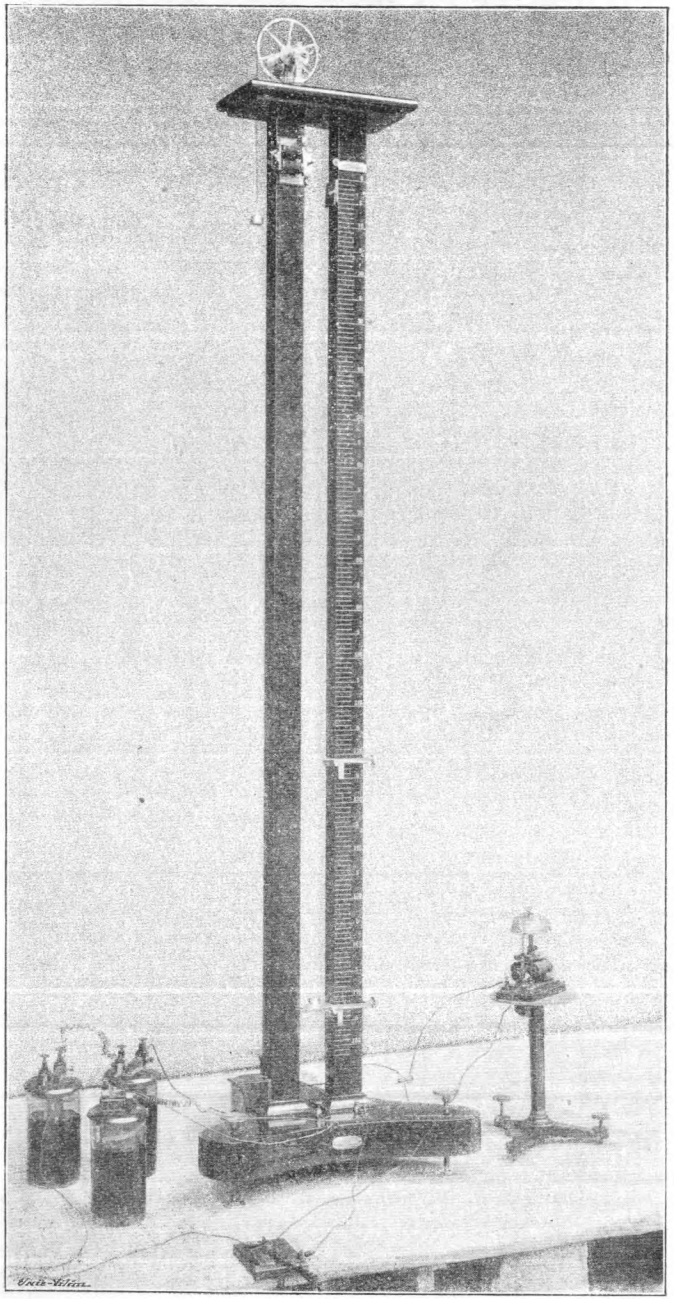
Je-li kladka dána, jest tím určena i hmota aequivalentní N. Můžeme pak měniti hmoty μ a m a tak zjednati urychlení γ vhodné. Zákony pádu na padostroji jsou ovšem tytéž jako zákony pádu volného, až na urychlení γ. Aby pak souvislost s pádem volným byla stále na očích ve způsobu co možná přehledném, jest výhodno, voliti poměr $\frac{\gamma}{g}$ na př. $= \frac{1}{100}$; pak jest pád na padostroji jako by 100kráte zmenšeným obrazem pádu volného. Co jest zde délkou jednoho metru, jest tam délkou jednoho centimetru. Experimentujíce tudíž s padostrojem Atwoodovým, máme před sebou tabulku dříve vypočítanou pro pád volný a čteme všude cm, kde tam uveden m.

Pro aequivalentní hmotu N udávají se tu i tam formule, dle nichž by bylo možno tuto hmotu počtem stanoviti. Vskutku však toho nelze, poněvadž jistá veličina ve formuli této přicházející — moment setrvačnosti — se počítati nemůže, tím méně, když — jakož jest to pravidlem — kladka svou osou spočívá na obvodě čtyř jiných kladek, jimiž se tření má co jen možná umenšiti. Proto se hmota N stanoví vždy zcela jednoduše pokusem.

§ 208. **Úprava padostroje Atwoodova.**

Padostroj Atwoodův, jak dosud byl popisován, jest schematickým; k pokusům skutečným bývá konstruktivně proveden ve způsobu dosti rozmanitém. Nejvíce rozšířen jest padostroj, na němž jest zároveň umístěno kyvadlo sekundové se zvonkem signalisujícím sekundy. Pád děje se podél svislého měřítka na centimetry rozděleného, číslovaného shora dolů. Nahoře, kde jest nullový jeho bod, nalézá se vodorovný stoleček kolem vodorovné osy otáčivý, na který před začátkem pokusu závaží m s přívažkem μ spočine. Kyvadlo, signalisujíc sekundu nullovou, spustí mechanicky tento stoleček a pád začíná. Na měřítku lze pošinovati jiný stolek vodorovný, na který závaží m s přívažkem μ dopadne, čímž se pohyb zarazí. Před tento stolek lze ještě umístiti jiný stolek vodorovný a provrtaný tak, aby závaží m otvorem proběhlo, ale přívažek μ se zachytil; pohyb pak pokračuje dále, ale přestav býti urychleným stává se rovnoměrným, až se zarazí na stolku plném.

Obr. 143. ukazuje padostroj Atwoodův jiné úpravy (Dr. Houdek a Hervert). Na první pohled viděti rozdíl od obyčejných padostrojů v tom, že schází kyvadlo. Vskutku není vhodné kyvadlo s padostrojem spojovati. Mají-li pokusy býti přesnými, jest nutno, aby padostroj stál zcela v klidu; těžké kyvadlo však rozhoupává poněkud i padostroj a tím i hmoty m na nitce zavěšené. Měření času jest věcí pro sebe, nesouvisící s padostrojem. Děje se nejlépe sekundovým kyvadlem hodinovým v tom způsobu, jak v oddíle o času (§ 50.) bylo popsáno. Kyvadlo s tyčí kovovou má na konci svém platinový drátek, kterýž v rovnovážné poloze kyvadla probíhá rtutí



Obr. 143.

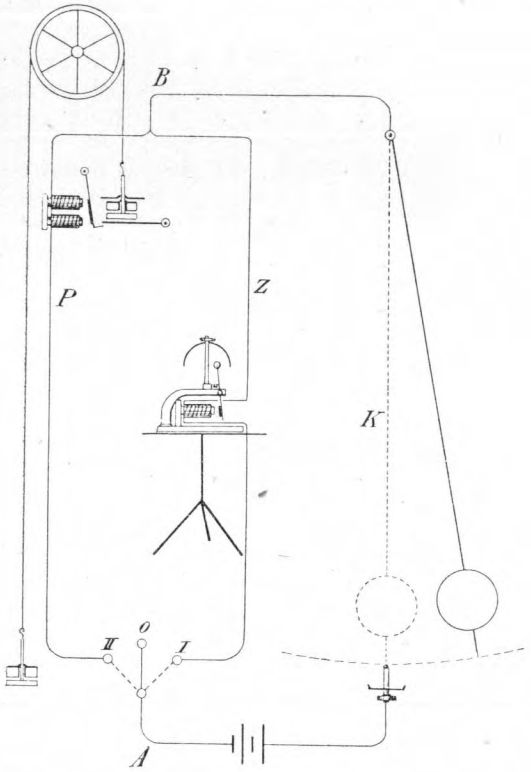
na ocelové mističce nalitou; tím se zjednává na kratinký čas kontakt a spojuje se galvanický proud, který se vede elektromagnetem signálového zvonku. Signalisování sekundy děje se tak velmi určitě a přesně a může přerušením proudu býti v každém okamžiku zastaveno, při čemž hodiny jdou dále. Je-li pokus připraven, spojí se proud a signalisování sekundy opět začíná.

V sekundě nullové má býti spuštěn stolek, aby pohyb přesně začal. Rukou experimentátora nebylo by lze spuštění přesně v pravý okamžik zaručiti, nehledíc k nepohodlí experimentování. Jest tudíž vhodné spuštění provésti elektromagnetem, do něhož se přepnutím proud kyvadlem samým přesně v sekundě nullové zavede. Obr. 143. představuje uspořádání pokusu dle skutečnosti, obr. 144. objasňuje pak uspořádání toto schematicky. Proud, uzavíraný kyvadlem hodinovým, vzniká ze dvou článků Grenetových. Proudovod dělí se ve dvě větve; jedna *AIZB* obsahuje elektromagnet signálového zvonku, kdekoli stranou na stativu umístěného, druhá *AIIPB* elektromagnet s kotvou u hořejšího stolku padostroje. Ku přepínání proudu do jedné neb druhé větve slouží obyčejný přepínač v obr. 143. na kraji stolu patrný. Před pokusem jest v poloze *o*. Je-li pokus připraven, přešine se na okamžik do polohy *II*, až kyvadlo, stanovíc sekundu nullovou, stolek spustí; hned potom přešine se přepínač do polohy *I*, pád začal, kyvadlo signalisuje zvonkem sekundu prvou, druhou, třetí atd. až do té, kdy závaží dopadne na dolejší stolek a pád se zarazí, načež se přepínač přešine do polohy *o*, aby signalisování sekundy přestalo. Jak patrno, byl-li pokus připraven, pak v průběhu pokusu experimentátoru netřeba nic než manipulovati na přepínači. Co se však této přípravy týče, lze i tu usnadniti tak, aby se dála rychle, pohodlně a to po případě i tehdá, kdy padostroj jest postaven na experimentální stůl, aby i většímu auditoriu bylo umožněno padání sledovati a kde by jinak experimentátor, kdyby chtěl rukou na hořejším stolku přípravu provésti, byl nucen stoupati do výše nepohodlné. K přípravě slouží proud, který z jediného článku Grenetova se zavede zvlášť do elektromagnetu nahoře u padostroje a to klíčem zvláštním, který jest dán dvojitým stolkem, dole na padostroji na levo upevněným; lehounkým přitlačením hořejší destičky tohoto dvojitého stolku k velmi blízké deštičce dolejší lze proud uzavříti (obr. 145.). Dále jest pro přípravu od hořejšího stolku vedena přes dvě kladky dolů k padostroji nitka dole závažíčkem opatřená, kterou se stolek hořejší dá zdola zvednouti. Příprava k pokusu jest pak velmi rychle provedena. Experimentátor uvolně dolejší stolek, na němž hmota m s přívažkem spočívá, dá stolkem samým lehký popud vzhůru, popožene tím závaží do výše, až může s levé strany hmotu m levou rukou zachytiti; tuto stáhne dolů až dolehne na onen dvojitý stoleček, lehce přitlačí, kontaktem se proud uzavře, elektromagnet nahoře přitáhne kotvu a uvolní stolku, aby se mohl onou postranní nitkou na pravo zvednouti; když se tak stalo, přeruší se kontakt, stolek se háčkem zachytí v poloze vodorovné, hmota m s přívažkem na něm spočine a pokus jest připraven.

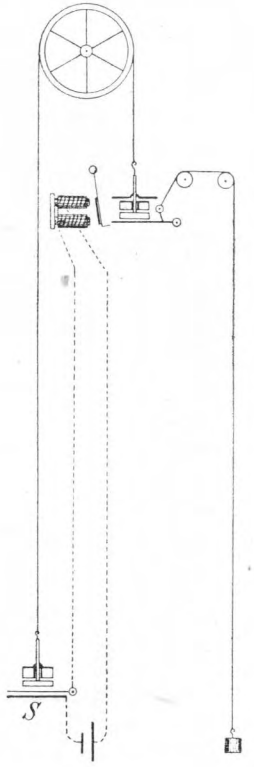
Co se týče volby závaží m a přívažku μ, budiž uvedeno následující.

Závaží m vezmou se provisorně jakákoli, také přívažek μ. Určí se pokusem urychlení γ a počítá se aequivalentní hmota N kladek. U našeho padostroje jest v grammech $N = 56$. Na základě toho se pak počítá, jak

veliké nutno voliti definitivně závaží m, aby přívažkem μ jednoho grammu vzniklo urychlení $\gamma = \frac{1}{100} g$. Vychází $\frac{\mu}{M} = \frac{1}{100}$ tudíž $M = 100$, čili $2m + \mu + N = 100$. Je-li tedy $\mu = 1$, $N = 56$, bude $m = 21\frac{1}{2}$. Kdyby se volil přívažek μ dvou grammů, musila by hmota M se zvelič iti o 100 grammů, tedy $2m$ o 99 čili m o $49\frac{1}{2}$. Podobně kdyby se volil přívažek μ tří grammů, musila by hmota m se zvelič iti opětně o $49\frac{1}{2}$. Pokusem lze správnost těchto počtů a tím i správnost celého základu početního jednoduše kontrolovati. Původní závaží $m = 21\frac{1}{2}$ jsou tak upravena, aby se na ně hmoty $49\frac{1}{2}$grammové daly jednoduše nastrčiti (obr. 144.). Když se tedy



Obr. 144.



Obr. 145.

pokus připraví pro případ jakýkoli, nezmění se ničeho, když se místo přívažku jednogrammového vezme dvougrammový a současně ke každému závaží m připojí hmota $49\frac{1}{2}$grammová. Podobně i dále, když se vezme přívažek třígrammový a ještě přidá další taková hmota $49\frac{1}{2}$grammová. Dále jíti nelze, aby se hedvábná nitka při zaražení pohybu nepřetrhla.

Pokusem lze zkoušeti:

1. Platnost rovnice

$$s = \tfrac{1}{2} \gamma t^2$$

až do dráhy

$$s = 176{\cdot}6 \ cm$$

vykonané za 6 *sec*.

2. Platnost rovnice

$$v = \gamma t,$$

na př. pro $t = 5$. Dráha s jest zde $= 122{\cdot}6$. Stoleček s otvorem postaví se tak, aby udeřením páté sekundy se přívažek μ zachytil. Systém pohybuje se pak dále rovnoměrně rychlostí $5 \cdot 9{\cdot}81 = 49{\cdot}1 \frac{cm}{sec}$, tak že v sekundě šesté dopadne závaží m na pevný stoleček u čísla $122{\cdot}6 + 49{\cdot}1 = 171{\cdot}7$. Stoleček s otvorem nesmí se ovšem postaviti u čísla 122·6, nýbrž ještě o tolik výše, oč je přívažek μ nad dolejší plochou závaží m, tedy výše o tloušťku tohoto závaží. Podobně se experimentuje pro $t = 4$, kdež lze pohyb rovnoměrný sledovati po dvě sekundy. Jest zde totiž $s = 78{\cdot}5$, $v = 39{\cdot}2$, tudíž buď pro další jednu sekundu $78{\cdot}5 + 39{\cdot}2 = 117{\cdot}7$ nebo pro dvě sekundy $117{\cdot}7 + 39{\cdot}2 = 156{\cdot}9$. Přesnost experimentování padostrojem této úpravy jest taková, že sluchem rozdílu mezi signálem sekundovým zvonku a mezi dopadem závaží na stolek znamenati nelze. Mnoho záleží na tom, aby hedvábná nitka byla hmoty tak malé, že i proti hmotě přívažku nečiní než malou část, není-li tomu tak, pak jednostrannou její převahou se pád s počátku poněkud opozďuje a ke konci poněkud urychluje.

§ 209. **Padostroj Poggendorffův.**

Tíže zemská jeví se buď staticky nebo kineticky. Případ prvý nastává, když hmota, jsouc podepřena nebo zavěšena, jest k zemi v relativním klidu nebo pohybu *rovnoměrném*; působí pak tlakem neb napětím o velikosti mg. Případ druhý nastává, když hmota, *volně* padajíc, nabývá *urychlení* g. Oba tyto případy jsou však krajními případu všeobecného, kdy hmota, podepřená neb zavěšená, *padá* s urychlením γ *menším* než g; zbývající pak tlak neb napětí p určuje vzorec

$$p = m(g - \gamma).$$

Může však také hmota *stoupati s urychlením* γ; tlak neb napětí stanoví pak vzorec

$$p = m(g + \gamma).$$

Oba tyto případy shledáváme při padostroji Atwoodově. Na niti visí na jedné straně hmota m stoupající s urychlením γ, na druhé

hmota $m + \mu$ padající s urychlením γ; zde se nit napíná vahou $(m + \mu) \cdot (g - \gamma)$, onde vahou $m\ (g + \gamma)$, úhrnný tudíž tlak na osu kladky určuje součet

$$m(g + \gamma) + m(g - \gamma) + \mu(g - \gamma) = 2mg + \mu g - \mu\gamma.$$

V klidu byl by tento tlak dán součtem

$$mg + (m + \mu)\, g = 2mg + \mu g.$$

Jest tudíž při padání o část $\mu\gamma$ menší.

U hmot m se totiž rozdíl vyrovnává, ale přívažek μ padaje působí vahou o $\mu\gamma$ zmenšenou. Toto zmenšení lze učiniti zřejmým, když se kladka umístí na jednom konci vahadla citlivých vah. Pokus připraví se v tom způsobu, že se hmota $m + \mu$ vláknem kolem kladky samé ovinutým zachytí, aby se padání zabránilo, a pak vše na druhé straně vahadla vyváží, tak že jest vahadlo čili ukazovatel vah v poloze nullové. Když se pak vlákno přepálí, začne pád a vahadlo se odkloní ve smyslu umenšení váhy.

Vhodnější jest však zařízení pokusu takové, při němž se ukáže nejen zmenšení váhy při padání, nýbrž též zvětšení při stoupání, a to nejen malého přívažku μ, nýbrž hmoty m samé. Úpravu vahadla pro tento účel objasňuje obr. 146. Vahadlo má tři kladky. Osa kladky střední jest uprostřed jako by pokračováním hrany trojbokého, dvojdílného hranolu, kolem něhož se vahadlo otáčí. Osy kladek postranních jsou s osou kladky střední v téže rovině, kteráž v nullové poloze vahadla jest vodorovnou. Vlastně by k pokusu postačila jenom jedna kladka postranní; pracují se však dvě, aby vahadlo bylo v úpravě své souměrným, čímž zároveň jest umožněno experimentovati na straně pravé nebo levé. Nitka vede se přes kladku střední a jednu krajní, na př. na straně pravé. Zde zavěsí se hmota m. Dle toho, zdali se má provésti pokus s touto hmotou stoupající neb klesající, zavěsí se proti ní u kladky střední hmota $m + \mu$ nebo $m - \mu$. Před pokusem se vždy padání připraví, avšak jemným vláknem vhodně přivázaným prozatím zamezí, načež se na straně druhé vše vyváží. Pak se vlákno přepálí a padání začíná.

Ve skutečnosti komplikuje se věc třením, na jehož překonání dlužno část přívažku μ počítati a teprve zbývající část na urychlení. Proto jest nutno před vlastním pokusem vyzkoušeti, jak velikým jest přívažek překonávající tření, což se pozná tím, že malinký náraz způsobuje *pohyb rovnoměrný* celé soustavy zavěšených hmot; vahadlo se přidrží, malým nárazem zavede se pohyb a pak vahadlo se pustí; *rovnovážná jeho poloha se pohybem neměnní*. Pokus jest sám sebou poučný, poněvadž ukazuje, že pohybem *rovnoměrným* se váha hmoty nemění. Pak teprve se připojí přívažek urychlování způsobující.

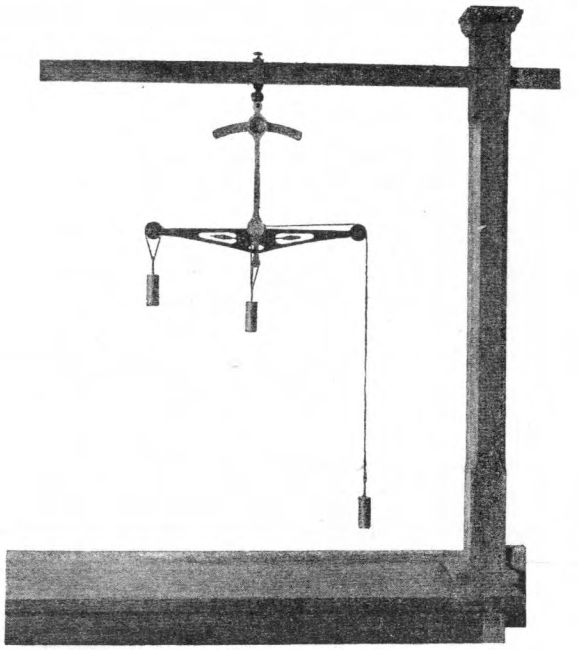
Při uspořádání, jak obrazcem 146. se znázorňuje, jest

$$m = 250\ g.$$

Tření se překoná přívažkem asi $10\ g$; na urychlení se volí přívažek $5\ g$; tím jest velmi blízce, jako při padostroji Atwoodově

$$\gamma = \frac{1}{100}\, g,$$

poněvadž hmota kladek oproti úhrnné hmotě $500\ g$ obou závaží jest malou. Zmenšení váhy jest pak aequivalentní asi váze hmoty $2\frac{1}{2}\ g$. Přívažky kladou



Obr. 146.

se jen na závaží střední, buď positivně, t. j. přidávají se, když má závaží m na pravo stoupati, anebo negativně, t. j. ubírají se, když má klesati. Výhodno jest míti k disposici delší dráhu; pak se váhy zavěsí na lati na opačné straně sloupu, mimo stůl, tak že pohyb může se sledovati v rozsahu od vahadla až k podlaze síně. Kdyby se závaží ta zavěsila jen na jedinou kladku, bylo by umenšení váhy aequivalentní váze hmoty, rovnající se $\frac{1}{100}$ *přívažku*; tento jest $5\ g$; zmenšení by tudíž bylo nepatrné. Proto by se musilo užívati většího přívažku; ale pak jde pád prudce, což způsobuje experimentální nesnáze. Mimo to vahadlo, zvednouc se, způsobí rozkývání obou závaží, kteráž, jdouce těsně vedle sebe, snadno náhodou na

sebe narazí. Musila by tudíž kladka pro tento pokus míti průměr přiměřeně velký. Proto bylo nahoře řečeno, že pokus v této formě jest méně pohodlný. Vysvětlování pokusu způsobovalo v dobách dřívějších slovní nesnáze, když se názvu »váha tělesa« užívalo ve smyslu »hmota tělesa«; v tomto posledním smyslu jest ovšem tak zvaná »váha« tělesa veličinou neproměnnou, tak že se padáním tělesa nemůže měniti.

Padostrojem Poggendorffovým experimentuje se velmi často tak, že se střední závaží rukou náhle zatáhne aneb popustí, tak že postranní závaží z klidu náhle vystoupí anebo padne. Jest pravda, že tak vznikne urychlení γ dosti značné, dle větší neb menší náhlosti onoho pohybu, kteréž pak příslušnou úchylkou vahadla se objevuje; počítati však toto urychlení nelze, následkem čehož tento, dosti hrubý, způsob experimentování není tak poučným, jako způsob nahoře podrobněji popsaný, kdy lze skutečné padání neb stoupání s urychlením napřed vypočítaným po dobu dosti dlouhou sledovati.

Jan Ch. Poggendorff žil v letech 1796—1877; byl professorem fysiky v Berlíně a redaktorem Annalů fysiky a chemie, jichž za jeho redakce vyšlo 160 svazků. Pojednání o padostroji pochází z roku 1853 (Abänderung der Fallmaschine).

XIII.

Pohyb vrhem způsobený.

§ 210. Roztřídění úkolů.

Pohyb vrhem způsobený jest poučným příkladem skládání pohybů. Těleso vržené rychlostí c určitým směrem pohybovalo by se svou setrvačností rovnoměrně a přímočaře. Nalézajíc se však v poli gravitačním naší země padá současně s urychlením g ve směru svislém. Oba pohyby studovali jsme dříve jednotlivě; nyní máme jednati o pohybu, jenž jest výsledným obou, v němž ony jednotlivé nerušeně přicházejí k platnosti, tedy o pohybu, jenž vzniká, jak pravíme, jich superposicí. Výsledný tento pohyb obdržíme *summací* buď *algebraickou* nebo *geometrickou* dle toho, zdali směr vrhu jest svislý, nebo zdali je šikmý, po případě vodorovný.

Se stanoviska mathematického mohli bychom projednati vrh šikmý, jakožto případ všeobecný a z něho odvoditi vrh svislý neb vodorovný jakožto případy zvláštní. Z důvodů fysikálních jest však vhodnější, předeslati vrh svislý, poněvadž jisté vůdčí myšlenky, jež vznikají u tohoto jednoduchého úkolu, opakují se v složitějším úkolu vrhu šikmého. Vskutku jest vrh šikmý jako by časově, ve vodorovném směru, rozvinutým vrhem svislým.

Dlužno připomenouti, že veškeré podmínky, jež jsme předeslali, majíce jednati o pádu tělesa volném neb po šikmé rovině, mají platnost i zde: vylučujeme jakékoli pohyby cizí, předpokládajíce pohyb tělesa translační a myslíme si veškerou jeho hmotu v těžišti soustředěnou; rovněž předpokládáme prostředí pohybu nepřekážející, to jest přísně vzato vzduchoprázdné. Pro vzduch mají výsledky, jež odvodíme, platnost jen přibližnou.

§ 211. **Vrh svislý.**

Při vrhu směrem dolů, tudíž v témže směru, v jakém působí tíže, vyjadřují superposici pohybů rovnice:

$$\begin{aligned} a &= g \\ v &= c + gt \\ s &= ct + \tfrac{1}{2}gt^2 \\ \tfrac{1}{2}v^2 &= \tfrac{1}{2}c^2 + gs. \end{aligned}$$

Oba pohyby, rovnoměrný i rovnoměrně urychlený, přicházejí v rovnicích těchto k platnosti; rychlost c vrhu vystupuje jako konstanta, od jejíž hodnoty počínajíc roste rychlost v s dobou t úměrně; podobně i živá síla $\frac{1}{2}c^2$ vrhu pro hmotu jednotkovou vystupuje jako konstanta, od jejíž hodnoty počínajíc roste energie pohybu $\frac{1}{2}v^2$ s vykonanou drahou s úměrně.

Při vrhu směrem vzhůru, tedy proti tíži, mohli bychom — v souvislosti s případem dřívějším — obrátiti znamení rychlosti c a zavésti tuto jako negativní. Jest však obyčejem, zde směr svislý vzhůru voliti za positivní, aby tak vyniklo působení tíže jakožto zpáteční, pohyb zadržující, negativní.

Jako se v předešlém případu tíží pohyb urychluje, tak zde se opozďuje; negativní akcelerace $-g$ jeví se pak jako retardace.

Máme tudíž rovnice:

$$\begin{aligned} a &= -g \\ v &= c - gt \\ s &= ct - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ \tfrac{1}{2}v^2 &= \tfrac{1}{2}c^2 - gs. \end{aligned}$$

Rychlosti v ubývá od začáteční hodnoty c s rostoucím časem t, energie pak pohybu $\frac{1}{2}v^2$ hmoty jednotkové od začáteční hodnoty $\frac{1}{2}c^2$ s rostoucím výstupem s; rychlost stává se nullovou, $v = 0$, po uplynulé době

$$t = \frac{c}{g},$$

a energie pohybu se vyčerpá, $\frac{1}{2}v^2 = 0$, po dokonaném výstupu

$$s = \frac{\frac{1}{2}c^2}{g}.$$

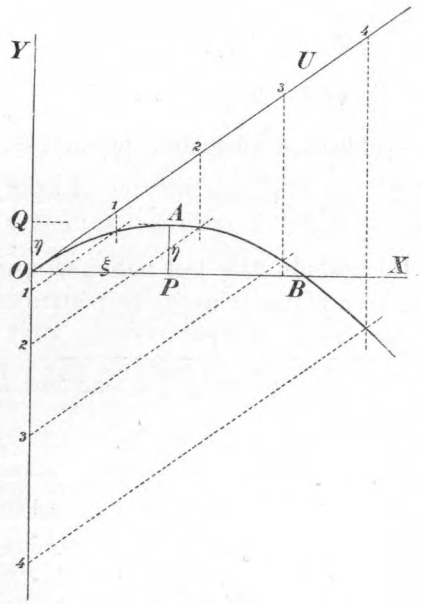
Tento výstup zavádíme vhodně jakožto novou konstantu úkolu s označením $= h$, píšíce:

$$h = \frac{c^2}{2g}.$$

Těleso, dostoupivší výšky h, na okamžik stane a počne pak padati. Rovnice pro rychlost v dává hodnoty negativní, jež co do velikosti jsou časově souměrné s dřívějšími positivními; po uplynutí doby $t = 2\frac{c}{g}$ vychází $v = -c$. Symmetrii pohybu ukazuje ještě lépe rovnice poslední, kde dráha s nejprve roste od 0 do h a potom klesá od h do 0. Při $s = 0$ vychází $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}c^2$. Těleso, padajíc právě tak dlouho jak stoupalo, vrací se do původního východiště s touže rychlostí a energií, jakou mělo v okamžiku vrhu, ovšem ve směru opačném.

§ 212. **Vrh šikmý.**

Budiž těleso vrženo rychlostí c ve směru šikmém OU odchylujícím se o úhel α od vodorovného; úhel tento zove se *elevačním*. Obr. 147. ukazuje, jak sestrojíme dráhu, vznikající ze superposice pohybu rovnoměrného ve směru OU a rovnoměrně urychleného ve směru svislém dolů, summací geometrickou.



Obr. 147.

Pravili jsme již, že vrh šikmý můžeme pokládati jakoby za svislý vzhůru a při tom časově vodorovně rozvinutý. Vyjadřujíce tuto myšlenku formulemi, rozkládáme rychlost c ve složku vodorovnou $c\cos\alpha$ a svislou $c\sin\alpha$; rovněž tak zavádíme dráhu x vykonanou ve směru vodorovném a dráhu y ve směru svislém, považujíce x a y za souřadnice těžiště vrženého tělesa, a volíce positivní osu X ve směru vodorovném tam, kam pohyb směřuje, na př. na pravo, positivní pak osu Y ve směru svislém vzhůru (obr. 147.). Konkretně můžeme si rozklad tento mysliti, jako by těleso bylo vrženo rychlostí $c\sin\alpha$ směrem vzhůru na př. na lodi, která rychlostí $c\cos\alpha$ pluje vpřed;

pozorovateli na lodi jest dráha přímočarou, kdežto pozorovateli na břehu vrh jeví se býti šikmým a dráha křivočarou.

Formulemi vyjadřuje se tento rozklad pohybů následovně:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & a_y &= & &- g \\ v_x &= c\cos\alpha & v_y &= c\sin\alpha & &- gt \\ x &= c\cos\alpha \,.\, t & y &= c\sin\alpha \,.\, t & &- \tfrac{1}{2}gt^2 \\ \tfrac{1}{2}v_x^2 &= \tfrac{1}{2}c^2\cos^2\alpha & \tfrac{1}{2}v_y^2 &= \tfrac{1}{2}c^2\sin^2\alpha & &- gy. \end{aligned}$$

Těleso pohybuje se horizontálně vpřed stálou rychlostí $c\cos\alpha$ a stálou energií $\frac{1}{2}c^2\cos^2\alpha$. Ve směru vertikálním těleso stoupá, rychlost jeho v_y se umenšuje od začáteční hodnoty $c\sin\alpha$ s dobou t a energie $\frac{1}{2}v_y^2$ od začáteční hodnoty $\frac{1}{2}c^2\sin^2\alpha$ s výstupem y. Hodnoty nullové obdržíme za dobu $t = \frac{c\sin\alpha}{g}$ při výstupu $\frac{\frac{1}{2}c^2\sin^2\alpha}{g}$; ve směru horizontálním postoupí současně těleso o délku $x = \frac{c^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}$. Hodnoty x a y zde odvozené znamenají souřadnice vrcholu A dráhy; přijměme pro tyto označení ξ a η. Zavedeme-li pak ještě do výrazů těch výšku $h = \frac{c^2}{2g}$, do jaké by těleso vzhůru vystoupilo plnou rychlostí c, obdržíme jednoduše:

$$\xi = h\sin 2\alpha,$$
$$\eta = h\sin^2\alpha.$$

Od vrcholu dále jest pohyb souměrný. Rychlosti v_y se vracejí v pořádku obráceném se změněným znamením, energie $\frac{1}{2}v_y^2$ ve vrcholu vyčerpaná se opět zvyšuje, když y se umenšuje. Původní hodnoty nastupují po době dvojnásobné $t = 2\frac{c\sin\alpha}{g}$; těleso postoupilo ve směru horizontálním za ten čas o délku 2ξ; tato zove se *dálkou vrhu.*

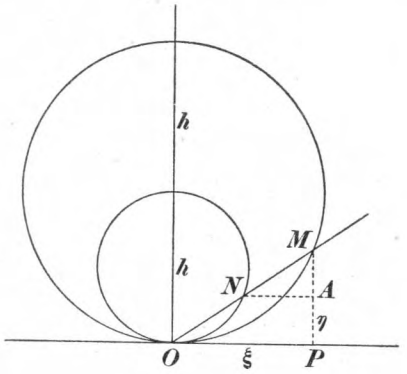
Budiž na př. $c = 28\frac{m}{sec}$; pak vychází při $g = 9{\cdot}8\frac{m}{sec^2}$ pro výstup hodnota $h = 40\,m$. Pro tento určitý případ jsou v oddíle tomto rýsovány všechny obrazce, v měřítku $\frac{1}{2000}$. Je-li dán úhel α, počítá se z této konstanty ihned jednoduše ξ, η, a z toho 2ξ.

§ 213. **Konstrukce vrcholů.**

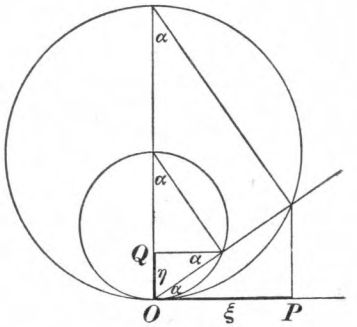
Polohu vrcholu A dráhy lze pro jakýkoli elevační úhel α zjednati si konstrukcí velmi jednoduchou. Od bodu O (obr. 148.) jakožto východiště pohybu narýsujeme svisle vzhůru délky h a $2h$

a sestrojíme nad nimi jakožto průměry dva kruhy. Směr daný úhlem α protíná kruhy ty v bodech N a M. Vrchol A leží pak od bodu N horizontálně vpřed a od bodu M vertikálně dolů. Vskutku jest, jak z nejjednodušších úvah geometrických vychází (obr. 149.),

$$OP = 2h\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$OQ = h\sin\alpha\,.\,\sin\alpha.$$



Obr. 148.



Obr. 149.

Pozoruhodná jest relace

$$\frac{PA}{OP} = \tfrac{1}{2}tg\,\alpha, \qquad \text{čili} \qquad PA = \tfrac{1}{2}PM.$$

Vztah tento, kterýž vychází z rovnic pro ξ a η, jeví se v konstrukci (obr. 148.) samozřejmým.

Vrchol A leží tedy uprostřed výšky, do jaké by těleso rychlostí c vržené v téže vertikále vystoupilo, kdyby současně nepadalo.

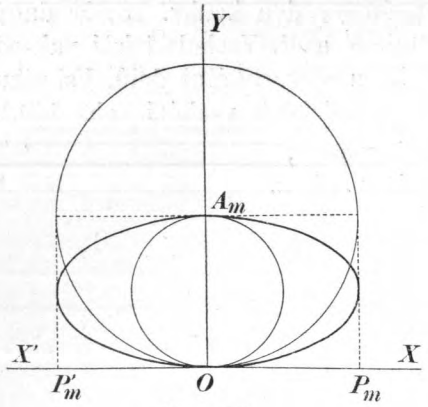
§ 214. **Ellipsa vrcholů.**

V rovnicích

$$\xi = h\sin 2\alpha,$$
$$\eta = h\sin^2\alpha,$$

jest úhlem α stanoven vrchol A určitý. Vyloučíme-li z rovnic těch tuto konstantu α, kterouž se vrchol *jednotlivý* určuje, obdržíme relaci platnou pro *všechny* vrcholy A, t. j. analytickou rovnici jich geometrického místa. Píšíce ony rovnice ve formě

$$\xi^2 = 4h^2\sin^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha),$$
$$\eta = h\sin^2\alpha,$$



Obr. 150.

obdržíme, eliminujíce $\sin^2 \alpha$, ihned

$$\xi^2 + 4\eta^2 = 4h\eta.$$

Jest to rovnice ellipsy, jejíž poloosy jsou h a $\frac{1}{2}h$. Zove se *ellipsou vrcholů* (obr. 150.). Začátek souřadnic jest na dolejším konci vedlejší poloosy.

Obyčejnou středovou rovnici této ellipsy

$$\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\frac{1}{2}h}\right)^2 = 1$$

obdržíme, pošineme-li osy souřadnic rovnoběžně o délku $\frac{1}{2}h$ malé poloosy vzhůru, což znamená, že do hořejší rovnice za η klademe $\eta + \frac{1}{2}h$.

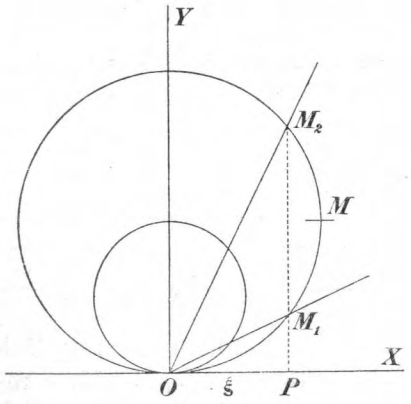
§ 215. **Dálka vrhu.**

V horizontální rovině bodem O — východištěm pohybu — položené dostane se těleso šikmým vrhem do dálky 2ξ. Pro tuto dálku vrhu platí tedy výraz

$$2\xi = 4h \sin \alpha \cos \alpha$$

čili

$$2\xi = 2h \sin 2\alpha.$$



Obr. 151.

Položíme-li do hořejší rovnice $90 - \alpha$ na místě α, vymění $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$ své místo a hodnota 2ξ zůstane; podobně v rovnici dolejší přejde úhel 2α ve vedlejší úhel $180 - 2\alpha$ a jeho sinus a tím i 2ξ zůstane. Pro elevační úhly komplementární jest tudíž dálka vrhu stejnou. Maximální $= 2h$ stává se dálka vrhu pro úhel elevační $2\alpha = 90^\circ$ čili $\alpha = 45^\circ$.

Velmi názorně lze tyto výsledky přehlédnouti konstrukcí dříve uvedenou (obr. 151.). Totéž ξ náleží dvěma průsekům M_1 a M_2 kruhu o průměru $2h$, tudíž i dvěma elevačním úhlům XOM_1 a XOM_2. Oba úhly tyto jakožto úhly tětiv s tečnou rovnají se úhlům obvodovým nad oblouky $arc\, OM_1$ a $arc\, OM_2$; že pak tyto oblouky se doplňují na polokruh čili úhly jim příslušné na úhel pravý, jest přímo viděti. Podobně jest přímo viděti, že maximum pro ξ nastává, když body M_1 a M_2 splynou v jediný, t. j. když se sečná PM_1M_2 stává tečnou PM; pak jest $\xi = h$ a úhel elevační $XOM = 45^\circ$.

§ 216. **Parabola dráhy.**

Poloha těžiště vrženého tělesa určena jest rovnicemi

$$x = c \cos \alpha \,.\, t$$
$$y = c \sin \alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Vyloučíme-li z rovnic těchto čas t, kterým se stanoví *jednotlivá* poloha, obdržíme relaci platící pro *všechny* polohy, t. j. pro jich geometrické místo, čili analyticky, obdržíme rovnici dráhy. Výsledek eliminace jest rovnice

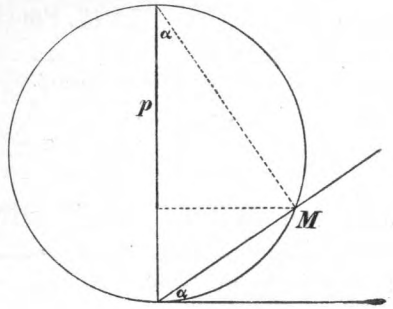
$$y = x\, tg\, \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha},$$

kdež jest h jako dříve kolmý výstup odpovídající energii $\frac{1}{2}c^2$ dle rovnice

$$h = \frac{c^2}{2g}.$$

Drahou šikmo vrženého tělesa jest tedy parabola (obr. 147.): její vrchol jest A, její parametr

$$p = 2h \cos^2 \alpha.$$

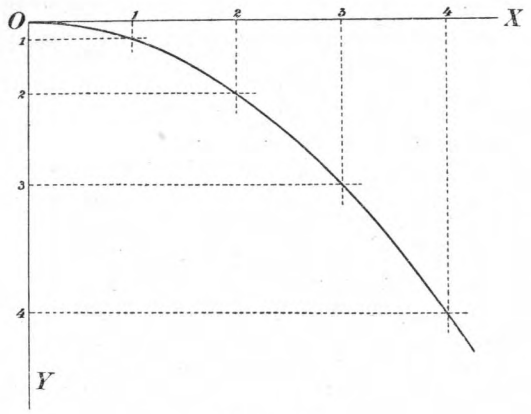


Obr. 152.

Přeložíme-li počátek souřadnic z východiště O pohybu do vrcholu A, rovnoběžně pošinouce osy o délky ξ a η, obdržíme obvyklou rovnici paraboly vrcholovou, kladouce $x + \xi$ a $y + \eta$ místo x a y.

Změníme-li na okamžik znamení pořadnice y, volíce svislý směr *dolů* za positivní, obdržíme $x^2 = 4h \cos^2 \alpha \,.\, y$.

Parametr paraboly $p = 2h\cos^2\alpha$ lze snadno konstruovati. Promítáme svislý průměr kruhu $2h$ na směr kolmý ke směru vrhu, a tento průmět pak zpět na svislý průměr, jak znázorňuje obrazec 152., jenž dává konstrukci parametru paraboly, narýsované v obrazci 147.



Obr. 153.

Pro úhly komplementární doplňují se parametry na délku $2h$ (průměr kruhu v obr. 152.). Ta jest zároveň maximálním parametrem pro $\alpha = 0$, t. j. pro vrh horizontální (obr. 153.), kdy parabola s vrcholem O má rovnici

$$x^2 = 4hy.$$

§ 217. Parabola ochranná.

Vraťme se ke všeobecné rovnici parabolické dráhy

$$y = x\,tg\,\alpha - \frac{x^2}{4h}(1 + tg^2\,\alpha).$$

Je-li dán jistý bod svými souřadnicemi x a y, lze z rovnice této počítati $tg\,\alpha$ a tím i úhel α, ve kterém dlužno vrh učiniti, aby se tohoto bodu dostihlo. Výsledek řešení jest dán rovnicí:

$$tg\,\alpha = \frac{h \pm \sqrt{h\left(h - \frac{x^2}{4h} - y\right)}}{\frac{1}{2}x}.$$

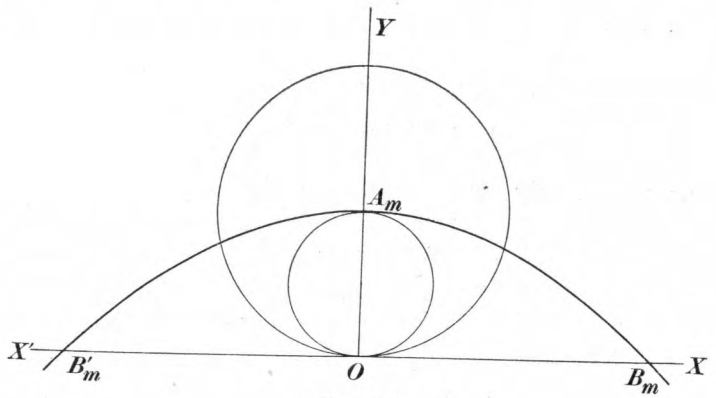
Má-li úhel α býti reálný, musí

$$y < h - \frac{x^2}{4h},$$

anebo nanejvýše

$$y = h - \frac{x^2}{4h}.$$

Rovnicí touto dáno jest geometrické místo bodů, kterýchž ještě nanejvýše vrhem lze dostihnouti; rovnice vyjadřuje parabolu, kteráž



Obr. 154.

se zove *ochrannou*, poněvadž přes ni nemůže těleso rychlostí c vržené přejíti (obr. 154.). Její parametr jest $= 2h$, její vrchol A_m a ohnisko O; rozsah její v rovině vodorovné bodem O položené jest

$$B'_m\,B_m = 4h.$$

Bodů na této parabole ležících lze dostihnouti jen při jediném úhlu, jenž jest určen rovnicí

$$tg\,\alpha = \frac{2h}{x}.$$

Bodů uvnitř paraboly ležících lze dostihnouti úhlem dvojím daným rovnicí

$$tg\,\alpha = \frac{h \pm \sqrt{h\,(y_m - y)}}{\frac{1}{2}x},$$

kdež značí y_m onu největší hodnotu pořadnice y, kteráž vede k parabole ochranné. Dle poslední rovnice lze úhel α snadno též konstrukcí stanoviti. Sestrojí-li se totiž předběžně geometrický průměr

$$e = \sqrt{h\,(y_m - y)},$$

jest jednoduše

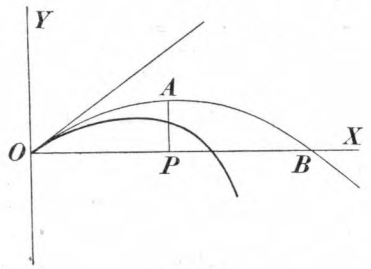
$$tg\,\alpha = \frac{h \pm e}{\frac{1}{2}x},$$

čímž se obě hodnoty α_1 i α_2 ihned konstrukcí udají.

Leží-li daný bod (x, y) uvnitř ellipsy vrcholů, stihne se vrženým tělesem při větším úhlu α_1 sestupně a při menším α_2 vzestupně. Leží-li na ellipse vrcholů samé, stihne se při větším úhlu α_1 sestupně, při menším α_2 vodorovně. Leží-li konečně mimo ellipsu vrcholů, ale ještě uvnitř paraboly ochranné, stihne se i při větším i při menším úhlu sestupně. Na ochranné parabole samé stihne se při úhlu jediném ve směru její tečné.

§ 218. Vliv vzduchu.

Výsledky v předešlých odstavcích odvozené mají platnost pro neodporující prostředí, vakuum, a nelze jich užiti pro vzduch, který pohybu klade odpor. Tento je značný zejména při rychlostech velikých.



Obr. 155.

Následkem odporu modifikuje se dráha malé hmoty vržené (obr. 155.) v tom smyslu, že parabola přechází ve zvláštní křivku, t. zv. *ballistickou*, která se v prvé polovici pohybu s parabolou přibližně shoduje, v druhé však prudčeji klesá, jsouc sražennější než příslušná větev paraboly. Tím se pak také mění výsledek dřívější v tom smyslu, že nedoletí nejdále hmota vržená v úhlu 45°, nýbrž v úhlu značně menším. Poměry mohou se komplikovati formou a velikostí hmoty vržené čili projektilu, eventuálně jeho zvláštním ještě pohybem rotačním, tak že úlohy sem náležející vyžadují zvláštního podrobného vyšetřování, kterým zabývá se t. zv. *ballistika*.

XIV.

Pohyb středový.

§ 219. Vznik pohybu středového.

Při pohybu křivočarém (§ 90.) přistupuje k rychlosti, s jakou se v jistém směru hmotný bod pohybuje, ve směru jiném urychlení, jež onu rychlost co do směru i velikosti stále mění. Tak tomu jest na př. u vrhu šikmého, kde urychlení tíže působí ve směru svislém, odchylném od směru vrhu, čímž vzniká pohyb v křivce parabolické. Může se státi, že urychlení takové směřuje stále k určitému bodu jako středu. Nazýváme je pak *dostředivým* čili *centripetálním*. Z urychlení tohoto a soudíme na sílu f dle hmoty m v pohyb uváděné, zovouce též sílu $f = ma$ *dostředivou* čili *centripetální*. Pohyb děje se pak kolem tohoto středu, v dráze, jež jest zpravidla uzavřenou; zove se proto pohybem *středovým* čili *centrálním*.

Příkladem takovýchto sil centrálních jsou síly gravitační. Slunce ovládá své oběžnice i vlasatice silou, jež jako síla výsledná směřuje stále ke středu slunce, způsobujíc u oběžnic pohyb v drahách elliptických, velmi mírné excentricity, u četných vlasatic též v drahách elliptických excentricity velmi značné, u některých v drahách parabolických. Ve všech případech děje se zde pohyb centrální v kuželosečkách, čehož základem jest kvantitativní výraz zákona gravitačního, dle něhož síly se vzdáleností ubývá čtverečně. Přísně vzato také šikmým neb vodorovným vrhem způsobuje se pohyb, který by se mohl zváti centrálním; neboť i zde působí tíže zemská centrálně, ve směrech do středu země směřujících. Avšak různost směrová tím vznikající byla by patrnou, jen kdyby se jednalo o pohyb, který by ve směru vodorovném byl velmi rozsáhlým. Kdybychom si v myšlenkách, jsouce ve velké od povrchu země odlehlosti, rychlost vrhu představili stále větší, došli bychom pohybu, jenž by se již centrálnímu blížil anebo i jenž by se centrálním stal, tak že by pak těleso vržené kolem země obíhalo, jako měsíc. Na základě takové představy počítává se mnohdy rychlost, s jakou by se byla na př. některá družice aneb některá oběžnice musila vrhnouti ve směru k nynější dráze tangenciálním, aby tím vznikl pohyb v té dráze, jakou ona družice neb oběžnice kolem svého tělesa cen-

trálního vskutku opisuje. Tím ovšem není řečeno, že by byl pohyb takovýmto vrhem vskutku byl vznikl.

Na základě myšlenky podobné lze experimentem objasniti vznik pohybu centrálního na kouli zavěšené, když se z polohy rovnovážné poněkud odchýlí a pak v pohyb uvede vrhem ve směru vodorovném a k vychýlení kolmém (kyvadlo sférické).

Urychlení dostředivé souvisí všeobecně s délkou průvodiče, vedeného od středu, k němuž ono urychlení směřuje, k hmotnému bodu, který se kolem tohoto středu pohybuje. Můžeme toto urychlení rozložiti ve dvě složky, v urychlení tangenciální a normální; oním se mění rychlost v pohybu v dráze samé, tímto se způsobuje zakřivení $\frac{1}{r}$ dráhy; výraz $\frac{v^2}{r}$, jímž toto urychlení normální jest určeno (§ 91.), poukazuje jednak na toto zakřivení, jednak na čtverec oné rychlosti, kterýmž se zároveň podmiňuje energie $\frac{1}{2}mv^2$ pohybu bodu hmotného.

U elliptického pohybu planetárního jest na př. urychlení dostředivé obráceně úměrno čtverci průvodiče. Středem pohybu není však střed ellipsy, nýbrž její ohnisko, v němž jest střed slunce. V periheliu a v apheliu jest průvodič minimální a maximální, tudíž ono urychlení dostředivé a v souhlasu s tím i energie pohybu, maximální a minimální. V těchto bodech splývá urychlení normální s centripetálním, urychlení tangenciální jest nullou, rychlost pohybu v okolí oněch bodů se nemění. V jiných místech dráhy vystupuje však rozdíl urychlení centripetálního a jeho složek, urychlení tangenciálního a normálního, zřetelně.

§ 220. **Pohyb kruhový.**

Zvláštním případem pohybu centrálního jest rovnoměrný pohyb kruhový. Střed kruhu jest středem urychlení centripetálního, kteréž jest tudíž zároveň normálním; urychlení tangenciální jest nullou, rychlost v pohybu konstantní v souhlasu s tím, že oblouky téhož kruhu se kryjí. Také ono urychlení centripetální jest konstantní, jsouc určeno výrazy (§ 91. a 92.)

$$a = \frac{v^2}{r}, \qquad a = \omega^2 r, \qquad a = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

Zde znamená r poloměr, $\frac{1}{r}$ zakřivení dráhy, ω úhlovou rychlost, T periodu pohybu, čili dobu oběhu, za kterouž průvodič opíše úhel 2π; proto jest

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Z urychlení a počítáme sílu centripetální f pro danou hmotu m dle rovnice

$$f = ma.$$

§ 221. **Zjevy reakční při pohybu středovém.**

Hmota, jsouc *setrvačnou*, *zachovává* dle Newtonova axiomatu rychlost i směr pohybu. *Mění-li* tedy síla, na hmotu působíc, buď rychlost neb směr pohybu nebo obé zároveň, jeví se ona setrvačnost hmoty v odporu, který hmota působení síly klade. Když tedy síla, působíc v témže směru, v jakém pohyb se děje, hmotu buď urychluje neb zpozďuje, vzpírá se hmota, jak obrazně pravíme, čili *reaguje* proti této *změně rychlosti* silou stejnou, opačnou.

Tento odpor hmoty cítíme, když na př. vlastní silou vůz na kolejích poháníme aneb zastavujeme, když těleso nějaké vrhneme aneb vržené zachytíme a pod. Ale právě tak vzpírá se, *reaguje* hmota proti *změně směru* pohybu. U pohybu kruhového zůstává rychlost nezměněnou, ale směr pohybu se mění stále. Tato změna vzniká působením síly normální, kteráž při pohybu kruhovém jest zároveň dostředivou, centripetální. Reakce hmoty proti stálé změně směru pohybu jest této síle rovna, ale jeví se opačně, tedy směrem od středu; proto zoveme tuto sílu reakční silou *odstředivou, centrifugální*. Jest velikostí svou síle dostředivé, centripetální rovna, platí tudíž i pro ni vzorce dřívější.

V případě všeobecnějším, kdy pohyb centrální není kruhovým, nýbrž na př. elliptickým, děje se změna rychlosti i směru pohybu zároveň; proto i reakce vystupuje jak proti tangenciální tak normální složce síly dostředivé; ale ovšem obě opačně vzaté složky dávají výslednici, kteráž se rovná opačně vzaté síle centripetální. Proto i zde vystupuje reakční síla odstředivá, centrifugální, velikostí rovná síle dostředivé, centripetální, ale směrem opačná.

Dlužno zvláště vytknouti, že síla centrifugální, jakožto síla reakční, není silou samostatnou na hmotu tak působící, jako síla centripetální. Kdyby tomu tak bylo, pak by se obě síly rušily. Reakce jest vzbuzena akcí, a jakmile tato přestane, mizí i reakce. Když tedy na př. hmotu nějakou na niti v kruhu otáčíme, drží nit hmotu, aby z kruhové dráhy neunikla, ale hmota, reagujíc proti tomu, napíná nit. Když by se tato přetrhla, přestává akce i reakce současně a hmota pohybuje se dále v tom směru, jaký měla v okamžiku přetržení niti, tedy ve směru tečné k dráze.

§ 222. Příklady početní.

Síla centrifugální f počítá se v konkretních příkladech z rovnic

$$f = m\frac{v^2}{r}, \qquad f = m\omega^2 r, \qquad f = m\frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

dle toho, jaká jsou data.

Počítejme na př., jak prudce bylo by lze otáčeti kouli železnou jednoho kilogrammu na drátku měděném půlmillimetrovém ve vertikálním kruhu o poloměru jednoho metru, aby se drátek nepřetrhl.

Tabulky pro nosivost drátů udávají, že drát měděný, má-li průřez 1 mm^2, unese až 40 kilogrammů. Drát průměru $\frac{1}{2}$ mm má průřez (okrouhle) $\frac{1}{5}$ mm^2, unese tudíž jen 8 kilogrammů. Poněvadž pak ona koule sama již váží 1 kilogramm, nesměla by při otáčení koule v kruhu svislém síla centrifugální státi se větší, než jest váha 7 kilogrammů.

Váha jednoho kilogrammu jest jen o 2% menší než megadyna. Můžeme tudíž pro orientaci položiti $f = 7$ megadyn čili v dynách $f = 7{,}000.000$. K tomu přistoupí $m = 1000$ g, $r = 100$ cm. Z rovnice pro f vychází pak dosazením, když ještě přijmeme $\pi^2 = 10$, jednoduše

$$T^2 = \tfrac{4}{7}\ sec^2, \qquad T = 0{\cdot}76\ sec.$$

Perioda by tedy nesměla býti kratší než asi $\frac{3}{4}$ sec.

Při takovémto otáčení v kruhu vertikálním umenšuje se silou centrifugální váha tělesa, tak že se může po případě těleso v poloze nejvyšší jeviti jako bez váhy. Je-li a urychlení centrifugální, g urychlení tíže, nastal by případ tento při rovnosti

$$ma = mg,$$

tedy bez ohledu na hmotu m při

$$a = g.$$

Z podmínky této lze počítati periodu T dle rovnice

$$\frac{4\pi^2 . r}{T^2} = g,$$

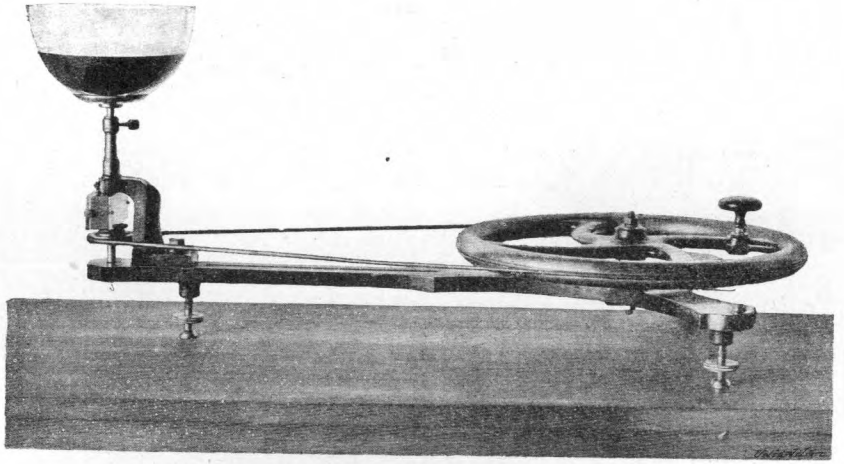
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Výraz $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ značí dobu kyvu kyvadla mathematického, délky r, je-li amplituda velmi malá; výraz dvojnásobný značí dobu celé periody kyvadlové. Perioda T celého oběhu jest tudíž identická s periodou kyvadlového pohybu (sem i tam).

§ 223. Příklady pokusné.

Početní příklad, na konci odstavce předešlého uvedený, lze pěkně objasniti pokusem.

Malá miska od vah zavěsí se na provazec vhodné délky ($\frac{1}{2}$ až $\frac{3}{4}$ m); na misku postaví se volně sklenice s vodou na př. zbarvenou (indigokarminem modře), aby oku lépe vynikla. Drží-li se pak konec provazce pevně pravou rukou a rozhoupá-li se miska znenáhla tak, aby konečně ve svislém kruhu obíhala, nevyteče ze sklenice ani kapka vody, předpokládajíc, že se otáčení děje v periodě dostatečně krátké, o čemž se lze z periody kyvadlové předběžně snadno orientovati. Při tom jest jednostejno, zdali je vody více neb méně anebo zdali místo vody se vezme kapalina jiná, na př. rtuť. Existence síly centrifugální jakožto síly reakční ukazuje se pokusem tímto ve způsobu nejvíce patrném.

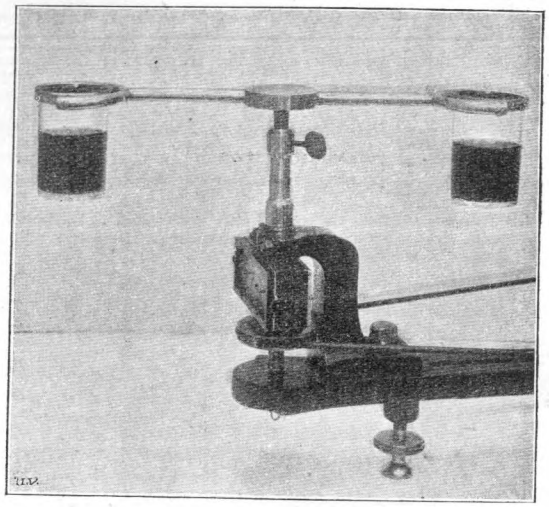


Obr. 156.

Jinak lze pokusy velmi četné a rozmanité prováděti strojem centrifugálním, jehož úprava jest patrna z obrazce 156. Zde buďtež uvedeny jenom pokusy některé, zejména takové, jež lze i většímu auditoriu pozorovati. Sem náleží pokusy tyto:

1. Dvě sklenice na tyči, kterou lze strojem v rovině vodorovné otáčeti (obr. 157.), jsou otáčivé kolem os vodorovných, kolmých k pevné tyči, na níž jsou zavěšeny. Naplní se zbarvenou vodou až na kraj. Při otáčení jest pěkně viděti, jak se sklenice vlivem síly centrifugální nachylují při rostoucí rychlosti vždy více, až se konečně položí téměř vodorovně, při čemž však ani kapka vody nevyteče. Jsou-li ve vodě suspendované částice pevné, shromáždí se na dně. (Princip centrifugálního strojku užívaného v bakteriologii.)

2. Na stroj se nasadí dutá skleněná polokoule (obr. 156.). Malé kuličky do ní vložené stoupají při otáčení vlivem síly centrifugální až na samý kraj, konečně vyletí ven a to ve směru tečné pohybu.



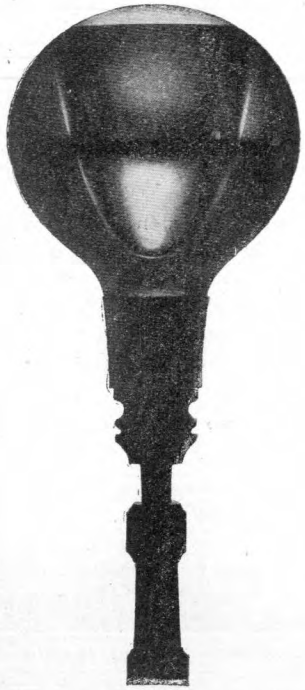
Obr. 157.

3. Když se do této polokoule naleje vody, jež v klidu má povrch rovinný, prohlubuje se povrch ten při otáčení. Avšak prohloubení toto lze dobře pozorovati jen z blízka. Lépe se k pokusu takovému hodí dutá skleněná koule, do níž se vedle vody dá též něco rtuti a v niž se nechá ještě něco vzduchu. Koule se vloží na centrifugální stroj. V klidu jest rtuť dole, nad ní voda, nad vodou vzduch. Při otáčení úhlovou rychlostí znenáhla stoupající začíná se vodorovný povrch vody prohlubovati, vždy více a více, jednotlivé kapky rtuti vybíhají — jako při pokusu s polokoulí ony kuličky — výše a v počtu vždy větším, tvoříce na kouli aequatoreální pás, co zatím prohloubení vody postoupí až na dno koule; ve chvíli této jsou ony tři látky uspořádány v rotaci tak *vedle* sebe, jako v klidu byly *nad* sebou: rtuť jakožto látka nejhmotnější nejdále od osy, pak voda, pak vzduch. Průběh pokusu lze velmi pěkně i z daleka sledovati, když se koule ze zadu osvětlí na př. lampou Auerovou. Obrazec 158. dle skutečnosti krátkou exposicí fotografickou zjednaný ukazuje velmi pěkně paraboloid prohloubením vody při rotaci vznikající a aequatoreální pás rtuťový.

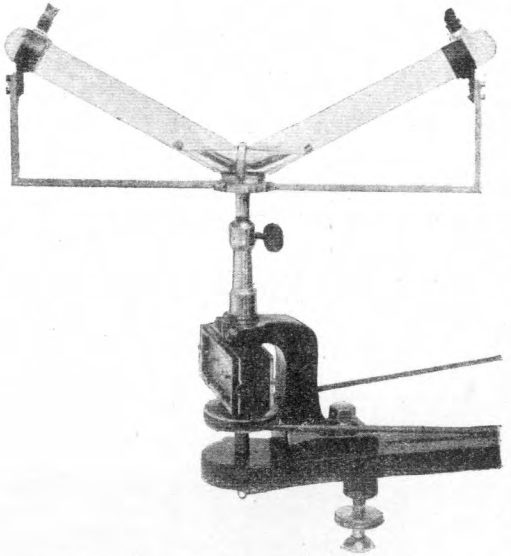
4. Často se uvádí týž pokus dvěma nakloněnýma trubicema ze skla, v nichž jest něco rtuti, vody a malá koule z korku, nebo z duše bezové neb slunečnicové (obr. 159.). Vadou přístroje toho jest však, že uspořádání látek v rotaci nelze zřetelně pozorovati.

5. Položíme-li, studujíce prohloubení vody, osou rovinu, protíná povrch vody v parabole. Vskutku podléhá částečka m kapaliny dvěma silám:

gravitační a centrifugální. Ona působí (obr. 160.) ve směru svislém, tedy ve směru vertikální osy rotační XX', tato ve směru kolmém, tedy vodorovném, $Y'Y$. Zavedeme-li $PM = y$, považujíce vrchol O za počátek souřadnic, a je-li ω úhlová rychlost otáčení, jest



Obr. 158.



Obr. 159.

$$\textit{síla gravitační} \quad MA = mg,$$
$$\textit{síla centrifugální} \quad MB = m\omega^2 y.$$

Výslednice MC obou sil jest normálou křivky, tudíž $PQ = p$ subnormálou. Pro tuto vychází

$$\frac{p}{y} = \frac{mg}{m\omega^2 y},$$

t. j.

$$p = \frac{g}{\omega^2}$$

nezávisle na souřadnicích, t. j. na poloze bodu M.

Křivka jest tedy charakterisována tím, že její subnormála jest konstantní pro všechny body, jsouc obráceně úměrnou čtverci úhlové rychlosti.

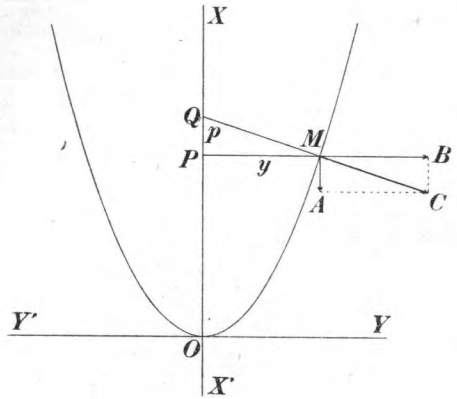
Křivka jest tudíž parabolou, p její parametr a

$$y^2 = 2px$$

čili

$$y^2 = 2\,\frac{g}{\omega^2}\,x$$

její rovnice vrcholová. Povrch vody v rotaci jest tedy *rotačním paraboloidem.*



Obr. 160.

6. Je-li při pokusu tomto nádoba válcovitou, zvedne se kapalina po stěně nádoby právě tak vysoko nad hladinu původní, jako ve vrcholu paraboloidu pod ní klesne. Krychlový obsah čili kubaturu rotačního paraboloidu stanoví totiž vzorec

$$K = \pi \int_0^x y^2\,dx = \pi p x^2$$

$$= \pi y^2 \cdot \frac{x}{2}.$$

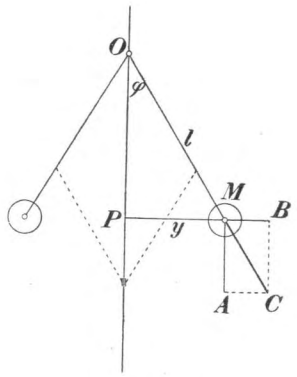
Souhlasí tudíž parabolická dutina s polovičním objemem válcovité nádoby výšky x, jehož druhou polovici zaujme kapalina; proto sahá tato v klidu do výšky $\frac{x}{2}$.

Když se do osy takovéto válcovité, dostatečně vysoké nádoby montuje sloupek mosazný, uprostřed částečně prořízнutý, tak, aby se jednoduchým mechanismem mohl do rotující kapaliny na krátko v určitém okamžiku vložiti lístek tuhého papíru, nakreslí se, je-li kapalina zbarvená (na př. gummovaným roztokem methylenové modře), velmi pěkně obrys paraboly jako osový řez rotačního paraboloidu, při rovnoměrném otáčení (motorem) tak ostře, že lze její rozměry vyměřiti a z parametru na př. rychlost úhlovou ω počítati. Tím přijde parabola k platnosti tak jak vskutku jest, kdežto jinak (na př. v obr. 158.) účinkem nádoby se oku jeví poněkud skreslenou.

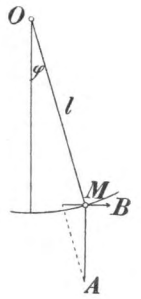
7. Poučným a zároveň technicky důležitým příkladem jest dále *centrifugální regulátor Wattův*, schematicky v obr. 161. znázorněný. Dvě stejné hmotné koule M_1 a M_2 visí na koncích dvou tyčí OM_1 a OM_2, kteréž jsou kloubově upevněny na vertikálním sloupci rotačním tak, že mohou při otáčení tohoto sloupce v rovině svislé stoupati a klesati; vespolek jsou pak ony tyče spojeny souměrně rameny, jež na jedné straně v kloubech na tyčích těch začínají a na druhé straně končí opět v kloubech na kroužku, kterýž se pošinuje na vertikálním sloupci rotačním. S tímto kroužkem jest pak ve spojení vlastní regulační přístroj, totiž páka, která vhodným způ-

sobem přivírá na př. ventil, ze kterého pára do válce parního proudí, čímž se chod stroje mírní.

Buďtež koule odkloněny o úhel φ.



Obr. 161.



Obr. 162.

Na každou kouli hmoty m působí tu (obr. 161.)

$$\text{síla gravitační } MA = mg,$$
$$\text{síla centrifugální } MB = m\omega^2 y.$$

Výslednicí MC určuje se směr tyče OM a tím i úhel φ. Jest pak

$$tg\,\varphi = \frac{m\omega^2 y}{mg}.$$

Hmota m odpadává; úhel φ nesouvisí tudíž s velikostí a hmotností koulí. Zavedeme-li ještě konstantní délku tyče

$$OM = l,$$

při čemž

$$y = l\,sin\,\varphi,$$

obdržíme

$$cos\,\varphi = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Úhel φ vychází reálným, je-li splněna podmínka

$$\omega^2 l \geqq g.$$

Zvedání koulí začíná tudíž až při jisté úhlové rychlosti a pokračuje pak, když rychlost tato stoupá. Aby význam oné podmínky vynikl, zaveďme periodu T a pišme hořejší podmínku ve formě

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \geqq \frac{g}{l}.$$

Odtud pak plyne

$$T \gtrless 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Význam této podmínky jest jednoduchý. Koule M na tyčích — jichž hmota proti hmotě kouli ustupuje v pozadí — jsou jako kyvadla, kývající při malé amplitudě v periodě celé — sem a tam — kteráž jest dána výrazem na pravé straně poslední rovnice.

Aby tedy zvedání kouli začalo, musí perioda T otáčení býti aspoň této celé periodě kyvadlové rovna; když je menší a menší, pak stoupání kouli pokračuje.

Jak viděti, docházíme zde téhož výsledku jako při otázce, kdy hmota v kruhu vertikálním otáčená pozbývá své váhy. Zde rozhodlo, aby urychlení tíže g se rovnalo urychlení centrifugálnímu $\omega^2 l$ způsobenému otáčením v poloměru l, který byl dán délkou provazce. V případě centrifugálního regulátoru jest něco podobného. Urychlení centrifugální $\omega^2 l \sin\varphi$ se má právě vyrovnati složce $g \,.\, tg\,\varphi$ urychlení gravitačního (obr. 162.). Poněvadž pak při malých úhlech, kdy zvedání začíná, jest $\sin\varphi = tg\,\varphi$, vychází podmínka $g = \omega^2 l$, tedy formálně identická s hořejší. Proto souhlasí též interpretace výsledku v obou případech.

Při úvahách dosavadních hmota m kouli z počtu odpadla, z čehož mohlo by se usouditi, že její velikost nemá významu. Tomu by vskutku bylo tak, kdyby síla centrifugální, kterou koule působí, měla překonávati *jenom* jich *váhu*; neboť tato roste s hmotou úměrně právě tak jako síla centrifugální. Ve skutečnosti musí se však onou silou centrifugální překonávati též různé *odpory*, jež při zvedání regulační páky a při přivírání komory parní vznikají; vzhledem k těmto odporům jest pak nutno, aby hmota kouli byla značnější a tím i síla centrifugální. Proto bývají koule u takových centrifugálních regulátorů dosti massivní.

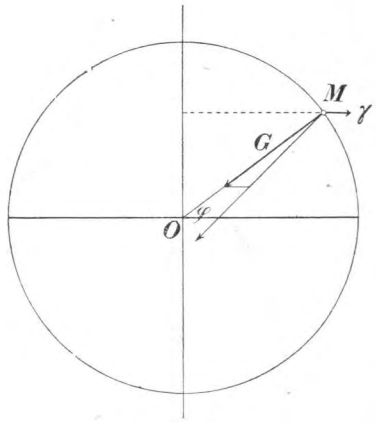
§ 224. Příklady z přírody.

Působení síly centrifugální jeví se ve způsobu zvláště poučném u mnohých oběžnic, zejména u naší země. Oběžnice, obíhajíce kolem slunce, otáčejí se zároveň, mají tedy vedle svého pohybu ročního, *revoluce*, ještě pohyb denní, *rotaci*. Tato rotace děje se kolem osy souměrnosti rovnoměrně, úhlovou rychlostí ω, kterouž počítáme, znajíce periodu T rotace — hvězdný den —, dle rovnice

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Kdyby oběžnice byla v klidu, měla by tvar koule a každý hmotný bod, na př. M (obr. 163.), na povrchu jejím podléhal by jenom síle gravitační. Rotací vzniká však síla centrifugální, kteráž všeobecně mění jak směr tak i velikost síly gravitační. Vzhledem

k tomu, že obě tyto síly jsou úměrny hmotě, postačí v počet bráti nikoliv síly, nýbrž urychlení. Nazveme tedy G urychlení gravitační, jaké by bylo na povrchu kulové oběžnice, kdyby tato se neotáčela, γ urychlení centrifugální, a budiž dále φ úhlová odlehlost bodu M od rovníku oběžnice, tak zvaná šířka planetocentrická. Předpokládáme-li kouli homogenní aneb z homogenních vrstev kulových složenou, směřuje urychlení gravitační G ke středu koule. Připojíme-li k němu geometricky urychlení cetrifugální γ, poznáváme, že se tímto mění i směr i velikost onoho. Následek toho jest, jednak že výsledné, skutečné urychlení g jest rozdílné v různých šířkách φ, jednak že vzniklo jiné uspořádání hmoty kolem osy rotační, ač-li hmota oběžnice byla dosti plastickou, aby změna tvaru mohla nastati; kulový tvar přeměnil se ve tvar koule sploštělé, řez axiální není kruhem, nýbrž velmi přibližně ellipsou, tvar planety tudíž ellipsoidem rotačním. Velikost sploštění souhlasí ovšem s větší neb menší změnou směru urychlení výsledného, kteréž v rovnováze jest k povrchu oběžnice kolmým.

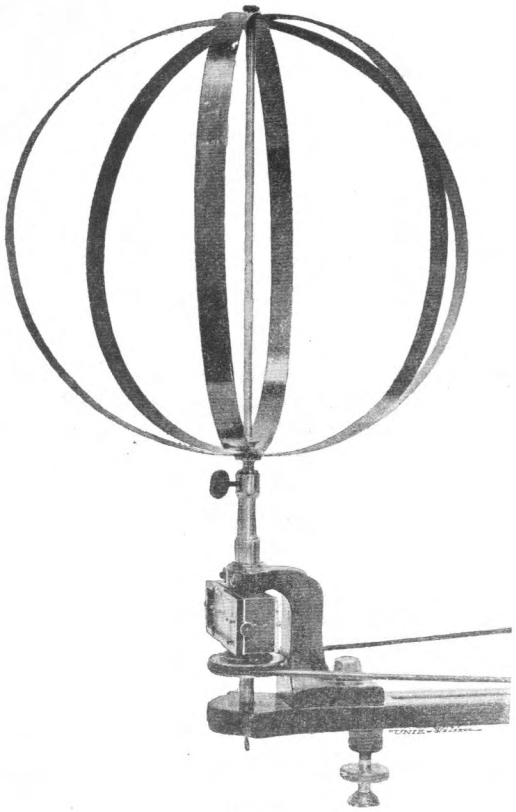


Obr. 163.

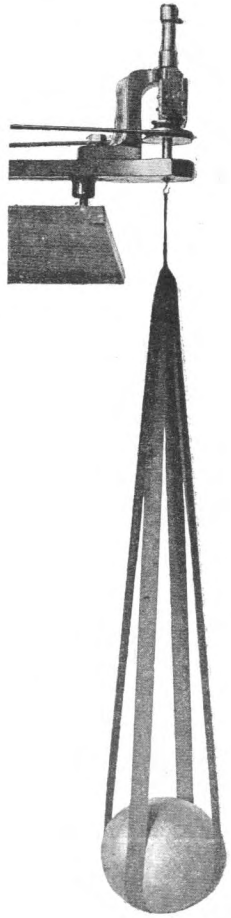
Vznik sploštění lze velmi poučně napodobiti na stroji centrifugálním, pomocí ocelových pružných pásů, jež jsou stočeny v kruhy ve směru osy rotační stlačené a jež se rotací splošťují více méně dle úhlové rychlosti (obr. 164.); ještě lépe kouli, kteráž se připraví z hlíny, glycerinem rozmělněné, a pak zavěsí na páskách dostatečně širokých, aby se do hlíny nezarývaly, do osy stroje centrifugálního (obr. 165.). Splošťování koule rotací lze pěkně sledovati, když se za kouli postaví bílá stěna; sploštění pak rotací docílené zůstává i když se točiti přestalo, což je vzhledem k účelu pokusu výhodnější, než u oněch pruhů ocelových, kteréž ovšem, když se točiti přestane, ve svůj původní kruhový tvar se vracejí. Na obrazci 165. dle skutečnosti provedeném znázorněno jest sploštění 10%, mírnou rotační rychlostí zjednané, asi tak veliké, jaké má oběžnice Saturn; otáčí-li se kouli vždy prudčeji, jest pozorovati, jak se ve svém průměru polárním velmi značně stahuje, přecházejíc v útvar prstenovitý, v němž se konečně roztrhne.

Míra sploštění stanoví se číselně z poloos ellipsy, kteráž vzniká meridiánovým řezem. Je-li a polosa velká, b poloosa malá, $a - b$

rozdíl obou, stanoví se sploštění zlomkem $\frac{a-b}{a}$ udávajícím rozdíl $a - b$ poloměru b polárního proti poloměru a aequatoreálnímu re-



Obr. 164.



Obr. 165.

lativně (procentuálně) vzhledem k tomuto poloměru aequatoreálnímu.

§ 225. Sploštění země.

Rotační perioda T — den hvězdný — vyjádřený v sekundách středního času slunečního jest, (§ 44.)

$$T = 24^h - 3^m 55{\cdot}9^s = 86164{\cdot}1 \; sec.$$

Z toho vychází úhlová rychlost ω v dílech radiantu

$$\omega = 0{\cdot}000072921,$$

anebo v sekundách úhlových

$$\omega = 15{\cdot}041''.$$

Dle rozměrů naší země, v § 23. sestavených, činí její sploštění

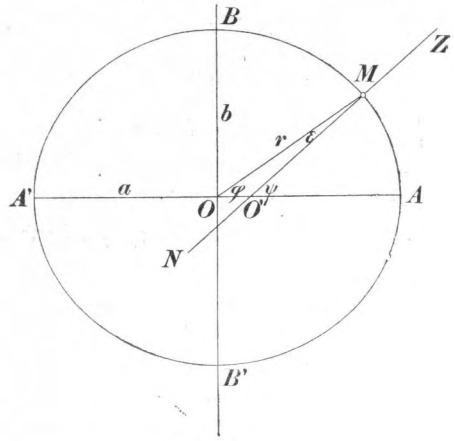
$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{\cdot}2} \text{ (Bessel)}, \quad = \frac{1}{292{\cdot}0} \text{ (Faye)}.$$

§ 226. Šířka geocentrická a geografická.

Následkem sploštění naší země jest řezem meridiánovým nikoli kruh, nýbrž velmi přibližně ellipsa o poloosách a, b (obr. 166.). Je-li M bod na povrchu země, a vedeme-li průvodič $OM = r$, nesměřuje ve svém prodloužení k zenitu, nejsa kolmým k povrchu země; směr, který zoveme svislým, jest dán normálou MN ellipsy a tato normála směřuje v prodloužení svém k zenitu Z. Oba směry průvodiče OM a vertikály $O'M$, liší se malým úhlem ε, kterýž jest zároveň rozdílem úhlů

$$AOM = \varphi \text{ a } AO'M = \psi$$

Oběma těmito úhly měří se tak zvaná *šířka* bodu M jakožto jeho odlehlost od rovníku; úhel φ zove se šířkou *geocentrickou*, úhel ψ šířkou *geografickou*. Vztah mezi oběma obdržíme, differencujíce rovnici ellipsy



Obr. 166.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0.$$

Zavedouce do rovnice této úhly φ a ψ dle relací

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}, \qquad tg\,\psi = -\frac{dx}{dy},$$

obdržíme

$$\frac{tg\,\varphi}{b^2} = \frac{tg\,\psi}{a^2}.$$

Počítejme dále rozdíl obou šířek

$$\psi - \varphi = \varepsilon.$$

K tomu konci pišme poslední rovnici ve formě

$$\frac{tg\,\varphi}{b^2} = \frac{tg\,\psi}{a^2} = \frac{tg\,\psi - tg\,\varphi}{a^2 - b^2} = u,$$

kde jest u faktor proporcionality. Jest pak dále

$$tg\,\psi - tg\,\varphi = tg\,(\psi - \varphi)\,(1 + tg\,\varphi \,.\, tg\,\psi),$$
$$(a^2 - b^2)\,u = tg\,\varepsilon\,(1 + a^2 b^2 u^2).$$
$$tg\,\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{\frac{1}{u} + a^2 b^2 u}.$$

Závisí tedy hodnota $tg\,\varepsilon$ na součtu dvou proměnlivých sčítanců $\frac{1}{u}$ a a^2b^2u, jichž součin a^2b^2 jest stálým. Jest známou všeobecnou větou, že součet takový jest *minimálním*, jsou-li sčítance sobě rovny. Geometricky řečeno: při stejném plošném obsahu má ze všech pravoúhelníků čtverec nejmenší obvod. Z toho tedy plyne, že jest $tg\,\varepsilon$ maximum při

$$\frac{1}{u} = a^2b^2 \,.\, u \qquad \text{čili} \qquad u = \frac{1}{ab}.$$

Odtud plyne pro maximální ε

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}, \qquad tg\,\psi = \frac{a}{b},$$
$$tg\,\varphi \,.\, tg\,\psi = 1,$$
$$\varphi + \psi = 90^0.$$

Výsledek má jednoduchý význam geometrický.

Vedeme-li v obr. 167. příčku $A'B'$, obdržíme ihned úhly φ a ψ jak jsou při maximální své differenci; vedouce pak průvodič $OM \parallel A'B'$ obdržíme polohu bodu M, pro kterou maximální difference platí. Nastává tudíž, když *arithmetický průměr* $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$ *obou šířek* nabývá střední hodnoty 45^0.

Majíce provésti *číselný výpočet*, přijmeme za jeho základ pro a a b hodnoty, jak je vypočítal *H. Faye* (§ 23.), totiž

$$a = 6378{\cdot}393\ km,$$
$$b = 6356{\cdot}549\ km.$$

Pro logarithmické počítání úhlů φ a ψ plyne pak rovnice

$$log\ tg\,\varphi = log\ tg\,\psi - 0{\cdot}0029798.$$

Propočítajíce pak tuto pro jisté aequidistantní hodnoty šířky ψ na př. v intervallech 15^0, obdržíme tabulku následující:

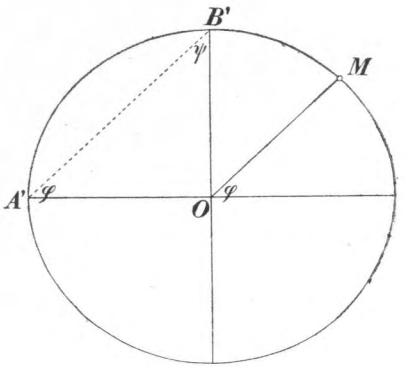
Rozdíl šířky geografické a geocentrické.

ψ	φ			ε		
0^0	0^0	$0'$	$0''$	0^0	$0'$	$0''$
15	14	54	7·3		5	42·7
30	29	49	48·2		10	11·8
45	44	48	12·4		11	47·6
60	59	49	46·1		10	13·9
75	74	54	5·1		5	54·9
90	90	0	0	0	0	0

Čísla pro ε objasňují velmi přehledně vztah mezi φ a ψ. Pohybuje-li se bod M od rovníku k polu, stoupá rozdíl $\varepsilon = \psi - \varphi$ od nully až k jistému maximu, načež zase klesá až k nulle.

Maximum difference ε nastává při hodnotách:

$$\varphi = 44^0\ 54'\ 6{\cdot}2'',$$
$$\psi = 45\ \ 5\ \ 53{\cdot}8,$$
$$\varepsilon = \ \ 0\ 11\ \ 47{\cdot}6.$$



Obr. 167.

Pro Prahu (hvězdárna, Clementinum) jest (§ 48.)

$$\varphi = 50^0\ \ 5'\ 15{\cdot}9'',$$

z toho se vypočte

$$\psi = 49^0\ 53'\ 39{\cdot}0'',$$

Činí tudíž rozdíl

$$\varepsilon = \ \ 0^0\ 11'\ 36{\cdot}9''.$$

Kdyby se zde zavěsila olovnička na nit, na př. 2 metry dlouhou, musil by se dolejší bodec olovničky odchýliti v meridiánu směrem k severu o délku, v millimetrech,

$$2000 \,.\, sin\ 11'\ 37'' = 6{\cdot}76,$$

aby nit směřovala ke středu země.

§ 227. Umenšení tíže na rovníku.

Vedle sploštění země jest dalším následkem jejího rotačního pohybu umenšení gravitačního urychlení. Počítejme toto umenšení především pro rovník, tedy pro šířku nullovou. Budiž zde G_0 urychlení gravitační, γ_0 urychlení centrifugální; pak jest urychlení skutečné g_0 dáno rovnicí

$$g_0 = G_0 - \gamma_0.$$

Při tom jest

$$\gamma_0 = \omega^2 a, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Počítajíce γ_0 z dat číselných dříve již uvedených, totiž

$$a = 637839300\ cm, \qquad T = 86164{\cdot}1\ sec,$$

obdržíme

$$\gamma_0 = 3{\cdot}393\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Skutečné urychlení g_0 jest stanoveno dle pozorování kyvadlových

$$g_0 = 978{\cdot}103\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Jest tedy urychlení gravitační

$$G_0 = 981{\cdot}496\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Relativné jeho umenšení činí

$$\frac{\gamma_0}{G_0} = \frac{3{\cdot}393}{981{\cdot}496} = 0{\cdot}003456,$$

t. j. 0·3456 procent.

§ 228. Umenšení tíže v různých šířkách.

Je-li bod M v libovolné šířce geocentrické φ a geografické ψ (obr. 168.) a znamená-li G urychlení gravitační, γ urychlení centrifugální a g urychlení skutečné, jak vychází, když se k urychlení gravitačnímu G připojí *geometricky* urychlení γ, odvodíme z trojúhelníku (G, γ, g) těchto tří urychlení vztah

$$g = G\cos\varepsilon - \gamma\cos\psi.$$

Rotace bodu M děje se v kruhu poloměru

$$r' = r\cos\varphi,$$

kdež jest r průvodič OM. Jest pak

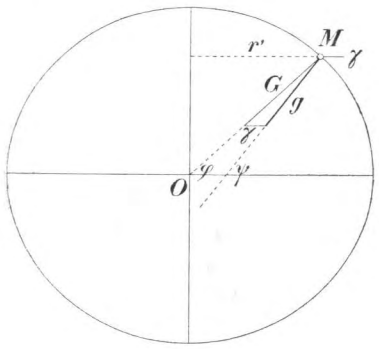
$$\gamma = \omega^2 r\cos\varphi.$$

Obdržíme tudíž

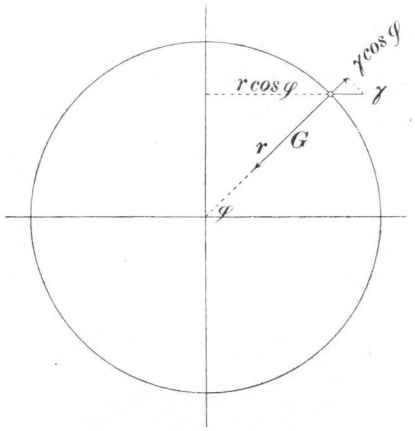
$$g = G\cos\varepsilon - \omega^2 r\cos\varphi\cos\psi.$$

V přesné rovnici této jsou všechny veličiny proměnlivy, ω vyjímajíc.

Zejména jest též proměnlivo urychlení gravitační G vzhledem k tomu, že země jest sploštělou.



Obr. 168.



Obr. 169.

Jest ovšem pravda, že sploštění toto jest malé, tak že rozdíl ε obou šířek φ a ψ, jak z číselných dat dříve uvedených vysvítá, jest velmi nepatrný. Kdybychom tedy položili

$$\varepsilon = 0 \qquad \text{t. j.} \qquad \varphi = \psi,$$

obdrželi bychom vztah jednodušší.

$$g = G - \omega^2 r\cos^2\varphi.$$

V této approximaci můžeme jíti ještě dále a pokládati r za konstantní, t. j. pokládati zemi za kouli poloměru středního tak voleného, aby objem koule této se rovnal objemu země skutečnému. Důsledně béřeme pak též urychlení G za konstantní a součin $\omega^2 r$ za urychlení centrifugální γ_0 na rovníku, kteréž jsme v odstavci předešlém počítali. Pro šířku φ jest pak

$$g = G - \gamma_0\cos^2\varphi,$$

pro rovník

$$g_0 = G - \gamma_0,$$

a z toho rozdíl

$$g - g_0 = \gamma_0\sin^2\varphi.$$

Přibližně roste tudíž urychlení g od rovníku k pólům úměrně se čtvercem sinusu geografické šířky.

Když se hned zpředu předpokládá, že země jest koule, kteráž i přes to, že se otáčí, nejsouc plastickou, zůstává koulí, pak lze ony přibližné výrazy odvoditi rychleji ve způsobu, jak obrazcem 169. znázorněno. Je-li γ_0 urychlení centrifugální na rovníku, γ pro šířku φ, jest $\gamma = \gamma_0 \cos\varphi$, poněvadž poloměr rotace jest umenšen z hodnoty r na $r\cos\varphi$. Z onoho urychlení γ působí však proti urychlení G jenom složka $\gamma\cos\varphi$, jež se připojuje subtraktivně, kdežto druhá složka $\gamma\sin\varphi$ nepřijde k platnosti, když zemi za zcela neplastickou pokládáme. Jest tudíž

$$g = G - \gamma\cos\varphi$$

čili, jako svrchu

$$g = G - \gamma_0\cos^2\varphi.$$

Approximativní rovnice

$$g = g_0 + \gamma_0\sin^2\varphi,$$

čili, jak se též psává

$$g = g_0\left(1 + \frac{\gamma_0}{g_0}\sin^2\varphi\right),$$

jeví se číselně takto:

$$\gamma_0 = 3{\cdot}393\ \frac{cm}{sec^2}, \qquad g_0 = 978{\cdot}103\ \frac{cm}{sec^2},$$

$$\frac{\gamma_0}{g_0} = 0{\cdot}003468,$$

$$g = 978{\cdot}103\ (1 + 0{\cdot}003468\sin^2\varphi).$$

Přibližně by tedy vycházelo, že urychlení g roste od rovníku k polu celkově asi o 0·35 procenta. Skutečný přírůstek musí býti větší z důvodů dříve již uvedených. Neboť v přesné relaci

$$g = G\cos\varepsilon - \omega^2 r\cos\varphi\cos\psi,$$

ubývá nejen součinu $\cos\varphi\ \cos\psi$, nýbrž též průvodiče r, co zatím urychlení G přibývá. Zajímavo jest však, že i při rozboru přesném výsledek závěrečný jest formálně identický s výsledkem přibližným, tak sice, že se *skutečné* přibývání urychlení g dá vystihnouti touže relací, jak nahoře uvedena, s tím jen rozdílem, že číselný koefficient skutečný jest větší než onen přibližný 0·003468.

Z pozorování kyvadlových byla vypočtena relace pro různé geografické šířky ψ

$$g = 978{\cdot}103\ (1 + 0{\cdot}0051177\sin^2\psi).$$

Dle toho činí skutečný přírůstek urychlení g od rovníka k pólům 0·512%, oproti dřívějšímu přibližnému 0·347%.

Jinou formu posledního vzorce obdržíme, provedouce násobení:

$$g = 978{\cdot}103 + 5{\cdot}0056\sin^2\psi.$$

Konečně pro počítání logarithmické upravíme vzorec pohodlněji, kladouce

$$\sin^2\psi = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\psi),$$

čímž vyjde

$$g = 980{\cdot}606 - 2{\cdot}5028\cos 2\psi,$$

anebo

$$g = 980{\cdot}606\ (1 - 0{\cdot}0025523\cos 2\psi).$$

Dle předposlední formule *) počítána tabulka následující:

Urychlení tíže v různých šířkách geografických.

ψ	g	*diff.*	ψ	g	*diff.*
0	$\frac{cm}{sec^2}$	$\frac{cm}{sec^2}$	0	$\frac{cm}{sec^2}$	$\frac{cm}{sec^2}$
0	978·103		45	980·606	
		38			435
5	978·141		50	981·041	
		113			421
10	978·254		55	981·462	
		185			395
15	978·439		60	981·857	
		250			358
20	978·689		65	982·215	
		308			308
25	978·997		70	982·523	
		358			250
30	979·355		75	982·773	
		395			185
35	979·750		80	982·958	
		421			113
40	980·171		85	983·071	
		435			38
45	980·606		90	983·109	

Geografická šířka hvězdárny Pražské v Clementinu jest (§ 48.)

$$\psi = 50^0\ 5'\ 15{\cdot}9'',$$

z čehož by následovalo

$$g = 981{\cdot}048\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Vzhledem k výšce 200 m nad mořem umenší se (§ 186.) toto číslo o 0·0039%; jest tedy pro Clementinum

$$g = 981{\cdot}010\ \frac{cm}{sec^2}.$$

Urychlení g, stanovíc intensitu gravitačního pole naší země vzhledem k modifikaci, jež nastává rotací zemskou, udává váhu

*) Číselné koefficienty přijaty dle Annuaire, publié par le bureau des longitudes, Paris 1908, pag. 262.

každé jednotky hmotné, grammu, v dynách. Váha hmoty, t. j. tlak, kterým působí, jest tedy proměnlivou. Na rovníku činí váha jednoho grammu v dynách 978·103, na polech 983·109, předpokládajíc výši nullovou, t. j. při hladině moře. Rozdíl jest tedy 5 dyn, tolik, co váží asi 5 milligrammů. Při hmotě jednoho kilogrammu činí rozdíl okrouhle 5000 dyn, tedy asi tolik, co váží 5 grammů. Kdybychom zavěsili hmotu jednoho kilogrammu na pružnou spirálu, jež by se vahou prodloužila, stávalo by se toto prodloužení — za jinak stejných poměrů — větším a větším, kdybychom (v myšlenkách) postupovali od rovníku do šířek větších.

Vzhledem k tomu, že rozmanité síly často měříme vahou hmot, dlužno při přesnějších měřeních dobře toho dbáti, že váha téže hmoty není totožnou na různých místech povrchu zemského. Napětí par neb plynů, tlak vzduchu atd. měříme na př. výškou sloupce rtuťového teploty nullové, pokládajíce tuto výšku za úměrnou tlaku hydrostatickému. Vzhledem ke změnám intensity tíže nelze měření taková, provedená v různých šířkách geografických, prostě vedle sebe položiti. Proto jest nutno přepočítati je na jistou normální intensitu tíže; za tuto volí se intensita ve střední šířce geografické $\psi = 45^0$, při hladině mořské.

§ 229. **Sploštění jiných oběžnic.**

Podobné účinky rotace, jako na zemi, jeví se též na jiných oběžnicích. Ovšem jsou zde rozdíly veliké. Merkur a Venuše mají dobu rotace velmi dlouhou, jež se, dosud ne zcela jistě, udává u Merkura na 88, u Venuše na 225 dnů; u těchto oběžnic není sploštění žádného. Mars jest povahou svou naší zemi nejvíce podoben; den jeho trvá $24^h\ 37^m\ 23^{sec}$, tedy téměř tak dlouho jako den náš; sploštění udává se zde na $\frac{1}{210}$, není tedy o mnoho větší než sploštění země $\frac{1}{292}$. Uranus a Neptun jsou příliš vzdáleny a nelze u nich dobu rotace zjistiti; nicméně jeví Uranus sploštění velmi značné, totiž $\frac{1}{11}$.

Příklad nejpoučnější podávají oběžnice Juppiter a Saturn, když se srovnávají s naší zemí. Pro tyto tři oběžnice jsou v následující tabulce (dle Annales de l'Observatoire de Paris) sestaveny doba T rotace, úhlová rychlost ω z ní vypočítaná (v úhlových sekundách), sploštění, a konečně též relativní objem V a hmota M, kteréž pro sploštění rotací vzniklé mají rozhodující význam.

Doba rotace, sploštění, objem a hmota země, Juppitera a Saturna.

	T			ω	$\frac{a-b}{a}$	V	M
	h	m	sec	$''$		*relat.*	*relat.*
♁	23	56	4	15·04	$\frac{1}{292}$	1	1
♃	9	55	37	36·26	$\frac{1}{17·11}$	1279·41	309·816
♄	10	14	24	35·16	$\frac{1}{9·18}$	718·88	91·919

Oběžnice Juppiter a Saturn, kteréž i svým objemem V i svou hmotou M proti zemi jsou velikány soustavy sluneční, otáčejí se s úhlovou rychlostí ω více než dvakráte větší než naše země. Poněvadž pak urychlení centrifugální souvisí se čtvercem úhlové rychlosti, jest pochopitelno, že oběžnice ty ukazují sploštění velmi značné, tak že toto při pozorování dalekohledem oku přímo jest patrné. Zejména Saturn má sploštění více než 10% obnášející, největší ze všech. Tak zvané kruhy Saturnovy souvisí s prudkostí rotace a jeho značným objemem.

§ 230. **Umenšení tíže na rovníku jiných oběžnic.**

Aby se mohlo posouditi, v jakém poměru jest urychlení centrifugální na rovníku Juppiterově a Saturnově proti urychlení gravitačnímu, jest poučné provésti počet, jehož výsledky (na základě dat dle Annales de l'Observatoire de Paris) jsou obsaženy v tabulce následující. Je-li určena úhlová rychlost $\frac{2\pi}{T} = \omega$, počítá se $\gamma_0 = \omega^2 a$ z aequatoreálního poloměru a planety. Tabulka obsahuje též údaje o specifické hmotě S a o intensitě tíže g_0 na rovníku.

Intensita tíže na rovníku a hmota specifická země, Juppitera a Saturna.

	a	a	γ_0	S	S	g_0	g_0
	relat.	*km*	$\frac{cm}{sec^2}$	*relat.*	$\frac{g}{cm^2}$	*relat.*	$\frac{cm}{sec^2}$
♁	1	6378	3·4	1	5·5	1	978·1
♃	11·061	70551	218·1	0·242	1·33	2·261	2211·5
♄	9·299	59313	172·3	0·128	0·70	0·892	872·5

Z výsledků těchto poznáváme, že urychlení centrifugální γ_0 proti urychlení gravitačnímu $G_0 = g_0 + \gamma_0$ relativně, v procentech, činí:

u země naší $\frac{3{\cdot}4}{978{\cdot}1 + 3{\cdot}4} = 0{\cdot}35\%$,

u Juppitera $\frac{218{\cdot}1}{2211{\cdot}5 + 218{\cdot}1} = 8{\cdot}98\%$,

u Saturna $\frac{172{\cdot}3}{872{\cdot}5 + 172{\cdot}3} = 16{\cdot}49\%$.

Z těchto výsledků vypočítáme, při kolikrát prudší rotaci by se na rovníku urychlení tíže G_0 annullovalo urychlením centrifugálním γ_0. Výraz $\sqrt{\frac{G_0}{\gamma_0}}$ dává

u země naší $\sqrt{\frac{100}{0{\cdot}35}} = 16{\cdot}90$,

u Juppitera $\sqrt{\frac{100}{8{\cdot}98}} = 3{\cdot}34$,

u Saturna $\sqrt{\frac{100}{16{\cdot}49}} = 2{\cdot}46$.

XV.

Zákony oběhu těles nebeských kolem slunce.

§ 231. Úvod historický.

V dějinách astronomie vystupují v popředí některá jména, jež jsou významná pro stav a rozvoj vědy této v určité době. Tak jména *Hipparch* *), *Ptolemaeus* **) jsou význačná pro stav astronomie ve starověku i středověku. Ptolemaeův *Almagest* byl základním dílem astronomickým po více než 14 století. V něm obsažena jest světová soustava Ptolemaeova, dle které středem světa jest země. Okolo země obíhá měsíc, Merkur, Venuše, slunce, Mars, Juppiter a Saturn, a to v tak zvaných epicyklech, jimiž se důmyslně vysvětloval zvláštní ten pohyb planetární, brzy postupný, pak zase zpětný, časem stationární, jak jej pozorujeme se země naší.

Systém Ptolemaeův, během celého tisíciletí ustálený, zvrátil *M. Koperník* ***), jenž záměnou dal slunci posici centrální a zařadil zemi naši mezi oběžnice.

Komplikovaný pohyb planet, jak se jevil *geocentricky* v epicyklech, zjednodušil se rázem, když se země dala na místo slunce

*) *Hipparchos*, zakladatel vědecké astronomie, žil v druhém století před Kr., dílem v Alexandrii, dílem na ostrově Rhodos, kdež konal pozorování astronomická. Založil katalog hvězd a srovnávaje jich posice nové se staršími, objevil praecessi.

**) *Ptolemaeus Claudius* (*Πτολεμαῖος Κλαύδιος*), narozen v Egyptu, žil v Alexandrii v prvé polovici druhého století po Kr. Hlavní jeho dílo, Syntaxis, ve 13 knihách, bylo (kolem 827) přeloženo do arabštiny pod titulem Tabrir al magesthi, odkud jméno Almagest pro onen spis obyčejně užívané. Ptolemaeus jest zjevem zajímavým a ve starověku ojedinělým jako fysik a *experimentator*; v jeho »Optice« obsažen též přibližný zákon lomu světla.

***) *Mikuláš Koperník* (Copernicus), narozen r. 1473 v Toruni, rodem Polák, z kořene českého, studoval na universitě v Krakově, v Padově, v Bononii, stal se pak (1499) professorem mathematiky v Římě, kdež proslul svými přednáškami mathematickými a astronomickými. Vrátiv se odtud byl zvolen kanovníkem ve Frauenburku. O hlavním díle svém, De revolutionibus orbium coelestium, pracoval 23 léta; rukopis zůstal ještě 10 let ležeti a teprve na smrtelném loži obdržel (1543) autor první tištěný arch do rukou. Viz F. Studnička, Bohatýrové ducha, 1898.

a když se pohyb ten vztahoval na střed slunce, t. j. vykládal *heliocentricky*. Koperník podržel však ještě *kruh* pro dráhy oběžnic a i epicykly pro některé případy, kde dnes známe ellipsy značnější excentricity. Soustava Koperníkova znamenala ohromný, poněvadž *zásadní* pokrok astronomie.

Ne dlouho po jeho smrti roku 1546 narodil se *Tyge Brahe* *), jehožto věhlas byl na poli praktickém, na poli astronomických pozorování.

Nástupcem jeho v úřadě stal se *Jan Kepler* **). Opíraje se o 35letá pozorování, jež s přesností na tehdejší dobu neobyčejnou provedl jeho předchůdce, odvodil z nich po mnoholeté neúmorné práci první dva zákony pohybu planetárního. Zákony tyto dokázal obtížnou synthetickou interpretací pohybu planety Marse a uveřejnil v díle svém »Astronomia nova« v Praze roku 1609 ***).

Roku 1614 odešel z Prahy do Lince, zde pak roku 1619 uveřejnil druhé své dílo, Harmonices mundi †), ve kterém vykládá svůj zákon třetí.

*) *Tyge* (Tycho) *Brahe*, narozen r. 1549, astronom (1576—1597) krále Bedřicha II. dánského, jenž mu poskytl prostředky k vystavění hvězdárny Uranienborg na ostrově Hveen v Sundu, v posledních letech svého života (1599—1601) ve službách císaře Rudolfa II. v Praze, kdež zemřel (1601) a kdež (v chrámu M. B. před Týnem) jest pochován. Roku 1901 byla v Praze pořádána slavnost na počest památky jeho úmrtí před 300 lety; při té příležitost opraven jeho náhrobek v kostele Týnském a jeho ostatky uloženy v schránku důstojnou. Také jedna ulice v blízkosti letohrádku královny Anny na Hradčanech nese jeho jméno. Světová soustava Braheova měla býti kompromissem soustav Ptolemaeovy a Kopernikovy. Viz G. Gruss, Z říše hvězd, pag. 126.

**) *Jan Kepler*, narozen r. 1571, studoval na universitě Tubinské, vyučoval (1593—1598) mathematice na stavovském evangelickém gymnasiu ve Štýrském Hradci, odkudž přišel (1600) do Prahy, kdež byl s počátku přiručím Braheovým, krátce však (od r. 1601) jeho nástupcem jako mathematik a astronom císaře Rudolfa II. Roku 1612 zemřel císař Rudolf II.; jeho nástupce Matyáš, a když tento 1615 zemřel, též císař Ferdinand II. podrželi Keplera v úřadě, avšak služné mu nevypláceli; z toho jakož i z jiných útisků vzešla Keplerovi mnohá trapná léta; nicméně i za těchto pracoval neúnavně dále vědecky. V době 1614—1627 byl professorem na gymnasiu v Linci, v politických bouřích pozdějších žil v Řezně, v Ulmu, ke konci svého života ve službách Valdštýnových. Zemřel 1630 v Řezně, kdež marně na sněmu říšském se snažil vymoci sobě platu, který mu za léta služebná právem náležel.

***) Plný titul díla tohoto zní: Astronomia nova αἰτιολογητός seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis, ex observationibus G. V. Tychonis Brahe. Plurium annorum pertinaci studio elaborata Pragae, 1609.

†) Harmonices mundi libri V, Lincii Austriae 1619. První čtyři knihy věnovány jsou vztahům harmonickým v geometrii a v akustice, poslední pak v astronomii. S třetím zákonem planetarním vedlo se Keplerovi podobně jako Newtonovi; důvtipem svým formuloval zákon již 8. března 1618, ale číselný důkaz se nezdařil — následkem početní chyby; teprve později, 15. května 1618, důkaz objevením oné chyby byl proveden. U Newtona nebyla to ovšem početní chyba, nýbrž nesprávná hodnota poloměru zemského, kteráž zavinila, že první číselný důkaz zákona gravitačního se rovněž nezdařil. Jest zajímavo čísti (lib. V, Prooemium), jakou radost způsobil Keplerovi objev zákona, kterýmž nalezen harmonický vztah mezi pohyby různých těles nebeských. Jsa sobě vědom významu svého objevu, jímž rozřešen problém, o který Ptolemaeus se marně pokoušel, pouští Kepler uzdu své hrdosti, v náladě veselé vysmívá se lidem, což mu na nich záleží, zdali chtějí neb nechtějí ho uznati, neučiní-li tak přítomnost, učiní to budoucnost, dílo jeho, dodává s humorem, »ať čeká na svého čtenáře sto let, když Bůh sám šest tisíc let čekal na objevitele«.

Všechny tři zákony Keplerovy shrnuty pak v zákonu vyšším, z něhož plynou jako důsledky, v zákonu všeobecné gravitace, jak jej objevil *I. Newton*. Jím byla pak otevřena dráha nejširší methodě deduktivní, počtu, vyčerpávajícímu zjevy nejen v rysech hlavních, nýbrž i v podrobnostech nejsubtilnějších.

Jak z krátké této skizzy historické vysvítá, byly zákony oběhu těles nebeských nejprve indukcí nalezeny a teprve později dedukcí odůvodněny. Zákony tyto jsou velmi jednoduché; rovněž jednoduchým jest jich odvození ze základního zákona gravitačního. Příčinou toho jest okolnost, kterou dlužno zvláště vytknouti, že totiž hmota slunce oproti hmotám oběžnic samých jest ohromně velikou. Následkem toho ovládá slunce pohyb každé oběžnice hlavně samo, tak totiž, jako by ostatních oběžnic zde nebylo. Jich působení ustupuje proti působení slunce tak značně do pozadí, že v první approximaci lze tohoto působení zanedbávati a řešení úkolu založiti tak, jako by zde byla jenom oběžnice, jejíž oběh studujeme, a slunce, jež tento oběh řídí. Tím vzniká snadný poměrně problém *dvou* gravitujících těles, při nichž hmota jednoho jest ohromná proti hmotě druhého, kdežto jinak by vznikl problém *tří* neb *několika* těles, jehož všeobecné řešení činí obtíže dosud nepřekonatelné.

Jak se okolnost zde vytknutá jeví číselně, ukazuje tabulka následující. V této jest hmota země vzata za jednotku a v této jednotce jsou vyjádřeny hmoty všech oběžnic.

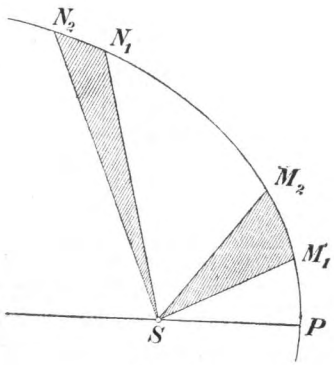
Oběžnice	Hmota	Oběžnice	Hmota
Merkur . .	0·061	Juppiter . .	309·816
Venus . . .	0·787	Saturn . .	91·919
Tellus . . .	1	Uranus . .	13·518
Mars . . .	0·105	Neptun . .	16·469

Oproti úhrnné hmotě všech oběžnic dohromady, kteráž je dána číslem 433·675, stojí hmota slunce daná číslem 324439, tedy 748kráte větším. Z hmoty slunce bylo by tudíž možno utvořiti 748 soustav planetárních takových, jakou veškeré oběžnice představují. A ještě více vynikne tato převaha slunce nad oběžnice, když vynecháme z oné summy velikána soustavy sluneční, Juppitera. Pak stojí proti sobě čísla 124 a 324439, kteráž dávají poměr 2616. Proto lze počítati *působení oběžnic vzájemné* teprve v *druhé* řadě a pokládati toto působení jako by za *rušení, perturbaci*, oné pravidelnosti, jež by nastala, kdyby slunce ovládalo každou oběžnici zcela samo, isolovaně od jiných.

V následujícím uvádíme zákony oběhu planetárního tak, jak byly na základě pozorování indukcí nalezeny, přestávajíce na výkladu jich významu a opomíjejíce uvésti též jich odůvodnění dedukcí na základě Newtonova zákona gravitačního, což lze stručně a přehledně provésti jen počtem vyšším.

§ 232. První zákon Keplerův.

Budiž S střed slunce, M střed tělesa nebeského, kolem slunce obíhajícího (obr. 170.). Vzdálenost $SM = r$ zove se *průvodič* čili *radius vector* pro bod M.



Obr. 170.

První zákon Keplerův praví: *Plochy průvodičem ve stejných dobách opsané jsou si rovny.*

První zákon Keplerův nechává tedy otázku, v jaké dráze se těleso pohybuje, prozatím nerozhodnutou; nechť jest tato dráha jakákoliv, přijde-li *za určitý čas* těleso jednou z polohy M_1 do M_2, po druhé z polohy N_1 do N_2, platí rovnost ploch

$$SM_1M_2 = SN_1N_2.$$

Zákon tento lze dokázati pro každý pohyb centrální. Z něho plyne pak důsledek následující:

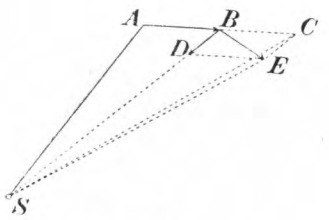
Je-li průvodič r konstantní, jest také rychlost pohybu v konstantní, t. j. centrální pohyb v *kruhu* jest vždy *rovnoměrný*.

Přibývá-li průvodiče r, ubývá rychlosti pohybu v; oběžnice vzdalujíc se od slunce, pohybuje se vždy volněji a volněji. Ten bod

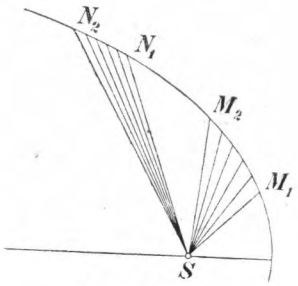
dráhy, ve kterém jest od slunce *nejdále*, zove se *odsluní* čili *aphelium*; v něm jest tudíž pohyb *nejvolnější*.

Ubývá-li naopak průvodiče r, přibývá rychlosti pohybu v; oběžnice, blížíc se na své dráze slunci, pohybuje se vždy rychleji a rychleji. Ten bod dráhy, ve kterém jest slunci *nejblíže*, zove se *přísluní* čili *perihelium*; v něm jest tudíž pohyb tělesa *nejrychlejší*.

Závislost rychlosti pohybu v na vzdálenosti r tělesa od slunce má jednoduchý význam vzhledem ku principu o zachování energie. V určitém bodě své dráhy, tedy při jisté vzdálenosti r od slunce, má těleso rychlost v a tím energii pohybu $\frac{1}{2}mv^2$; když se v dalším průběhu pohybu od slunce na př. *vzdaluje*, překonává sílu f, kterou jest sluncem přitahováno a vykonává práci *na účet* své *energie pohybu*; ztrácí tedy na této energii pohybu, ale nabývá větší energie polohy — jako kámen, je-li jistou rychlostí vzhůru vržen, tou měrou, kterou vlastní svou energií pohybu se zvedá a tím práci vykonává, vždy více a více na své energii pohybu ztrácí, ale za to na energii polohy získává. Pakli těleso slunci se blíží, ztrácí tím na své energii polohy, ale nabývá za to větší energie pohybu — tak že *energie totální v celém průběhu pohybu zůstává konstantní.*



Obr. 171.



Obr. 172.

Elementární důkaz zákona o plochách znázorňuje obr. 171. Budiž τ velmi krátká doba, tak krátká, aby se pohyb v této době vykonaný směl pokládati za přímočarý. Budiž $AB = v\tau$ dráha za tuto dobu τ rychlostí v vykonaná; setrvačnosti by pohyb v další době τ pokračoval v dráze $BC = AB$ téhož směru a téže velikosti; avšak k pohybu tomuto přistoupí složka dráhová $BD = \frac{1}{2}a\tau^2$ vznikající účinkem urychlení centrálního a v téže době τ. Výsledná dráha bude tedy geometrickým součtem složek BC a BD, tudíž BE.

Jest však ihned patrno, že trojúhelník SAB se rovná trojúhelníku SBE, kteréž oba se rovnají trojúhelníku SBC. Plochy v dobách po sobě následujících opsané jsou tudíž sobě rovny.

Tím však jest již zákon o plochách i všeobecně dokázán. Děje-li se pohyb v době jakékoli t na př. (obr. 172.) od M_1 do M_2 a pak od N_1 do N_2,

lze dobu t rozložiti na velký počet dob kratinkých τ. Je-li ploška v téže době τ průvodičem opsaná vždy stejnou, jest stejný i libovolný její násobek pro onu dobu t jakoukoli, a to jak pro pohyb M_1 do M_2, tak pro pohyb z N_1 do N_2, t. j. celé plochy

$$SM_1M_2 = SN_1N_2$$

jsou si rovny.

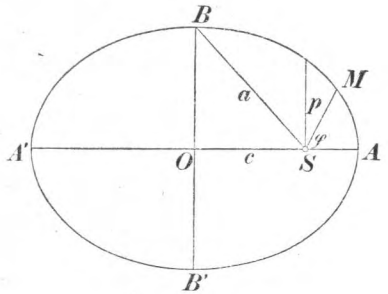
§ 233. **Druhý zákon Keplerův.**

Druhý zákon Keplerův přihlíží již ke tvaru dráhy a stanoví následovně: *Tělesa nebeská pohybují se kolem slunce v kuželosečkách, v jichž společném ohnisku se nalézá slunce.*

V této formulaci má zákon platnost nejen pro oběžnice, nýbrž též pro vlasatice.

Mathematicky vyjádříme zákon ten závislostí, v jaké jest *průvodič* $SM = r$ na úhlu $ASM = \varphi$, který uzavírá směr průvodiče SM se směrem SA k periheliu a který se zove *pravou anomalií* (obr. 173.). Obě veličiny r, φ jsou polární souřadnice bodu M a jich závislost dle druhého zákona Keplerova stanoví rovnice

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$



Obr. 173.

Koefficient e jest *numerická excentricita* kuželosečky; konstanta p, t. j. délka průvodiče r pro $\varphi = 90^0$ jest *parametr* kuželosečky. Tato jest pak

ellipsa pro $e < 1$,
parabola » $e = 1$,
hyperbola » $e > 1$,

speciálně pak

kruh » $e = 0$,

Na otázku, kdy který z těchto případů pro pohyb těles nebeských kolem slunce má platnost, dává theorie odpověď tuto. Budiž těleso v periheliu. Maximální jeho energie pohybu jest zde $\frac{1}{2}mv_0^2$.

Je-li dále f_0 síla centrální, kteráž zde v periheliu, v odlehlosti minimální $SA = r_0$ těleso ovládá a utvoříme-li součin f_0r_0, který má též význam práce, pak jest dráha:

ellipsou,	t. j.	$e < 1$	pro	$f_0r_0 > \frac{1}{2}mv_0^2$,
parabolou,	»	$e = 1$	»	$f_0r_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$,
hyperbolou,	»	$e > 1$	»	$f_0r_0 < \frac{1}{2}mv_0^2$,

speciálně pak

kruhem, t. j. $e = 0$ pro $\frac{1}{2}f_0r_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Pohyb v parabole neb hyperbole mohou míti jen vlasatice, kteréž nenáleží naší soustavě sluneční a kteréž z veliké dálky v obor působení slunečního přicházejíce proběhnou kolem slunce, stávají se viditelnými, ale opět od slunce se vzdalujíce v dálkách ohromných se ztrácejí. Můžeme tedy pohyby takové za případy výjimečné pokládati. Pravidlem, platným pro všechny oběžnice a vlasatice, jež soustavě sluneční přináleží, jest tedy pohyb elliptický.

Veškeré konstanty této ellipsy lze jednoduše vypočítati z konstant p a e její rovnice polární,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

v níž jest $e < 1$. Obdržíme

pro perihelium $\varphi = 0$ $SA = \frac{p}{1 + e}$,

pro aphelium $\varphi = 180^0$ $SA' = \frac{p}{1 - e}$.

Z krajních těchto hodnot průvodiče r obdržíme, utvoříce poloviční součet a rozdíl

$$\tfrac{1}{2}(SA' + SA) = a, \quad \tfrac{1}{2}(SA' - SA) = c,$$

kdež jest $a = OA$ poloosa, $c = OS$ lineární excentricita ellipsy. Dosazením vyjde

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad c = \frac{ep}{1 - e^2}.$$

Koefficient e, tak zvaná numerická excentricita ellipsy, jeví se jako $\frac{c}{a}$, t. j. jako excentricita lineární počítána v dílech hlavní poloosy.

Hodnoty a nabude průvodič r při

$$\cos \varphi = -e,$$

t. j. pro body B a B' ležící na vedlejší poloose; její délka b vyjde pak z rovnice

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

ze kteréž dosazením plyne

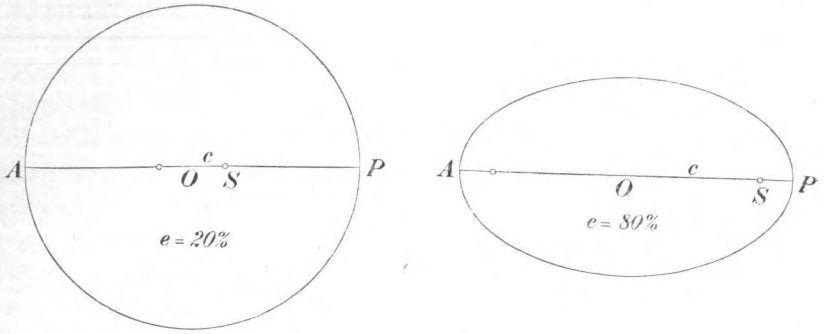
$$b = a\sqrt{1 - e^2},$$

anebo

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Pro posouzení tvaru ellipsy a odchylky jeho od kruhu jest velmi důležito, abychom si objasnili, jak jistá numerická excentricita e tento tvar podmiňuje. K orientaci o této otázce jsou v obr. 174. nakresleny dvě ellipsy pro

touž poloosu a, jedna, při níž e činí 20%, druhá, při níž e obnáší 80%. Výkres ukazuje, jak dosti málo prvá z obou ellips se liší od kruhu přes to, že číslo $e = 0{\cdot}20$ by se zdálo dosti velikým. Souvisí to s výrazem $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Pokud e jest malé, lze přibližně psáti $b = a\,(1 - \frac{1}{2}e^2)$



Obr. 174.

a pak mizí téměř $\frac{1}{2}e^2$ proti jedničce a poloosa $b = a$, t. j. ellipsa se málo jen liší od kruhu. V našem případě, pro $e = 0{\cdot}2$ činí asi $b = a\,(1 - 0{\cdot}02)$, tedy b jest jen o 2 procenta menší než a. Teprve když e jest větší než 0·5, začíná tvar elliptický vystupovati zřetelně.

Jak značně se elliptické dráhy oběžnic rozeznávají od kruhu, lze posouditi z následující tabulky. V této jsou sestavena data pro numerickou excentricitu e. Vedle toho relativní hodnoty pro poloosy a, vyjádřené v jednotce astronomické, v poloose dráhy zemské. Konečně sklon dráhových rovin oběžnic k ekliptice, t. j. ke dráhové rovině středu zemského.

	a relat.	*e*	*α*
Merkur	0·3870987	0·2056048	7° 0′ 8″
Venus	0·7233322	0·0068433	3 23 35
Tellus	1	0·0167711	0
Mars	1·5236913	0·0932611	1 51 2
Juppiter	5·202800	0·0482519	1 18 41
Saturn	9·538856	0·0560713	2 29 40
Uranus	19·18329	0·0463414	0 46 20
Neptun	30·05508	0·0089646	1 47 2

Převedení relativních hodnot a na absolutní, na jednotky délkové pozemské, souvisí s hodnotou, jakouž přijmeme pro parallaxu slunce. Internationální konference astronomů (»Conférence des étoiles fondamentales«), shromážděná v Paříži 1896, přijala pro výpočty astronomických ephemerid hodnotu $8{\cdot}80''$. Dle této by byla astronomická jednotka délková, poloosa a dráhy zemské, vyjádřená v aequatoreálním poloměru naší země

$$a = 23439{\cdot}18.$$

Dle toho pak, zdali pro tento aequatoreální poloměr zemský přijmeme hodnotu *A. Clarkeho* (6378·3 *km*) nebo *Besselovu* (6377·4), obdržíme v millionech kilometrů

buď $a = 149{\cdot}501$,
nebo $a = 149{\cdot}480$.

Z tabulky jest viděti, jak malou excentricitu mají dráhy planetární. Jenom u Merkura jest $e = 0{\cdot}206$, tak že jeho elliptická dráha má tvar ellipsy prvé v obr. 174. Jinak se však dráhy elliptické planet od kruhů rozeznávají jen zcela nepatrně. U země naší činí na př. e sotva 2 procenta.

Co se konečně týče odchylky rovin α jednotlivých drah od ekliptiky, ukazuje tabulka, že odchylka tato jest velmi malá, jen u Merkura jest poněkud větší, obnášejíc asi 7°; u ostatních však jest asi $3\frac{3}{4}°$ až $3\frac{1}{2}°$. Můžeme tedy přibližně říci, že dráhy oběžnic leží téměř v téže rovině.

S tím souvisí úkaz, který někdy po západu slunce můžeme pozorovati. Stává se totiž, že lze někdy z večera na obloze nebeské viděti současně několik planet, jako na př. Venuši (večernici), Marse, Juppitera, Saturna, (k nimž se někdy přidruží i měsíc); všechny tyto hvězdy leží téměř v jediném největším kruhu, udávajíce svým postavením, jakými body prochází ekliptika; v myšleném prodloužení kruhu toho leží pak slunce právě zapadlé.

§ 234. **Třetí zákon Keplerův.**

Třetím zákonem Keplerovým stanoví se mezi pohyby oběžnic vztahy vzájemné. Jsou-li u dvou oběžnic

a a a' poloosy jich drah,
T a T' doby jich oběhu,

platí vztah

$$T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3.$$

Čtverce dob oběhu se mají k sobě jako krychle poloos jejich drah.

Tak jest na př. pro Juppitera a zemi naši, dle tabulky v předešlém odstavci uvedené, $\frac{a}{a'} = 5{\cdot}2$, tudíž $\left(\frac{a}{a'}\right)^3 = 140{\cdot}6$, tedy také $\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = 140{\cdot}6$ a odtud $\frac{T}{T'} = 11{\cdot}86$. Siderický rok na Juppiteru trvá tudíž téměř 12 našich. Když si tedy myslíme hodiny, jichž ručička hodinová jest 5·2kráte delší než minutová, znázorňují tyto ručičky průvodiče vedené od středu slunce ke středu země a Juppitera; hodinový pak pohyb odpovídá s velikou přibližností pohybu těchto průvodičů. Tím lze sobě o vzájemném postavení naší země a Juppitera a o střídání se jeho konjunkce neb opposice se sluncem učiniti pěkný a názorný obraz.

V přesnější formulaci zákona vstupují do vztahu uvedeného též hmoty oběžnic m a m', měřené hmotou M centrálního tělesa, slunce.

Předpokládáme-li pohyb kruhový, jakým velmi přibližně pohyb planetární jest, lze odvoditi tuto přesnější formulaci jednoduše na základě zákona o všeobecné gravitaci. Odvození jest instruktivní pro souvislost obou zákonů. Jest viděti, jak ze zákona o všeobecné gravitaci přímo plyne třetí zákon Keplerův, a ovšem také naopak, jak třetí zákon Keplerův vede k jednotnému zákonu o všeobecné gravitaci, dle něhož všechny oběžnice jsou ovládány silou jednotnou.

Vyjádříme-li urychlení, kterým slunce působí na oběžnici, jednak jako centrální, jednak dle zákona o všeobecné gravitaci, vznikne rovnost

$$\frac{4\pi^2}{T^2} a = \varkappa \frac{M+m}{a^2},$$

čili

$$\frac{a^3}{T^2 (M+m)} = \frac{\varkappa}{4\pi^2},$$

pro jinou oběžnici analogicky

$$\frac{a'^3}{T'^2 (M+m')} = \frac{\varkappa}{4\pi^2},$$

z obou rovnic pak ve formě úměry

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{1+\frac{m}{M}} : \frac{a'^3}{1+\frac{m'}{M}},$$

což jest přesnější výraz třetího zákona Keplerova.

Předpokládajíce pohyb kruhový, můžeme si zjednati ještě jiný výraz dobře orientující, pro třetí zákon Keplerův. Zavedeme-li totiž lineární rychlost v (průměrnou) pohybu a vyjádříme-li urychlení centrální rychlostí a zároveň totéž urychlení dle zákona o všeobecné gravitaci, obdržíme rovnost

$$\frac{v^2}{a} = \varkappa \frac{M+m}{a^2},$$

odtud pak

$$\frac{v^2 a}{M+m} = \varkappa,$$

analogicky pro jinou oběžnici

$$\frac{v'^2 a'}{M+m'} = \varkappa$$

a z obou rovnic ve formě úměry:

$$v : v' = \sqrt{\frac{a'}{1+\frac{m'}{M}}} : \sqrt{\frac{a}{1+\frac{m}{M}}},$$

anebo s velkou approximací, vzhledem k tomu, že $\frac{m}{M}$ a $\frac{m'}{M}$ jsou velmi malé zlomky,

$$v : v' = \sqrt{\frac{1}{a}} : \sqrt{\frac{1}{a'}}.$$

Vypíšeme-li tedy hodnoty a, nejlépe v té jednotce, jaká byla přijata v tabulce v odstavci předešlém, a počítáme-li k nim hodnoty $\sqrt{\frac{1}{a}}$, obdržíme ihned relativní hodnoty rychlosti v vzhledem k rychlosti naší země. Vědouce pak, že tato rychlost činí okrouhle $4\ \frac{míle}{sec}$, obdržíme přehledná čísla pro v násobíce touto hodnotou.

Myšlenka tato jest provedena v tabulce následující. Vedle těchto orientačních čísel pro lineární rychlost průměrnou v jsou připsána přesná čísla pro střední úhlovou rychlost ω a pak pro doby T plného oběhu, roku siderálního, pro každou oběžnici, a sice relativní vzhledem k siderálnímu roku naší země a pak absolutní vzhledem k roku Juliánskému $365\frac{1}{4}$ dnů středního času slunečního.

	v	v	ω	T	T	
	relat.	$\frac{mile}{sec}$	"	*relat.*	rok	den
Merkur	1·61	6·4	14732·4194	0·240843		87·969258
Venus	1·18	4·7	5767·6698	0·615186		224·700787
Tellus	1·00	4·0	3548·1927	1	1	0·006374
Mars	0·81	3·2	1886·5184	1·880832	1	321·729646
Juppiter	0·44	1·8	299·1284	11·861965	11	314·838171
Saturn	0·32	1·3	120·4547	29·457176	29	166·986360
Uranus	0·23	0·9	42·2310	84·020233	84	7·39036
Neptun	0·18	0·7	21·5350	164·766895	164	280·11316

§ 235. **Spojení zákonů Keplerových.**

Jedinou rovnicí lze zákony Keplerovy sloučiti ve způsobu následujícím.

Počítejme plochu s (superficies) opsanou průvodičem r za jednotku času. Plocha tato určí se z plochy celé ellipsy πab čili $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, když tuto dělíme dobou T oběhu. V konstantnosti této plochy a ve výpočtu jejím z ellipsy jest obsažen prvý a druhý zákon. Tak obdržíme

$$s = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Přiberouce pak třetí zákon, vyjádříme dobu T výrazem úměrným

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+\frac{m}{M}}};$$

tím vyjde $$s = C\,.\,\sqrt{a\,(1-e^2)}\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}},$$

anebo $$s = C\,.\,\sqrt{p}\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}},$$

kdež jest C konstanta úměrnosti a p parametr elliptické dráhy. S velkou approximací jest

$$s = C\,.\,\sqrt{p}.$$

V rovnici této jest obsažena jednotná formulace všech zákonů Keplerových. Plocha s průvodičem v jednotce časové opsaná jest úměrná druhé odmocnině z parametru elliptické dráhy.

Konstanta úměrnosti C závisí na volbě jednotek. Za jednotku časovou volí se střední den slunečný; délky pak se vyjadřují v astronomické jednotce $a = 1$ pro poloosu dráhy zemské. Píšeme-li tedy výrazy pro s vzhledem k zemi naší, totiž rovnici

$$\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} = C\,.\sqrt{a\,(1-e^2)}\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

čili

$$\frac{\pi\,.\,a^{\frac{3}{2}}}{T} = C\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

a položíme-li zde

$$a = 1,$$
$$T = 365{\cdot}2563835$$

a přihlížíme-li k tomu, že jest (Gauss)

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{354710},$$

obdržíme číselně

$$2C = 0{\cdot}0172021,$$
$$log\,2C = 8{\cdot}2355814.$$

Počítá se totiž $2C$ a nikoli C, poněvadž hodnota dvojnásobná má jednoduchý význam. Neboť jest vzhledem k zemi naší velmi přibližně

$$2C = \frac{2\pi}{T};$$

znamená tudíž $2C$ průměrnou úhlovou rychlost za jeden den středního času slunečního, při čemž jest radiant jednotkou úhlovou. Zároveň se zanedbával člen $\frac{m}{M}$. Tímto členem zmenšuje se sedmimístný logarithmus konstanty $2C$ jen o 6·7 jednotek posledního místa *).

Význam konstanty $2C$ objeví se v jiném ještě světle, když hořejší rovnici, kterou tato konstanta jest určena, srovnáváme s rovnicí odstavce předešlého, kterouž se vyjadřuje druhý zákon Keplerův. Obě tyto rovnice jsou:

$$\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = C\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$
$$\frac{4\pi^2a^3}{T^2} = \varkappa\,(M+m),$$

z nich pak plyne

$$4C^2 = \varkappa M.$$

*) Srovnej G. Gruss, Základové theoretické astronomie. 1897, pag. 16.

Čtverec konstanty $2C$ jest tudíž úměrný konstantě gravitační $\varkappa$. Faktorem úměrnosti jest hmota slunce M. Avšak v té soustavě jednotek, ve které nahoře počítána konstanta $2C$, přechází úměrnost tato v rovnost, poněvadž hmota slunce jest jednotkou. Jest tudíž jednoduše

$$\varkappa = (2C)^2,$$

číselně pak

$$\varkappa = 2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4}.$$

Tato číselná hodnota gravitační konstanty jest ovšem zcela rozdílnou od číselné hodnoty

$$\varkappa = 6.69 \,.\, 10^{-8},$$

kterouž jsme odvodili v § 178. Toto se zakládá na fysikální soustavě měr *cm, g, sec*; ono na astronomické soustavě měr, ve které jednotkou délky jest poloosa a dráhy zemské, jednotkou hmoty hmota slunce $\odot$ a jednotkou času střední den sluneční d. Chceme-li tudíž obě ony hodnoty $\varkappa$ vespolek srovnávati, musíme připojiti rozměr a psáti:

$$6{\cdot}69 \,.\, 10^{-8} \frac{cm^3}{g \,.\, sec^2} = 2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4} \frac{a^3}{\odot \,.\, d^2}.$$

Rovnice tato podává *klassický příklad* o důležitosti rozměrů veličin a poučuje zároveň o tom, jaké důsledky můžeme odvoditi, když touž veličinu určíme ve dvou různých soustavách jednotkových. Plyne totiž z hořejší rovnice vztah:

$$\frac{6{\cdot}69 \,.\, 10^{-8}}{2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4}} = \left(\frac{a}{cm}\right)^3 : \frac{\odot}{g} \cdot \left(\frac{d}{sec}\right)^2.$$

Zde jest znám poměr

$$\frac{d}{sec} = 86400.$$

Dále lze samostatným způsobem, z parallaxy slunce a rozměrů země, určiti poměr $\frac{a}{cm}$; dle nynějšího stavu jest (§ 233.)

$$\frac{a}{cm} = 149{\cdot}5 \,.\, 10^{11}.$$

Lze tudíž z hořejší relace určiti poměr $\frac{\odot}{g}$, t. j. stanoviti hmotu slunce v grammech. Aby se dostala čísla přehlednější, přibírá se k srovnávání ještě hmota země $\oplus$ dle vztahu

$$\frac{\odot}{g} = \frac{\odot}{\oplus} \cdot \frac{\oplus}{g}.$$

Z rozměru země a konstanty gravitační ve fysikálních jednotkách vyjádřené počítá se střední specifická hmota země a z této hmota její úhrnná; vychází (§ 178.)

$$\frac{\oplus}{g} = 5{\cdot}9579 \,.\, 10^{27}.$$

Ze všech zde uvedených hodnot vypočítá se konečně

$$\frac{\oplus}{\odot} = \frac{1}{332310}.$$

Jak hodnota tato, z konstant gravitačních vypočtená, souhlasí s jinými, jež na základech astronomických byly určeny, lze posouditi z dat těchto. Gauss počítal konstantu $2C$ dle hodnoty 1 : 354710. Annály observatoře Pařížské přijímají hodnotu 1 : 324439 (Leverrier). Berliner astronomisches Jahrbuch (1902) přijímá pro hmotu země a měsíce dohromady hodnotu 1 : 329390 (Newcomb), ze kteréž pro hmotu země, dle hodnoty Hansenovy pro hmotu měsíce (§ 191.), následuje 1 : 333650. Nautical Almanac (1902) má pro hmotu země a měsíce dohromady hodnotu 1 : 328129 (Backlund), ze kteréž pro hmotu země opět dle Hansenovy hodnoty pro hmotu měsíce plyne 1 : 332360. Zvláště tato hodnota shoduje se s onou, jež dle konstant gravitačních byla počítána, velmi dobře.

V logarithmu konstanty $2C$ působí tato dosti různá čísla změny jen malé; neboť jest na př., vezmeme-li hodnoty nejvíce differující,

$$log \sqrt{1 + \frac{1}{354710}} = 0{\cdot}00000067,$$

$$log \sqrt{1 + \frac{1}{324439}} = 0{\cdot}00000061,$$

tak že rozdíl sahá až do osmého místa decimálního. Dlužno ještě poznamenati, že rovnice hořejší pro s, která obsahuje jednotnou formulaci všech zákonů Keplerových, a která zde byla odvozena pro pohyb elliptický, platí pro pohyb parabolický i hyperbolický, tudíž pro pohyb v kuželosečkách vůbec.

XVI.

Energie pohybu rotačního.

§ 236. Analogie translace a rotace.

Při úvahách dosavadních pokládali jsme pohyb rotační nějaké hmoty kol určité osy za daný. Majíce přihlédnouti též ke vzniku pohybu takového, k silám, jež pohyb způsobují, ku práci, kterouž vykonávají a kteráž jako energie pohybu ve hmotě rotující jest obsažena, přenášíme všechny pojmy, jež jsme při postupném pohybu hmoty zavedli, na pohyb rotační. Při tom vede nás povaha rotačního pohybu přirozeně k tomu, zavésti veličiny *úhlové* na místě *lineárních*, tedy otočení úhlové φ, rychlost úhlovou ω a urychlení úhlové α na místě lineárního pošinutí s, lineární rychlosti v a lineárního urychlení a. Je-li r vzdálenost hmotného bodu m od osy rotační, pak jsou v platnosti vztahy:

$$s = r\varphi, \qquad v = r\omega, \qquad a = r\alpha.$$

Vystupuje zde tedy faktor úměrnosti r, kterýž ovšem pro každou hmotnou částečku m rotujícího tělesa jest jiný. Právě proto vzniknou zavedením oněch úhlových veličin do výrazů, z pohybu postupného známých, výrazy nové, analogické, význačné pro pohyb rotační.

Majíce vyjádřiti *práci*, kterouž vykonává stálá síla f působíc stálým směrem na hmotu m v bodě soustředěnou podél dráhy s, a udělujíc hmotě urychlení a, píšeme rovnici

$$fs = mas.$$

Je-li dána celá soustava hmotných bodů m tvořících pevné těleso, s celou soustavou stejnosměrných sil f na jednotlivé body působících, provádíme summaci, píšíce

$$\Sigma fs = \Sigma mas.$$

Poněvadž se pak těleso pohybuje jako celek, jest dráha s všem hmotným bodům společnou a rovněž tak urychlení a. Proto ob-

držíme

$$s \,.\, \Sigma f = as \,.\, \Sigma m.$$

Zde značí Σf výslednici F sil daných, Σm úhrnnou hmotu M tělesa. Máme tedy

$$Fs = Mas.$$

a odtud

$$a = \frac{F}{M},$$

což znamená, že za daných podmínek vypočítáme urychlení a celé oné *soustavy* hmotných bodů tak, jako při hmotném bodu *jediném*, kde jest dle definice $a = \frac{f}{m}$.

Proveďme podobnou úvahu pro pohyb rotační kolem určité osy.

Na hmotu m v bodě soustředěnou ve vzdálenosti r od osy působí stálá síla f směrem, který také za stálý předpokládejme, ale za stálý relativně, vzhledem k poloměru rotačnímu r, s nímž síla uzavírá stále týž úhel, na př. pravý. Pak máme, jako nahoře,

$$f \,.\, r\varphi = mr^2 \,.\, \alpha\varphi.$$

a pro celou soustavu hmot m tvořících těleso kolem dané osy rotující

$$\Sigma f \,.\, r\varphi = \Sigma mr^2 \,.\, \alpha\varphi.$$

Při této summaci, kde těleso pevné rotuje jako celek, jest pro všechny hmotné body konstantním jak úhlové otočení φ tak úhlové urychlení α. Proto obdržíme, provádějíce summaci,

$$\varphi \Sigma fr = \alpha\varphi \,.\, \Sigma mr^2.$$

Zde značí výraz fr moment síly f, $\Sigma fr = D$ součet momentů, úhrnný moment, který dle vět známých jest roven momentu výslednice sil f. Novou veličinou jest však Σmr^2. Poněvadž odlehlost r od jedné hmotné částice m ke druhé se mění, značí součin mr^2 výraz závislý na hmotě m a na její odlehlosti od osy rotační. Proto i summární výraz $\Sigma mr^2 = K$ dává veličinu, jež jest závislá nikoli jenom na úhrnné hmotě tělesa rotujícího, nýbrž také na jejím rozložení kolem osy rotační. Zoveme výraz ten *momentem setrvačnosti hmoty rotující*. Dle toho jest pak pro pohyb rotační

$$\alpha = \frac{D}{K}.$$

Srovnávajíce výraz tento s výrazem pro urychlení a nahoře uvedeným, nalézáme tyto analogie. Co jest pro pohyb translační vý-

sledná síla F, to jest pro pohyb rotační moment D jakožto výsledný ze všech jednotlivých. Co jest pak dále pro pohyb translační úhrnnou hmotou M, to jest pro pohyb rotační moment setrvačnosti K.

Význam nové této veličiny vysvitne dále, když provedeme analogicky pro pohyb rotační substituce, jež jsme zvyklí činiti pro pohyb translační. Ve výrazu

$$F \,.\, s = Mas$$

pišme

$$s = \tfrac{1}{2} at^2, \qquad v = at.$$

Pak vyjde

$$F \,.\, s = \tfrac{1}{2} Mv^2.$$

Úhrnná práce $F \,.\, s$ jest rovna živé síle, energii pohybu $\frac{1}{2}Mv^2$ hmoty M s rychlostí v postupující. Analogicky ve výrazu

$$D \,.\, \varphi = K\alpha\varphi$$

pišme

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\alpha t^2, \qquad \omega = \alpha t.$$

Pak vyjde

$$D \,.\, \varphi = \tfrac{1}{2} K\omega^2.$$

Výraz $D\varphi$ na levo dává opět úhrnnou práci sil rotaci způsobujících; tu pak vidíme, že živá síla z práce té vzniklá, energie pohybu hmoty rotující, jest vyjádřena formálně zcela tak, jako při hmotě v translaci, součinem $\frac{1}{2} K\omega^2$ podobně tvořeným jako tam $\frac{1}{2} Mv^2$, jenom že na místě lineární rychlosti v nastupuje úhlová ω, a na místě hmoty M nastupuje moment setrvačnosti K. Odtud název moment »setrvačnosti«; při určité úhlové rychlosti ω tělesa rotujícího jest totiž jeho *moment setrvačnosti K měrou energie pohybu*, právě tak, jako jest při určité lineární rychlosti v tělesa postupujícího *měrou energie pohybu jeho hmota M*. Poněvadž pak hmota právě touto svou energií v pohybu setrvává, jsou také ony veličiny M a K měrou této *setrvačnosti*.

Při výkladech těchto předpokládali jsme síly konstantní. Tím však se neomezuje všeobecnost; neboť, nejsou-li síly konstantní, lze je přece za konstantní pokládati a to po dobu nesmírně malou, aneb pro pošinutí neb pro otočení nesmírně malé; rychlosti a urychlení platí pak ovšem pro ten jistý okamžik časový, od něhož se — nechávajíce uplynouti jen dobu nesmírně malou — téměř ani nevzdálíme; ale do výrazu K doba nevchází, proto jest jeho význam nezávislým na povaze působících sil, tak jako i význam úhrnné hmoty M.

§ 237. Moment setrvačnosti.

Dle výkladu předešlého jest moment setrvačnosti stanoven vzorcem

$$K = \Sigma\, mr^2.$$

Summace výrazů mr^2 má jednoduchý význam, jde-li o hmotné částečky m, jež jsou v počtu konečném dány jednotlivě. U těles fysikálních má se věc tak, že hmotné částečky m nesmírně malé jsou dány v počtu nekonečně velikém spojitě. Summace v tomto případě nabývá jiné tvářnosti a provádění její jest možné jen počtem vyšším, integrálním.

V duchu tohoto počtu jeví se jednotlivá nekonečně malá částečka hmotná jako differenciál dm, a moment setrvačnosti K jako integrál

$$K = \int r^2\, dm.$$

Značí-li S hmotu specifickou tělesa na tom místě, kde jest částečka hmotná dm, a zavedeme-li differenciál dv objemu v, jest

$$dm = S \,.\, dv.$$

Differenciál objemu vyjádří se pak souřadnicemi onoho hmotného bodu dm a výraz jeví se různě dle toho, jaké souřadnice volíme, zdali polární či pravoúhlé.

Všeobecně jest též S proměnlivé od místa k místu; musí pak býti stanoveno, jakou funkcí polohy bodu hmotného dm lze tuto proměnlivost vystihnouti. Je-li však S konstantní, t. j. těleso homogenní, zjednoduší se úkol, poněvadž S reprodukuje se před znamení integrační.

Vypočítávání momentu K v určitých případech jednotlivých, kdy dáno jest těleso geometricky určitě ohraničené, a kdy osa rotační má polohu určitou v tělese samém, jest úkolem ryze mathematickým.

§ 238. Poloměr setrvačnosti.

Význam momentu setrvačnosti K stane se názornějším, když zavedeme jistou lineární veličinu k, tak zvaný *poloměr setrvačnosti* (gyrační) *). Tento jest určen rovnicí

$$K = M \,.\, k^2.$$

Značí tedy odlehlost, do jaké by se úhrnná hmota M rotujícího tělesa jako by v bodě soustředěná musila od osy rotační položiti, aby pak její moment setrvačnosti se rovnal momentu tělesa daného. Místo v jediný bod mohla by se hmota M mysliti rozloženou kolem osy rotační v kroužek anebo i ve válec nesmírně tenký poloměru k.

*) Poloměr gyrační od řeckého γῦρος, ó kruh.

Se zavedením poloměru setrvačnosti souvisí též rozměr momentu setrvačnosti, který jest

L^2M všeobecně, $cm^2 \cdot g$ zvlášť.

Jest tedy moment setrvačnosti *momentem hmotným druhého stupně*. Proto jest nezávislým na váze tělesa, na tíži, právě tak jako těžiště, které se stanoví momenty hmotnými stupně prvého.

§ 239. Moment setrvačnosti pro osu položenou středem hmotným.

Vzhledem k tomu, že moment setrvačnosti souvisí s rozlohou hmoty kolem osy rotační a že pro tuto rozlohu poloha těžiště jakožto středu hmotného jest význačnou, lze očekávati, že moment setrvačnosti pro osu těžištěm procházející bude rovněž zvláště významným.

Vskutku shledáme, srovnávajíce momenty setrvačnosti pro *osy rovnoběžné*, že jest moment setrvačnosti pro osu těžištěm procházející *minimálním*.

Důkaz plyne z rovnic, jimiž jest poloha středu hmotného vyznačena. Jsou-li x, y, z souřadnice hmotných částic m jednotlivých, x_0, y_0, z_0 souřadnice jich středu hmotného, $\Sigma m = M$ hmota úhrnná celé soustavy hmotné, platí vztahy

$$x_0 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \qquad y_0 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \qquad z_0 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Buďtež tedy dány dvě osy rotační, rovnoběžné, a o délku e od sebe odlehlé. Jednu z nich volme za osu OZ souřadnic soustavy XYZ; druhá protíná souřadnicovou rovinu XY v bodě O', tak že jest $OO' = e$ (obr. 175.). Budiž m hmotná částečka v rovině XY, r, r' poloměry rotační této částečky vzhledem k jedné a druhé ose. Pak platí vztah

$$r'^2 = r^2 + e^2 - 2er \cos(e, r).$$

Jest však, jsou-li x, y souřadnice oné hmotné částečky v rovině XY,

$$r \cos(e, r) = x \cos\alpha + y \sin\alpha,$$

kdež jest α úhel, o který se směr OO' odchyluje od osy OX. Tudíž máme relaci:

$$r'^2 = r^2 + e^2 - 2e(x \cos\alpha + y \sin\alpha).$$

Jest patrno, že relace tato platí pro každou rovinu, jež jest k osám daným kolmá, čili s rovinou souřadnicovou XY rovnoběžná, v níž tedy částečky hmotné rotují. Proto násobíce hmotou m a provedouce summaci vzhledem k celé soustavě hmotných částic m obdržíme:

$$\Sigma mr'^2 = \Sigma mr^2 + e^2 \Sigma m - 2e(\cos\alpha \Sigma mx + \sin\alpha \Sigma my)$$

čili

$$K' = K + Me^2 - 2e(\cos\alpha \Sigma mx + \sin\alpha \Sigma my).$$

Až dotud má rovnice tato platnost pro dvě osy rotační rovnoběžné jakékoliv. Je-li však osa OZ položena těžištěm S, kteréž se kdekoli na ose této nalézá, pak jsou nullovými jeho souřadnice

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0,$$

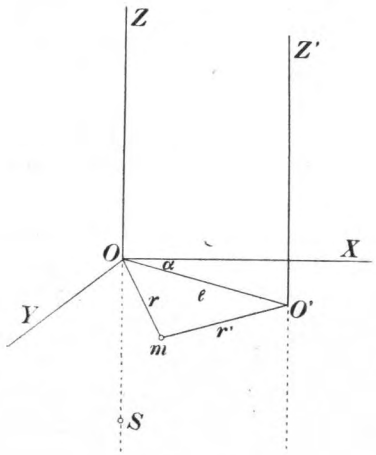
tudíž také

$$\Sigma mx = 0 \qquad \Sigma my = 0.$$

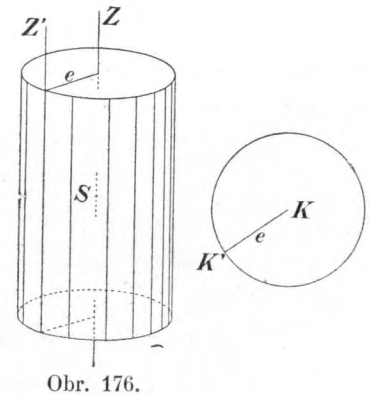
Tím se zjednoduší vztah hořejší a vyjde

$$K' = K + Me^2.$$

Pro osy jdoucí mimo těžiště jest tedy vždy $K' > K$ a sice o moment setrvačnosti Me^2 hmoty M v těžišti soustředěné; proto jest K pro osu těžištěm jdoucí *minimálním*. (Věta Steinerova.)



Obr. 175.



Obr. 176.

Z toho plyne dále: Pro osy rotační, rozložené na kruhovém válci, jehož osa geometrická prochází těžištěm tělesa, jsou momenty setrvačnosti vesměs stejny (obr. 176.).

Vzhledem k těmto výsledkům jest vždy pravidlem, počítati — neb pokusy stanoviti — moment setrvačnosti tělesa *jen pro osy těžištěm procházející*, poněvadž z tohoto lze pro každou jinou osu, mimo těžiště jdoucí, ihned — dle hořejší rovnice — moment setrvačnosti vypočísti.

§ 240. Momenty setrvačnosti pro osy libovolné.

Budiž dána libovolná osa rotační. Počátek souřadnic O volme na této ose OU, jejíž poloha vzhledem k osám souřadnicovým OX, OY, OZ budiž stanovena směrovými úhly α, β, γ. Hmotný bod m budiž jedním z celé jich soustavy, l jeho odlehlost od počátku souřadnic, x, y, z jeho souřadnice,

r jeho poloměr rotační vzhledem k dané ose OU a konečně ϑ úhel, který s touto osou svírá průvodič l (obr. 177.).

Pak jest

$$K = \Sigma m r^2.$$

Na místě poloměru r zaveďme souřadnice x, y, z dle rovnic následujících:

$$r = l \sin \vartheta,$$
$$l \cos \vartheta = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$
$$l^2 \sin^2 \vartheta = l^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2.$$

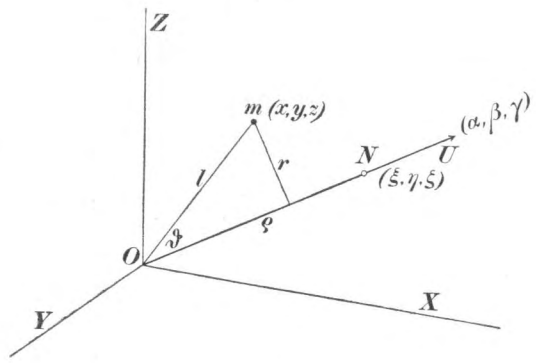
Použijíce vztahů

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

a provedouce zdvojmocnění a srovnajíce dle konstant $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, obdržíme:

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma$$
$$- 2yz \cos \beta \cos \gamma \quad - 2zx \cos \gamma \cos \alpha \quad - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Násobíme-li hmotou m a provedeme-li summaci vzhledem k celé soustavě



Obr. 177.

hmotné, pamatujíce, že veličiny směrové $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ jsou konstanty, obdržíme:

$$K = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$
$$- 2P \cos \beta \cos \gamma - 2Q \cos \gamma \cos \alpha - 2R \cos \alpha \cos \beta.$$

Tímto výrazem jest tedy moment setrvačnosti K stanoven pro osu jakoukoli, počátkem souřadnic položenou, jejíž poloha jest úhly α, β, γ určena. Při tom mají veličiny A, B, C, P, Q, R význam následující:

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2) \qquad P = \Sigma myz,$$
$$B = \Sigma m (z^2 + x^2) \qquad Q = \Sigma mzx,$$
$$C = \Sigma m (x^2 + y^2) \qquad R = \Sigma mxy.$$

Formálně lze výsledek jinak upraviti, když nahradíme $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ poměry. Volíme-li na ose rotační jakýkoli bod N, jehož souřadnice jsou ξ, η, ζ, a jehož odlehlost od počátku O jest ϱ, pak lze psáti

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\varrho}, \qquad \cos \beta = \frac{\eta}{\varrho}, \qquad \cos \gamma = \frac{\zeta}{\varrho}.$$

Dosazením vyjde:

$$\varrho^2 K = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2P\eta\zeta - 2Q\zeta\xi - 2R\xi\eta.$$

Píšeme-li pro okamžik výraz na pravé straně rovnice symbolicky $f(\xi, \eta, \zeta)$, obdržíme relaci

$$\varrho^2 K = f(\xi, \eta, \zeta),$$

v níž vidíme, že moment K jest úměrným veličině $\frac{1}{\varrho^2}$, a že faktorem úměrnosti jest $f(\xi, \eta, \zeta)$.

§ 241. **Ellipsoid setrvačnosti.**

Chceme-li v odstavci předešlém na místě úměrnosti zavésti rovnost a tím polohu bodu N učiniti určitou, stanovme

$$\varrho^2 K = 1,$$

čili

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2P\eta\zeta - 2Q\zeta\xi - 2R\xi\eta = 1.$$

Pak jest moment setrvačnosti K přímo dán čtvercem $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ reciproké hodnoty průvodiče ϱ. Poloha bodu N jest tím přesně určena, a pro všechny možné směry os rotačních, od téhož počátku O vedených, jest též geometrické místo příslušných bodů N určitým. Rovnicí tohoto místa jest

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 1.$$

Uvážíme-li, že hmotné částice rotující soustavy, tedy prakticky rotujícího tělesa, jsou rozloženy vždy *kolem* osy rotační, nikoli snad v ose rotační samé, nechť jest poloha této osy jakákoliv, seznáme, že moment K nikdy nemůže se státi nullovým a tudíž průvodič ϱ nikdy nekonečně velikým. Ono geometrické místo bodu N, jež jest plochou stupně druhého, může tedy býti jenom ellipsoid. Nazývá se všeobecně *ellipsoidem setrvačnosti* (Poinsot). Vhodnou volbou soustavy souřadnicové lze jeho rovnici zjednodušiti tak, že přejde v následující:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

kdež jsou

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2).$$

Osy souřadnic stávají se tak osami ellipsoidu a zovou se hlavními osami setrvačnosti. Konstanty A, B, C značí patrně momenty setrvačnosti rotujícího systému vzhledem k těmto osám. Zavedeme-li pak poloosy ellipsoidu a, b, c, můžeme rovnici jeho psáti ve formě obvyklé

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = 1,$$

kdež můžeme předpokládati

$$a > b > c.$$

Tím se pak stává

moment A minimálním,
» B středním,
» C maximálním.

§ 242. Ellipsoid centrální.

O středu ellipsoidu setrvačnosti nebylo nic bližšího stanoveno; může jím býti bod jakýkoli dané soustavy hmotné. Je-li však střed tento zároveň *středem hmotným*, těžištěm soustavy hmotné, pak nabývá ellipsoid setrvačnosti významu praegnantního a zove se *ellipsoidem centrálním*. Vzhledem k tomu, že stačí úplně studovati momenty setrvačnosti jen pro osy od těžiště na všechny strany vedené, můžeme vždy přestati na ellipsoidu centrálním. Jeho zavedením otázka o momentech setrvačnosti, pro rotující hmotnou soustavu, nabývá veliké názornosti; můžeme si tuto soustavu jako by odmysliti a na její místo položiti ellipsoid centrální; pro určitý směr osy rotační jest určen z něho průvodič ϱ; čtvercem pak $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2$ jeho reciproké hodnoty stanoví se moment K. Úkoly o momentech setrvačnosti jsou tak převedeny na pole geometrické; veškeré věty o ellipsoidech známé mohou se interpretovati fysikálně vzhledem k momentům setrvačnosti. U těles stejnorodých a geometricky pravidelných určí se směry os tohoto ellipsoidu rovinami symmetrie; tak u pravoúhlého rovnoběžnostěnu, válce, ellipsoidu atd. Vypočítáme-li pak hlavní momenty setrvačnosti, jsou jimi určeny i poloosy ellipsoidu a tím ellipsoid sám. Moment setrvačnosti vzhledem k ose libovolné vypočítá se dle rovnic dříve uvedených z oněch hlavních momentů velmi jednoduše.

§ 243. Příklady o momentech setrvačnosti.

Jak již bylo řečeno, předpokládá úloha, kterak v jednotlivých daných případech moment setrvačnosti počtem stanoviti, znalost počtu integrálního. Je-li dané těleso stejnorodé, homogenní, a případ tento budeme v následujícím vždy předpokládati, závisí jeho moment K setrvačnosti pro danou osu rotační jen na hmotě úhrnné M a na jeho *tvaru*. Hmota úhrnná M vystupuje pak jako faktor jeden; druhým jest k^2, t. j. čtverec poloměru setrvačnosti; tento souvisí pak *jenom* s geometrickým tvarem tělesa. Vzorce stávají se přehlednějšími, když stanovíme jimi jen k^2, místo čehož píšeme $\frac{M}{K}$ anebo kdy hlavní momenty setrvačnosti chceme zvláště vytknouti, $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{C}{M}$. Předpokládáme vždy osy rotační středem

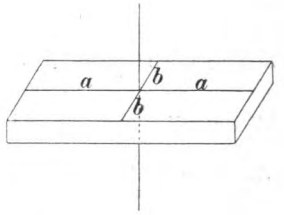
hmotným položené. V následujícím uvádíme příklady, jakéž při experimentálním zkoumání vskutku přicházívají (na př. u magnetů kývajících) a u kterýchž také ony dřívější všeobecné věty se dobře objasňují.

1. *Pravoúhlý rovnoběžnostěn.*

Délkové rozměry buďtež $2a$, $2b$, $2c$.

Pak jest:

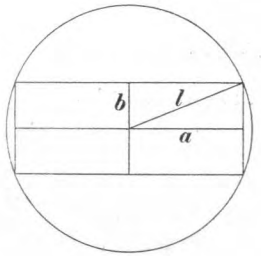
$$\frac{A}{M} = \frac{b^2 + c^2}{3},$$
$$\frac{B}{M} = \frac{c^2 + a^2}{3},$$
$$\frac{C}{M} = \frac{a^2 + b^2}{3}.$$



Všeobecná forma těchto hlavních momentů setrvačnosti jest tudíž

$$\frac{K}{M} = \frac{l^2}{3},$$

kdež znamená l poloměr kruhu opsaného kolem pravoúhelníka, který vzniká řezem k ose rotační kolmým (obr. 178.).



Obr. 178.

2. *Válec.*

Průměr kruhového válce budiž $2r$, výška $2l$. Je-li osa válce též osou rotační (obr. 179.), jest

$$\frac{A}{M} = \frac{r^2}{2}.$$

Je-li osa rotační kolmá k ose válce (obr. 180.), vychází

$$\frac{B}{M} = \frac{C}{M} = \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}.$$

3. *Hmotná přímka.*

Uvažujme moment setrvačnosti přímky k ose rotační kolmé. Za hmotnou přímku ve smyslu fysikálním můžeme pokládati buď rovnoběžnostěn, u něhož jen jeden rozměr vyniká, kdežto ostatní dva jsou nekonečně malé, anebo válec, jehož průměr jest nekonečně malý. Vskutku dávají oba dosud uvedené vzorce pro tuto abstrakci týž výsledek.

Při rovnoběžnostěnu zůstává vzorec

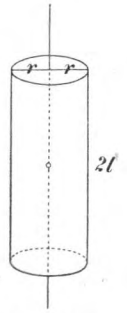
$$\frac{K}{M} = \frac{l^2}{3}$$

přímo v platnosti; poloměr l onoho opsaného kruhu stává se polodélkou přímky k ose rotační kolmé.

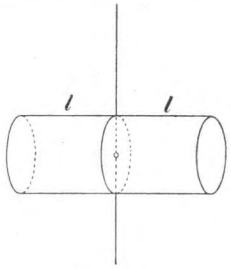
Při válci nutno bráti vzorec

$$\frac{K}{M} = \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}$$

a položiti $r = 0$; opět značí pak l polodélku přímky k ose rotační kolmé. Tímto výkladem nabývá též vzorec pro válec větší názornosti; člen $\frac{l^2}{3}$ odpovídá ose válce jakožto rozměru k ose rotační kolmému, a člen $\frac{r^2}{4}$ ukazuje, jak moment vzrůstá, když kolem osy válce se začíná hmota jako by hromaditi a ve tvar válcovitý vzrůstati. Velmi často člen $\frac{r^2}{4}$ proti členu hlavnímu $\frac{l^2}{3}$ mizí, jako u tenkých drátů, tyčí atd. Naopak u tenkých desk, když osa rotační jest průměrem desky, mizí zase člen $\frac{l^2}{3}$ proti $\frac{r^2}{4}$, kterýž se pak stává hlavním.



Obr. 179.



Obr. 180.

4. *Ellipsoid.*

Jsou-li $2a$, $2b$, $2c$ osy ellipsoidu, vychází:

$$\frac{A}{M} = \frac{b^2 + c^2}{5},$$

$$\frac{B}{M} = \frac{c^2 + a^2}{5},$$

$$\frac{C}{M} = \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

Pozoruhodnou jest formální analogie s pravoúhlým rovnoběžnostěnem. Tam byl dělitel 3, zde 5.

5. *Koule.*

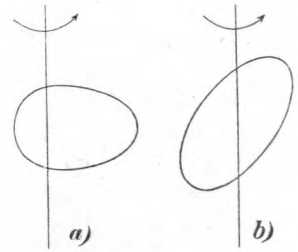
Hlavní momenty rotační jsou zde stejné a mají hodnotu

$$\frac{K}{M} = \frac{2}{5} r^2.$$

Výsledek tento souhlasí s výsledky pro ellipsoid, když v těchto položíme $a = b = c$, identicky s poloměrem r koule.

§ 244. **Osa volná.**

Otáčí-li se pevné těleso kolem určité osy, působí každá jeho hmotná částice silou centrifugální, reagujíc tak proti stálé změně ve směru své rychlosti. Úhrnný účinek sil těchto pro každou polohu tělesa v rotaci jest buď výsledná síla nebo výsledná dvojice. V prvém případě (na př. obr. 181. *a*) se osa jednostranně tlačí, v druhém (na př. obr. 181. *b*) stáčí. V obou případech, jde-li o osu fysickou, tlačí čepy osy na lůžka ve směrech s rotací stále se měnících.



Obr. 181.

Významným a důležitým jest však případ, kdy následkem jisté rozlohy hmoty kolem rotační osy síly centrifugální ve svém úhrnném účinku na osu se ruší.

Je-li rotující těleso homogenní, nastává případ ten, když pro každý meridiánový (osou vedený) řez jest osa rotační zároveň osou souměrnosti, čili, když pro každý příčný (k ose kolmý) řez jest průsečík s osou rotační geometrickým středem řezu. Při takové souměrnosti odpovídá každému hmotnému bodu m jiný stejný m' na opačné straně osy souměrně položený, tak že se centrifugální síly obou pevností tělesa ruší navzájem.

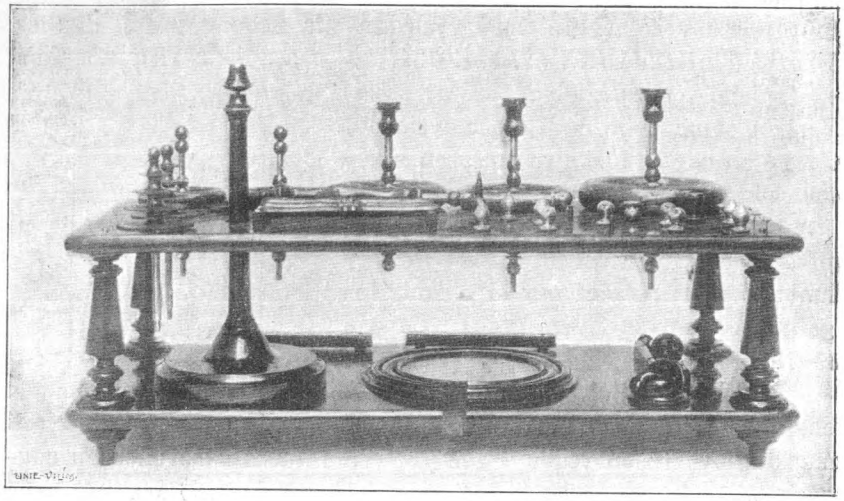
Osa taková zove se *osou volnou*. Jest vždy osou hlavního momentu setrvačnosti.

Mohou však zde nastati případy hlavní dva. Je-li tento moment setrvačnosti *maximálním*, jeví osa volná při rotaci *stabilnost*; pakli je *minimálním*, postrádá této stabilnosti, mění při sebe menším nárazu polohu, ukazuje tudíž *labilnost*.

Jest totiž tendence síly centrifugální jakožto síly reakční, oddáliti hmotné částečky m od osy rotační do odlehlostí r co možno velikých. Je-li tudíž dané těleso pevným, tak že změna tvaru nastati

nemůže, jeví se ona tendence ve změně osy rotační samé, jež tíhne k maximu výrazu Σmr^2.

Úkaz tento lze velmi poučně studovati na stroji centrifugálním. Rozmanité předměty, jako na př. řetězec, kroužek, deska, válec, kužel zavěsí se silnějším motouzem na háček centrifugálního stroje a pak se roztáčí, s počátku volně, pak vždy rychleji a rychleji. U řetězce jest pěkně pozorovati změnu tvaru; visí s počátku přímě, pak roztáčeje se vypíná se ve tvar hruškovitý, konečně lehá si a zůstává v stabilním tvaru kruhovitém rozložen vodorovně v poloze, ve které jednotlivé jeho částice patrně od osy rotační co nejdále jsou vzdáleny. Podobně kroužek otáčí se s počátku kolem svého průměru, pak konečně přechází v polohu vodorovnou a otáčí se kolem



Obr. 182.

osy kolmé k jeho rovině; maximum momentu setrvačnosti vystupuje v obou případech velmi zřetelně. Deska a válec, útvary v podstatě geometricky stejné, staví se vzhledem k svému momentu setrvačnosti různě, deska do polohy, kdy osa geometrická jest osou rotační, válec pak, kdy osa geometrická jest k rotační kolmo. Také kužel staví se definitivně při značné úhlové rychlosti otáčení osou svou vodorovně, tedy kolmo k ose rotační.

Z těchto pokusů odvodíme všeobecné pravidlo, jak lze u jakéhokoli tělesa nalézti volnou osu maximálního momentu setrvačnosti. Zavěsíme těleso, roztáčíme a pozorujeme, jak se při úhlové rychlosti stále stoupající definitivně staví.

Pokusy v této úpravě jsou právě tím poučné, že změna osy rotační děje se proti tíži, že těleso, jinak se stavíc, se zvedá. Kdyby se pokusy zařídily tak, aby tíže byla eliminována, t. j. aby osy, kolem nichž by se těleso otáčeti mohlo, již zpředu byly těžištěm položeny, byly by změny osy rotační sice citlivější, ale pokusy samé dojista méně poučné a přesvědčivé.

§ 245. Setrvačníky Schmidtovy.

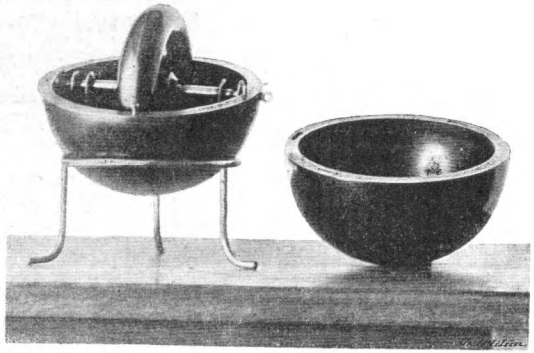
Ke studiu úkazů, jež při rotaci těles kolem osy maximálního momentu lze pozorovati, sestrojil mechanik *Schmidt* zvláštní setrvačníky, jak je v různé velikosti s příslušenstvím znázorňuje obr. 182. (Dr. Houdek a Hervert). Jsou to mosazné kotouče, při nichž k dosažení velkého momentu setrvačnosti jest hmota hlavně na obvodu ve způsobu massivních prstenů nakupena. Osy jsou ocelové; čípky, jež na osy lze našroubovati, jsou rovněž ocelové a končí buď hrotem nebo koulí, nebo válcovitou tyčinkou. Hořejší konec osy jest mosazný a rozšířený v důlek, tak že se dá do něho vložiti setrvačník jiný s čípkem kulovitým. K mazání používá se čistého oleje minerálního. Roztáčejí se silným motouzem, při čemž se hořejší část osy drží v rukou, dolejší pak s čípkem vloží do důlku svěráku ke stolu přišroubovaného, aby se prudkým tahem (zejména ke konci) docílilo roztočení co nejprudšího.

Obr. 183.

Stabilnost osy ukazuje se velmi zřetelně. Veliký setrvačník, na jehož osu jest našroubován čípek s hrotem, roztočí se prudce a postaví osou svisle na ocelovou misku, rovinnou nebo mírně konkavní. Tíže jest tím zrušena; setrvačník by byl i v klidu v rovnováze. Kdežto by však rovnováha v klidu byla labilní, jest při rotaci stabilní. Setrvačník stojí a to, je-li dobře pracován a je-li z materiálu co možná homogenního, stojí tak klidně, že není ani jeho rotace pozorovati.

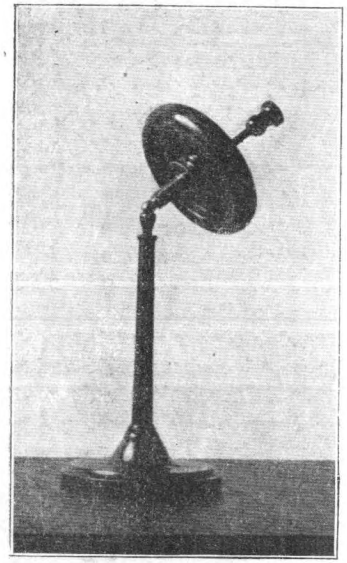
Zajímavo jest studovati účinek rotace na okolní vzduch. Na skleněnou tyčinku nebo na drátek navinou se bavlněná měkká vlákna a vnoří se do alkoholu, kterým nasáknou, pak se zapálí; vysoký plamen dá se blízko k setrvačníku neb k jeho ose; dílem se plamen odhání, dílem krouží kolem osy a naznačuje tak víření celého okolního vzduchu.

Stabilita osy rotační ukáže se způsobem zvlášť patrným tak, že se několik roztočených setrvačníků postaví na sebe. Obrazec 183., krátkou exposicí fotograficky dle skutečnosti provedený, ukazuje čtyři takové setrvačníky na sebe postavené. Aby se pokus v tomto způsobu podařil, musí býti setrvačníky homogenní a jich osy bezvadné, což se pozná z toho, že setrvačník, prudce roztočený a postavený hrotem na misku osou svou zcela klidně stojí. Pak se dolejší, největší setrvačník, rozežene co možná prudce,



Obr. 184.

a když osou stojí, postaví se na něj setrvačník roztočený druhý, třetí a konečně i čtvrtý nejmenší, který však smí býti roztočen jen mírně.



Obr. 185.

Jde-li o to, ukázati, jak jest nesnadno polohu stabilní osy rotační měniti, čili jak značnou jest setrvačnost, s jakou částečky hmotné zachovávají rovinu své rotace a jak reagují proti každé změně této roviny, jest výhodno montovati velký setrvačník do duté polokoule mosazné (obr. 184.).

Setrvačník se prudce roztočí, přikryje druhou polokoulí a vezme do rukou. Otáčí-li pozorovatel koulí, nevěda, že uvnitř rotuje setrvačník, jest velice překvapen odporem, se kterým se při tomto otáčení setkává — ač-li náhodou neotáčí kolem osy setrvačníku samého. Jinak reaguje koule velmi značně a sice nikoli přímo proti stáčení, nýbrž vybočuje stranou, tak že pozorovatel musí míti pozor, aby se mu koule při prudším otočení z rukou nevymkla.

Pokus tento vede již k tomu, studovati, jaký účinek na rotaci mají síly rušivé, na př. tíže.

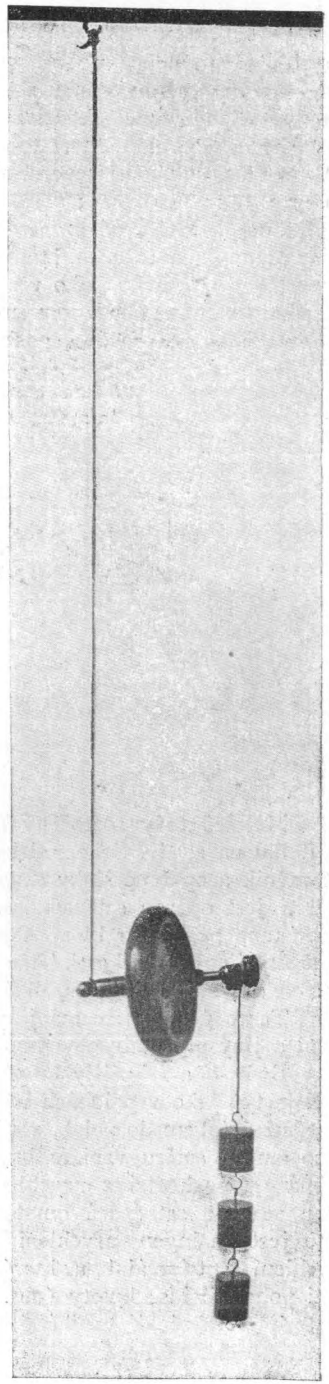
Při uspořádání pokusů v obr. 183. byla tíže eliminována. Když však roztočený setrvačník, na jehož ose jest našroubován čípek kulovitý, se tímto čípkem vloží do důlku stativu a pustí, pozoruje se, že setrvačník neklesne, jak by tomu bylo v klidu, nýbrž zůstává nakloněným, při čemž kolem důlku, kde má svou oporu, obíhá. Pokus tento znázorňuje obr. 185., jenž jest momentní fotografií dle skutečnosti proveden.

Zjev podobný pozorujeme, když se setrvačník zavěsí tak, jak obr. 186. znázorňuje; při tom lze dokonce vlastní váhu, kterou již setrvačník sám působí, sesíliti tím, že se na druhý konec osy zavěsí několik závaží, na př. 100grammových. Obr. 186. momentní fotografií dle skutečnosti zjednaný ukazuje případ, kdy byla zavěšena tři taková závaží; obíhání setrvačníku se tím urychlí; nicméně setrvačník aspoň po nějakou dobu neklesá.

§ 246. **Výklad.**

Vysvětlení těchto úkazů, jež každého, kdo je vidí poprvé, překvapují, má-li býti podáno v plné mathematické přesnosti, náleží k nejnesnadnějším úkolům dynamiky *). Vysvětlení přístupnější, ač ne zcela uspokojující, podal *Poggendorf* **). Také výklad, který v následujícím podáváme, jest v jádru svém týž, ač ve formě pozměněné.

Připomeňme sobě především zásadu, dle níž jsme v § 132. označovali otáčení v jistém smyslu positivně a v opačném negativně. Dívajíce se na setrvačník pravíme, že se otáčí ve smyslu positivním, když hmotné částečky jeho se pohybují obráceně než ručičky u hodin, tedy od pravé horem k levé ruce.

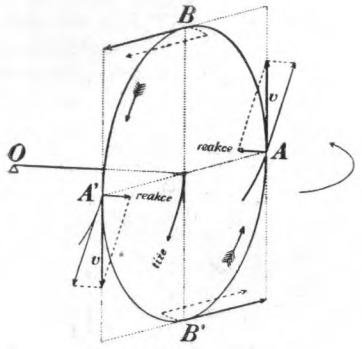


Obr. 186.

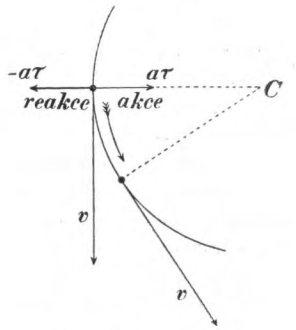
*) Z novějších spisů, jež o těchto otázkách jednají, viz na př. *F. Klein* a *A. Sommerfeld*, Ueber die Theorie des Kreisels, Lipsko 1897—1903.

**) Pogg. Ann. 1853, svazek 90.

Patrně musí vždy stanovisko pozorovatele býti určitě udáno; neboť jest při tomto způsobu označování rozhodujícím. Dívá-li se kdo na týž roztočený setrvačník jednou z předu, po druhé ze zadu, řekne, že se v posledním případě otáčí negativně, když v případě prvém otáčení prohlásil za positivní. Právě tak jest to se zdánlivou denní rotací slunce na obloze nebeské. Na polokouli severní vidíme, ano slunce se otáčí od levé strany k pravé, tedy negativně; avšak obyvatelé na jižní polokouli vidí naopak, ano slunce se otáčí od pravé k levé, tedy positivně. Na setrvačníku zoveme přední stranu tu, na kterou se díváme shora, když setrvačník rotující je postaven na misku, jako v obr. 183. Při obyčejném způsobu navinování motouzu pravou rukou v tom smyslu, jak šroubujeme, roztáčí se setrvačník, vždy z předu pozorováno, positivně.



Obr. 187.



Obr. 188.

Mějmež tedy roztočený setrvačník a položme jej čípkem kulatým do důlku na stativ. Schematicky zobrazuje ve výkresu 187. kruh $ABA'B'$ setrvačník a opeřené šipky smysl rotace, kterýž se zpředu jeví positivním. Bod O jest oporou setrvačníku. Každá hmotná částečka setrvačníku má jistou tangenciální rychlost, kterou následkem setrvačnosti zachovává i co do směru i co do velikosti. Tíže však sklání osu setrvačníku kolem opory O a to ve smyslu positivním, díváme-li se na setrvačník se strany pravé.

Tento účinek tíže má jiný význam pro body obvodu B a B' a sousední a jiný pro body obvodu A a A' a sousední.

Body B a B' přišly by působením tíže do poloh, v nichž směr rychlosti je týž jako v polohách původních. Naproti tomu body A a A' přišly by týmž účinkem do poloh, v nichž by směr jich rychlosti byl pozměněný. Tato změna směru vzniká tím, že k rychlosti původní přistupuje složka kolmá $a\tau$, pochodící z urychlení a po kratinkou dobu τ působící. Proti tomu reaguje setrvačná hmota stejným ale protisměrným urychlením. Toto jest analogon urychlení centrifugálního, jakožto reakčního proti urychlení centripetálnímu, kterým se také způsobuje změna směru v rychlosti pohybující se hmoty (obr. 188.). Oním reakčním urychlením jak na místech A tak i A' vzniká dvojice sil, která způsobuje *obíhání* kotouče kolem svislé, oporou O položené osy; můžeme ji tedy zváti zkrátka *dvojicí oběžnou.*

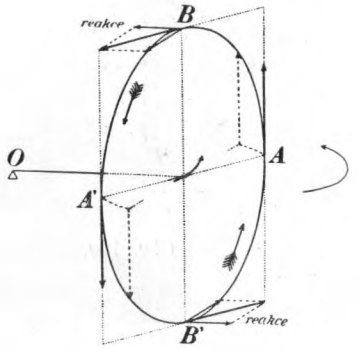
Obíhání kotouče dlužno tudíž pokládati za úkaz reakční proti rušivému působení tíže, jemuž setrvačník jako by ustupuje, právě tak, jako by na křivkách železné dráhy ustoupily jedoucímu vlaku koleje, kdyby nebyly upevněny.

S reakčním zjevem obíhání vystupuje pak současně zjev další rovněž reakční.

Obíhání setrvačníku nepřekáží rychlostem bodů A a A' a sousedních; za to však mění směr rychlostí bodů B a B'; tato změna směru nastává opět jistým urychlením a_1, kteréž působíc po dobu τ dává složku rychlosti $a_1\tau$ kolmou k původní rychlosti v (obr. 189.). Proti tomuto urychlení a_1 vystupuje však opětně reakční urychlení stejné a protisměrné, kterým vzniká dvojice sil způsobující *zvedání* kotouče; proto ji můžeme zváti zkrátka *dvojicí zvedací.* Setrvačník obíhaje zvedá se pozvolna, tak že konec osy opisuje spirálu, stále se zúžující, až se po případě osa postaví svisle. V postavení tomto tíže rotaci setrvačníku nepřekáží. Můžeme tedy říci, že setrvačník reaguje proti rušivému působení tíže tak, aby se mu vyhnul, zaujímaje ponenáhlu novou polohu, v níž se pak pohyb jeho tíží neruší.

Výklad tento lze dotvrditi zajímavými pokusy.

Zvedání kotouče je způsobeno jeho obíháním. Když se tedy obíhání zamezí, klesá kotouč; když obíhání se popožene, zvedá se více. K demonstrování toho slouží přístroj v obr. 190. znázorněný. Setrvačník je přišroubován na pevnou tyč, na níž se v kolenu může zvedati neb skláněti. Tyč se drží v kroužku, v němž je otáčivou. Obíhání lze zastavovati neb poháněti vroubkovanou hlavicí, která se prsty rukou ovládá.



Obr. 189.

Aby se kotouč, položený kulatým čípkem do důlku stativu v obr. 185. skutečně zvedl a postavil osou svisle, jest nutno tření, které jeho oběhu brání, co možno odstraniti. K cíli tomu zašroubuje se do stativu tyčinka s hrotem, na který se nastrčí lůžko, do něhož se onen čípek kulatý klade, tak aby se z lehounka na hrotu otáčelo (obr. 191.). Postaví-li se do něho roztočený setrvačník v mírném sklonu, začne lůžko se otáčeti se setrvačníkem a poněvadž na hrotu tření je minimální, obíhá osa setrvačníku současně se zvedajíc, až se konečně postaví svisle.

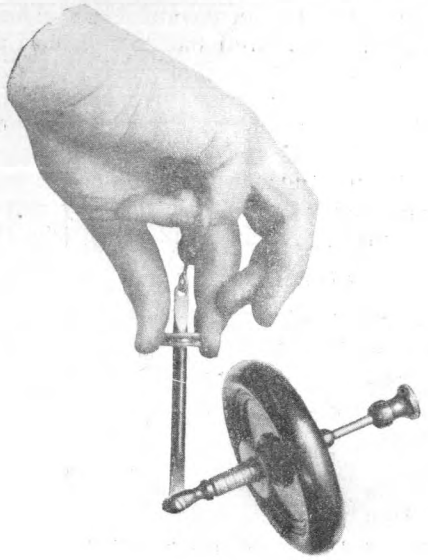
§ 247. **Pravidlo ruky pravé.**

Smysl pohybů reakčních u setrvačníků lze určiti jednoduchým pravidlem, je-li známo, v jakém smyslu rotuje setrvačník a v jakém smyslu působí rušivá síla.

Volme tři na sobě kolmé směry, jak jsou dány osami souřadnic *OX*, *OY*, *OZ* v geometrii analytické, tak aby směřovala

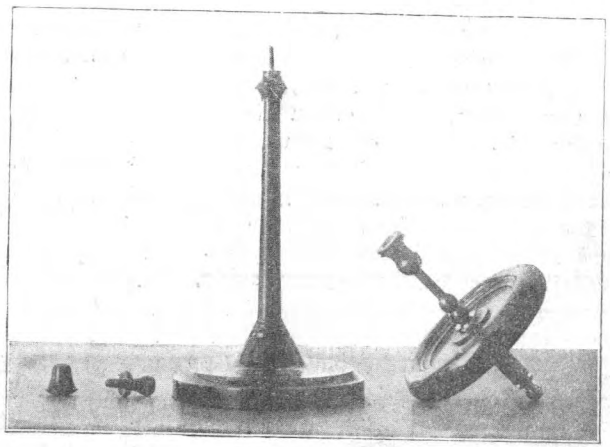
osa *OX* vodorovně, na pravo pozorovatele,
osa *OY* vodorovně pozorovateli vstříc,
osa *OZ* svisle směrem vzhůru.

Dívejme se pak jednotlivým osám vstříc a určeme smysl, positivní neb negativní, rotace a to tak, jak dříve bylo umluveno. Vidíme-li, ana rotace se děje ve smyslu, jak v analytické geometrii v rovině vzrůstání úhlu se volí za positivní, totiž od positivní osy vodorovné na pravo, k positivní ose svislé vzhůru, tedy obráceně než se pohybují ručičky hodinové, stanovíme, že rotace jest positivní; to platí stejně o rotaci setrvačníku jako o rotaci působené silou rušivou, jakož i o rotaci reakční, výsledné. Co se pak volby jednotlivých os souřadnicových pro jednotlivé osy rotační tyče, jeví se býti nejpřirozenějším, vzhledem k tomu, jak se experimentuje, když volíme



Obr. 190.

osu *OY* za osu rotace setrvačníku,
osu *OX* za osu rotace síly rušivé,
osu *OZ* za osu rotace reakční.



Obr. 191.

Pak jest v platnosti pravidlo: Jsou-li rotace kolem os *OY* a *OX souhlasné*, buď obě positivní neb obě negativní, jest rotace reakční kolem osy *OZ positivní*. Jsou-li nesouhlasné, jest negativní.

Osy *OX*, *OY*, *OZ* lze zastoupiti na pravé ruce směry palce, středních prstů a ukazováčku, tak jak obr. 192. znázorňuje. Plocha dlaně jest pak jako by plochou setrvačníku, jenž rotuje kolem osy, dané směrem ostatních prstů. Síla rušivá stáčí setrvačník kolem osy dané směrem palce. Proti tomu reaguje setrvačník otáčením kolem osy dané směrem ukazováčku. Těmto směrům se díváme vstříc, určíme smysl rotací daných dle úmluvy dříve udané a pak rozhodneme o smyslu rotace reakční dle pravidla nahoře uvedeného; nazýváme toto zkrátka pravidlem ruky pravé. Jím se tedy určí smysl působení dvojice oběžné a rovněž tak smysl působení dvojice zvedací.

Obr. 192.

§ 248. **Apparát Fesselův.**

Apparát znázorněný v obr. 193. (Houdek a Hervert), kterýž sestrojil *Fessel* *), slouží k tomu, aby se zjevy v předešlých odstavcích popisované daly studovati pohodlněji a všestranněji. Hlavní částí apparátu jest opět setrvačník, mosazný kotouč velkého momentu setrvačnosti; ocelová jeho osa tvoří průměr kruhového mosazného prstenu, jsouc v ložiskách otáčivou; prsten sám jest též otáčivý kolem osy k dřívější kolmé, tvořící průměr většího mosazného prstenu. Tento jest upevněn na ocelové tyči, na jejímž konci druhém jest jednak závaží pevně umístěné, vyvažující hmotu setrvačníku a prstenů, jednak přívažek pošinovatelný. Tyč jest zase otáčivou kolem osy vodorovné, ve vidlici, která jest na ocelové svislé tyči; tato tvoří druhou osu svislou, jsouc otáčivou ve stojanu celého apparátu.

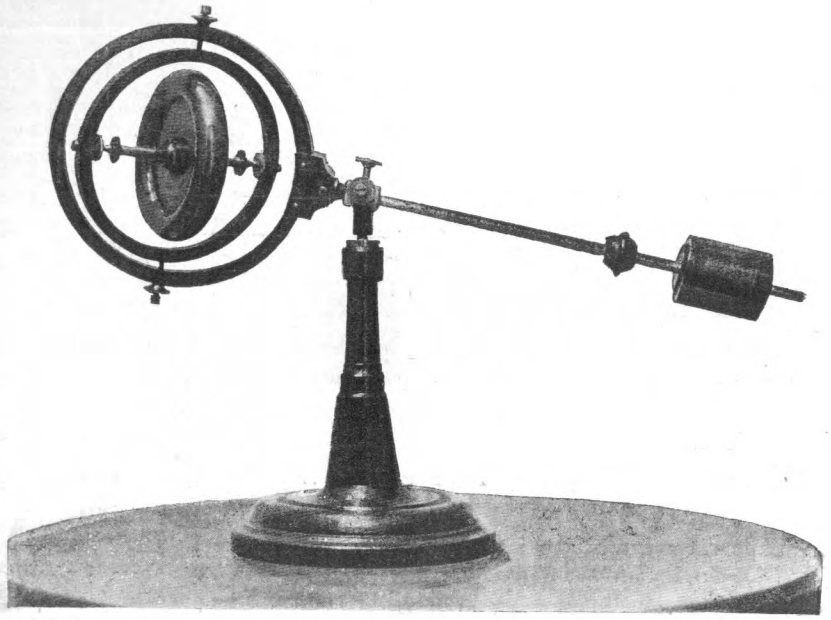
Z tohoto stojanu se celý přístroj vyjme, když se má kotouč prudce roztočiti; při tom jest výhodno opříti kotouč s prsteny o pevný rámec dřevěný, do něhož zapadne, aby se silnější motouz dal pohodlně navinouti a pak silně stáhnouti, čímž se kotouč uvede v rotaci prudkou.

*) *Bedřich Fessel*, mechanik v Kolíně nad Rýnem, (narozen 1821), dříve učitel fysiky a chemie na tamější škole průmyslové.

Pošinováním přívažku na tyči můžeme pokus připraviti tak, aby tyč byla buď vodorovnou, nebo skloněna na stranu jednu, kde je setrvačník, anebo na stranu druhou, kde je hmota vyvažující. Změny tyto lze pošinováním *malého přívažku* daleko pohodlněji ovládati než snad jak obyčejně se děje, pošinováním oné *velké hmoty vyvažující*, kde malinké pošinutí způsobuje již značnou změnu v poloze rovnovážné.

Uveďme tedy onen přívažek do polohy střední, kdy není převahy na straně žádné. Kotouč jest pak jako by bez váhy.

Roztočme jej prudce a vložme do stativu tak, aby tyč příčná byla vodorovnou. Lze pak experimentovati při dvojím postavení kotouče. Buď jest jeho první prsten v rovině svislé nebo vodorovné.



Obr. 193.

Tíže není silou rušivou, je-li kotouč vyvážen. Může tedy *experimentátor sám* pohyb kotouče rušiti, na př. tak, že zavěsí na příčnou tyč na její konec nit, za kterou v libovolný směr rukou zatáhne. Jest zajímavo při takových pokusech pozorovati setrvačník. Jest jako něco živoucího; reaguje na ony síly rušivé klade jim odpor, který ruka experimentátora cítí a který musí překonávati; při tom setrvačník mění svou polohu, dle pravidla ruky pravé, stáčeje se tak, aby se rušivým silám vyhnul. Jakmile do této polohy přijde, cítí ruka táhnoucí ihned uvolnění, odpor přestává, setrvačník zaujal polohu, kterou se rušivým silám jako by přizpůsobil. Táhne-li ruka ve směru opačném, následují pohyby setrvačníku zase v pořádku opačném. Táhne-li se rukou v takovém směru, že se pohybem příčné tyče, tak vznikajícím, nemění směr osy kotouče, pak se směr tento zachovává; ruka necítí odporu žádného. Dle toho lze nití, na konci tyče táhnoucí, kotouč jako by ovládati, říditi, lze jej uváděti v otáčení stálé neb střídavé, lze jej zastavovati, poháněti atd. ve způsobech velmi rozmanitých.

Pravidelné pohyby nastávají silou stále a konstantně působící. Tou jest tíže.

Postaví se tedy roztočený kotouč prstenem svým svisle a osou do prodloužení příčné tyče. Na to se kotouč poněkud skloní, přívažek pak pošine směrem k závaží velkému, aby zde byla převaha. Když se ruka to vše upravující oddálí, pozorujeme v první chvíli, jak se setrvačník s vlastním prstenem otáčí v prstenu větším, ale jen na málo; předpokládajíc, že jest nepatrným tření v té svislé ose, která jest ve stativu celého apparátu, začne se pak celý systém hmotný zvolna točiti kolem této osy. Smysl otáčení se změní, když se naopak kotouč poněkud nadzvedne a pošinutím malého závaží způsobí, aby byla převaha na straně kotouče.

Pohyby tohoto způsobu jsou to, jež se obyčejně popisují, když se o tomto apparátu jedná. Avšak pohyby onoho dřívějšího způsobu, právě ty, jež libovolně působící rušivou silou vznikají, jsou daleko poučnějšími a zajímavějšími.

§ 249. Praecesse a nutace.

Nejvýznamnějším potvrzením zákonů, o nichž jednáno v odstavcích předešlých, jest úkaz kosmický, který se zove *praecesse bodů aequinoctiálních*, postupování bodů rovnodennosti na ekliptice.

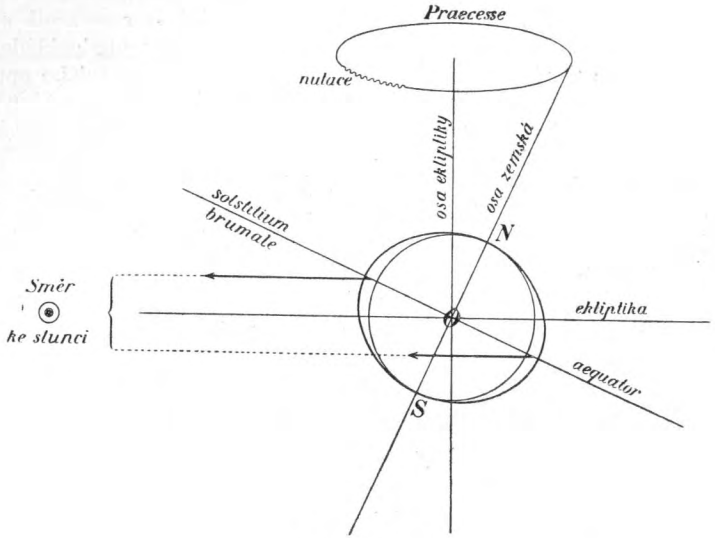
Zemi můžeme si mysliti jako kouli průměru polárního obklopenou podél rovníka hmotným prstencem. Působení slunce na onu kouli jest souměrné, majíc za následek přitahování, ale nikoli stáčení koule. Jinak jest tomu však u onoho prstence.

Představme si slunce v poloze solstitiální, tedy tak, jak je buď v zimě nebo v létě. Obr. 194. objasňuje situaci při slunovratu zimním. Pak jest patrno, že slunce přitahuje část prstence k sobě přikloněnou i část prstence od sebe odkloněnou a sice vzhledem k ohromné vzdálenosti výslednou silou, jejíž směr jest rovnoběžný s rovinou ekliptiky; tyto dvě síly jsou si velmi blízce rovny, nicméně přece přitahování té části prstence, která jest ke slunci obrácená, tedy slunci poněkud bližší, se děje silou větší než přitahování té části prstence, která jest od slunce odvrácena, jakož v obr. 194. ovšem přehnaně naznačeno. Následkem tohoto, byť i malého rozdílu stáčí se osa zemská tak, že by se postavila, kdyby země byla v klidu, k ekliptice kolmo. Avšak země se otáčí; otáčení osy zemské jest vzhledem k této rotaci vlivem rušivým, jehož účinek, dle pravidla ruky pravé, se jeví nikoli ve smyslu tohoto působení, nýbrž

stranou, takže osa zemská opisuje kolem osy ekliptiky kužel, podobně, jako lze pozorovati u setrvačníků Schmidtových neb u apparátu Fesselova. Pohyb tento zove se praecessí.

Jako slunce působí však též měsíc, jenž má sice hmotu malou, jest však zemi naší velmi blízkým.

Dle toho rozeznává se praecesse *solární* a *lunární*, tudíž spojená *lunisolární*.



Obr. 194.

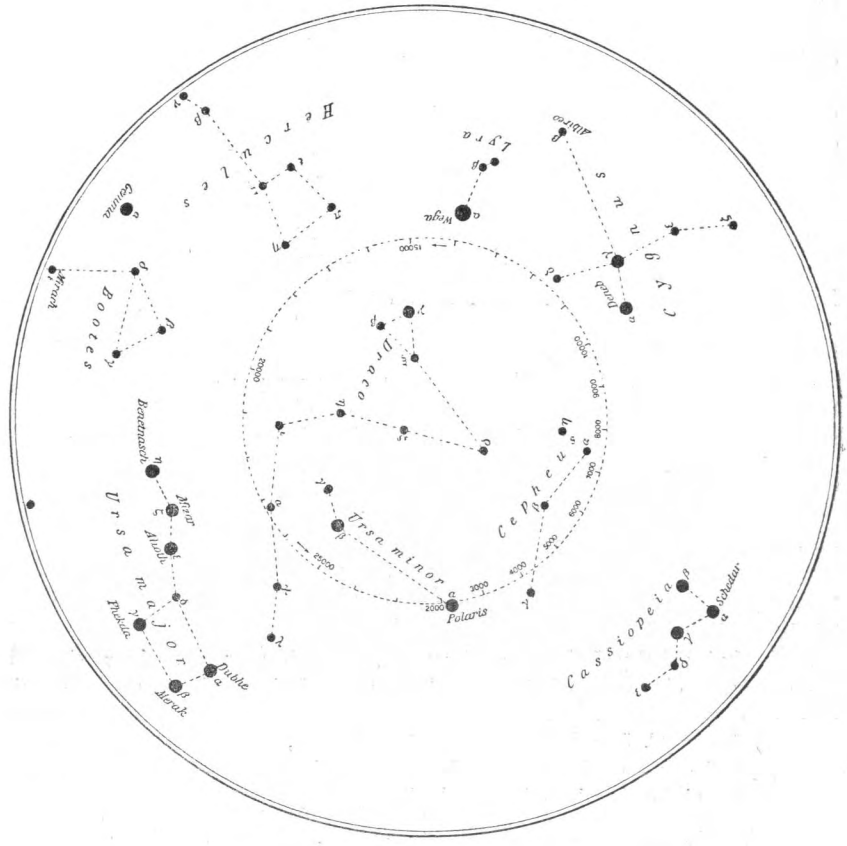
Následkem praecesse stáčí se rovník a tudíž i průseky jeho s ekliptikou, t. j. bod jarní a podzimní, body rovnodennosti. Tyto postupují — když popisujeme úkazy, jak se nám býti zdají, — slunci vstříc, ročně asi o $50^1/_4''$; za $71^1/_2$ roku činí tedy praecesse asi 1^0, tudíž plných 360^0 asi za 26000 let. Velkolepá perioda tato zove se *rok platonický*.

Praecesse jest dle toho pohyb retrogradní, zpáteční, poněvadž se děje opačně než obíhají planety. To dlužno vytknouti proto, poněvadž slovo praecedere znamená jíti v před, zde v tom smyslu, jako jíti slunci vstříc.

Praecesse neděje se rovnoměrně. Již v obou bodech *solstitiálních* není účinek slunce stejný, poněvadž solstitium zimní je blízké periheliu a letní apheliu. Hlavní však příčinou nestejnoměrnosti jest to, že v bodech *aequinoctiálních* vůbec onen účinek přestává, poněvadž jest právě střed slunce v rovníku. Ovšem že také v blízkosti těchto bodů je účinek nepatrný. Jsou zde tedy periodické

změny — tak zv. *nutace solární*. Ještě jiné změny, variace, působí *měsíc* — *nutace lunární*.

Následkem praecesse postupují oba poly, severní i jižní, na obloze nebeské kolem tak zvaného polu ekliptiky v kruhu majícím $2 \cdot 23^1/_2{}^0 = 47^0$ v průměru. Na polokouli severní stávají se tudíž postupem dob jiné a jiné hvězdy polární. V dobách, kdy se stavěly pyramidy egyptské, byla po-



Obr. 195.

lární hvězdou α Draconis. Za dob Hipparchových, jenž první praecessi zpozoroval, srovnávaje starší posice hvězd s posicemi od něho samého nalezenými, byla naše »hvězda polární« (α ursae minoris) vzdálena 1^0 od polu. Za dnů našich jest ještě vzdálena $1^0 13'$, a až se bude psáti rok 2100, bude tato vzdálenost činiti jenom 28″; odtud bude se pak opět zvětšovati; přijdou na řadu γ Cephei, α Cephei, Deneb v souhvězdí labutě a za 12000 let bude krásná hvězda Vega v souhvězdí Lyry hvězdou polární. Obr. 195. (vyňatý z knihy Flammarionovy Astronomie populaire)

objasňuje pěkně toto postupování severního polu v kruhu, jehož středem jest pol ekliptiky. S tím souvisí, že pro určitý horizont, na př. Prahy, mnohé hvězdy, jež dříve z jižní oblohy byly ještě viditelnými, ponenáhlu přestávají nad obzor vystupovati — a za to jiné hvězdy budou zase viditelnými, jež nyní nikdy nevidíme. Krásné souhvězdí, Jižní kříž, bývalo před mnohými tisíci let v Evropě viditelným; naopak nejjasnější hvězda naší oblohy, Sirius, zapadne za mnoho tisíc let pro obzor Evropy. Na změny, jež následkem praecesse vznikají na obrazu oblohy nebeské, poukazují některá místa slavných básní *).

S praecessí souvisí dále různost roku tropického a siderického. Na ekliptice jde bod jarní slunci vstříc. Proto se slunce při svém ročním zdánlivém pohybu dříve vrátí do bodu jarního, než vykonalo plných 360° svého pohybu. Poněvadž slunce za den postoupí v ekliptice asi o 1°, tudíž o 1′ za šedesátinu dne čili za 24 minuty, činí $50\frac{1}{4}''$ časově asi 20 minut; tolik činí tedy okrouhle rozdíl obou roků. Přesněji jest nyní

rok siderický	365^d	6^h	9^m	9^s
rok tropický	365^d	5	48	46
rozdíl			20	23.

Za 1000 let stupňuje se tedy rozdíl ten téměř na *14 dní* (20000 minut : 60 = 333 hodin : 24 = 14 dní), tedy od dob Hipparchových činí rozdíl již 28 dní, t. j. bez mála *celý měsíc*.

Jak známo, dělí se ekliptika na 12 dílců po 30° — každý díl obsahuje jedno souhvězdí tak zvaného zvířetníku čili *zodiaku* **). V jednom souhvězdí pobude slunce asi měsíc. Když tedy za dob Hipparchových vstoupilo slunce 21. března do souhvězdí skopce (aries), *nevstoupí* tam toho dne v dobách našich, — nýbrž fakticky do souhvězdí *předcházejícího* — t. j. do *souhvězdí ryb*. Proto se říkává: slunce vstoupí do »*znamení*« na př. vah, kozorožce atd.

Sem náleží též vysoce zajímavý příklad o zodiaku v městě *Denderah*. Toto město jest v horním Egyptu na řece Nilu, severně od zřícenin města Theb. V blízkosti jsou velkolepé zříceniny starých chrámů, z nichž zvláště vyniká chrám bohyně Hathor, dosud velmi dobře zachovalý, vynikající velkolepou a čistou architekturou. Jeho stěny byly zdobeny skulpturami,

*) ἄρκτον θ', ἣν καὶ ἅμαξαν ἐπίκλησιν καλέουσιν,
ἥ τ' αὐτοῦ στρέφεται καὶ τ' Ὠρίωνα δοκεύει,
οἴη δ' ἄμμορός ἐστι λοετρῶν Ὠκεανοῖο

Iliad. XVIII. 487—489.

. . . a mědvědici, kterou též příjmím vozem nazývají,
jež na témže místě se otáčí a Oriona pozoruje,
samojediná pak není účastnou koupelí v Oceanu.

Io mi volsi a man destra e posi mente
All' altro pole e vidi quattro stelle
Non viste mai fuorchè alla prima gente.

Dante, Divina Comedia; Purgatorio I. 18.

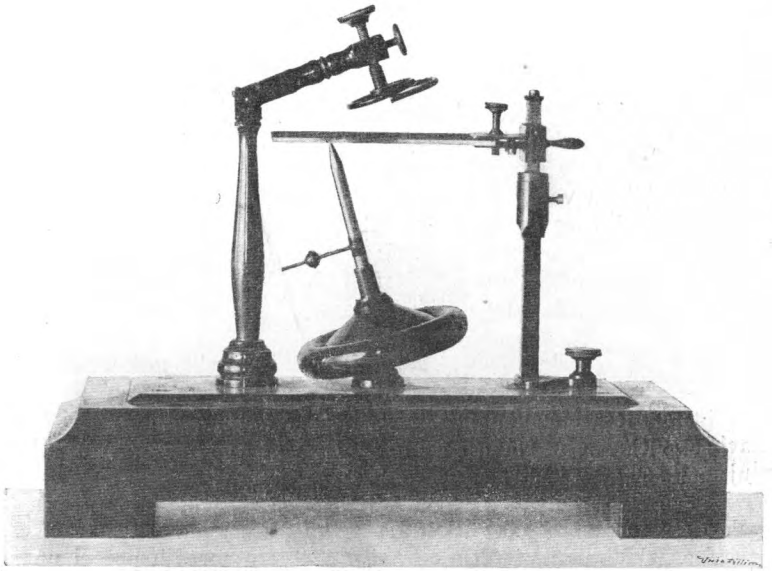
(»a viděl jsem čtyři hvězdy, jež nebyly
viděny nikdy vyjímajíc prvního pokolení.«)

**) »Sunt aries, taurus, gemini, cancer, leo, virgo,
libraque, scorpius, arcitenens, caper, amphora, pisces.«

nápisy a j. Chrám byl přestavěn v době prvních římských císařů. Z původního prastarého chrámu zachoval se zodiakus, na němž poloha aequinoctia mezi hvězdami jest označena; dle této polohy, která proti nynější jest o více než 60° zpátky, což odpovídá differenci časové asi 4300 let, lze souditi, že dílo to povstalo asi kolem 2400 let před Kristem. Zodiakus nalézá se od roku 1822 v egyptském Museu v Paříži a jest nejvzácnější památkou astronomickou z pradávných dob egyptské kultury *).

§ 250. **Nutoskop Zengerův.**

Setrvačník (obr. 196.) spočívá na hrotu stabilně; toho docílí se zvonovitou podobou kotouče, kterouž se těžiště jeho sníží tak, že padne pod



Obr. 196.

opěrný hrot. Setrvačník, nejsa roztočen, staví se tudíž osou svou do polohy svislé a je-li z ní odkloněn, vrací se do polohy této přímo. Jinak však, je-li roztočen. Toto roztáčení děje se zde pohodlně tak, že se ocelová osa setrvačníku nahoře, kde hrotem končí, zachytí držadlem; po roztočení lze držadlo odkloniti; osa zůstává svislou. Když se přes ni položí nit a touto se osa táhne na př. k pozorovateli, jest pěkně viděti, jak nesleduje, nýbrž jak se tahu vyhýbá stranou, na př. na levo, až o jistý úhel; když se pak

*) O praecessi a nutaci viz obšírněji G. Gruss, Z říše hvězd, pag. 278. Rovněž článek »O pohybu praecessním« Dra. J. Kryštůfka ve Věstníku č. prof. 1897. pag. 52.

táhnouti ustane, pozoruje se velmi pěkně pohyb praecesse; osa, kteráž vahou kotouče jest otáčena, opisuje v onom úhlu kužel, hořejší její bodec kruh; následkem tření v opěrném hrotu ovšem přechází kruh ve spirálu, nicméně dojem zjevu praecesse jest velmi zřetelným. Přístrojem lze napodobiti též nutaci, když se na osu nastrčí kroužek s postranní hmotou, malou maticí na šroubku. Roztočí-li se setrvačník, netrvá osa, nejsouc již volnou, v klidu; její hořejší bodec opisuje malé kroužky. Když se osa odchýlí a setrvačník sám sobě přenechá, napodobuje hořejší bodec osy praecessi a nutaci současnou, vykonávaje pohyby spirálovité. Tyto lze na skle sazemi počerněném graficky registrovati a pak v projekci předvésti. Přístrojem lze ukázati pohyby osy roztočeného setrvačníku po předepsané dráze, na př. po křivkách ze silného drátu zhotovených, jež se na hořejší držadlo přišroubují a pak tak skloní, aby hořejší osa setrvačníku roztočeného se křivek dotýkala, načež po nich běží, prudčeji na místech většího zakřivení, volněji na místech menšího zakřivení, po části vnější i vnitřní *).

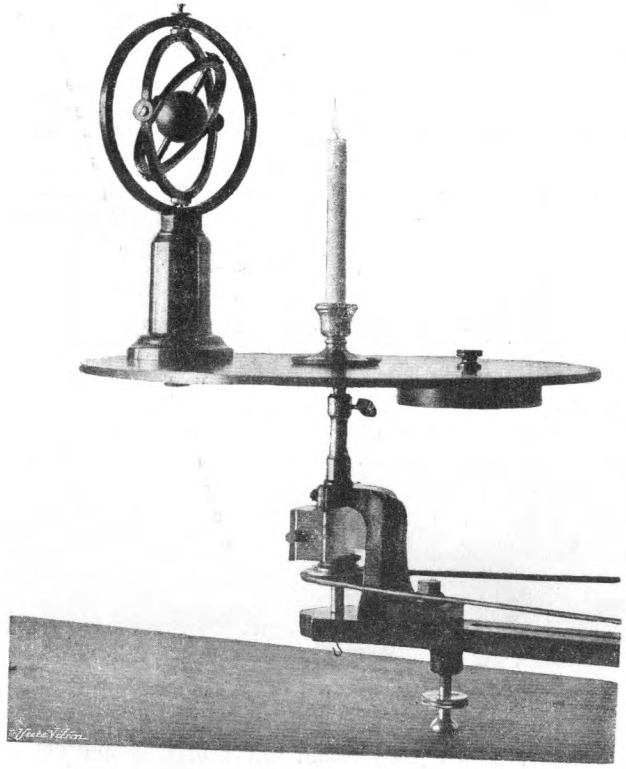
§ 251. Přístroj Bohnenbergerův.

Zachovávání osy rotační a po případě praecessi lze též dobře objasniti přístrojem Bohnenbergerovým (obr. 197., Houdek a Hervert). Setrvačník má zde tvar olověné, massivní koule, jejíž osa jest učiněna všestranně pohyblivou ve dvou prstenech po způsobu závěsu Cardanova otáčivých, jak z obrazce ihned patrno. Koule jest tak umístěna, aby těžiště její padlo přesně do průseku os; pak jest koule i v klidu jako by vymaněna z tíže, jsouc v rovnováze neutrální. Když se koule roztočí, setrvává osa její v poloze, jež jednou jí byla dána , i při eventuálních pohybech celého stroje.

Stroje dá se pěkně použíti ke znázornění pohybů naší země. K cíli tomu přišroubuje se stroj blíže obvodu na pevnou vodorovnou ocelovou desku, kteráž jest otáčivou na stroji centrifugálním. Do osy této desky postaví se svíčka, jejíž plamen znázorňuje slunce. Koule na přístroji představuje pak zemi. Když se roztočí a když se osa dá do téže polohy vzhledem k rovině desky, jakou má osa země vzhledem k rovině ekliptiky, a když se pak deskou volně otáčí, ukazuje se velmi pěkně, jak osa zůstává v poloze své a jak tím se vysvětluje vznikání čtvero ročních počasí na zemi. Také současnou praecessi lze pěkně ukázati, když se na prsten, v němž osa koule spočívá, dá dole malý přívažek; jest pak viděti, jak osa mezi tím, co koule obíhá, znenáhla svůj směr mění, jako osa zemská, která míří k jiné a jiné hvězdě polární. Třením se poněkud pravidelnost zjevu ruší. Proto musí čípky v osách všechny choditi co jen možná lehounce. Tento

*) *Václav K. Zenger* (1830—1908), vynikající fysik český, byl po ukončení studií universitních assistentem u prof. Petřiny, později na hvězdárně Pražské, r. 1853 odešel do Báňské Bystřice v Uhrách, přijav zde místo professora na gymnasiu, odtud pak povolán byl r. 1861 na českou techniku v Praze, kdež působil bezmála 40 let, do r. 1900. Vedle fysiky oblíbil si též meteorologii a astrofysiku, a zanášel se problémy těchto věd experimentálně i theoreticky. Udržoval spojení s vědeckým světem francouzským a anglickým. Žil jednoduše a skromně, a co ušetřil, věnoval českému studentstvu technickému.

model má tu výhodu před jinými podobnými pro sebe, že se pohyb země napodobuje nikoli umělým nějakým mechanismem, nýbrž na základě týchž zákonův v malém, kteréž platí ve velkém.



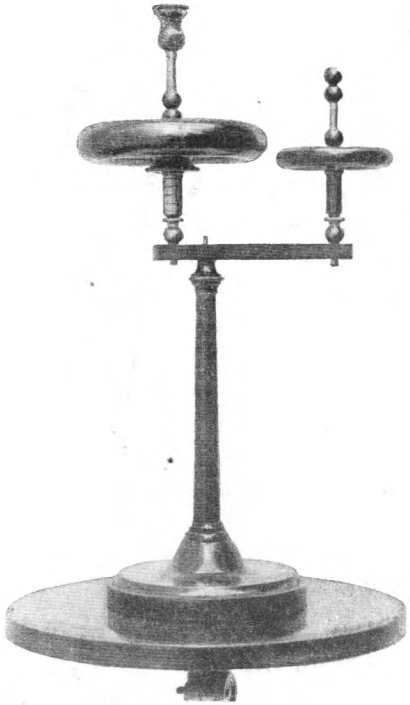
Obr. 197.

§ 252. Napodobení pohybu dvojhvězd.

Na stojan, který má válcovitý svislý čípek (obr. 191.), nastrčí se vodorovná příčka mosazná a do ní vloží se vertikálně dva setrvačníky s čípky rovněž válcovitými tak, aby těžiště setrvačníků s příčkou padlo do čípku, kolem něhož se mosazná příčka se setrvačníky může otáčeti. Toto otáčení nastane, když se na příčku tu vloží setrvačníky roztočené. Obrazce 198. a 199. dle skutečnosti provedené znázorňují dva případy, kdy setrvačníky jsou buď stejné nebo nestejné; poslední případ jest zajímavější. V obr. 200., jenž má zjev vysvětliti, předpokládají se oba setrvačníky stejné. Obíhání setrvačníků jest způsobeno třením v čepích, kteréž vždy zůstává, byť by se uvedlo na míru nejskrovnější. Setrvačníky,

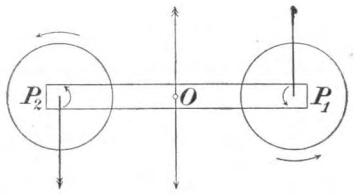
otáčejíce se na př. ve smyslu positivním, stáčejí třením na jedné i druhé straně příčku mosaznou, působíce jako dvojice sil v obrazci naznačené.

Obr. 198.



Obr. 199.

Výslednou dvojicí vzniká pak obíhání setrvačníků kolem jich těžiště. Podobné obíhání kolem společného těžiště (středu hmotného) mají v přírodě dvojhvězdy. Mezi napodobením tohoto pohybu a mezi napodobením pohybu země, jak v odstavci předešlém bylo popsáno, jest ovšem veliký rozdíl; onde jest základ pohybu týž v napodobení jako ve skutečnosti, zde však jest základ pohybu skutečného zcela jiný, tak že napodobení jest jen hrubým skutečnosti obrazem. Nicméně jest úkaz ten i bez této analogie sám o sobě zajímavým.



Obr. 200.

XVII.

Pohyb periodický vůbec, harmonický a kyvadlový zvlášť.

§ 253. Pohyb periodický.

Pohyb hmoty m v kruhu poloměru r s konstantní lineární rychlostí c, ovládaný konstantním urychlením centripetálním a, podává *typický příklad* pohybů takových, které se po uplynutí určité doby, zde doby oběhu T, opakují a které právě dle pohybu kruhového zoveme pohyby *periodické* *).

Ona doba T zove se *periodou* pohybu. Je-li ω konstantní rychlost úhlová, mají pro pohyb kruhový platnost rovnice

$$c = \omega r$$
$$a = \omega^2 r,$$

dále pak

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

z čehož plyne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}.$$

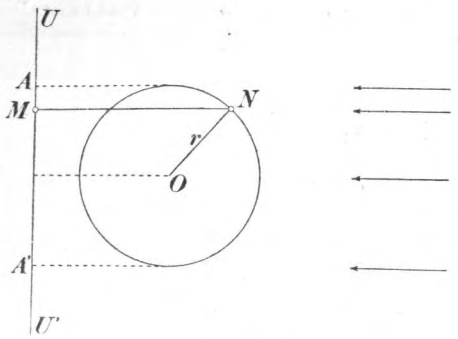
Při pohybu kruhovém závisí tedy perioda T na poměru $\frac{a}{r}$ urychlení a ke vzdálenosti r, ve které urychlení působí; různé hmoty m, kteréž by v různých odlehlostech r svůj oběh vykonávaly, pohybovaly by se *isochronně*, když by touže měrou, kterou jich odlehlost r je větší, také urychlení a bylo větším.

§ 254. Pohyb harmonický.

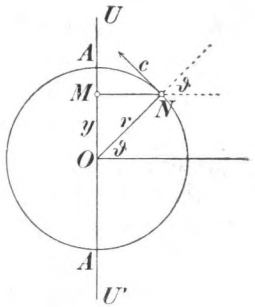
Pohyb v kruhu jest nejjednodušším pohybem periodickým *křivočarým*. Od něho odvodíme snadno nejjednodušší pohyb periodický *přímočarý*, když onen křivočarý promítáme na přímku.

*) $\pi\varepsilon\varrho\acute{\iota}$ kolem, $\acute{o}\delta o\varsigma$ dráha.

Názorně můžeme si promítání toto představiti takto: V rovině kruhu, kterouž volíme za nákresnou, myslíme si přímku jakoukoli, na př. $U'U$ (obr. 201.), kreslenou na levo kruhu, s pravé strany pak paprsky světelné, rovnoběžné, ve směru k oné přímce kolmém. Hmotný bod N obíhaje v kruhu vrhá stín, který vykonává isochronní pohyb periodický v přímce mezi nejzazšími polohami A' a A.



Obr. 201.



Obr. 202.

Odstiňování takové značí geometricky promítání bodu N na přímku $U'U$, kterouž lze voliti libovolně, nejjednodušeji tak, aby procházela středem O kruhu, tedy aby promítání pohybu kruhového se dálo na př. na svislý průměr kruhu (obr. 202.).

Polohu bodu N na kruhu stanovíme úhlem ϑ, kterýž opisuje poloměr r počínajíc od té polohy začáteční, kdy je kolmým k průměru $U'U$. Tento úhel ϑ zoveme úhlem *fasovým*; jím stanoví se totiž *fase* *) pohybu bodu N a tím i bodu M, kteráž jest určena odlehlostí od polohy střední, rychlostí a urychlením. Při tom jeví se odlehlost $OM = y$, rychlost v a urychlení φ bodu M jako průmět odlehlosti $ON = r$, rychlosti c a urychlení a bodu N, a to jako průmět vedlejší vzhledem k projekčním úhlům ϑ, $\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)$ a $(\vartheta + \pi)$; jest tedy

$$y = r \sin \vartheta$$
$$v = c \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\varphi = a \sin (\vartheta + \pi)$$

*) z řeckého: $\varphi\alpha\acute{\iota}\nu\omega$, jevím se.

Úhel fasový ϑ jest zároveň měrou plynoucího času t, který též vhodně počítáme od okamžiku, kdy je $\vartheta = 0$.

Pak jest

$$\vartheta = \omega t,$$

čili

$$\vartheta = \frac{2\pi}{T} t.$$

Koefficientem $\frac{2\pi}{T}$ přepočítáme tudíž dobu t na úhel časoměrný ϑ, kterýž k vůli přehlednosti jest výhodno ve vzorcích podržeti. Tyto vzorce jsou pak:

$$y = r \sin \vartheta$$
$$v = c \cos \vartheta$$
$$\varphi = -a \sin \vartheta.$$

Dělíme-li poslední rovnici první, obdržíme

$$\frac{\varphi}{y} = -\frac{a}{r}.$$

Poměr $\frac{\varphi}{y}$ jest na čase nezávislým; urychlení ϑ, stoupajíc s odlehlostí y, zůstává této odlehlosti úměrným. Zavedeme-li konstantu úměrnosti

$$\frac{a}{r} = \varkappa,$$

nabudeme

$$\varphi = -\varkappa y.$$

Rovnice poslední jest pro pohyb bodu M *charakteristickou*. Nazýváme pohyb ten *harmonickým*; odlehlosti y zovou se *elongace*, odlehlost největší r pak *amplituda* pohybu harmonického. Jeho *perioda* T jest určena rovnicí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{a}},$$

kterou jsme měli již v odstavci předešlém pro periodu bodu N, anebo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\varkappa}},$$

kdež jest $\varkappa$ konstantou hledící k pohybu bodu M.

§ 255. Příklady pohybu harmonického.

Geometrické odvození pohybu harmonického, v předešlém § podané, nabude konkretního rázu, když přihlédneme k fysikálním

případům, v nichž ona charakteristická podmínka pro pohyb harmonický jest vyplněna. Tyto případy jsou velmi četné, a nastávají vždy, kdykoli hmotný bod m působením sil jakýchkoli jest v poloze rovnovážné *stabilní*. Vyšine-li se bod ten z této polohy, vzbudí se tím síla f, po případě jako výsledná četných jiných, kteráž jej do polohy rovnovážné uvádí zpět, jakož jest pro rovnovážnou polohu *stabilní* význačným. Předpokládejme zde pro jednoduchost, že vyšinutí ono se stalo v takovém směru, kdy ona síla zpáteční působí přímo proti vyšinutí, tedy ve směru s vyšinutím samým protivném; pak nemůže vzniknouti jiný pohyb bodu m než *přímočarý*. Aby pak pohyb tento byl harmonickým, musí síla f, jež povšechně s rostoucím vyšinutím y se též zvětšuje, vzrůstati s tímto vyšinutím *úměrně*; pak vzrůstá též urychlení $\varphi = \frac{f}{m}$ úměrně s vyšinutím y a rovnice

$$\varphi = - \varkappa y$$

nabývá platnosti. Tento případ nastane mnohdy i při vyšinutí značnějším, vždycky však při vyšinutí velmi malém aneb dostatečně malém.

Zvláště pěkně lze studovati pohyb harmonický pomocí pružných spirál. Na pevnou tyč zavěsíme na př. argentanovou spirálu a na její konec dolejší připojme hmotu, na př. závaží 100grammové; při zavěšení této hmoty prodlouží se spirála, až se pružností váha hmoty právě ruší; jest rovnováha. Vyšineme-li pak hmotu svisle dolů, vzniká síla, kteráž v mezích dosti značných, tedy i při vyšinutí mnoha centimetrů, roste tomuto vyšinutí úměrně; proto, když pak závaží pustíme, vzniká kolem dřívější polohy rovnovážné pohyb harmonický, jehožto průběh lze dobře sledovati.

Také význam konstanty $\varkappa$ lze dobře demonstrovati. K cíli tomu volíme dvě co možná stejné spirály; zatížíme-li obě stejnou hmotou, na př. závažím 100grammovým, vykonává se při současném spuštění pohyb harmonický isochronní, třebas by amplitudy byly různé. Když však jednu z nich zatížíme hmotou 4násobnou, tedy hmotou čtyř závaží 100grammových, vznikne harmonický pohyb o periodě 2krát větší. Zde jest sice síla f při vyšinutí $y = 1$ u obou spirál stejnou, ale poněvadž hmota jest 4násobná, jest dle rovnice $\varphi = \frac{f}{m}$ urychlení φ vůbec a urychlení $\varkappa$ při $y = 1$ zvlášť 4kráte menší, a tudíž dle $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$ perioda T dvakráte větší. Pokus vskutku s tímto výkladem dobře souhlasí, a to tím lépe, čím

jest hmota spirály samé proti hmotám na ní zavěšeným menší; neboť dlužno pamatovati, že také hmota spirály samé jest v pohybu a že tím poměr hmot jest pozměněn.

Příklady velmi četné pro pohyby harmonické seznáme v akustice u hmot znějících; jednotlivé jich body vykonávají pohyby harmonické v amplitudách velmi malých a v periodách velmi kratinkých; pravíme, že body ty se chvějí neb že kmitají, a nazýváme zde pohyb harmonický speciálně *oscillací* neb *vibrací*. Poněvadž perioda T jest zde velmi malou, zavádí se přehledněji její reciproká hodnota $\frac{1}{T} = N$ jakožto počet kmitů za jednotku doby, za sekundu, čili zkrátka jakožto *kmitočet*; všeobecněji znamená hodnota N *frekvenci* pohybu periodického vůbec.

§ 256. **Rozbor pohybu harmonického.**

Výsledkem nejvíce pozoruhodným a pro pohyb harmonický význačným jest jednoduchý vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\varkappa}},$$

kterým se stanoví perioda T pohybu. Tato jest určena jedinou konstantou $\varkappa$, kteráž byla zavedena jako konstanta úměrnosti mezi φ a y, dle rovnice

$$\varphi = - \varkappa y$$

a kteráž se mnohdy interpretuje jako urychlení φ pro vyšinutí $y = 1$; vlastně však udává, jak více či méně prudce stoupá urychlení φ vyšinutím y. Její rozměr jest $\frac{1}{T^2}$, vzhledem k tomu, že urychlení $\frac{L}{T^2}$ se dělí délkou L; reciproká hodnota $\frac{1}{\varkappa}$ má tedy rozměr T^2 a proto její kořen dává dobu T. Je-li $\varkappa$ určitým, zůstává perioda T pohybu harmonického nezměněnou; zejména nezávisí na *amplitudě* pohybu; děje-li se tedy pohyb mezi extremními polohami těsnějšími či odlehlejšími, následkem vyšinutí malého neb velkého, vykoná se za dobu touž; pohyby jsou stejnodobé, aneb jak řeckým výrazem pravíme, iso- neb tauto- chronní *).

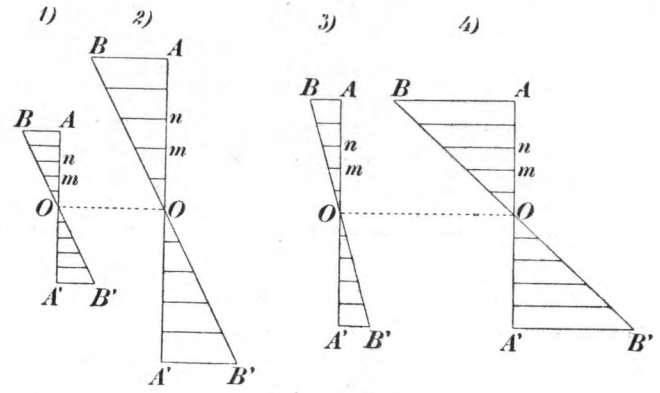
V čem jest vlastní jádro tohoto zákona, proč o periodě T rozhoduje jenom konstanta $\varkappa$ a proč perioda T souvisí s odmocninou z této konstanty, lze si objasniti následující poučnou úvahou elementární.

*) ἴσος stejný, ταὐτό = τὸ αὐτό totéž, χρόνος ó doba.

Pozorujme pohyb harmonický bodu M na přímce, kterou v rovině nákresné volíme, jako již dříve, ve směru shora dolů; pohyb nechť děje se kolem rovnovážné polohy O v mezích A a A', tak že jest $OA = r$ amplitudou pohybu. Nanášejme pro každou polohu bodu M kolmo ku přímce $A'A$ urychlení φ; poněvadž toto urychlení jest úměrno vyšinutí, obdržíme *přímku* urychlení $B'B$. Při tom jest vhodné voliti za směr positivní pro elongace směr vzhůru, pro urychlení směr v pravo, jakož jest při souřadnicích v rovině obyčejem. Tak provedeny jsou výkresy v obr. 203.

Při tomto grafickém znázornění jeví se konstanta $\varkappa$ jakožto tangenta úhlu AOB.

Představme si celou dráhu, kterou bod M v periodě T vykoná, od O k A, pak zpět přes O do A' a opět k O, rozdělenou na veliký počet dílů, na př. 1000, nebo 100, nebo, jak ve výkresu 203. provedeno, 20, totiž na tolik, aby bylo lze připustiti, že urychlení φ při probíhání velmi kratinkou



Obr. 203.

drahou *jednotlivého* takového dílce mn zůstává konstantním $= a$. Pak by platil pro tento pohyb známý vzorec

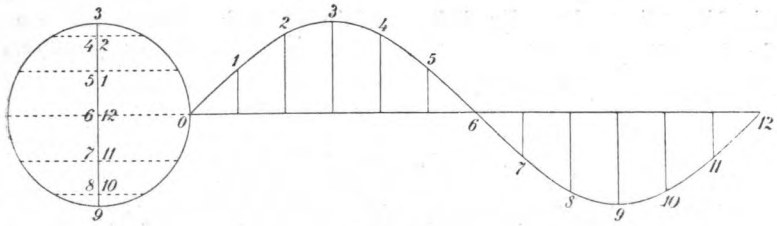
$$s = \tfrac{1}{2} a t^2,$$

jaký jsme odvodili pro pohyb rovnoměrně urychlený, kdež by byla jak dráha s tak i doba t velmi kratinkou. Na základě toho pochopíme ihned, proč na př. při dvojnásobné amplitudě případu 2) vzhledem k případu 1) jest pohyb přece *isochronní*, je-li jen $\varkappa$ totéž. Neboť pak jest pro souhlasné dílce mn v případu 2) dráha s dvakrát větší, ale také urychlení a jest dvakrát větší, a proto dle $t = \sqrt{2\frac{s}{a}}$ doba t táž, a tím i úhrnná perioda T.

Volíme-li pak v případech 3) a 4) amplitudu stejnou, ale $\varkappa$ různé, na př. při 4) čtyřikráte větší než při 3), bude při souhlasných dílcích mn dráha s tatáž, urychlení a však v případu 4) čtyřikráte větší, než v případu 3), tudíž dle $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ doba t menší a sice vzhledem ke kořenu jen dvakráte, a proto i úhrnná perioda T jen dvakráte menší.

§ 257. Grafické znázornění pohybu harmonického.

Časovým rozvinutím pohybu harmonického vynikne pěkně jeho periodicita. Při tom jest provedení výkresu usnadněno tím, že aequidistantní okamžiky časové obdržíme ze stejných obloučků kruhových, považujíce pohyb harmonický o amplitudě r za průmět rovnoměrného pohybu kruhového o poloměru r. Když se doba T znázorní obvodem $2\pi r$ tohoto kruhu, obdrží se jakožto grafický obraz pohybu harmonického prostá sinusoida (obr. 204.).



Obr. 204.

Jako v obraze tomto elongace y, jež bod M časově po sobě zaujme, jsou rozloženy prostorově vedle sebe, tak bylo by lze i rychlosti v a urychlení φ, jaké bod M časově po sobě má, grafickým znázorněním prostorově vedle sebe uspořádati. Lze snadno si představiti, dle příbuzných formulí, jak by výkresy takové vypadly. Rozvinutí časové pohybu samého, jak v obr. 204. je provedeno, jest však pro účely všechny postačujícím; rychlost jest znázorněna stoupáním křivky, urychlení pak její zakřivením.

§ 258. Pohyb kyvadlový.

Těleso hmotné nalézá se vzhledem k tíži v rovnovážné poloze *stabilní*, je-li zavěšeno, na př. v pevné ose, kolem níž se dá otáčeti. Vyšine-li se pootočením z této své polohy rovnovážné, vznikne kolem polohy té pohyb též periodický zvláštního rázu; nazývá se *pohybem kyvadlovým*, těleso pak samo *kyvadlem* (pendulum *). Fysikálně jest tudíž pohyb tento velmi jednoduše realisován; studium však pohybu toho není jednoduchým. Skládá se zajisté kyvadlo takové z přečetných hmotných bodů, z nichž každý podléhá tíži a má vzhledem k pohybu jen volnost zaujmouti různé

*) dle lat. pendulus, a, um, adj. tedy vlastně corpus pendulum, těleso visící, od časoslova pendere viseti.

polohy na určitém oblouku kruhovém, jehož poloměr jest dán odlehlostí bodu od osy tělesa. Na tomto oblouku pohyboval by se každý bod působením tíže svým zvláštním způsobem; následkem pevného spojení všech bodů vespolek vzniká však určitý pohyb jednotný, k němuž každý bod jednotlivý přispívá.

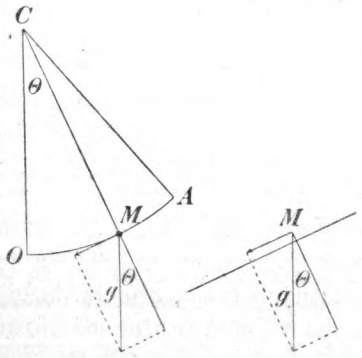
Již z této úvahy vysvítá, že jest nutno především studovati, jaký pohyb by vznikl při hmotných bodech *jednotlivých, isolovaných*. Proto tvoříme sobě *abstrakcí* útvar kyvadlový zvláštní, kterýž také fysikálně můžeme alespoň přibližně realisovati, totiž útvar *kyvadla mathematického*. Hledíme pak vystihnouti pohyb periodický především tohoto kyvadla jednoduchého a pak přecházíme k případu kyvadla složeného aneb jak, oproti onomu jednoduchému, říkáme, *kyvadla fysického*.

§ 259. Kyvadlo mathematické.

Kyvadlo, kteréž mathematickým zoveme, jest dáno hmotným bodem M zavěšeným v pevném bodě C, na vláknu nehmotném, (obr. 205.). Přibližně obdržíme kyvadlo takové, zavěsíce malou kuličku na př. mosaznou na vláknu kokonovém anebo na velmi tenkém drátku platinovém.

Vzdálenost CM hmotného bodu od bodu závěsného stanoví *délku* $= l$ kyvadla mathematického. Hmotný bod má určitou polohu rovnovážnou O; je-li m jeho hmota, g urychlení tíže, ruší se jeho váha mg v této poloze pevností vlákna a závěsného bodu C. Vyšine-li se z této polohy na kruhovém oblouku OM o úhel Θ, ruší se jen složka $mg \cos \Theta$, kterou se vlákno napíná, kdežto složka $mg \sin \Theta$ způsobuje pohyb. Urychlení φ tohoto pohybu jest tedy dáno rovnicí

$$\varphi = g \sin \Theta.$$



Obr. 205.

Zajímavou jest analogie s pohybem hmoty po nakloněné rovině; také tento pohyb jest ovládán urychlením (obr. 205.)

$$\varphi = g \sin \Theta,$$

tedy formálně stejným jako pohyb kyvadla mathematického; důležitý rozdíl jest však v tom, že úhel Θ při nakloněné rovině zůstává v průběhu pohybu *stálým*, a následkem toho též urychlení $g \sin \Theta$; u kyvadla naproti tomu úhel Θ v průběhu pohybu jest *měnlivým* a tím i urychlení $g \sin \Theta$; tam jest tedy pohyb *rovnoměrně* urychleným, zde však *nerovnoměrně* urychleným.

Při této různosti zůstává jeden výsledek zcela shodným, který se týče rychlosti v a souvisí s principem o zachování energie. Při nakloněné rovině jest tato rychlost dána výrazem (§ 203.)

$$\tfrac{1}{2} v^2 = gh,$$

tak že jest určena výškovým rozdílem h. Zcela podobně u kyvadla. Je-li A nejvyšší poloha, do níž bod M byl vyšinut, a pozorujeme-li bod v poloze M, jest jeho rychlost v také určena dle hořejší rovnice pouze výškovým rozdílem h. Zavedeme-li *úhlovou elongaci* $OCM = \Theta$ a *úhlovou amplitudu* $OCA = \alpha$, lze psáti

$$h = l\,(\cos \Theta - \cos \alpha).$$

Rychlost jest maximální při průchodu polohou rovnovážnou O, kdež jest $\Theta = 0$. Na to rychlosti ubývá právě tak jako jí dříve přibývalo.

Vlastní důvod pro tuto souvislost spočívá v zákonech o energii. Jesti zajisté pohyb kyvadlový stále střídání energie pohybu a polohy. Maximum jedné nastává, když druhá jest minimum. Průběh má souměrnost časovou i prostorovou.

§ 260. Pohyb kyvadla mathematického při amplitudě velmi malé.

Značné zjednodušení nastává při pohybu kyvadla mathematického v tom případě, kdy amplituda OA pohybu jest velmi malou proti délce CO kyvadla čili když úhlová amplituda α jest velmi malou. Pak lze nahraditi $\sin \Theta$ obloukem Θ a psáti tudíž

$$\varphi = g \,.\, \Theta,$$

současně jest elongace pohybu

$$y = l \,.\, \Theta.$$

Z obou rovnic plyne

$$\frac{\varphi}{y} = \frac{g}{l},$$

t. j. urychlení φ stoupá s elongací y *úměrně*, faktorem pak úměrnosti jest

$$\varkappa = \frac{g}{l}.$$

Počítáme-li y positivním ve směru OM, dlužno φ, jež zpátečným směrem působí, zavésti jako negativní, psáti tedy

$$\varphi = -\frac{g}{l} \cdot y.$$

Pro periodu T pohybu vychází (§ 254.)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$$

čili

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Vedle periody T zavádí se u kyvadla perioda *poloviční* jakožto *doba kyvu*.

Při amplitudě α velmi malé stává se tedy pohyb kyvadlový *harmonickým*; mají pak pro něj platnost veškeré důsledky, jež jsme při pohybu harmonickém seznali, zejména zákon o isochronismu kyvů. Pro elongaci, rychlost a urychlení, lineárně anebo úhlově vzaté, platí rovnice při pohybu harmonickém odvozené, dle nichž jsou veličiny tyto stanoveny goniometrickými funkcemi úhlu fásového.

§ 261. Pohyb kyvadla mathematického při amplitudě libovolné.

Není-li amplituda α velmi malou, nelze pohyb kyvadla vystihnouti funkcí goniometrickou; na místo této nastupuje funkce tak zvaná elliptická. Perioda T jest pak dána elliptickým integrálem, kterýž lze vyjádřiti řadou konvergentní, dle sudých mocností $\sin\frac{\alpha}{2}$ postupující, ve způsobu následujícím:

$$T = T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right],$$

kdež značí

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

periodu pro amplitudy téměř nullové. Jest viděti z relace té, že se doba kyvu amplitudou poněkud zvětšuje, z počátku velmi nepatrně, pak při větších amplitudách mírně a ovšem vždy víc a více.

§ 262. Řešení mathematické.

Mathematický rozbor úkolu kyvadlového vychází od rovnice pro urychlení úhlové

$$\varphi = -\frac{g}{l}\sin\Theta$$

čili

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\Theta.$$

Z urychlení tohoto obdržíme ihned úhlovou rychlost $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ násobíce výrazem $2\frac{d\Theta}{dt}dt = 2d\Theta$ a integrujíce

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\Theta + Const.$$

K určení integrační konstanty slouží podmiňující rovnice

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + Const.,$$

kterouž se vyjadřuje, že pro $\Theta = \alpha$ se stane $\frac{d\Theta}{dt} = 0$, t. j. že kyvadlo v nejzazší poloze na okamžik stane. Jest tedy

$$\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\Theta - \cos\alpha).$$

Z úhlové rychlosti obdržíme lineární $v = l\frac{d\Theta}{dt}$, tak že jest

$$v^2 = 2gl(\cos\Theta - \cos\alpha)$$

čili, jak dříve jsme psali,

$$v^2 = 2gh,$$

kdež znamená h výšku, se které hmota kývajíc padá, když z polohy α přechází do polohy Θ. Pro další postup zavedeme úhly Θ a α poloviční

$$\cos\Theta - \cos\alpha = 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\Theta}{2}\right).$$

Rozloučíce pak proměnné obdržíme rovnici

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\Theta}{2}\right)}} = dt\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Jsou-li úhly α a Θ velmi malé, lze sinus zaměniti za oblouk; pak obdržíme

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{\alpha^2 - \Theta^2}} = dt\sqrt{\frac{g}{l}},$$

tudíž integrováním

$$arc\ sin \frac{\Theta}{\alpha} = t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

při čemž integrační konstanta jest nullou, když pro $t = 0$ jest též $\Theta = 0$. Odtud pak vychází

$$\Theta = \alpha\ sin\ t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Perioda T jest určena rovnicí

$$T \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi,$$

čili

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zavedeme-li pak tuto periodu do hořejší rovnice pro Θ, vyjde známá rovnice pohybu harmonického

$$\Theta = \alpha\ sin \frac{2\pi}{T} t$$

pro veličiny úhlové, anebo

$$y = r\ sin \frac{2\pi}{T} t$$

pro veličiny lineární. Pohyb kyvadlový jest tudíž při velmi malých amplitudách pohybem harmonickým.

Nejsou-li amplitudy velmi malé, pak dlužno dále postupovati od rovnice

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{4\left(sin^2 \frac{\alpha}{2} - sin^2 \frac{\Theta}{2}\right)}} = dt \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Položíme tu

$$sin \frac{\Theta}{2} = sin \frac{\alpha}{2} \cdot sin\ \psi,$$

kde ψ je nová proměnná, obdržíme differencováním této substituční rovnice

$$cos \frac{\Theta}{2} \cdot \frac{d\Theta}{2} = sin \frac{\alpha}{2}\ cos\ \psi\ d\psi,$$

odkud plyne přímo levá strana hořejší rovnice ve tvaru

$$\frac{d\Theta}{2\ sin \frac{\alpha}{2}\ cos\ \psi} = \frac{d\psi}{cos \frac{\Theta}{2}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\Theta}{2}}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\alpha}{2}\ sin^2\ \psi}}.$$

Jest tedy

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot sin^2\ \psi}} = dt \sqrt{\frac{g}{l}},$$

a integrujeme-li

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot sin^2\ \psi}} = t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

kdež činíme opět podmínku, že pro $t = 0$ jest též $\Theta = 0$ a tím i $\psi = 0$.

Doba t jest tedy dána elliptickým integrálem prvého druhu. Integrujeme-li v mezích $\Theta = 0 \ldots \alpha$, čili $\psi = 0 \ldots \frac{\pi}{2}$, obdržíme za t čtvrtperiodu $\frac{T}{4}$; jest tedy

$$\frac{T}{4} \sqrt{\frac{g}{l}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot sin^2\ \psi}}.$$

Elliptický integrál lze vystihnouti řadou. Především jest

$$\left(1 - sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot sin^2\ \psi\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} sin^2 \frac{\alpha}{2}\ sin^2\ \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot sin^4\ \psi + \ldots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \cdot sin^{2n}\ \psi + \ldots$$

Poněvadž jest dále

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\ \psi \cdot d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

vyjde dosazením

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^2 sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \ldots,$$

kdež značí T_0 limitu periody T pro $\alpha = 0$, totiž

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 263. **Redukce doby kyvu na amplitudu nekonečně malou.**

Z předešlého jest patrno, že jest při stanovení doby kyvu daného kyvadla mathematického vždy nutno pozorovati též amplitudu, a poznamenati, že nalezená doba kyvu T platí pro tuto amplitudu α,

Obyčejně se však z obou těchto přidružených veličin počítá, jaká by byla doba kyvu, kdyby amplituda byla nekonečně malou. Pravíme pak, že se pozorovaná doba kyvu *redukuje* na amplitudu nekonečně malou. Redukce tato vykonává se vždy pomocí tabulky, kterou se poměr $\frac{T}{T_0} = 1 + k$ *jednou pro vždy propočítá* a to pro aequidistantní hodnoty amplitudy α anebo plného oblouku 2α, který době kyvu přísluší. Pro redukci máme pak

$$T_0 = \frac{T}{1+k}$$

místo čehož, nejde-li o amplitudy α větší než asi 20^0, lze vždy psáti

$$T_0 = T\,(1 - k).$$

Redukce činí tedy $-kT$. Jak veliký jest redukční koefficient k pro některé mírné hodnoty amplitudy, objasňuje tabulka následující. Jest uspořádána dle plného oblouku 2α (^{0}).

Redukce doby kyvu na amplitudu nekonečně malou.

2α	k	*diff.*	2α	k	*diff.*	2α	k	*diff.*	2α	k	
0	0·00000	0	10	0·00048	10	20	0·00190	20	30	0·00428	29
1	000	2	11	058	11	21	210	20	31	457	30
2	002	2	12	069	11	22	230	21	32	487	31
3	004	4	13	080	13	23	251	23	33	518	32
4	008	4	14	093	14	24	274	23	34	550	33
5	012	5	15	107	15	25	297	25	35	583	33
6	017	6	16	122	16	26	322	25	36	616	35
7	023	7	17	138	16	27	347	26	37	651	35
8	030	9	18	154	18	28	373	27	38	686	37
9	039	9	19	172	18	29	400	28	39	723	38
10	048		20	0·00190		30	0·00428		40	0·00761	

Nelze-li amplitudu α určiti přímým odečtením, jest výhodno místo ní anebo lépe řečeno místo $sin^2 \frac{\alpha}{2}$ zavésti výšku h, do níž kyvadlo z rovnovážné polohy vystoupí. Jest totiž

$$sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\,\alpha}{2} = \frac{h}{2l}.$$

Chce-li se použíti tabulky, pozoruje se h a počítá naopak α.

§ 264. Kyvadlo fysické.

Kyvadlo mathematické jest v přísném slova smyslu abstrakcí, kteréž však lze dáti realisaci velmi přibližnou. Kyvadlo fysické lze pokládati za seskupení přečetných mathematických v jediný pevný celek.

Jaký účinek má takové seskupení na dobu kyvu, lze objasniti některými pokusy.

Zavěsme na velmi jemnou nitku malou kouli nahoře i dole háčkem opatřenou; máme pak přibližně kyvadlo mathematické. Zavěsme však na kouli tuto na jiné jemné nitce druhou kouli. Tím sdružili jsme v jistém způsobu dvě kyvadla mathematická různé délky (obr. 206.). Odchýlíme-li obě koule na nitkách tak, aby nitky byly v přímce, a pustíme-li je pak současně, pozorujeme, že hmota hořejší hledí kývati rychleji, hmota dolejší volněji; jedna druhé brání kývati tak, jak by kývala jsouc samotna, hořejší koule urychluje dolejší, naopak dolejší opozďuje kouli hořejší; následkem toho nezůstávají nitky v přímce, nýbrž tato přejde v čáru klikatou.

Zavěsíme-li takových koulí na nitkách *celou řadu*, můžeme rovněž účinek takového sdružení pozorovati. V obr. 206. vidíme provedený pokus při osmi koulích. Odchýlíme-li prohloubeným lineálem tuto soustavu přímočaře a spustíme-li ji, přechází přímka záhy v křivku, a to proto, poněvadž koule dolejší v pohybu svém proti hořejším nemohou stačiti.

Máme-li takových hmot celé pásmo nepřetržité ve sdružení *pevném*, pak ovšem deformace nějaká nastati nemůže; proto však přece vše to, co dříve řečeno, má platnost i pro tento případ.

Kyvadlo fysické jest určeno svou osou a těžištěm. Rovina položená těžištěm k ose kolmo zove se *rovinou kývání*. Zpravidla jest osa kyvadla vodorovnou a tudíž rovina kývání svislou. Při výkladech volíme rovinu tuto za nákresnou, do níž se osa promítá orthogonálně bodem. Přímka vedená tímto bodem O a těžištěm C jest v rovnovážné poloze kyvadla svislou; zove se *střední přímkou kyvadla*.

Každý z hmotných bodů kyvadla fysického přispívá dle své vzdálenosti od osy k výsledné době kyvu, každý musí však v pohybu svém se *přizpůsobiti* ostatním, s nimiž jest pevně spojen. Seskupením celkovým jsou tudíž body hořejší opozďovány, dolejší urychlovány. V rovině kývání nalézá se následkem toho jako by na rozhraní bod S, ve střední přímce kyvadla OC ležící, u něhož právě přestává opozďování a začíná urychlování, tudíž bod, jenž není ostatními ani opozďován ani urychlován, kývaje tak, jako by byl samoten. Zove se *středem kyvu* (centrum oscillationis). Vzdálenost $OS = l$ středu kyvu od osy zove se *převedenou* čili *redukovanou délkou* kyvadla fysického; jeho doba kyvu T pro amplitudy velmi

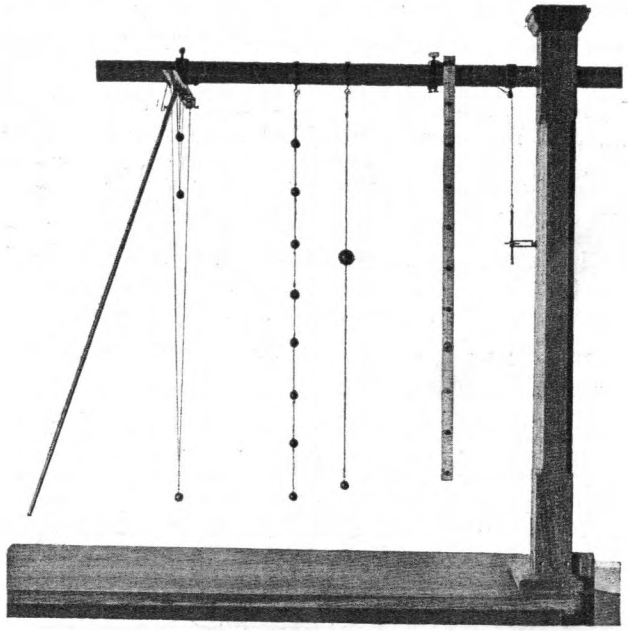
malé, jest dána vzorcem

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

jsouc takovou, jako doba kyvu onoho středu S, tvořícího o sobě *kyvadlo mathematické* délky l. Vzhledem k prostoru znamená bod S přímku, *osu kyvu*, jež jest rovnoběžná s osou kyvadla, určenou bodem O.

§ 265. Redukovaná délka kyvadla fysického stanovená pokusem.

Polohu středu kyvu lze snadno při určitém daném kyvadle fysickém určiti pokusem. Mějmež na př. jakožto kyvadlo fysické



Obr. 206.

hmotnou tyč zavěšenou vertikálně na ose horizontální. V prodloužení osy této zavěsme před tyč na jemné nitce hedvábné velmi malou kuličku mosaznou, nahrazující kyvadlo mathematické. Měníme-li délku tohoto kyvadla zařízením, jak jest v obr. 206. znázorněno, dosáhneme snadno toho, že kyvadlo mathematické kývá isochronně s daným fysickým. Pak udává délka kyvadla mathematického redukovanou délku fysického, jehož střed kyvu souhlasí polohou se střed-

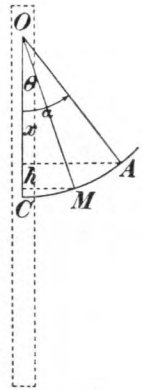
dem oné velmi malé kuličky mosazné. Tyč má po celé své délce několik příčných os; stanovíce ke každé střed kyvu, shledáme, že může padnouti mimo tyč, když totiž jedna část tyče jest pod, druhá nad osou.

Provádějíce pokus pozorujeme, že amplitudy u kyvadla fysického rychleji ubývá než u mathematického, následkem větších překážek pohybu; nutno tedy přihlížeti k průchodům polohou rovnovážnou.

§ 266. Redukovaná délka kyvadla fysického stanovená počtem.

Redukovanou délku l kyvadla fysického, pro určitou osu O (obr. 207.) lze vypočísti z úhrnné jeho hmoty M, odlehlosti $OC = x$ jeho středu hmotného C od osy O a konečně z jeho momentu setrvačnosti K vzhledem k ose O. Platí rovnice

$$l = \frac{K}{Mx}.$$



Obr. 207.

Rozměrově jest správnost rovnice patrnou; neboť moment hmotný K stupně *druhého* dělený momentem hmotným Mx stupně *prvého* vzhledem k délce stanoví délku.

Ke vzorci uvedenému můžeme přijíti úvahou, kteráž vychází z poznání, že kývání hmoty jakékoliv nic jiného není než stálé střídání se energie polohy a pohybu. Vychýlíme-li kyvadlo do amplitudy α a necháme-li pak padati, nabývá energie pohybu, která v okamžiku elongace Θ jest dána výrazem

$$\tfrac{1}{2} K\omega^2,$$

kdež jest K moment setrvačnosti a ω úhlová rychlost. Tato energie jest aequivalentní práci, kterou by bylo nutno vykonati, aby kyvadlo z polohy Θ přišlo do začáteční α. Tato práce jest dána výrazem

$$Mgh \quad \text{čili} \quad Mgx\,(\cos\Theta - \cos\alpha),$$

kdež jest M úhrnná hmota kyvadla. Platí tedy rovnice

$$\tfrac{1}{2} K\omega^2 = Mg\,x\,(\cos\Theta - \cos\alpha).$$

Kyvadlo mathematické délky l, hmoty m, kteréž by v každém okamžiku při téže amplitudě a elongaci mělo touž úhlovou rychlost — které by tedy zcela stejně kývalo s daným tak jako se děje při onom empirickém stanovení redukované délky l — musilo by vyplniti touž podmínku, totiž

$$\tfrac{1}{2} ml^2 \cdot \omega^2 = mg\,l\,(\cos\Theta - \cos\alpha).$$

Dělením obou rovnic vychází:

$$\frac{ml^2}{K} = \frac{ml}{Mx},$$

t. j. momenty hmoty stupně druhého jsou v témže poměru jako momenty stupně prvého, z čehož

$$l = \frac{K}{Mx}.$$

Úvaha právě uvedená předpokládá stejnost amplitudy kyvadla mathematického s fysickým; to není závadou, vzhledem k tomu, že pro kyvadlo mathematické zákon o isochronismu jest dokázán a objasněn. Úvaha ta není však důkazem, nýbrž spíše jen objasněním, jaký mají význam veličiny délku redukovanou určující.

O problému středu kyvu pojednal *Ch. Huygens* v klassickém díle: Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae, Parisiis, 1673. Popud ke studiu tohoto problému obdržel již ve věku jinošském od Mersenna, jak v úvodu k části IV., pag. 91 vykládá. Jeho důkaz o vypočítání redukované délky kyvadla jest zcela přesný; vypočítání polohy středu kyvadla objasňuje na četných příkladech.

Z výrazu pro redukovanou délku plyne pro dobu kyvadla vzorec

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Mgx}}.$$

Ve vzorci vystupuje moment hmotný stupně druhého, dělený momentem *silovým* stupně prvého. Poměr obou dává rozměrově čtverec času. Pro moment silový zavádí se označení

$$Mg \,.\, x = D$$

jakožto *síla* (vlastně *moment*) *řídící, direkční*. Při vyšinutí kyvadla z rovnovážné polohy o úhel Θ jest moment faktický, kterým se kyvadlo do polohy rovnovážné uvádí zpět, určen z direkčního momentu výrazem

$$D \sin \Theta.$$

Vzorec pro dobu kyvu kyvadla fysického zjednoduší se pak formálně v následující

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}.$$

V tomto tvaru má vzorec ten ve fysice význam všeobecnější. Značí dobu kyvu kyvadla fysického, jehož kývání jest ovládáno momentem direkčním původu jakéhokoli. U kyvadla fysického, jak dosud o něm bylo jednáno, jest síla direkční původu gravitačního; ve výrazu, jímž se určuje, vystupuje intensita gravitačního pole. Právě tak bývá v magnetickém poli magnet, kterýž vhodným zavěšením neb podepřením jest z vlivu tíže vymaněn a ovládán jediné silami magnetickými. Výraz pro direkční moment obsahuje pak intensitu daného pole magnetického. Podobně v poli elektrickém. Konečně může moment direkční míti původ svůj v pružnosti. Ve

všech těchto případech jest perioda vibračního pohybu vyjádřena výrazem formálně stejným. Moment setrvačnosti, charakterisující hmotu v pohybu periodickém se nalézající, má vždy týž význam mechanický; moment však direkční má význam různý, dle povahy sil, jež pohyb způsobují.

§ 267. **Body sdružené.**

Vycházejíce od rovnice

$$l = \frac{K}{Mx}$$

dojdeme zajímavých výsledků, zavedeme-li moment setrvačnosti K_0 pro vodorovnou osu těžištěm C položenou. Pak jest dle věty Steinerovy

$$K = K_0 + Mx^2,$$

tudíž

$$l = \frac{K_0}{Mx} + x.$$

Výraz $\frac{K_0}{M}$ značí čtverec k_0^2 poloměru setrvačnosti k_0. Píšeme-li pak zkráceně

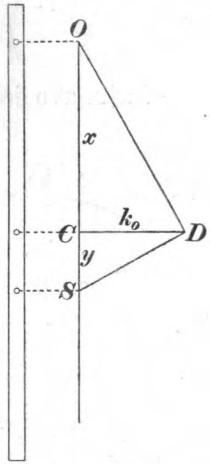
$$\frac{k_0^2}{x} = y,$$

vychází délka redukovaná l jakožto součet dvou sčítanců

$$l = x + y,$$

jichž součin jest

$$k_0^2 = xy.$$



Obr. 208.

Poloměr k_0 setrvačnosti jest tudíž jich střední geometrickou úměrnou. Dle toho lze ke každému x, t. j. pro jakoukoli polohu osy O, ihned sestrojiti doplněk y na délku redukovanou l, když jest poloměr k_0 setrvačnosti daného kyvadla vzhledem k ose položené jeho těžištěm C jednou pro vždy stanoven. Konstrukci známou objasňuje obr. 208. Za rovinu nákresnou jest volena rovina svislá, do níž se osa vodorovná promítá bodem O. K tomuto nalezneme ihned příslušný bod S jakožto střed kyvu — znamenající pak vodorovnou přímku kyvu — když naneseme v těžišti C přímku $k_0 = CD \perp OC$ a vedeme $DS \perp OD$.

Dlužno poukázati k důležité okolnosti, že rovnice

$$l = x + y$$
$$k_0^2 = xy,$$

jimiž se délky x a y určují, jsou vzhledem k délkám těmto *souměrné, symmetrické*; nemění se tudíž platnost rovnic, když v nich y a x zaměníme. Když se tedy osa volí ve vzdálenosti y od těžiště C, vyjde střed kyvu ve vzdálenosti x od téhož těžiště, délka redukovaná l a tudíž i doba kyvu zůstává stejnou. Fysikálně to znamená: Otočíme-li kyvadlo, položíce osu bodem S, stane se bod O, kterým dříve osa byla položena, středem kyvu. Nazýváme proto oba body O a S *sdruženými* čili *konjugovanými*.

Jinak vede se důkaz rovnicemi:

$$l = \frac{K}{Mx} = \frac{K_0 + Mx^2}{Mx} = \frac{k_0^2}{x} + x = y + x,$$
$$l' = \frac{K'}{My} = \frac{K_0 + My^2}{My} = \frac{k_0^2}{y} + y = x + y,$$

tudíž

$$l' = l.$$

Sdruženost bodů O a S vyjadřuje *Ch. Huygens* (l. c.) slovy: Centrum oscillationis et punctum suspensionis inter se convertuntur.

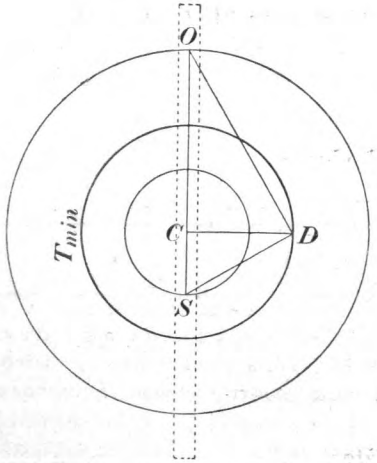
§ 268. Minimum doby kyvu.

Zajímavo jest položiti si otázku, jakou polohu sdružené body O a S (obr. 209.) vzhledem k těžišti C míti musí, aby dané kyvadlo kývalo v době co nejkratší, čili aby T a tudíž i l bylo minimum. Otázka má význam geometrický. Hledá se pravoúhelník, jehož obvod poloviční

$$l = x + y$$

a tudíž i celý má býti nejmenším při určitém plošném obsahu

$$k_0^2 = xy.$$



Obr. 209.

Pravoúhelníkem takovým jest, jak známo, čtverec. Nastává tedy minimum doby kyvu, je-li

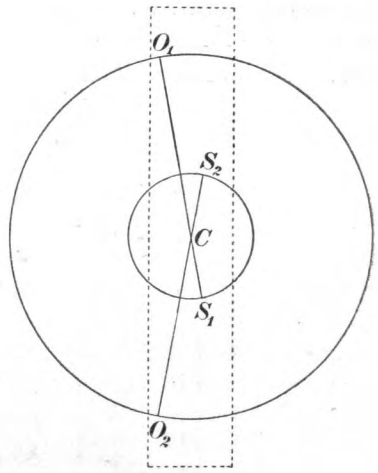
$$x = y = k_0.$$

V případě tomto jsou body O a S

kolem středu C položeny souměrně, ve vzdálenosti, rovnající se poloměru setrvačnosti k_0.

§ 269. Sdružené kruhy.

Pojem bodů sdružených lze snadno rozšířiti na pojem sdružených kruhů. Opíšeme-li totiž (obr. 210.) kolem těžiště C poloměrem x kruh, jest moment setrvačnosti, jak z dřívějšího známo, pro každý bod tohoto kruhu týž $= K$ jako pro bod O; položíme-li tedy osu jiným bodem tohoto kruhu na př. O_1, jest doba kyvu daného kyvadla stejná. Totéž možno říci o kruhu opsaném poloměrem y kolem těžiště C. Pro každý bod tohoto kruhu jest moment setrvačnosti týž $= K'$, jako pro bod S. Položíme-li tedy osu jiným bodem tohoto kruhu, na př. S_2, jest doba kyvu právě tak veliká jako pro bod S a tudíž také jako pro každý bod kruhu poloměru x.



Obr. 210.

Kruhy opsané kolem těžiště poloměry x a y jsou tudíž kruhy *sdružené, konjugované*. V případě, kde l jest minimum a tudíž $x = y = k_0$, splývají oba kruhy sdružené v kruh jediný.

§ 270. Početní příklad.

K objasnění výkladů předcházejících jest výhodno provésti konkretní příklad. Budiž dána tyč rovnoběžnostěnná rozměrů

$$2a, \quad 2b, \quad 2c.$$

Nechme tyč kývati kolem vodorovných os, rovnoběžných s rozměrem $2c$ (obr. 211.), jež různě položíme. Za rovinu nákresnou volme rovinu k těmto osám kolmou. Dle předešlého jest první věcí, stanoviti *moment* K_0 anebo vlastně jen *poloměr* k_0 setrvačnosti pro osu jdoucí těžištěm. Pro danou tyč jest (§ 243.)

$$K_0 = \tfrac{1}{3} Mr^2,$$

kdež znamená

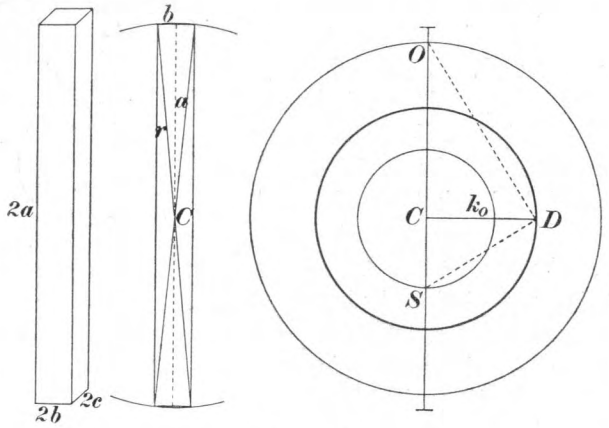
$$r^2 = a^2 + b^2.$$

Tudíž jest

$$k_0 = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Tímto poloměrem opišme kolem těžiště C kruh; jest to kruh *sdružený sám s sebou,* kruh *minimální doby kyvu,* kteráž přísluší redukované délce kyvadla $2k_0$. Položíme-li osu jakýmkoli bodem tohoto kruhu, bude kyvadlo kývati s největší frekvencí, jaká vůbec jest možnou.

Volíme-li osu O v libovolné odlehlosti $CO = x$ od těžiště, nalezneme ihned odlehlost $CS = y$ středu kyvu S od těžiště onou jednoduchou konstrukcí, jak byla dříve vysvětlena a jak ji znázorňuje obr. 211. Kruhy opsané poloměry x a y jsou sdružené. Redukovaná délka kyvadla jest $l = x + y$.



Obr. 211.

Jak se při různé volbě odlehlosti x mění doba kyvu T, lze studovati lépe číselně; počet proveďme v jednotkách *cm, g, sec.*

Volme na př. rozměry a, b tak, aby bylo

$$2r = 100\ cm,$$

neboť nezáleží zde na rozměrech a, b jednotlivých, nýbrž jen na výrazu

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Základní veličina k_0 jest pak

$$k_0 = 28{\cdot}87\ cm.$$

Tím jest dána ihned redukovaná délka

$$l = 2k_0,$$

odpovídající minimální době kyvu T (*sec*). Pro urychlení tíže (Praha)

$$g = 981\ \frac{cm}{sec^2}$$

vypočteme

$$l = 57{\cdot}74\ cm$$
$$T = 0{\cdot}762\ sec.$$

Volme dále za x hodnoty (*cm*)

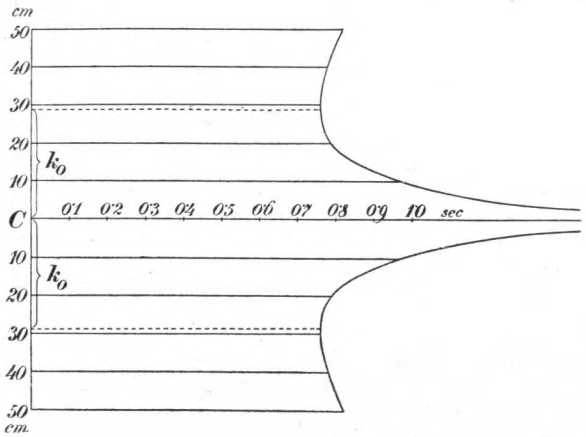
$$x = 10,\quad 20,\quad 30,\quad 40,\quad 50,$$

počítejme pak

$$y = \frac{2500}{3x}$$

a odtud

$$l = x + y, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Obr. 212.

Výsledek počtu ukazuje přehledně tabulka následující:

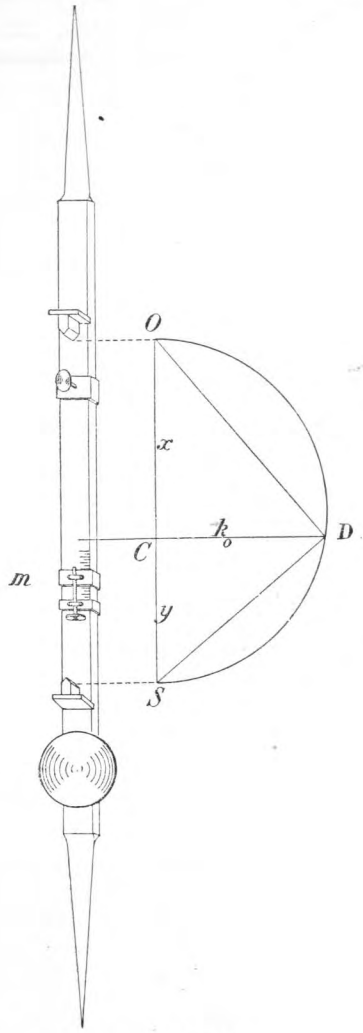
x	y	l	T
cm	*cm*	*cm*	*sec*
10	83·3	93·3	0·969
20	41·7	61·7	0·788
30	27·8	57·8	0·762
40	20·8	60·8	0·782
50	16·7	66·7	0·819

Pro $x = r$ vychází $y = \frac{r}{3}$, tudíž $l = \frac{2}{3}(2r)$; střed kyvu S leží tedy ve $^2/_3$ celé délky $2r$, když osa O jest na nejzazším kraji tyče.

Na základě číselné tabulky jest v obr. 212. provedeno grafické znázornění v rozměru $\frac{1}{20}$. Z křivek časových přehlížíme ihned, jaké jest T minimální a jaký jest poloměr k_0 setrvačnosti tomu příslušný; vidíme do

jakých odlehlostí x od těžiště bylo by nutno položiti osu, aby T bylo určitě veliké, na př. 0·8 *sec*. Všeobecně obdržíme pro x při minimálním T dvě, jinak čtyři hodnoty, z nichž pak dvě naznačují po případě polohu osy mimo tyč; jinak lze dobu kyvu T — od minimální hodnoty počínajíc — určiti libovolně velikou, až nekonečnou.

§ 271. **Kyvadlo převratné.**



Obr. 213.

Kyvadlo, jež se zove *převratné, reversní*, zakládá se na větě o sdružených kruzích. Na daném kyvadle fysickém lze ke každé ose O, od těžiště C o délku x odlehlé, určiti na druhé straně těžiště v odlehlosti y osu druhou S (obr. 213.), pro niž doba kyvu jest stejnou. Osy takové se realisují hranou trojbokého, do tyče kyvadla kolmo zapuštěného ocelového hranolu. Kdyby se tedy jeden takový hranol na určitém místě O upevnil a druhý v přibližné poloze S zařídil *na pošinování*, dala by se správná jeho poloha nalézti zkusmo tak, aby při obrácení kyvadla doba kyvu zůstala stejnou.

Avšak taková úprava kyvadla převratného nebyla by praktickou; neboť osa, na níž celá váha kyvadla spočívá, musí míti na tyči kyvadlové polohu pevnou, neproměnnou. Proto jest vhodnější oba trojboké hranoly do kyvadla *pevně* umístiti v polohách přibližně správných a pak k nim zkusmo hledati takové *rozestavení hmot*, aby ony osy se staly sdruženými. K účelu tomu jsou na tyči kyvadla dvě malé hmoty, jež se dají pošinovati jedna z hruba, rukou, druhá jemně, šroubem mikrometrickým. Definitivní poloha této poslední stanoví se pak grafickou interpolací.

Určí se totiž doba kyvu kyvadla vzhledem k jedné i druhé ose a to pro několik aequidistantních poloh korrekčního závažíčka. Když se pak polohy, určené počtem otoček mikrometrického šroubu, nanesou jako úsečky a obě pozorované doby kyvu jako pořadnice, druží se body tak zjednané k sobě naznačujíce průběh dvou čar, jež jsou téměř přímkami, z nichž jedna jest prudčeji, druhá mírněji k ose úseček nakloněnou. Vedouce tyto přímky shledáme, že se protínají; úsečka, příslušná průsečíku, naznačuje, dle počtu otoček mikrometrického šroubu, správnou polohu korrekčního závažíčka. Pro tuto polohu platí pak rovnice

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kdež jest redukovaná délka l dána odlehlostí $x + y$ obou os O a S.

Pokusem lze správnost toho ukázati nejjednodušeji tak, že se na stativu kyvadla ve výši O upevní kokonové vlákno nesoucí velmi malou kuličku mosaznou, jejíž střed jde až ke hraně S; tato kulička na vláknu, představující kyvadlo mathematické délky l, kývá s reversním isochronně a to pro jednu jeho polohu i pro druhou.

Kyvadlo reversní navrhl již *Prony* v r. 1792 Akademii pařížské, ale pojednání jeho, nebyvši uveřejněno, úplně zapadlo. Nalezl je teprve kapitán *Defforges* mezi papíry Pronyovými uschovanými v archivu Ecole des Ponts et Chaussées, a uveřejnil v r. 1888, skoro o 100 let později. *Bohnenberger* sice podobnou myšlenku uveřejnil ve své Astronomii (v Tubinkách 1811), ale k praktickému provedení dospěl teprve nezávisle na něm kapitán *Kater* (Phil. Trans. Roy. Soc. 1818.). *Katerovo* kyvadlo (obr. 213.) má nevýhodu tu, že není tvaru symmetrického, což má za následek, že působení vzduchu není v obou polohách stejné. Působení vzduchu má trojí účin: 1. Vztlak dle Archimedova zákona působí, že se moment síly, uvádějící kyvadlo v pohyb, zmenšuje, 2. vnitřní tření vzduchu působí útlum kmitů a 3. jisté množství vzduchu kyvadlo obalujícího strhuje se současně ke kmitům, tak že se tím moment setrvačnosti zvětšuje. *Bessel* prvý navrhl proto kyvadlo reversní, úplně symmetrického vnějšího tvaru (čočky jsou dvě, jedna plná, druhá dutá) a ukázal, jak lze tímto způsobem vymýtiti vliv vzduchu 1. a 3. Vliv 2. nemá na doby kyvu téměř žádného účinku. U kyvadla Besselova nejsou čočky pohyblivé, aniž dá se docíliti naprosté stejnosti doby kyvu v obou polohách. Ale Bessel ukázal, jak při mechanickou konstrukcí docílené přibližné stejnosti dob kyvu lze počtem eliminovati malou nestejnost. Za to učinil Bessel břity vyměnitelnými. Jest totiž břit sebe ostřejší přece jenom válcem o jistém zakřivení, což má vliv na dobu kyvu ten, že dlužno od délky kyvadla malý člen, úměrný radiu křivosti břitu *odečísti*. Výměnou břitů a provedením příslušných čtyř měření doby kyvu dá se tato chyba eliminovati. *Besselovo* kyvadlo reversní bylo teprve po jeho smrti znamenitým mechanikem *Repsoldem* (r. 1860) realisováno. Ale podstavec, na němž bylo zavěšeno, byl, snad šťastnou náhodou, málo pevný a strhoval se kyvadlem sám k malým kyvům. To dalo podnět k tomu, že tento zdroj chyb, sice dříve již známý, ale za velmi nepatrný pokládaný, byl studován (Peirce). Ukázalo se, že spolukývání závěsného bodu působí tak, jako by tento bod byl posunut výše, jakoby kyvadlo bylo delší. Zmíněný již kapitán Defforges ukázal pak, jak

lze chybu tu eliminovati pomocí dvou reversních kyvadel různé délky, ale stejně těžkých, která na témž podstavci, na týchž břitech (dají se tedy břity jednoho užíti u kývadla druhého) po sobě kývají. United States Coast and Geodetic Survey v nejnovější době zkonstruovala kyvadlo reversní, které místo břitů, jenž je připevněn na podstavci, má rovinné destičky. Tím vyhneme se chybě ze zakřivení břitů bez jich výměny. Mimo to, když by břit potřeboval nového přebroušení, nezmění se tím nic na kyvadle, kdežto u starší konstrukce přebroušení změní kyvadlo tak, že je vlastně jiným, novým apparátem.

Société française de physique vydala ve své sbírce pojednání fysikálních jakožto 4. a 5. svazek »Mémoires sur le pendule«, který na 650 stránkách obsahuje veškerá základní pojednání o kyvadle a jeho užívání při určení g (vyjma nová Defforgesova) a je opatřen na 216 stránkách úplnou, do r. 1886 jdoucí bibliografií o tomto důležitém stroji fysikálním.

§ 272. **Účinek urychlení.**

Až dotud pokládali jsme urychlení tíže g za dané a studovali účinek ostatních veličin obsažených ve vzorci

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{Mgx}}.$$

Vskutku také experimentujíce na určitém místě povrchu zemského nemáme v moci své, urychlení g měniti.

Jest však možno ukázati vliv urychlení jiným způsobem. Zpravidla bývá každé fysické kyvadlo v rovině svislé. Zařídíme-li však kyvadlo tak, aby mohlo kývati v rovině o úhel β od svislé odkloněné, řídí kývání jen ta složka $g' = g \cos \beta$ urychlení tíže, která do této roviny připadá. Doba kyvu se tímto odkloněním kyvadla mění na

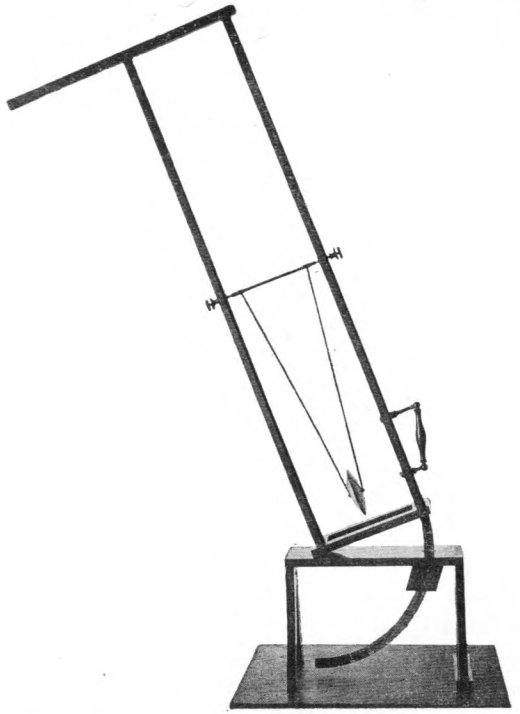
$$t' = \pi \sqrt{\frac{K}{Mg \cos \beta \,.\, x}},$$

tak že se zvětší v poměru

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{1}{\cos \beta}}.$$

Kyvadlo této úpravy udal *A. Mach* (obr. 214. F. Hájek).

Při experimentování zařídí se na př. metronom Mälzelův, o kterém níže jednáme, isochronně s kyvadlem, když toto kývá v rovině svislé. Začínáme-li pak je odkloňovati, jeví se účinek toho z počátku jen málo, poněvadž $\cos \beta$ jen málo klesá, když úhel β stoupá a poněvadž zde rozhoduje $\sqrt{\cos \beta}$; při větším odklonění zůstává však kyvadlo za metronomem vždy víc a více. Je-li $\beta = 75^1/_2{}^0$, jest $\cos \beta = {}^1/_4$, tudíž $t' = 2t$. Když konečně kyvadlo přijde do roviny vodorovné, jest $\beta = 90^0$, síla direkční se stává nullovou a kývání přestává, přecházejíc po případě v pohyb středoběžný.



Obr. 214.

§ 273. **Měření intensity tíže kyvadlem.**

Řešíce rovnici pro dobu kyvu kyvadla dle urychlení g, obdržíme

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}.$$

Určí-li se tedy redukovaná délka kyvadla a jeho doba kyvu, lze urychlení tíže počítati.

Na tomto základě stává se kyvadlo pro pole gravitační naší země přístrojem gravimetrickým veliké důležitosti, jímž lze intensitu tohoto pole jak absolutně na každém místě určiti, tak relativně na různých místech srovnávati. Provésti měření taková na místech povrchu zemského co možná četných s plnou vědeckou přesností jest úkolem velice rozsáhlým, jehož řešení v hlavních rysech jest sice pracemi četných pozorovatelů již provedeno, jehož podrobné studium však dosud zakončeno není.

Práce dosavad provedené rozvinuly se ve dvojím hlavně směru, lišícím se methodou, dle níž stanovena redukovaná délka kyvadla.

1. Směrem prvým bral se *Borda* a po něm *Arago, Biot, Peirce* i *Bessel*. Vůdčí myšlenkou bylo realisovati kyvadlo tvaru *pravidelného*, tak aby bylo možno redukovanou jeho délku l stanoviti *počtem* z obou momentů hmotných druhého a prvého stupně. Onen tvar měl se co možná blížiti kyvadlu mathematickému. Proto skládalo se celé kyvadlo hlavně z jediné hmotné koule visící na drátu. Tento drát volen byl železný (Borda, v délce 4 *m*), později vzhledem k magnetickým vlivům platinový (Biot, jen v délce 75 *cm*). Koule vytočena z platiny jakožto materiálu největší téměř hustoty a největší stálosti. Aby se však tato koule dala jednak do různých poloh (ke zkoušení homogenity) klásti, jednak snadno za koule stejné velikosti ale jiného materiálu (ke zkoušení jeho účinku) zaměniti, vymyšlen byl (Bordou) zvláštní způsob připojení koule k závěsnému drátku; na tento drát byla totiž stále zavěšena mistička z tenkého plechu, kulová, téhož zakřivení jako ony koule, kteréž se pak spodem do této mističky vložily a v ní jenom jemnou vrstvou vosku upevnily. Výměnou koulí mohl býti proveden důkaz, že urychlení g jest nezávislé na materiálu. Závěs kyvadla byl podobný jako u vah; celé kyvadlo viselo na (ocelovém) hranolu trojbokém, jehož dolejší hrana spočívala v ložisku (ocelovém neb achatovém). Způsobem jednoduchým vymýcen účinek tohoto závěsu. Na onom hranolu upevněna směrem nahoru i dolů tyčinka, dolejší, aby se do ní zapial šroubem drát, hořejší, aby se na ní mikrometrickým šroubem pošinovalo závažíčko, tvořící matici šroubu; i bylo lze tomuto závažíčku dáti polohu takovou, aby závěs sám o sobě kýval v témže tempu jako pak celek; proto nebylo nutno závěs do počtu bráti. Vyměřování délek se provedlo zvláštním komparatorem.

2. Směr druhý udal *Bohnenberger*; jím bral se hlavně anglický kapitán *Kater*, užívaje kyvadla převratného. Oproti kyvadlu Bordově podává toto kyvadlo mnohé výhody; jest kompendiosní, snadno přenosné; redukovaná jeho délka určena jest konkretními indexy, totiž hranami obou trojbokých hranolů, tak že odlehlost hran těch lze komparatorem přímo měřiti.

Vedle stanovení redukované délky l vyžaduje se určiti dobu kyvu t. K tomu je potřebí dobrých astronomických hodin, po případě dobrého chronometru; chod hodin musí ovšem velmi dobře býti znám; na korrekci nezáleží. Určení doby kyvu jest úkolem pro sebe; v té příčině existují methody velmi propracované, jimiž lze

dobu kyvu určiti s přesností velmi značnou, jdoucí do tisícin procenta. Methody takové seznáme v nauce o magnetismu, kde se jich užívá, jde-li na př. o stanovení doby kyvu magnetky deklinační; vskutku má tato magnetka pro účely magnetometrické, ke zkoumání intensity pole magnetického, týž význam jako kyvadlo pro účely gravimetrické. Zde však, kde můžeme dobu kyvu kyvadla vhodnými rozměry jeho napřed přibližně ustanoviti, lze určiti ještě methodu zvláštní, tak zvanou *methodu koincidencí* *).

O podstatě této methody poučí známá analogie. Mějmež měřítko hlavní, dané, pokračující na př. po millimetrech, a jiné měřítko vedlejší, jehož dílce jsou od millimetru poněkud rozdílny; dělení jeho, položí-li se vedle dělení millimetrového, buď předbíhá nebo dobíhá; příkladem známým jest nonius předbíhavý neb dobíhavý. Když srovnávajíce obě měřítka konstatujeme, že n dílců vedlejšího měřítka se rovná $n + 1$ dílcům hlavního měřítka, pak jest hodnota dílce vedlejšího měřítka

$$\frac{n \pm 1}{n}$$

v dílcích měřítka hlavního. Srovnávání obou měřítek děje se nejvhodněji koincidencí dělicích čárek. Mysleme si na místě onoho hlavního měřítka kyvadlo astronomických hodin, a na místě vedlejšího měřítka kyvadlo Bordovo neb Katerovo, tak zavěšené, aby se současně dal pozorovati průchod rovnovážnou polohou. Kyvadlo hodin astronomických udává na př. sekundy, kyvadlo Bordovo neb Katerovo lze pak zaříditi tak, aby přibližně také udávalo sekundy; vskutku bude vzhledem k hodinám astronomickým buď předbíhati (akcelerovati) neb dobíhati (retardovati). Když se dle koincidencí časových, t. j. dle současného průchodu polohou rovnovážnou, zjistí, že za n kyvů kyvadla Bordova neb Katerova vykonalo kyvadlo astronomických hodin $n \pm 1$ kyvů, pak jest časová hodnota kyvu onoho kyvadla Bordova neb Katerova dána výrazem

$$\frac{n \pm 1}{n}$$

vyjádřeno v době kyvu hodin astronomických, tedy na př. v sekundách.

---

*) Methodu tuto zavedl do vědy *Roger Josef Boškovič* (Boscovich, 1711—1787), professor na kollegiu římském, později na universitě v Pavii. Srov. Seydler A., O životě a působení Rogera Josefa Boškoviče. Časopis pro pěst. mathem. a fys. XVI. str. 267. 1887.

Výsledek, kterýž se takto obdrží, dlužno pak ještě korrigovati jednak vzhledem k amplitudě, kdež se připojí redukce na amplitudy nekonečně malé, jednak vzhledem ke vzduchu, kdež se výsledek přepočítá na prostor vzduchoprázdný.

§ 274. Délka kyvadla sekundového.

Pro snazší srovnávání výsledků počítá se ve vzorci

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}$$

činitel $\frac{l}{t^2} = L$ pro sebe; značí délku kyvadla sekundového; z této pak se teprve počítá

$$g = \pi^2 L.$$

Dle toho jest rozměr veličiny L týž jako urychlení, totiž

$$\frac{L}{T^2} \text{ všeobecně, } \frac{cm}{sec^2} \text{ zvlášť.}$$

Za příklad, jak výsledky různých pozorovatelů souhlasí, budiž uvedena délka L pro Paříž; tuto určil (pro výšku stanice 70 m)

Borda . . . $L = 99{\cdot}3918 \frac{cm}{sec^2}$

Biot . . . $L = 99{\cdot}3913$ „

Peirce . . $L = 99{\cdot}3917$ „ .

Jest tedy hodnota průměrná

$$L = 99{\cdot}392 \frac{cm}{sec^2},$$

ze kteréž dle vzorce

$$g = \pi^2 L$$

vypočítáme

$$g = 980{\cdot}96 \frac{cm}{sec^2}.$$

Na terrasse pavillonu v internacionálním ústavu pro míry a váhy v Bréteuilu stanoveny hodnoty

$$L = 99{\cdot}3622 \frac{cm}{sec^2}$$

$$g = 980{\cdot}6652 \frac{cm}{sec^2}.$$

Podobným způsobem stanovena délka L kyvadla sekundového pro celou řadu míst na povrchu zemském v různých geografických šířkách a v různých výškách rozložených od pozorovatelů velmi četných zejména ve století 19tém (na př. Kater, Biot, Airy a j.,

z posledních let Clarke 1880, Peirce 1880, Faye 1881, Helmert 1884). Aby vynikl vliv geografické šířky ψ, bylo každé pozorování redukováno na hladinu mořskou, hodnoty pak pro L tak zjednané uvedeny ve vztah se šířkou geografickou formulí, jejíž číselné koefficienty methodou nejmenších čtverců byly počítány. Tyto koefficienty vyšly ovšem poněkud různě u různých pozorovatelů. Pravdě nejpodobnější jsou obsaženy v relacích následujících, kteréž vyjádřují vesměs totéž, ale v různých formách, jak se brzy k tomu, brzy k onomu účelu lépe hodí.

Relace dle $sin^2\,\psi$ zařízená jest

$$L = 99{\cdot}1027 \quad + 0{\cdot}5072\ sin^2\,\psi$$
$$L = 99{\cdot}1027\ (1 + 0{\cdot}0051179\ sin^2\,\psi).$$

Relace dle $cos\,2\psi$ zařízená jest

$$L = 99{\cdot}3563 \quad - 0{\cdot}2536\ cos\,2\psi$$
$$L = 99{\cdot}3563\ (1 - 0{\cdot}0025524\ cos\,2\psi).$$

Z těchto čtyř forem hodí se pro počítání logarithmické nejlépe třetí. Dle ní propočítána tabulka následující, pokračující od pěti k pěti stupňům šířkovým a udávající délku L. K snazšímu přehledu jsou pro L podržena jen 3 místa decimální, ačkoli výpočet byl proveden na 4 místa. K interpolaci jest udán přírůstek délky kyvadla náležející přírůstku jednoho stupně v šířce geografické a sice v jedničkách posledního, t. j. třetího místa decimálního.

Délka kyvadla sekundového v různých šířkách geografických při hladině moře.

ψ	L	*diff.*	ψ	L	*diff.*
°	$\frac{cm}{sec^2}$	pro 1^0	°	$\frac{cm}{sec^2}$	pro 1^0
0	99·103	0·8	45	99·356	8·8
5	107	2·3	50	400	8·5
10	118	3·7	55	443	8·0
15	137	5·1	60	483	7·2
20	162	6·3	65	519	6·3
25	193	7·2	70	551	5·1
30	230	8·0	75	576	3·7
35	270	8·5	80	595	2·3
40	312	8·8	85	606	0·8
45	99·356		90	99·610	

§ 275. Chod hodin v různých šířkách geografických.

Objev o různosti gravitační intensity v různých šířkách geografických učiněn byl hodinami. Roku 1671 poslán byl od akademie pařížské astronom *Richer* do kolonie francouzské *Cayenne* (na severním pobřeží jižní Ameriky). Přibyv na místo shledal, že jeho hodiny, jež v Paříži správně šly, na místě novém se opozďovaly, tak že musil o značnou část ($\frac{5}{4}$ pařížské čárky) kyvadlo jejich zkrátiti. Příčinu toho hledal Richer v nějakém porušení kyvadla transportem. Vrátiv se však po dvouletém pobytu zpět do Paříže shledal, že hodiny v Paříži zase předbíhaly, tak že musil kyvadlo asi o touž délku prodloužiti jako je byl dříve zkrátil. Poněvadž ona změna byla *větší*, než aby snad *růzností teploty* v Cayenne a v Paříži byla mohla býti vysvětlena, hledáno vysvětlení jiné, jež také správně bylo nalezeno.

Vzhledem k tomu, že chod hodin zvláště konkretně objasňuje různost intensity gravitačního pole, jest v následujícím propočítána tabulka, ukazující, jak sekundové hodiny, jež by ve střední šířce geografické 45° při hladině moře byly správně regulovány, jdou v jiných šířkách geografických v téže výšce hladiny moře, dokonalou kompensaci tepelnou předpokládajíc. Značí-li N frekvenci kyvů za den, g urychlení tíže, platí vztah

$$\frac{N}{N_{45}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{45}}},$$

kdež jest

$$N_{45} = 86400.$$

V posledním sloupci udává tabulka denní korrekci hodin, vyjádřenou, jak se vždy děje, v nominálních sekundách hodin samých.

Denní chod hodin v různých šířkách geografických.

ψ	g	N	ΔN	Denní korrekce hodin	
°	$\frac{cm}{sec^2}$			m	sec
0	978·103	86289·6	— 110·4	+ 1	50·4
10	978·254	86296·2	— 103·8	+ 1	43·8
20	978·689	86315·4	— 84·6	+ 1	24·6
30	979·355	86344·7	— 55·3	+ 0	55·3
40	980·171	86380·7	— 19·3	+ 0	19·3
45	980·606	86400·0			
50	981·041	86419·1	19·1	— 0	19·1
60	981·857	86455·0	55·0	— 0	55·0
70	982·523	86484·3	84·3	— 1	24·3
80	982·958	86503·4	103·4	— 1	43·4
90	983·109	86510·1	110·1	— 1	50·1

Poznáváme z této velmi poučné tabulky, jak citlivě hodiny reagují na každou i malou změnu intensity g. Změnou šířky o jeden toliko stupeň v okolí šířky střední vzniká již variace denního chodu téměř 4 sekund. Poněvadž *Cayenne* leží v šířce asi 5° 0′, Paříž pak asi 48° 50′, jest z tabulky ihned patrno, proč Richer pozoroval u svých hodin opozďování o více než 2 minuty denně.

§ 276. Kyvadlo přístrojem geognostickým.

Formule, jež vyjadřují závislost urychlení tíže na šířce geografické, vztahují se na ideální zemský sferoid a vystihují jen v hlavních rysech změny intensity tíže na různých místech povrchu zemského redukovaných na hladinu moře. V podrobnostech ukazují však skutečná pozorování odchylky — *anomalie* — od oněch hodnot theoretických. Vztahují-li se tyto anomalie k jednotlivým místům povrchu zemského, zovou se *lokální*; vztahují-li se k celým krajinám, zovou se *regionální*. Znamení, positivní neb negativní, těchto anomalií určí se dle rozdílu: urychlení skutečné méně urychlení počítané. Dle toho značí na př. anomalie positivní, že na jistém místě urychlení tíže pokusem stanovené a dle formulí výškových na hladinu moře redukované vyšlo větší, než jak je stanoví výpočet z geografické šířky místa pozorovacího.

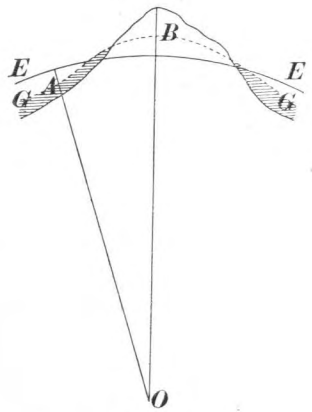
Podrobné práce, mající za účel tyto anomalie stanoviti pro místa co možná četná jak na pevninách tak na mořích, tvoří dnes již zvláštní literaturu tohoto zajímavého předmětu. Pozorování (zde relativní), provádějí se zvláštními apparáty přenosnými, jichž hlavní částí jest ovšem kyvadlo. V krajinách našich konal v letech 1887—1893 soustavná měření plukovník rytíř ze Sternecků na velmi četných místech Rakouska i Uherska, zejména také v Čechách; týž řídil též pozorování námořní v letech 1892 až 1894, kteráž konala rakouská marina na pobřeží Adrie, vedle toho pak příležitostně na cestách některých lodí též na stanicích zámořských, v Asii a Australii (loď Saida), pak v Americe i Africe (loď Zrinyi). Aby se výsledky pozorování soustavných snadno přehlédly, zobrazí se na mapách zvláštní čáry isoanomální, spojující místa, na nichž anomalie jsou stejné. Mnohé z výsledků takových hledí ke zvláštnostem geologickým té neb oné země. Tak na př. jsou anomalie v Čechách hlavně positivní, největší severně od Prahy, v jihozápadní však části Čech negativní; anomalie tyto a jim podobné činí však jen málo setin cm/sec^2. Větší jsou anomalie v rozsáhlých pohořích a na moři. Zde však ukazuje se souhlasně výsledek překvapující, že anomalie v krajinách hornatých jsou negativní, na moři však a na ostrovech mořských positivní. Když tedy pozorovatel na lodi pluje od pobřeží do širého moře, ukazuje mu kyvadlový jeho apparát, že přichází do míst vždy větší intensity tíže; naopak když cestuje do hor a zde na vysoko položených pláních koná pozorování, shledává, že i po redukci výsledků na hladinu moře dostává výsledek menší než theoretický, že anomalie jest negativní. Při tom ukazuje jak ono přibývání tak toto ubývání

intensity pozoruhodnou pravidelnost, poukazující k tomu, že se zde jedná nikoli o nahodilosti, nýbrž o otázky zásadní tím spíše, poněvadž anomalie jsou značnější, jdouce do mnoha desetin cm/sec^2.

K vysvětlení těchto zjevů uvádí se především názor tento. Theoretické hodnoty urychlení vztahují se na zemský sferoid. Redukujíce však místa pozorovací na hladinu mořskou konstruujeme plochu jinou, geoid. Tento není s oním identický. Příčinou jest vzedmutí hladiny mořské u pobřeží následkem jednostranného účinku pevnin. Redukcí na hladinu moře rozšiřujeme toto vzedmutí i na pevniny; tím jde plocha geoidu nad plochou sferoidu. Opačně u moře; plocha geoidu, identická s hladinou mořskou, jde pod plochu sferoidu. Proto jsme na moři vzhledem k sferoidu jako by ve hlubině, středu země blíže, tudíž v poli silovém intensivnějším. Opačně na pevnině.

Schematicky, ovšem velice přehnaně, znázorňuje věc obr. 215. Oblouk EE náleží rotačnímu ellipsoidu, jakožto tvaru země geometrickému; čára $GABG$ náleží geoidu; značí rozšířenou hladinu mořskou. Body A, B naznačují pozorovací stanice, a to A stanici skutečnou na moři, B stanici na pevnině, jak vyjde po redukci na hladinu mořskou.

Počítají-li se dle této theorie výškové rozdíly, jež by anomalie fakticky pozorované mohly vysvětliti, vycházejí čísla poměrně veliká, až přes 800 m, kdežto ony rozdíly mezi geoidem a sferoidem se odhadují z důvodů jiných jen na 200 až 250 m. Vzhledem k tomu hledí se ony anomalie vysvětliti různou hustotou vrstev kůry zemské. Pod mořem jsou vrstvy chladnější a hustší, pod horami teplejší a řidší; nakupeniny hmotné jsou tu kompensovány defekty hmotnými. S tím jest v souhlasu, že na př. na úpatí horstva Himalayského odchylky svislice nejsou tak značné, jak by se vzhledem k mohutnosti jeho očekávalo.



Obr. 215.

Za příklad, jak velikými anomalie intensity tíže mohou býti, buďtež uvedena data následující.

Pohoří skalní (Rocky Mountains) v severní Americe ukazuje na pláních ve výši 1500—2000 m anomalie negativní až $-0{\cdot}24\ \frac{cm}{sec^2}$; oproti tomu na ostrovech Atlantického oceánu pozorovány anomalie positivní $0{\cdot}19\ \frac{cm}{sec^2}$, na ostrovech Tichého oceánu až $0{\cdot}22\ \frac{cm}{sec^2}$. V Tirolských Alpách (Sterneck) a ve Francouzských Alpách (Collet) nalezeny anomalie negativní dosti souhlasně až $-0{\cdot}13\ \frac{cm}{sec^2}$. Jak patrno, osvědčuje se výrok, který učinil *A. v. Humboldt*, když kyvadlo nazval přístrojem geognostickým.

§ 277. Kyvadlo jako indikator rotace zemské.

Setrvačností zachovává kyvadlo rovinu kyvů. Na tomto základě demonstroval *Foucault* *) (1851) očividně rotaci země naší.

Na některém místě M povrchu zemského (obr. 216.) mějmež zavěšeno kyvadlo, přibližně mathematické, na př. měděnou kouli na ocelovém drátu; uvádějíce pak toto kyvadlo v kývání, zařiďme pokus tak, aby koule v okamžiku, kdy prochází rovnovážnou svou polohou, směřovala od severu k jihu, tedy ve smyslu tečné MX k meridiánu NMS v bodu M sestrojené. Sledujeme-li kyvadlo toto v dalším průběhu pokusu, pozorujeme, že koule *onen původní směr ponenáhlu opouští*, že procházejíc rovnovážnou polohou již nesměřuje k jihu neb k severu, nýbrž že kývá směrem, který vždy víc a více se stáčí od východu přes jih k západu, tedy že průběhem pokusu kyvadlo se stáčí, jak říkáme, *za sluncem*. Avšak vskutku *zachovává* koule následkem setrvačnosti *svůj směr původní*, nestáčí se tedy od východu k západu, nýbrž země naše otáčí se ve smyslu opačném od západu k východu; následkem toho přichází meridián NMS do nových a nových poloh a tudíž jeho tečná MX do jiných a jiných směrů. Přijde-li M do polohy M', kývá kyvadlo ve směru svém původním, totiž

$$M'X' \parallel MX,$$

kdežto tečná k meridiánu má již směr jiný, totiž $M'O$; tvoří tedy směr kývání a směr meridiánu úhel β, i zdá se jako by kyvadlo o tento úhel se bylo otočilo. Vyjádříce $arc\ MM'$ dvojím způsobem, obdržíme rovnici

$$b\beta = a\alpha$$

čili

$$\beta = \frac{a}{b}\ \alpha.$$

Znamená-li φ šířku místa M geocentrickou, kteráž zde, kde nepřihlížíme ke sploštění země, jest identická se šířkou geografickou, obdržíme

$$\frac{a}{b} = sin\ \varphi,$$

z čehož plyne pak ihned

$$\beta = \alpha\ sin\ \varphi.$$

Úhel α obnáší pro každou hodinu hvězdnou

$$\frac{360^0}{24} = 15^0.$$

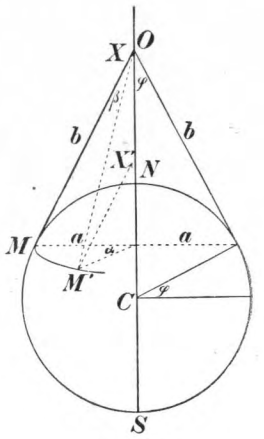
Zdánlivé otočení se kyvadla jest tedy pro každou hvězdnou hodinu

$$\beta = 15\ .\ sin\ \varphi,$$

mění se tudíž β dle geografické šířky.

Na polech jest $\varphi = 90^0$,

tudíž $\beta = \alpha$;



Obr. 216.

*) *Jean B. L. Foucault* (1819—1868), Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre, au moyen du pendule, C. R. XXXV, 1851.

na polech by se tedy kyvadlo během dne hvězdného otočilo kolem do kola. Čím více se od polu blížíme k rovníku, tím menší jest zdánlivé otáčení se kyvadla.

Pro Prahu jest $\varphi = 50^\circ 5'$,

tudíž $\beta = 11^\circ 5'$.

Na rovníku samém je $\varphi = 0^\circ$,

tudíž $\beta = 0$.

Na rovníku se tedy kyvadlo nestáčí, kývá pořád v témže směru od severu k jihu. To snadno pochopíme uvážíce, že tam meridián také sice přichází do nových a nových poloh, ale směr tečné v bodech rovníku k němu vedené zůstává během otáčení se země stále sám sebou rovnoběžný, t. j. kolmý na rovník, jehož rovina při otáčení se země naší zůstává nezměněnou.

Důkaz uvedený jest jen orientačním; nepřihlíží k obíhání země kolem slunce; vskutku má úkaz průběh takový, jak zde popsáno, jen v prvé době, na př. v prvé hodině, stávaje se po delší době komplikovanějším. Také relace $\beta = \alpha \sin \varphi$ platí pro první chvíli, po jakou pokus trvá, nanejvýš na př. pro prvou hodinu. Jinak jest forma závislosti komplikovanější.

Rovina kyvů má zůstati sama sebou rovnoběžnou, ale při tom zároveň následkem zavěšení kyvadla stále svislou vzhledem k místu, kde pokus se koná. Avšak obě podmínky tyto nelze sloučiti, než jediné na polech, kde závěsný bod kyvadla se otáčí. Ale i kdybychom jen ke směru kývání přihlíželi a nikoli k rovině kyvu, nemůže ani tento směr zůstati sám sebou rovnoběžným a při tom následkem zavěšení kyvadla horizontálním, než jen na polech a na rovníku; jinak v šířce φ byl-li směr MX horizontálním, není jím již směr $M'X' \parallel MX$, poněvadž není kolmým k poloměru zemskému. K tomu přistupuje ještě translační pohyb země, kterým se v delší době průběh pokusu též modifikuje. Proto jest podrobný rozbor pokusu velmi nesnadný a složitý *).

Původní pokus Foucaultův proveden byl roku 1851 v pařížském Pantheonu. Zavěšená koule vážila 30 *kg* a visela na ocelovém drátě délky 68 *m*. Doba kyvu tohoto dlouhého kyvadla obnášela asi 8 sekund.

§ 278. Kyvadlo differenciální.

Analogií padostroje Atwoodova jest kyvadlo, jež *differenciálním* zoveme; jako tam řídí také zde malá hmota svou vahou pohyb hmot velkých, jež samy o sobě jsou v rovnováze; následkem toho se zmenší v obou případech urychlení, tam podélné, zde úhlové a tím zmírní se tam padání, zde kývání.

*) O problému kyvadla Foucaultova pojednal v několika článcích P. *Corn. Ptch* v Čas. pro pěst. math. a fys. (XIV, XV, XVII, XVIII) udávaje tam zároveň četné poznámky literární.

Kyvadlo differenciální mathematické (obr. 217.) má na tyči nehmotné v odlehlosti l od osy dvě stejné hmoty (bodové) m, jednu nad osou, druhou pod osou. Připojí-li se k dolejší hmotě malý jako by přívažek μ (bodový), ovládá svou silou direkční $D = \mu g l$ nejen setrvačnost svou vlastní, nýbrž hmoty celkové $M = 2m + \mu$, jejíž moment setrvačnosti jest $K = Ml^2$. Jest tedy doba kyvu

Obr. 217.

$$t = \pi \sqrt{\frac{Ml}{\mu g}}.$$

Bez hmot m by kývala hmota μ v době

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Jest tudíž

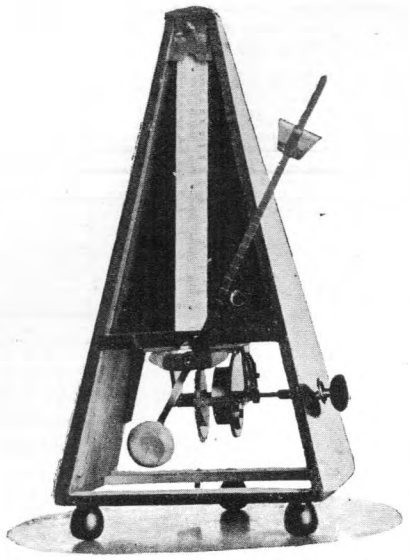
$$\frac{t^2}{\tau^2} = \frac{M}{\mu}.$$

Doba kyvu se zvýší tolikrát, kolikrát jest $\sqrt{M}$ větší než $\sqrt{\mu}$.

Fysické kyvadlo differenciální má tyč hmotnou, souměrně pracovanou, na níž lze hmoty m na př. kulové neb čočkovité vhodně veliké pošinovati. Přívažek μ může býti k dolejší hmotě připojen, t. j. tato může býti o to větší, anebo se umístí do odlehlosti libovolné. Jinak můžeme dobu kyvu zvýšiti také tak, že hmotu dolejší umístíme pevně, hmotu pak hořejší, stejnou anebo i libovolnou jinou, pošinujeme na tyči do vzdálenosti od osy větší neb menší. Tak lze i u kyvadla krátkého docíliti kývání volného. Differenciálním jest konečně každé fysické kyvadlo, jehož osa jest tak umístěna, že jedna část hmoty jest pod osou a jedna nad osou; v tom smyslu jest příkladem kyvadlo, jehož doba kyvu v § 270. byla pro různé polohy osy propočítána. Střed kývání padne u kyvadla differenciálního obyčejně hluboko pod osu mimo vlastní hmotu kyvadla.

§ 279. Metronom.

Známý příklad k tomu, co právě uvedeno, podává metronom (obr. 218.), kterýž sestrojil (1816) mechanik *Jan Mälzel*; frekvence kývání reguluje se malým závažíčkem na tyčince pošinovatelným, při čemž pro každou jeho polohu jest na tyčince udána frekvence kývání za minutu. Tak lze kyvy metronomu stanoviti přesně tempo (takt) hudby, přesněji než všeobecným označením andante, presto, largo a pod. Na tento



Obr. 218.

metronom vztahují se též údaje, kteréž skladatelé v čelo skladeb kladou na př. ve způsobu:

$$M.\ M.\ \lfloor = 60,$$

což znamená, že nota naznačená má trvání takové, jaké udává kyvadlo metronomu při frekvenci 60 za minutu.

Metronom koná též při četných pokusech fysikálních dobré služby. Souvislost délky kyvadla s dobou kyvu lze v úpravě v obr. 205. na levo znázorněné studovati buď srovnáváním frekvencí vzájemným anebo metronomem. Dvěma metronomy lze objasniti methodu koincidencí (§ 273.) akusticky. Když se pak jeden z nich postaví příčně na šikmou rovinu, lze studovati závislost frekvence na urychlení tak jako apparátem Machovým (obr. 214.).

§ 280. **Empirické stanovení momentu setrvačnosti.**

Na kyvadle differenciálním lze objasniti methodu, kterouž lze moment setrvačnosti K empiricky určiti dle doby kyvu.

Pro jisté postavení hmot m platí vztah

$$t = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}.$$

Pošineme-li hmoty m na tyči dále od osy, ale na obou stranách stejně daleko, zvýší se moment setrvačnosti na hodnotu K', ale nezmění se síla direkční D. Bude tedy

$$t' = \pi\sqrt{\frac{K'}{D}}.$$

Z obou rovnic plyne výslední

$$\frac{t^2}{t'^2 - t^2} = \frac{K}{K' - K}.$$

Z pozorovaných dob kyvu t a t' lze tedy moment setrvačnosti K počítati, je-li znám onen přírůstek $K' - K$. Methoda tato jest důležitou, avšak méně pro kyvadla, jichž kývání se řídí direkční silou tíže; neboť zde jest velmi nesnadno zaručiti, že buď pošinutím hmot,

jež na kyvadle jsou již umístěny, aneb přidáním hmot nových, jimiž moment setrvačnosti se má zvýšiti, nenastane žádná změna síly direkční. Má-li však síla direkční svůj původ v pružnosti nebo v magnetismu, pak lze snadno zaručiti, aby přidáváním hmot ke hmotě již kývající se síla direkční nezměnila.

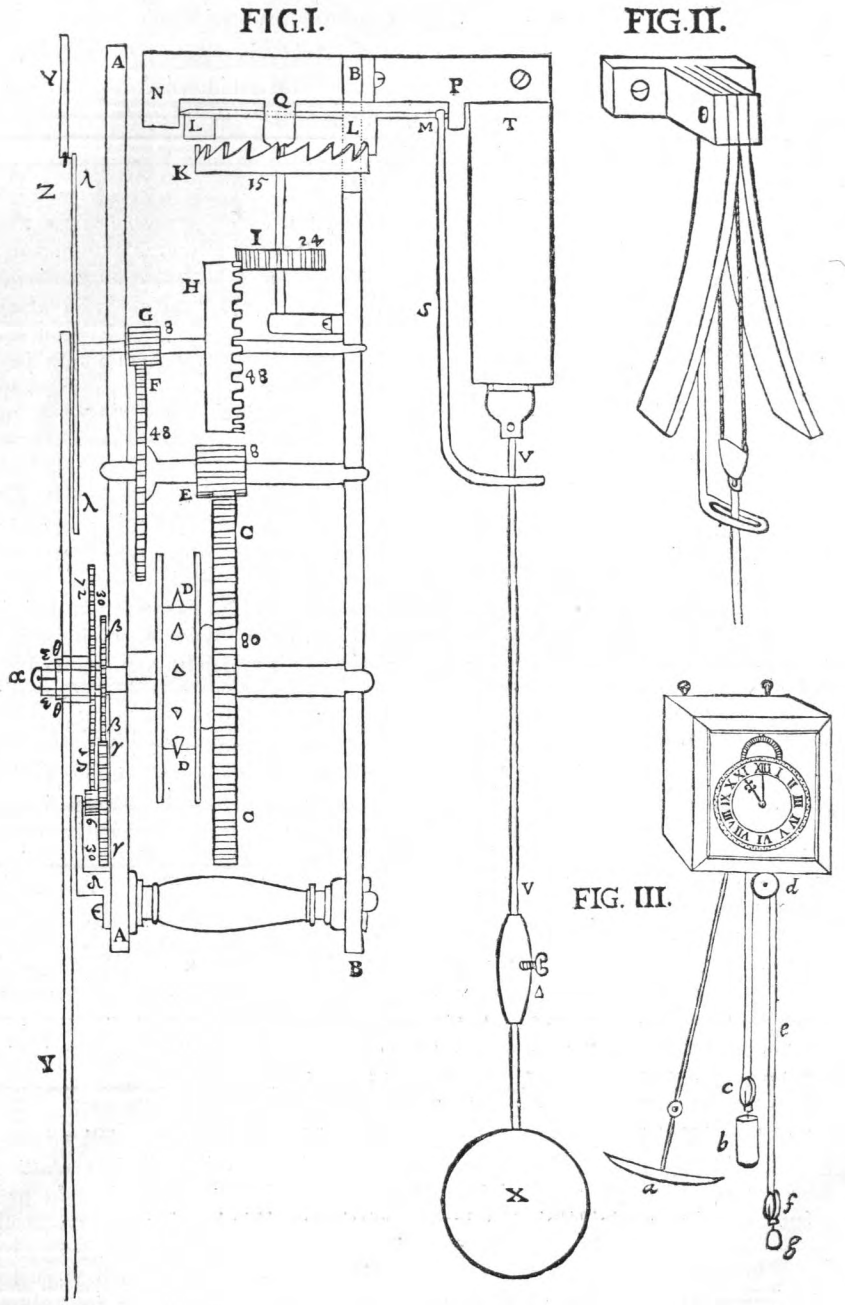
§ 281. **Kyvadlo regulátorem hodin.**

Nejznámějšího užití nabývá kyvadlo k regulaci chodu hodin na základě isochronismu kyvů. K cíli tomu uvádí kyvadlo v pohyb vidlici spojenou s kotvou, kteráž na koncích má zuby sahající střídavě v ozubené kolo, poháněné, prostřednictvím četných jiných ozubených koleček, závažím neb pružným perem jakožto motorem hodin; kotva zadržuje pohyb onoho kola, popouštějíc je po plné periodě, t. j. po kyvu kyvadla sem i tam jen o jeden zub dále; naopak zuby kola jsou tak zařízeny, aby kyvadlo vždy poněkud pohnalo a tak v kývání udržovalo. Podrobné provedení bývá tu rozmanité.

Kyvadlo k časomíře zavedl *Ch. Huygens*. Mechanické, kolečkové hodiny, vedle vodních a přesýpacích pískových, byly v užívání již dříve, zejména jako hodiny věžní. Byly hnány závažím, odbíjely hodiny, a měly jakousi, velmi nedokonalou, regulaci, tak zvaný krok, který bránil urychlování padajícího závaží. Zdá se, že již *Galilei* v posledních letech svého života, a po něm i jiní, měli myšlenku, kyvadla k účelům časoměrným užíti; zejména chtěl *Galilei* spojiti kyvadlo se strojem kolečkovým, který by počet vykonaných kyvů udával. Poněvadž Galilei oslepl, měl jeho syn, *Vincenzo*, onen mechanismus sestrojiti; ale předčasná jeho smrt vše zmařila. *Huygens* přijal hodinové stroje, jak zde již byly, ale připojil k nim kyvadlo jako regulátor chodu. O svém vynálezu, který si dal (u hollandských »Staten-Generaal«) patentovati, podal zprávu v malém spisu »Horologium«, který vyšel r. 1658. Jest zajímavo, že *Viviani*, žák Galileův, rok po uveřejnění »Horologia« hleděl ve zvláštním spise prioritu Galileovu uhájiti. Roku 1673 vydal pak *Huygens* svůj slavný spis »Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato«. Že si byl dobře vědom významu, jaký jeho vynálezu přísluší, je patrno z předmluvy, kterou dílu svému předesílá. Obr. 219. jest reprodukcí rytiny, kterou Huygens ve svém »Horologiu« svůj vynález konstruktivně objasňuje.

Veliký význam má ostatně dílo jeho též po stránce theoretické. V něm studuje Huygens podrobně pohyb kyvadla fysického a řeší duchaplně zejména problém, který *Mersenne* udal, stanoviti pro různá tělesa střed kývání *). Poznává, že pohyb kyvadla, čili padání tělesa po dráze kruhové se neděje přesně isochronně, nýbrž jen přibližně. Hledá tudíž křivku, po které by padání bylo v intervallech isochronních, bez ohledu na délku dráhy vykonané; nalézá, že křivkou touto jest *cykloida*, která tudíž jest »*tautochronou*«. Proto vidí zlepšení kyvadla v tom, že by se mu předepsalo padání po dráze cykloidální. To lze provésti na základě věty, že evolutou

*) »Centrorum Oscillationis investigationem olim mihi, fere adhuc puero aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema . . . Horologii, pars IV.



Obr. 219.

cykloidy jest opět cykloida. Proto dává kyvadlu zavěšení takové, že by viselo na dvou provazcích, které by se navinovaly a zase odvinovaly na pevných obloucích cykloidálních, jak v obr. 219. Fig. II. objasňuje.

Opatření toto jeví se býti theoreticky správným, ale prakticky nevhodným (vlhnutí a kroucení provazců, účinek prachu, teploty a j.) a také nikoli nutným, poněvadž approximace při kyvadle kruhovém úplně stačí. Regulaci chodu kyvadla opatřuje posuvným závažím (Fig. I.). Zvláštní odstavec jeho díla (Propositio XXV) má název: »De mensurae universalis, et perpetuae, constituenda ratione«. Huygens má za to, že délka kyvadla sekundového jest pro celou zemi konstantní, a navrhuje, aby její třetina (pendulum tripedale) se zavedla jakožto stopa universální, jakož o tom v § 17. byla již zmínka učiněna.

Má-li kyvadlo býti přesným regulátorem chodu hodin, nutno, aby jeho redukovaná délka byla neproměnná. Tomu brání v obyčejných případech změna teploty. Jest tudíž nevyhnutelno kyvadlo oproti tomuto vlivu kompensovati. O tom jedná obšírně Thermika, pag. 81 a násled., 1908.

§ 282. **Kyvadlo sférické.**

O kyvadle mathematickém, délky l, předpokládali jsme, že kývá v rovině. Kdyby, jsouc v jisté elongaci, obdrželo náraz ve směru k rovině té na př. kolmém, vykonávalo by též pohyb periodický, při čemž by opisoval hmotný bod křivku jakousi na kouli a nehmotná nit kužel. Kyvadlo takové zove se sférickým nebo též konickým.

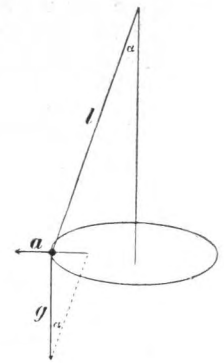
Ve zvláštním případu zůstává hmotný bod kyvadla v rovině horizontální, a opisuje kruh. Kyvadlo takové zove se horizontálním neb centrifugálním. Perioda jeho T jest určena vzorcem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

Vzorec tento plyne z úvahy, že urychlení centrifugální a při obíhání hmoty v poloměru $r = l \sin \alpha$ (obr. 220.) se rovná složce $g \operatorname{tg} \alpha$ urychlení tíže, tedy

$$\frac{4\pi^2 . l \sin \alpha}{T^2} = g \operatorname{tg} \alpha,$$

z kteréžto podmínky ihned hořejšího vzorce nabudeme. Při malé úchylce α, pro kterou jest přibližně $\cos \alpha = 1$, vychází tudíž plná perioda $2T$ kyvadla horizontálního právě takovou jako plná perioda obyčejného kyvadla mathematického.



Obr. 220.

§ 283. **Pohyb kyvadla v prostředí odporujícím.**

Úkol lze řešiti jenom počtem vyšším. Vzhledem k důležitosti úkolu zejména též pro analogické případy v oboru magnetismu budiž zde řešení v hlavních rysech podáno, a to pro kyvadlo fysické jakožto všeobecnější.

Differenciální rovnice pohybu kyvadlového pro vakuum jest, jak dříve vyloženo,

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -D\sin\Theta.$$

Děje-li se kývání v prostředí, kteréž pohyb tlumí, kladouc odpor úměrný rychlosti, přistupuje na pravo člen další, tento útlum vyjadřující,

$$K\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -D\sin\Theta - p\frac{d\Theta}{dt}.$$

Všechny členy této rovnice mají význam momentu direkčního, jako jest D, rozměru $\frac{ML^2}{T^2}$; tento výraz vychází na levo, kde k rozměru ML^2 momentu setrvačnosti K přistupuje rozměr $\frac{1}{T^2}$ úhlového urychlení; na pravo má činitel p, často (ač méně vhodně) momentem útlumu zvaný, rozměr $\frac{ML^2}{T}$, který se násobí rozměrem $\frac{1}{T}$ úhlové rychlosti; teprve součin obou má rozměr a význam momentu.

Předpokládejme, že jsou výchylky Θ velmi malé, tak že smíme za $\sin\Theta$ klásti oblouk Θ. Tím zjednoduší se differenciální rovnice pohybu kyvadlového, nabývajíc formy definitivní

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{p}{K}\frac{d\Theta}{dt} + \frac{D}{K}\Theta = 0,$$

ve kteréž všechny členy jsou uvedeny na rozměr $\frac{1}{T^2}$. Jest to zkrácená lineární differenciální rovnice druhého řádu. Její integrace provádí se methodicky.

Položíme

$$\Theta = e^{rt}$$

a obdržíme charakteristickou rovnici

$$r^2 + \frac{p}{K}r + \frac{D}{K} = 0,$$

z níž plyne

$$r = -\frac{p}{2K} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4KD}}{2K}.$$

Výraz kořenový upozorňuje, že zde dlužno rozeznávati případy dva:

$$4KD < p^2, \qquad 4KD > p^2,$$

anebo, zavedeme-li kvadratický doplněk q^2,

$$4KD = p^2 - q^2, \qquad 4KD = p^2 + q^2.$$

Přechodem od jednoho případu k druhému jest rovnost

$$4KD = p^2$$

čili

$$q = 0.$$

Zaveďme zkrácené označení

$$\frac{p}{2K} = a, \qquad \frac{q}{2K} = b.$$

Veličiny p a q jsou stejnorodé; rovněž jim úměrné veličiny a a b, kteréž mají rozměr $\frac{1}{T}$.

Pro oba výše uvedené případy máme pak

$$r = -a \pm b, \qquad r = -a \pm ib.$$

Pohyb aperiodický.

Pojednejme především o případu prvém, kdy

$$4KD = p^2 - q^2.$$

Všeobecný integrál o dvou konstantách jest dán rovnicí

$$\Theta = C_1 e^{-(a-b)t} + C_2 e^{-(a+b)t}.$$

Pohyb jest povšechně složen ze dvou pohybů jednotlivých, z nichž každý je vyjádřen exponenciellou s exponentem negativním; u prvé jest exponent $a - b$ číselně menším, u druhé $a + b$ číselně větším. Prvá exponenciella má tudíž spád mírnější, druhá prudší. Hodnoty konstant C_1 a C_2 určí se bližšími podmínkami.

Počítejme čas t od okamžiku, kdy kyvadlo projde polohou rovnovážnou, majíc při tom úhlovou rychlost ω. Pro $t = 0$ jest tedy $\Theta = 0$, $\frac{d\Theta}{dt} = \omega$. Dosadíce tyto hodnoty do rovnice pro Θ a pro $\frac{d\Theta}{dt}$, obdržíme:

$$o = C_1 + C_2$$
$$\omega = -(a - b)\,C_1 - (a + b)\,C_2.$$

Obě konstanty C_1 a C_2 jsou tedy číselně sobě rovny a mají znamení opačné; jich číselná hodnota jest $\frac{\omega}{2b}$.

Obdržíme tudíž rovnici pohybu ve formě

$$\frac{2b}{\omega}\cdot\Theta = e^{-(a-b)t} - e^{-(a+b)t}.$$

Výsledek přehlédneme nejlépe grafickým znázorněním. První exponenciella dává známou křivku, od hodnoty 1 (při $t = 0$) ponenáhlu k hodnotě 0 (při $t = \infty$) klesající. Druhá exponenciella dává podobnou křivku, ale prudčeji klesající. Když souhlasné hodnoty odečteme, obdržíme křivku, která se od hodnoty nullové zvedne až k určité hodnotě konečné a potom ponenáhlu klesá až k nulle. To znamená, že kyvadlo, když ze své rovnovážné polohy impulsem je vyšinuto, vychýlí se do určité amplitudy α a odtud pak padá zpět do polohy rovnovážné, kam dojde po době velice (nekonečně) dlouhé.

Z podmínky $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ lze stanoviti dobu τ, za jakou kyvadlo do amplitudy α vystoupí, a z té pak amplitudu α samotnou. Vychází

$$e^{2b\tau} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Je-li b velmi malé, lze počítati přibližně

$$e^{2b\tau} = 1 + 2b\tau,$$

z toho

$$2b\tau = \frac{2b}{a-b}$$

čili

$$\tau = \frac{1}{a-b}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu τ za t do rovnice pro Θ píšíce zároveň α místo Θ, obdržíme

$$\frac{2b}{\omega}\alpha = e^{-1} - e^{-\frac{a+b}{a-b}}$$

anebo

$$e\,\frac{2b}{\omega}\alpha = 1 - e^{-\frac{2b}{a-b}}.$$

Položíme-li opět přibližně

$$e^{-\frac{2b}{a-b}} = 1 - \frac{2b}{a-b},$$

vyjde

$$\frac{e}{\omega}\alpha = \frac{1}{a-b}$$

čili

$$\alpha = \frac{\omega}{e}\cdot\frac{1}{a-b}.$$

Pro případ, který jsme dříve jako přechodní označili, když jest $b = 0$, obdržíme jednoduše

$$\tau = \frac{1}{a}, \qquad \alpha = \frac{\omega}{ea}$$

čili

$$\tau = \frac{2K}{p}, \qquad \alpha = \frac{\omega}{e}\cdot\frac{2K}{p}.$$

Případ přechodní.

Vizme nyní, jak se tento přechodní případ, kdy

$$4KD = p^2$$

utváří ve všeobecném řešení úkolu. Kdybychom v rovnici pro Θ prostě

položili $b = 0$, obdrželi bychom

$$\Theta = C_1\,e^{-at} + C_2\,e^{-at}$$
$$\Theta = (C_1 + C_2)\,e^{-at}$$

čili

$$\Theta = C\,.\,e^{-at}.$$

Rovnice tato obsahuje jedinou jen konstantu C, není tedy integrálem všeobecným, nýbrž jen partikulárným. Abychom obdrželi i pro případ přechodní integrál všeobecný, jest nutno, abychom se případu $b = 0$ blížili, v tom smyslu, že podobně, jako ke konci odstavce předešlého, modifikujeme integrál všeobecný pro případ, že b jest velmi malé.

Pišme integrál všeobecný ve formě

$$\Theta = e^{-(a-b)t}\,(C_1 + C_2\,e^{-2bt}).$$

Pak jest pro velmi malé b přibližně

$$e^{-2bt} = 1 - 2bt,$$

tudíž

$$\Theta = e^{-(a-b)t}\,(M + Nt),$$

kdež jsou M a N nové integrační konstanty.

Je-li pak $b = 0$, obdržíme

$$\Theta = e^{-at}\,(M + Nt)$$

jakožto všeobecný integrál pro případ přechodní.

Je-li pro $t = 0$ jako dříve $\Theta = 0$, $\frac{d\Theta}{dt} = \omega$, vyjde

$$M = 0,$$
$$N = \omega,$$

tudíž

$$\Theta = \omega\,.\,e^{-at}\,.\,t$$

a

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega\,.\,e^{-at}\,(1 - at).$$

Kyvadlo, obdrží-li impuls s úhlovou rychlostí ω, vychýlí se do amplitudy α za dobu τ a odtud padá zpět do rovnovážné polohy, kam dojde po době velmi (nekonečně) veliké.

Pro dobu τ vychází z podmínky $\frac{d\Theta}{dt} = 0$ ihned

$$\tau = \frac{1}{a}$$

a dosazením do rovnice pro Θ vyjde amplituda α

$$\alpha = \frac{\omega}{ae}$$

čili

$$\tau = \frac{2K}{p}, \qquad \alpha = \frac{\omega}{e} \cdot \frac{2K}{p}$$

souhlasně s tím, jak jsme obdrželi na konci odstavce předešlého.

Z výrazu všeobecnějšího pro τ a α, totiž

$$\tau = \frac{1}{a - b}, \qquad \alpha = \frac{\omega}{e} \frac{1}{a - b},$$

vychází, že při větším útlumu $b > 0$ jest α větší, ale také τ větší. Při $b = 0$ dostoupí kyvadlo dříve do polohy obratu. To jest na první pohled překvapující. Zdálo by se, že při větším útlumu výstup trvá dobu kratší. Ale zde, větším útlumem, jsou rychlosti pohybu menší. Jest tudíž případ $b = 0$ charakterisován tím, že podává nejmenší útlum, při němž aperiodického pohybu se dosáhne v době nejkratší. (Kyvadlo ballistické.)

Pohyb periodický.

Stává-li se p ještě menší, nastává případ

$$4KD = p^2 + q^2,$$

který jsme nahoře jakožto druhý označili. Všeobecný integrál nabude tvaru

$$\Theta = e^{-at}(C_1 e^{ibt} + C_2 e^{-ibt})$$

čili, dle známých relací,

$$\Theta = e^{-at}(A \sin bt + B \cos bt).$$

Konstanty A, B určí se podmínkami začátečními. Stanovme opět pro $t = 0$ jako dříve $\Theta = 0$, $\frac{d\Theta}{dt} = \omega$, pak vychází

$$B = 0,$$

$$A = \frac{\omega}{b},$$

tak že jest jednoduše

$$\Theta = \frac{\omega}{b} e^{-at} \cdot \sin bt,$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega e^{-at}\left(\cos bt - \frac{a}{b} \sin bt\right).$$

Pohyb jest tedy periodický, doba kyvu T jest dána výrazem

$$bT = \pi, \qquad T = \frac{\pi}{b},$$

ale amplituda $\frac{\omega}{b} e^{-at}$ se postupem doby umenšuje. Počítejme doby t příslušné bodům obratu, t. j. pro $\frac{d\Theta}{dt} = 0$. Obdržíme podmínku

$$tg\, bt = \frac{b}{a}.$$

Této vyhovují hodnoty

$$t = \tau, \qquad \tau + T, \qquad \tau + 2T, \qquad \tau + 3T, \ldots$$

odpovídající elongacím

$$\Theta = \alpha_1, \qquad \alpha_2, \qquad \alpha_3, \qquad \alpha_4, \ldots$$

při čemž jest

$$T = \frac{\pi}{b}.$$

Pohyb kyvadla jest tudíž isochronní. Amplitudy α obdržíme z rovnice

$$\Theta = \frac{\omega}{b} e^{-at} \sin bt$$

a sice jest první amplituda

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{b} e^{-a\tau} \sin b\tau, \qquad \tau = \frac{1}{b} arc\, tg \frac{b}{a}.$$

Co se však dalších amplitud týče, přehlédneme ihned, že jest

$$\alpha_2 = k\alpha_1, \qquad \alpha_3 = k\alpha_2, \qquad \alpha_4 = k\alpha_3, \ldots$$

Amplitud tedy ubývá řadou geometrickou, dle poměru

$$k = e^{-aT} \quad \text{čili} \quad k = e^{-\pi \frac{a}{b}}.$$

Tento poměr zove se *poměrem útlumu*; jeho *log nat* $k = \Lambda$ pak *logarithmickým dekrementem amplitud.* Jest tedy

$$\Lambda = -aT \quad \text{čili} \quad \Lambda = -\pi \frac{a}{b}.$$

Obyčejně počítává se *log brigg* $k = \lambda$.

Zaveďme ještě dobu T^* pro kývání v prostoru prázdném a vyjádřeme konečně vše veličinami původními; obdržíme

$$T^* = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}, \qquad T = \pi \sqrt{\frac{K}{D - \frac{p^2}{4K}}},$$

$$T = T^* \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}},$$

$$\Lambda = \pi \frac{p}{\sqrt{4KD - p^2}}.$$

Vliv odporujícího prostředí jeví se tedy zmenšením síly direkční D o část $\frac{p^2}{4K}$; zmenšení jest malé při velkém momentu setrvačnosti.

Vraťme se ještě k významu čísel a, b, kterých jsme s prospěchem užili ke zkrácení výrazů, které však mají i pro sebe zajímavý význam. Mohou se zváti čísly frekvenčními. Vskutku jsou frekvenci kyvů přímo úměrnými, jakož vychází z úvahy následující.

Budiž $N = \frac{1}{T}$ frekvence kyvů v prostředí odporujícím, $N^* = \frac{1}{T^*}$ podobně v prostoru prázdném. Poněvadž jest $N < N^*$, zaveďme kvadratický doplněk N_0 dle rovnice

$$N_0^2 + N^2 = N^{*2}.$$

Pak jest souhlasně

$$a = \pi N_0,$$
$$b = \pi N,$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} = \pi N^*.$$

Trojúhelník pravoúhlý o odvěsnách a, b podává tudíž obraz frekvencí. Povaha kývání tlumeného, aneb všeobecněji řečeno, tlumeného pohybu harmonického vůbec vynikne zřetelně, když se pro určité a a b rovnice

$$\Theta = \frac{\omega}{b} \cdot e^{-at} \sin bt$$

graficky znázorní podobně, jako jest v obr. 204. znázorněn pohyb harmonický bez útlumu. Rozdíl harmonického pohybu bez útlumu a s útlumem lze pak jednoduše formulovati takto. Harmonický pohyb bodu M jeví se jako projekce pohybu bodu N, jenž se otáčí *úhlově rovnoměrně*. Bez útlumu zůstává bod N na obvodě kruhu, s útlumem zůstává na smršťující logarithmické spirále, při čemž zároveň úhlová rychlost se poněkud umenší *).

Konstanty a a b jakož i ω určí se v konkretních případech pokusem na základě pozorování doby kyvu T, logarithmického dekrementu Λ a některé z amplitud α, dle rovnic nahoře uvedených.

*) Srovnej *Akustiku*, pag. 15, 1902, kde oba ty obrazce, znamenající časové rozvinutí kmitání volného a tlumeného, jsou pro určité případy provedeny.

Dále: v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik, Band I Abteilung 2, pag. 95 a násl., 1898.

XVIII.

Úkazy rovnováhy a pohybu kapalin.

§ 284. Význačné vlastnosti kapalin.

Tělesa přecházejí ze skupenství tuhého v kapalné zpravidla účinkem tepla. Zahříváme-li na př. kus ledu, cínu, olova, stříbra a j., pozorujeme, že při jisté teplotě souvislost částic se začíná uvolňovati, částečky, jsouce těžké, začínají se roztékati a jest třeba pevnou nádobou je podchytiti, aby se udržely pohromadě; těleso ztrácí dřívější určitý tvar, přizpůsobujíc se tvaru nádoby, při čemž zpravidla mění zároveň svůj objem. Kapalněním uvolňuje se tedy *soudržnost* (cohaesio) nejmenších částic, kteréž se stávají velice *pohyblivými* a *pošinovatelnými*, ač u různých kapalin ve stupni různém. Dle toho mluvíme o různém stupni *tekutosti*, jak se jeví na př. u glycerinu, kyseliny sírové, sehnané neb zředěné, u vody, alkoholu, aetheru a pod.

Při této veliké pohyblivosti a pošinovatelnosti nejmenších částic kapaliny jest velice pozoruhodnou vlastnost další, *stálost objemu*. Teplem mění se sice objem kapalin a to i větší měrou než u těles tuhých, avšak *při teplotě určité* jest objem téměř *stálým*, umenšuje se tlakem měrou velmi nepatrnou.

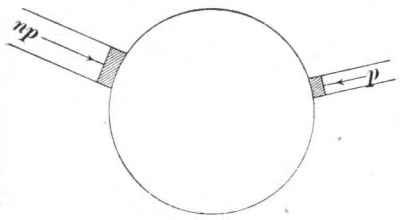
Z úvodního výkladu tohoto vystupují již dvě vlastnosti pro kapaliny *význačné*, jich *tekutost* a *stálost objemu*. U kapalin skutečných jest ovšem tekutost větší neb menší, ale jen přibližně dokonalou; podobně stálost objemu vzhledem ke tlaku objevuje se ve stupni větším neb menším, ale nikoli naprostém. Vzhledem k tomu zavádíme abstrakcí pojem kapaliny *ideálné*, kterouž by byla kapalina, jejíž částečky by byly absolutně pohyblivými a jejíž objem by byl vzhledem ke tlaku absolutně konstantním. Zavedením pojmu tohoto zjednoduší se výklad o mnohých úkazech rovnováhy i pohybu, když se nejprve provede pro kapalinu ideálnou a když se pak přihlédne, jak dalece též kapaliny skutečné úkazy tyto jeví.

Repraesentantem kapalin nejznámějším a nejdůležitějším jest voda, řecky hydor *); dle slova tohoto tvoří se názvy v tomto odboru, jako hydrostatika, hydrodynamika, hydromechanika, hydrosféra, dle analogie atmosféra, a pod.

Vlastnost tekutosti mají kapaliny společnou s plyny; proto se někdy kapaliny a plyny označují společným jménem jakožto tekutiny, a činívá se rozdíl mezi tekutinami kapalnými a plynnými.

§ 285. **Všestranné šíření se tlaku v kapalinách.**

Důležitým následkem veliké pohyblivosti nejmenších částeček kapaliny jest *všestranné* šíření se tlaku. Abychom *podstatu* tohoto úkazu objasnili, proveďme experiment myšlenkový *(B. Pascal)*. Mějmež (obr. 221.) dutou pevnou kouli a v ní nějakou kapalinu, na př. vodu. Můžeme si mysliti, jako by koule tato s kapalinou nebyla v gravitačním poli naší země; pak nemá váhy a stěny koule nepodléhají tlaku žádnému. Připojme ke kouli dutý válec s pístem, který právě ke kapalině přiléhá; budiž průřez pístu na př. 1 cm^2. Tlačíme-li na píst tlakem p megadyn, neustoupí kapalina — jsouc (téměř) nestlačitelnou — tomu tlaku, za to však šíří se tlak ten v kapalině všestranně, šíří se až ke stěnám pevné koule, kteréž však pevností svou proti němu působí; následkem toho vznikne v celé kapalině tlak v tom smyslu, že na každém místě uvnitř kapaliny i na stěnách pro plochu každého cm^2 se jeví velikostí p. Myslíme-li sobě názorně do kapaliny vložený lístek papíru neb tenkého plechu 1 cm^2, byl by v každé poloze tlačen z obou stran kolmým tlakem p. Připojíme-li ke kouli na kterémkoli místě druhý válec s pístem, jehož průřez jest n cm^2, byl by tlačen ven tlakem np, tak že bychom tlakem n-kráte větším než u pístu prvého musili tlačiti dovnitř, aby se rovnováha udržela.

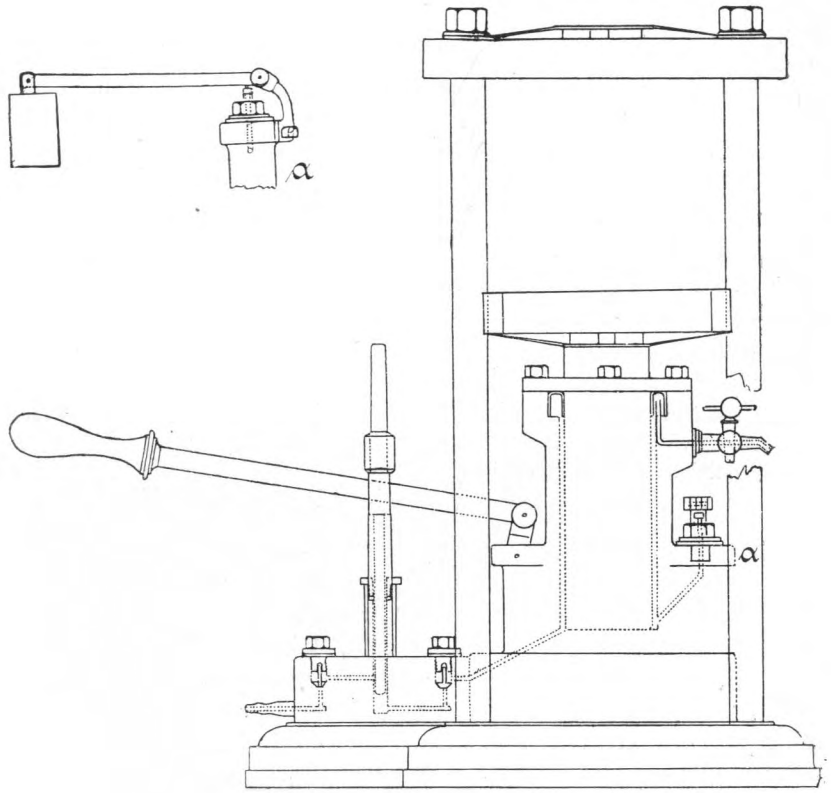


Obr. 221.

*) ὕδωρ τό, voda.

§ 286. **Hydraulický lis.**

Myšlenkový pokus právě popisovaný vede již k tomu, jak jest možná malým tlakem p způsobiti tlak $n \cdot p$ na základě všestranného šíření se tlaku v kapalině. Upotřebiti tohoto principu k účelům praktickým, t. j. hotoviti stroje, tak zvané *lisy hydraulické*, stalo se možným, když se podařilo oproti velikým tlakům docíliti zvláštní ucpávkou toho, aby voda



Obr. 222.

kolem válce neprýštila. Ucpávku takovou nalezl *Bramah* *); záleží v koženém prstenu, jehož průřez má formu obráceného U, a který jest do rýhy velkého válce tak zasazen a upevněn, že tím těsněji přiléhá k pístu,

*) *Josef Bramah*, (1749—1814), mechanik a inženýr v Londýně; příslušný jeho spis má název: Description and Account of a New Press, operating by the action of Water, on the Principle of the Hydrostatic Paradox. Nicholsons Journal I, 1797.

čím větší tlak ve vodě vzniká. Obrazec 222. znázorňuje v průřezu malý hydraulický lis, jak se ho užívá k účelu přednášek.

Znamená-li r a R poloměr obou válců, zvýší se tlak v poměru $\frac{R^2}{r^2}$. Užívá-li se páky k převedení tlaku p rukou působeného, zvýší se tento ještě v poměru obou ramen páky. U lisu obrazcem znázorněného jest poměr tento okrouhle $= 3$, mimo to $2r = 16$ *mm*, $2R = 120$ *mm*, tudíž $\frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{60}{8}\right)^2$, okrouhle $= 56$. Tlak p rukou na páce působený zvýší se tudíž na 168 p. Jest snadno působiti tlakem p tak velikým jako jest váha 10 *kg*; pak se lisem tlak tento zveličí na tlak takový, jakým působí váha hmoty 1680 *kg*. Pojistným ventilem α jest jistá mez tlaková k zabezpečení stroje stanovena. U takovýchto malých lisů jest výhodno voliti místo vody čistý minerální olej, železné části stroje pak nerezaví a písty i ventily neváznou.

Užívá-li se lisu k pokusům, nejde jen o způsobení velikého tlaku, nýbrž o vykonání práce. Co se však získá prostřednictvím kapaliny na síle, ztrácí se zase na dráze, tak že práce na jedné i druhé straně, nehledíc ovšem k překážkám pohybu, jest stejnou. Princip virtuálných posuvů platí i zde; analogii s pákou poznal již B. Pascal *).

Lis obyčejný účinkuje po rázech, v přestávkách činěných, ne spojitě. *Desgoffes* zavedl píst šroubem pošinovatelný, kterým se v posledním stadiu práce docílí působení spojitého.

Jde-li o účely technické, žene se hydraulický lis parou. V ocelárnách užívá se na př. k nýtování, neb k ohýbání pancéřových desk lisů hydraulických, jimiž lze docíliti ohromných tlaků, rovnajících se (na př. ocelárna Obuchowski v Petrohradě) váze až 10 millionů kilogrammů.

§ 287. **Tlak hydrostatický.**

Při onom pokusu myšlenkovém, kde se mělo jen vysvětliti, jak dlužno všestrannému šíření se tlaku v kapalinách rozuměti, abstrahovali jsme od působení tíže. Ve skutečnosti kapaliny podléhají tíži, jsou těžké; každá kapka má svou váhu. Tím vzniká buď pohyb anebo, je-li rovnováha, tlak; poněvadž je tlak tento účinkem tíže *statickým*, nazývá se u kapalin vůbec *tlakem hydrostatickým*.

Nalejme do nádoby nějaké, tvaru jakéhokoliv, kapalinu, na př. vodu, a sečkejme, až se ustálí. Pozorujeme především, že její povrch jest rovinou *horizontální*, čili, jak právě dle tohoto zjevu říkáme, »*vodorovnou*«. Uvážíme-li, že jsou nejmenší částečky kapaliny velice pohyblivé a že jich váha působí směrem svislým a že sil jiných než tíže zde není, pochopíme, že se částečky tyto nemohou jinak ustáliti než v rovině ke směru tíže kolmé, právě tak, jako hrášky na hladké ploše nezůstávají jinak v klidu než když plocha jest rovinou vodorovnou.

*) *Blaise* (*Blasius*) *Pascal*, žil v letech 1623—1662 jako soukromník, nemaje žádného úřadu veřejného, v Clermontu, Rouenu a Paříži. Dílo jeho, sem hledící má název: Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pésanteur de la masse de l'air, Paris, 1662.

Jinak tomu jest, kde vedle tíže působí ještě síly jiné, jako na př. při kraji nádoby, kde se kapalina vlivem sil molekulových po stěnách poněkud zvedá anebo po případě stěnami poněkud stlačuje; avšak zjevy tohoto druhu budou později předmětem studia zvláštního, zde tedy k nim nepřihlížíme, pozorujíce jen, jak se povrch kapaliny utváří ve větší od stěn vzdálenosti.

Kapky na vodorovném povrchu samém nepodléhají ovšem tlaku (hydrostatickému) žádnému. Sestoupíme-li však v myšlenkách níže do jiné vodorovné roviny, čili, jak zde říkáme, *hladiny*, do hloubky z, tu každá kapka nese tlak všech kapek, které jsou nad ní. Avšak každá kapka, jsouc tlačena, tlačí také kapky sousední a to na všechny strany. Tlak šíří se tudíž v téže hladině až ke stěnám nádoby, kteréž svou pevností se tomuto tlaku opírají; tím vrací se tlak zpět, následkem čehož když jest rovnováha, všechny částečky téže hladiny se nalézají *v témže určitém stavu tlakovém*. Čím níže jest hladina pod povrchem, tím větší jest tento tlak, ale vždy jest v celé hladině nádoby týž; na vodorovném dně nádoby jest pak tlak tento největší, a dno musí svou pevností tlak ten vydržeti.

Opakujeme, že v téže hladině jest tlak u všech částic týž. Kdyby tedy jen některé z nich byly jistým tlakem tlačeny, rozestřel by se tento tlak na všechny částečky téže hladiny. U těch částic, které mají nad sebou sloupec kapaliny, pochází tlak přímo z váhy tohoto sloupce; nemají-li však některé částice nad sebou takový sloupec, pochází jich napětí nepřímo z váhy onoho sloupce, jsouc sprostředkováno částicemi sousedními.

Majíce tlak ten stanoviti kvantitativně, vztahujeme jej na velmi malou plochu β hladiny. Hmota kolmého sloupce kapaliny, jehož basis jest β a výška z, je-li s specifická hmota kapaliny, stanoví se součinem $\beta z s$. Počítajíce z toho tlak, tedy váhu, násobíme intensitou tíže g a obdržíme výraz

$$p = \beta z s g.$$

Rozměrově máme pro součin ten výraz všeobecně a zvlášť

$$L^2 \,.\, L \,.\, \frac{M}{L^3} \,.\, \frac{L}{T^2} = \frac{L \,.\, M}{T^2}$$

$$cm^2 \,.\, cm \,.\, \frac{g}{cm^3} \,.\, \frac{cm}{sec^2} = \frac{cm \,.\, g}{sec^2} = dyna.$$

Obecně zavádí se jakožto tlak hydrostatický tlak na jednotku plochy; v tom případě jest rozměr jeho dán výrazem všeobecně i zvlášť

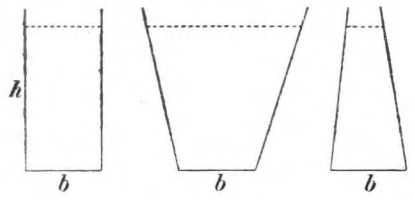
$$\frac{LM}{T^2} : L^2 = \frac{M}{LT^2}$$

$$\frac{cm \cdot g}{sec^2} : cm^2 = \frac{g}{cm \cdot sec^2} = \frac{dyna}{cm^2}.$$

Můžeme tedy říci názorně: vložíme-li do kapaliny ve hloubce z malý lístek papíru neb plíšek, o ploše β, jest tlačen s obou stran kolmým tlakem $\beta z s g$ *dyn*, jednostejno, zdali jest položen vodorovně nebo šikmo nebo svisle, ovšem pokládajíc plošku β za tak malou, že když ji postavíme svisle, jako bychom z hladiny ani nevystoupili. Je-li list povrchu libovolného b, směli bychom tlak úhrnný patrně jen v tom případě vyjádřiti součinem $bzsg$, když by pro všechny malé části β celé plochy b bylo z totéž, t. j., kdyby celý rovný list b byl v téže hladině.

§ 288. **Tlak na vodorovné dno.**

Dle úvah odstavce předcházejícího vyjadřuje součin $bzsg$ tlak, kterým působí kapalina specifické hmoty s na vodorovné dno, jehož plocha jest b, ve hloubce z pod vodorovným povrchem kapaliny. Není tudíž tlak ten závislý na množství kapaliny, kteréž dle formy nádoby může býti větší neb menší.



Obr. 223.

Mějme na př. tři nádoby se stejným dnem b; první z nich budiž se stěnami svislými, druhá se stěnami nahoru rozbíhavými a třetí se stěnami nahoru sbíhavými. Nalejme do všech vody do výšky z (obr. 223.). *Tlak na dno bude u všech týž.* Výsledek tento jest na první pohled překvapující; nazývá se také *hydrostatické paradoxon.*

U těles tuhých jsme totiž zvyklí, tlak, kterým působí na podklad nějaký, stotožňovati s jejich vahou. Tuto zkušenost přenášíme mimoděk také na kapaliny, jako by také zde tlak, kterým působí na dno, byl stejný s jejich vahou. Avšak zde platí tato stejnost jenom, jsou-li stěny svislé, tedy u nádoby prvé. Jsou-li stěny nahoru rozbíhavé, jako u nádoby druhé, nesou stěny samy část váhy kapaliny, tak že na dno samé zbývá jen ostatní část úhrnné váhy; stěny reagujíce proti tlaku hydrostatickému směrem vzhůru jsou vzhledem k tlaku na dno passivními. Jsou-li naproti tomu stěny nahoru sbíhavé, reagují proti tlaku hydrostatickému směrem dolů a jsou tudíž vzhledem k tlaku na dno aktivními, neboť reakční jich tlak, kterým přispívají k váze vody, jest takový, jako by svisle nad nimi byla voda až do výšky povrchové.

Rozdíl mezi kapalinami a tělesy tuhými vynikne ihned, když si představíme, jako by voda v oněch nádobách byla zmrzlá. Postranní stěny jsou pak zbytečné; mohou se odstraniti; tlak na dno rovná se pak jen váze ledu, a jest ovšem v oněch třech nádobách různý. U vody se tato různost vyrovnává pevností stěn postranních, na které voda, abychom tak obrazně řekli, buď naléhá nebo o které se opírá.

Byly sestrojeny mnohé apparáty, jimiž hydrostatické paradoxon se dokazuje pokusem. První apparát takový sestrojil již *B. Pascal* a zdokonalil *Masson*; tlak na dno u nádob formy rozmanité ale dna stejného měří se přímým vážením. Vadou jest tu malá citlivost a rušivé vlivy vedlejší. Apparáty takové spíše jen objasňují, jak jest tlak hydrostatický na plochu dna míněn, než aby přesně stejnost tlaku dokazovaly. Rušivé vlivy hleděli staří experimentátoři (Pascal, Gravesande a j.) učiniti méně znatelnými užíváním velkého množství vody, dle čehož pak příslušné apparáty měly větší rozměry. Že lze způsobiti veliké tlaky malým množstvím vody, jež jsouc v úzké trubici působí svou výškou, demonstroval Pascal pokusem jednoduchým a přesvědčivým; k sudu, naplněnému vodou, připojil do výše dlouhou trubici, do níž doléval vody; voda, ač v množství malém, působila při veliké výšce tlakem tak značným, že se sud roztrhl. V úpravě podobné působí *Realův lis.*

§ 289. **Tlak na stěny.**

Úhrnný tlak na vodorovné dno nádoby lze snadno stanoviti, poněvadž na každou malou část plošnou β vzhledem k témuž z jest tlak týž. Summace tlaků takových přejde tím v summaci plošných částeček β. Jinak jest tomu, jedná-li se o tlak na dno šikmé neb na postranní stěnu nádoby. Tato zasahá do různých hladin; v každé jest tlak na plošnou částečku β jiný, úměrný hloubce z; tlak tudíž stoupá, když sestupujeme do hloubky větší a větší. Úloha se může komplikovati, když stěna není rovinná, nýbrž zakřivená.

Komplikace úkolu v tomto případu záleží v tom, že jednotlivé velmi malé tlaky $\beta z s g$ působící na velmi malou plošku β ve hloubce z nejsou stejnosměrné, nýbrž následkem zakřivení stěny různosměrné. Summaci, jež v tomto případu jest geometrickou, lze analyticky provésti jen tak, že se na místo každého jednotlivého tlaku zavedou jeho složky vzaté dle směrů os souřadnicových; tyto složky lze pak sečítati algebraicky, poněvadž jsou uvedeny na týž směr. Sečítání znamená pak integrování. Rozklad ve složky není nutným, když jest stěna rovinnou, poněvadž tlaky jednotlivé $\beta z s g$ jsou již stejnosměrné; jich sečítání znamená i zde integrování.

Omezí-li se úkol jen na *stěny rovinné*, lze odvoditi o tlaku hydrostatickém jisté věty všeobecné, jednoduchostí svou zajímavé, jež i bez znalosti počtu integrálního lze pochopiti na základě známých vět, odvozených v oddílech předešlých. Sestupujmež do hloubky z ponenáhlu, po jednotlivých sobě velmi blízkých hladinách vodorovných; těmito rozdělí se stěna, jakkoli šikmo postavená, na vodorovné uzounké proužky β. Tlak hydrostatický na každý takový proužek jest dán výrazem $\beta z s g$; vzhledem k tomu, že veličiny s, g jsou konstantními, vede summace oněch tlaků k výrazu

$$\Sigma\, \beta z.$$

Mysleme si, že stěna má jistou tloušťku, tak že jest hmotnou; pak jest plocha β úměrnou vlastní hmotě, a výraz βz úměrným momentu hmotnému; součet takových momentů hmotných lze však nahraditi (§ 142.) jediným momentem hmotným dle vzorce

$$\Sigma\, \beta z = z_0\, \Sigma\, \beta$$

sečítají se totiž hmoty — zde plošky hmotám úměrné, — a součet hmot se násobí souřadnicí těžiště. Dle toho jest také úhrnný tlak hydrostatický dán výrazem

$$sg\, \Sigma\, \beta z = sgz_0\, \Sigma\, \beta.$$

Úhrnný hydrostatický tlak na rovinnou stěnu jest tudíž takový, jako by stěna ve výši vlastního těžiště byla v kapalině vodorovně položena.

Zbývá ještě určiti, kde úhrnný tento tlak má své působiště; toto se zde zove *středem tlakovým*. Užijeme i zde známých (§ 136.) vět momentových. Značí-li z^* jeho souřadnici ve směru svislém, určuje se rovnicí

$$\Sigma\, z \,.\, \beta z = z^*\, \Sigma\, \beta z,$$

kdež vynecháváme konstantní faktory s a g. Odtud plyne

$$z^* = \frac{\Sigma\, \beta z^2}{\Sigma\, \beta z}.$$

Výrazy na pravo jsou úměrnými úhrnnému momentu hmotnému a to v čítateli stupně druhého, ve jmenovateli stupně prvého. Poměrem momentů takových jest však určena poloha středu kyvu. Představíme-li si tedy stěnu jako hmotné kyvadlo, kývající kolem osy vodorovné v povrchu kapaliny, *udává hloubka z^* středu kyvu zároveň hloubku středu tlakového*. Má-li na př. stěna ve směru vodorovném konstantní rozměr l, jest patrně

$$\beta = l \,.\, dz.$$

Odtud úhrnný tlak

$$sg \int_0^z l \,.\, dz \,.\, z = lz \,.\, \frac{z}{2} \,.\, sg$$

a hloubka jeho středu

$$z^* = \frac{\int_0^z z^2\, dz}{\int_0^z z\, dz} = \frac{2}{3}\, z.$$

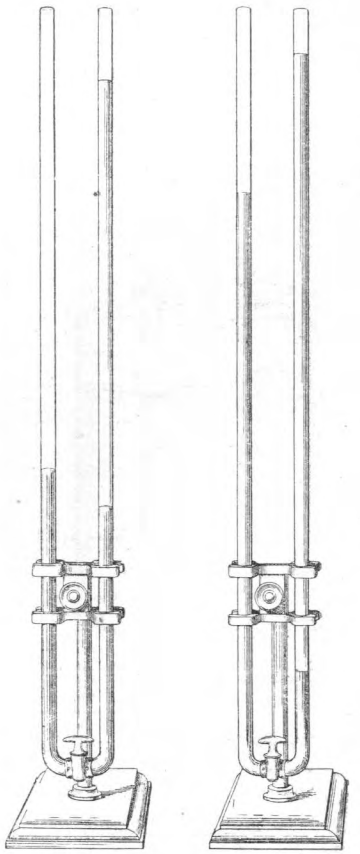
Poněvadž pak střed tlaku musí zároveň na přímce souměrnosti ležeti, jest tím jeho poloha určena. Výsledek lze v tomto případě zvláštním odvoditi též konstrukcí geometrickou.

§ 290. **Spojité nádoby.**

Mějmež trubici skleněnou tak ohnutou, jak obr. 224. ukazuje. V části vodorovné jest zasazen skleněný kohout; ramena svislá jsou otevřena. Budiž kohout uzavřen. Nalejeme-li nějaké kapaliny specifické hmoty s do ramena jednoho i druhého stejně vysoko, do výšky H, tlačí kapalina tato na jistou (malou) plochu β kohoutu tlakem, který jest dán výrazem

pro stranu levou βHsg,
pro stranu pravou βHsg;

tedy tlak s jedné i druhé strany je týž. Otevřeme-li kohout, čímž trubici na levo spojíme s trubicí na pravo, zůstane pro *rovnost* tlaku rovnováha.



Obr. 224.

Opakujme pokus s modifikací následující. Uzavřeme kohout. Nalejme pak na levo kapalinu na př. těžší, specifické hmoty s, do ramena pak na pravo kapalinu lehčí, specifické hmoty s' a to opět do téže výšky H.

Nyní jest tlak na jistou (malou) plochu β kohoutu

se strany levé βHsg,
se strany pravé $\beta Hs'g$,

tedy se strany levé, poněvadž jest $s > s'$, tolikrát větší, kolikrát jest jedna kapalina těžší druhé. Aby byl tlak týž, musili bychom kapaliny lehčí dolíti do výšky větší H' i bylo by

$$\beta Hsg = \beta H's'g,$$

tehda, když by

$$H : H' = s' : s.$$

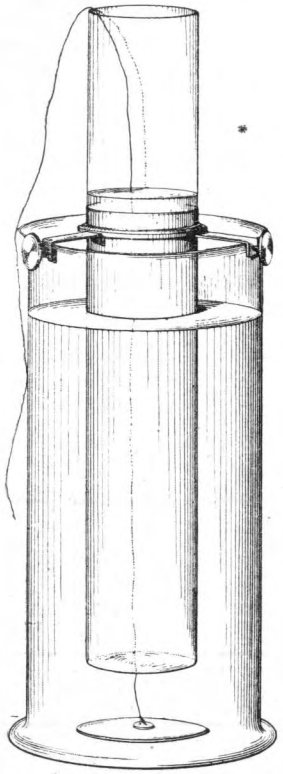
Pak by při otočení kohoutu zůstala rovnováha *neporušena*. Je-li

však, jako dříve, $H = H'$, pak po otočení kohoutu *přetéká* kapalina těžší do kapaliny lehčí, při čemž předpokládáme, že se obě kapaliny spolu nemísí; rovnováha nastane, jak snadno přehlédneme, když jest

$$h : h' = s' : s,$$

kdež jsou výšky h a h' počítány od hladiny, ve které se obě kapaliny stýkají.

Ve způsobu právě popsaném, kterýž jest nejvíce instruktivním, lze pokus provésti na př. (obr. 224.) pro rtuť a vodu, anebo též pro vodu (indigokarminem modře zbarvenou) a alkohol aethylnatý (fuxinem červeně zbarvený); když se s počátku přetékání jen malým pootočením kohoutu zavede, nemíchají se obě kapaliny a lze dle zabarvení rovinu, v níž se stýkají, dobře pozorovati. K pokusu připojí se měření oněch výšek h a h', dle nichž lze poměr specifických hmot s a s' počítati.



Obr. 225.

§ 291. Tlak v kapalině.

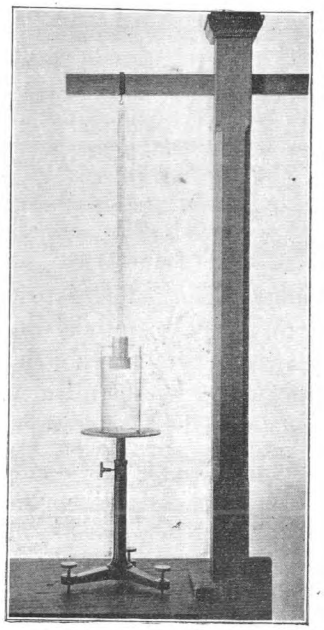
Plocha b rozestřená v kapalině ve hloubce z vodorovně, jest tlačena s obou stran kolmým tlakem velikosti $bzsg$. Tlak tento stane se patrným, když se může jeviti jednostranně; pokus upraví se k tomu účelu ve způsobu, jak jej znázorňuje obr. 225. (s' Gravesande*). Válec skleněný, jehož dnem jest deska skleněná nitkou k válci přidržovaná, vnoří se do vody až do hloubky z; hydrostatický tlak, této hloubce příslušící, působí jednostranně, tlače skleněnou desku vzhůru, tak že tato neodpadne, když se nitka pustí. Nalévá-li se však shora vody do válce vždy výš a výše, přistupuje k určitému tlaku vzhůru tlak dolů ponenáhlu stoupající, až konečně deska odpadne, když její váha a tlak shora právě přemůže tlak zdola.

*) *Vilém J. s' Gravesande*, (1688—1742), v letech 1717—1742 professor v Leydenu, proslul jako znamenitý experimentator; konstruoval mnohé apparáty, jakýchž dosud při výkladech fysikálních se užívá.

Poučná modifikace pokusu tohoto záleží v tom, že se do válce nalévá kapalina jiná, na př. petrolej, alkaninem červeně zbarvený, který se s vodou nemísí. V okamžiku, kdy deska skleněná odpadne, vznáší se ve válci zřejmě viditelný sloupec kapaliny zasahující do určité hloubky vodní, který jest hydrostatickým tlakem nesen. Když se přilévá do vnější nádoby vody, vyzdvihuje se sloupec ten, a naopak zapadá hloub, na př. až právě tam, kde je okraj válce skleněného, když se vody ubírá. Existence tlaku hydrostatického, zde vzhůru působícího (t. zv. vztlaku), ukazuje se při této úpravě pokusu, kdy deska skleněná jeví se býti zbytečnou (obr. 225.), ve způsobu velice názorném.

§ 292. Zákon Archimedův.

Důsledkem poměrů tlakových v kapalinách jest zákon (princip) zvaný Archimedův. Těleso tuhé, jsouc (částečně nebo úplně) vnořeno do kapaliny, nepůsobí svou plnou vahou, nýbrž jest nadlehčováno silou rovnající se váze kapaliny tělesem vytlačené. Říkává se též, že těleso ztrácí na své váze tolik, mnoho-li váží kapalina tělesem vytlačená. Výrazu ztráta užívá se zde ve smyslu umenšení váhy. Podstatu zákona tohoto, který *Archimedes* poznal, a který dle něho Archimedovým zoveme, objasníme úvahou následující.

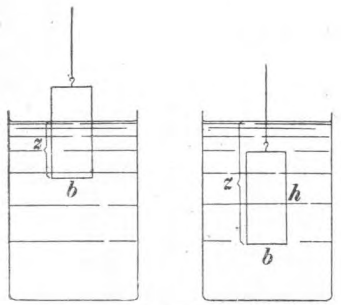


Obr. 226.

Na pružné spirále (na př. argentanové) mějmež zavěšený válec (na př. alabastrový, obr. 226.). Spirála se prodlouží, až se váha onoho válce pružností vyrovná; jest rovnováha. Postavme na stolek, který šroubem lze zvedati, nádobu s vodou a zařiďme tak, aby dolejší plocha b válce právě šla až k hladině vody. Když stolek ponenáhlu zvedáme, tak že se válec začíná do vody vnořovati, pozorujeme, jak pružná spirála se smršťuje, na důkaz, že válec jest nadlehčován. Vskutku zvedá se tlakem, kterým voda tlačí na dolejší

plochu b vzhůru. Když válec zapadl do hloubky z, jest tlak ten dán výrazem $bzsg$, stoupá tedy, když se z zvětšuje, t. j., když válec vždy níž a níže do vody se vnořuje. Tlaky postranní, horizontálně proti sobě působící, nejeví účinku, rušíce se navzájem. Konečně zapadne válec také hořejší plochou b právě do povrchu vody; až dotud nadlehčování stále pokračovalo, spirála se smrštila na míru největší. Když pak ještě dále stolek zvedáme, zapadne také hořejší plocha b válce do vody, ale nadlehčování již nepokračuje. Tlak vzhůru velikosti $bzsg$ sice stoupá dále, ale stoupá též tlak dolů velikosti $b\,(z—h)\,sg$, kdež jest h výška válce; *rozdíl* obou tlaků zůstává konstantním a jest

$$bzsg - b\,(z - h)\,sg = bhsg,$$



Obr. 227.

nechť jest z větší nebo menší (obr. 227.). Nadlehčování tělesa, tak zvaná ztráta na váze, dosáhlo hodnoty mezní, a činí právě tolik, jako váha vody objemu bh, téhož, jaký má válec, tudíž jako váha vody válcem vytlačené.

Úvahu podobnou lze učiniti u tělesa formy jakékoli; můžeme si je v myšlenkách rozděliti na podobné válečky neb rovnoběžnostěny svislé. Vlastní příčina tak zvané ztráty na váze jest vždy v tom, že hydrostatický tlak dolů na plochu hořejší jest menší než hydrostatický tlak vzhůru na plochu dolejší; tento jest právě tak veliký, jako by na místě tělesa byla kapalina; o její váhu jeví se váha tělesa býti zmenšenou.

Archimedes, (287—212 a. Ch. n.), jeden z nejslavnějších mathematiků a fysiků starého věku, příbuzný krále Hierona II. Syrakusského, věnoval se badání vědeckému a to nejen po stránce theoretické, nýbrž i praktické, vynalézaje mechanické stroje, jichž prý též užil k obraně svého rodného města Syrakus proti Římanům. Když Marcellus 212 města dobyl, padl rukou vojína římského Archimedes, přemýšleje právě o problému jakémsi geometrickém (»noli turbare circulos meos«). O jeho objevu, hledícím k principu dle něho zvanému, vypravuje *Vitruvius* ve spise svém »De architectura«, liber IX, Praefatio, jak (v překladu) následuje: »Archimedes učinil mnoho podivuhodných a rozmanitých vynálezů, ale ze všech to, o čem vyložím, bylo, jak se zdá, vykonáno s největší důmyslností. Když totiž Hiero v Syrakusách povýšen byl k důstojnosti královské a ustanovil obětovati pro šťastné pořízení bohům nesmrtelným ve kterési svatyni zlatý věnec, který jim byl zaslíbil, dal jej udělati za určitou mzdu a tomu, kdo práci tu převzal, odvážil na vahách

zlato. Ten, udělav dílo to včas, tvrdil, že jest provedeno přesně, a jak se zdálo, dokázal vážením, že věnec má náležitou váhu. Když však bylo udáno, že odcizil něco zlata a přidal za ně k věnci, jejž zhotovil, totéž množství stříbra, Hiero se rozhorlil, že byl podveden a nenalézaje, jak by jej usvědčil z krádeže, žádal Archimeda, aby převzal úkol uvažovati o tom. Ten tehdy, když měl starost o tu věc, přišel náhodou do lázně a když v ni stoupal do vany, pozoroval, že vytéká z vany tolik vody, kolik obnáší objem jeho těla ponořovaného do vany. A když toto pozorování ukázalo, jak třeba onu věc vysvětliti, nemeškal, nýbrž z radosti z vany vyskočil a jda neoblečen k svému domu, hlasitě dával na jevo, že našel, co hledal. Neboť běže volal neustále po řecku: *εὕρηκα*, *εὕρηκα* (již to mám, již to mám!). Potom prý podle tohoto počátečního nálezu udělal dva kusy stejné váhy, kterou měl věnec, jeden ze zlata, druhý ze stříbra. Učiniv tak, naplnil velikou nádobu vodou až po samý kraj a do ní pohroužil onen kus stříbra; i vyteklo tolik vody, kolik obnášela velikost kusu do vody pohříženého. Potom vyňal onen kus a dolil tolik vody, měře ji sextariem *), oč vody ubylo, tak že sáhala týmž způsobem, jako dříve, až po kraj. Tak z toho vypočítal, jaká váha stříbra odpovídá určité míře vody. Když to zvěděl, opět podobně pohřížil do vody kus zlata, a když jej vyňal, týmž způsobem měřením zjistil, že nechybí totéž množství vody, nýbrž méně, o tolik méně, oč menšího objemu je kus zlata než kus stříbra téže váhy. Potom naplniv opět nádobu a do vody pohrouživ také věnec, shledal, že vyteklo více vody při věnci než při kusu zlata téže váhy; a tak z toho, že chybělo více vody při věnci než při kusu zlata, vypočítal, v jakém poměru jest ve věnci zlato smíšeno se stříbrem, a usvědčil toho, jenž práci převzal, makavě z krádeže.«

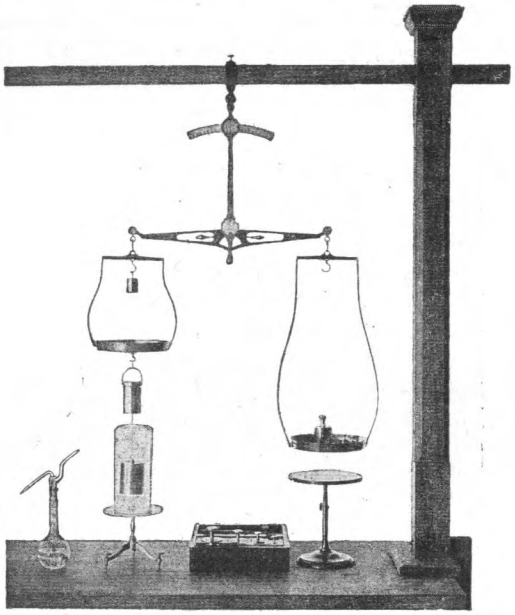
Jak z vylíčení tohoto, velmi zajímavého, jest patrno, věděl Archimedes dobře, že různé kovy téže váhy mají různý objem, čili, jak bychom dnes řekli, že mají různý objem specifický. Kdyby se bylo jednalo o těleso pravidelné, byl by objem ten mohl vyměřiti. Ale zde šlo o útvar přísnému měření nepřístupný. Jeho pozorování v koupací vaně ukázalo mu, jak by mohl objem tento — vytlačením vody — nepřímo měřiti, a k tomu se vztahovalo jeho »heureka«. Nešlo tedy při tom nikterak o vážení tělesa ve vodě a o ztrátu na váze. Proto princip Archimedův, jak se nyní formuluje, obsahuje více, než měření Archimedovo Vitruviem popsané.

§ 293. **Experimenty o zákonu Archimedově.**

Experimentálně lze zákon Archimedův objasniti hydrostatickými vahami, na lati sloupu zavěšenými, jež obr. 228. znázorňuje. Přístroj k tomu sloužící jest válec mosazný plný, zasahující těsně do stejného dutého. Oba se zavěsí pod sebe na kratší misku vah a vyváží. Když se pak válec plný vnoří do vody, čímž rovnováha se poruší, zjedná se znovu, když se naleje vody do válce dutého. Ve způsobu obráceném experimentuje

*) sextarius (= 0·547 litru), šestý díl objemové míry pro kapaliny zvané congius, souhlasící s řeckou měrou ὁ *χόος*, stažené *χοῦς*.

se tak, že se válec dutý zavěsí na misku kratší a na misku delší se položí nádoba s vodou a vše vyváží. Když se pak do vody vnoří válec plný, zavěšený na stativu vedle vah na stole umístěného, udávají váhy přírůstek na váze vody; rovnováhy se pak docílí, když se na druhé straně vah do válce dutého naleje vody. Jako tedy voda zvedá válec, tak i naopak tlačí válec vodu, o tolik, co by tlačil stejný objem vody. Jest tedy i zde stejný tlak i protitlak. Názorně ukazuje se týž zjev vahami v obr. 126.



Obr. 228.

znázorněnými. Když se na misku vah položí nádoba s vodou, a když se pak do vody vnořují předměty, jež visí na pevném stojanu vedle postaveném, ukazují váhy přírůstek tlakový. Kdyby se však stojan dal též na misku vah, neukázaly by žádných změn v rovnováze, když by se těleso do vody vnořilo; nadlehčení tělesa vodou a přírůstek tlakový se právě vyrovnají.

§ 294. **Mathematická formulace.**

Budiž S specifická hmota tělesa tuhého, které je vnořeno do kapaliny specifické hmoty s. Je-li V objem tělesa a tudíž i kapaliny jím vytlačené, g intensita gravitačního pole, udávají výrazy

$$VSg, \quad Vsg$$

váhu téhož objemu tělesa a kapaliny v prostoru prázdném. Dle zákona Archimedova jest tudíž váha tělesa v oné kapalině stanovena rozdílem

$$VSg - Vsg = V(S - s)\,g.$$

Tělesa tuhá specificky těžší než kapalina ($S > s$) mají tudíž v kapalině váhu positivní, t. j. padají dolů, specificky lehčí ($S < s$) váhu negativní, t. j. stoupají vzhůru, kdežto tělesa tuhá stejné hmoty specifické jako kapalina ($S = s$) jsou v ní bez váhy.

Všeobecněji jest onou differencí stanovena váha tělesa tuhého v prostředí jakémkoli, kapalném neb i plynném. Je-li zejména σ specifická hmota vzduchu, v němž se těleso tuhé právě nalézá, jest jeho váha ve vzduchu stanovena differencí

$$VSg - V\sigma g = V(S - \sigma)\,g.$$

Ve výrazech, udávajících váhu tělesa tuhého v prostředí jakémkoli, vystupuje tedy *rozdíl* specifických hmot tělesa a prostředí.

Známé příklady k výkladům předešlým jsou následující. Koule železná ($S = 7{\cdot}7$) jsouc vnořena do vody ($s = 1{\cdot}0$) padá dolů, stoupá však, když ji vnoříme do rtuti ($s = 13{\cdot}6$), jsouc tlačena vzhůru silou, jež jest v dynách určena výrazem

$$V(7{\cdot}7 - 13{\cdot}6)\,g = -V \,.\, 5{\cdot}9 \,.\, g$$

rovnajíc se tudíž asi váze 6 grammů na každý krychlový centimetr objemu. Podobně jest led ($S = 0{\cdot}92$) ve vodě ($s = 1{\cdot}00$) tlačen vzhůru silou, jež jest v dynách stanovena výrazem

$$V(0{\cdot}92 - 1{\cdot}00)\,g = -V \,.\, 0{\cdot}08 \,.\, g$$

rovnajíc se tudíž asi váze 0·08 grammů na každý krychlový centimetr objemu. Když se tedy na př. na dně vody utvoří led objemu $V = \frac{1}{4}\ m^3 = 250000\ cm^3$, jest ona síla asi tak veliká jako váha 20 kilogrammů. Tím se vysvětluje, že takové kusy ledu, kteréž ve vodě přimrzly ke dnu, jsouce silou tak značnou tlačeny vzhůru, trhají kusy půdy nebo zvedají kameny a pod.

§ 295. **Plování tělesa.**

Těleso tuhé, objemu V, jsouc vnořeno do kapaliny specificky těžší ($S < s$), jest tlačeno vzhůru silou

$$(VS - Vs)\,g < 0$$

stoupá tudíž, a vynoří se z kapaliny, tak že pak částí v objemu svého zasahá do kapaliny, částí pak $V - v$ do vzduchu. Dle výkladu odstavce předešlého jest tedy váha tělesa stanovena výrazem

$$v(S - s)\,g + (V - v)(S - \sigma)\,g.$$

Je-li váha tato nullou, říkáme, že těleso plove na kapalině. Pro tento případ vychází vztah

$$\frac{v}{V} = \frac{S - \sigma}{s - \sigma}.$$

Kde jde o tělesa kapalná a tuhá, lze σ proti S a s zanedbávati a psáti přibližně, — jak se zpravidla děje —,

$$\frac{v}{V} = \frac{S}{s},$$

Onen vzorec všeobecnější může však vejíti v platnost také v tom případě, že těleso, vynořic se z kapaliny jedné, na př. železná koule ze rtuti, vejde do kapaliny jiné, na př. vody, jež jest na rtuť nalitá; pak značí σ specifickou hmotu vody. Podobný případ nastává, když do vysoké kádinky nalejeme koncentrovaný roztok kuchyňské soli a na tento pak opatrně vody; vejce, vložené na vodu, padá, ale zastaví se přijdouc do hraničné hladiny mezi vodou a roztokem.

U ledu, plovoucího na vodě, máme

$$\frac{v}{V} = \frac{0{\cdot}92}{1{\cdot}00} = 0{\cdot}92.$$

Zapadají tedy 92 procenta celého objemu ledu do vody a jen 8 procent jest ve vzduchu. U ledových hor, plovoucích na vodách oceánu, jest tedy ta část, kterou lze viděti ve vzduchu, jen malou proti té, která jest skryta ve vodách.

U železa plovoucího na rtuti jest

$$\frac{v}{V} = \frac{7{\cdot}7}{13{\cdot}6} = 0{\cdot}57.$$

U korku plovoucího na vodě podobně

$$\frac{v}{V} = \frac{0{\cdot}2}{1{\cdot}0} = 0{\cdot}20.$$

Koule železná zapadne tudíž do rtuti více než polovicí, t. j. 57 procenty svého objemu, kdežto koule korková zapadne do vody jen 20 procenty objemu celkového.

Kdybychom na rtuť nalili vody, zapadla by koule železná dle poměru

$$\frac{v}{V} = \frac{7{\cdot}7 - 1{\cdot}0}{13{\cdot}6 - 1{\cdot}0} = \frac{6{\cdot}7}{12{\cdot}6} = 0{\cdot}53,$$

tak že by se o 4 procenta svého objemu ze rtuti vynořila.

Když se do velké kádinky převede něco kysličníku uhličitého, utvoří se mezi ním a vzduchem hraničná hladina, na níž plove mydlinová bublina, jež ve vzduchu padá. Podobně, když se do kádinky naleje (na kousky pijavého papíru) něco étheru, vzniknou těžké páry étherové, na nichž rovněž mydlinová bublina, ve vzduchu padající, se zastaví a plove.

Plování těles není vázáno podmínkou $S < s$; vztah dříve odvozený

$$\frac{v}{V} = \frac{S - \sigma}{s - \sigma}$$

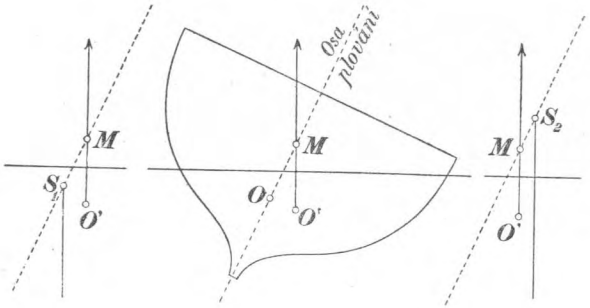
lze rozšířiti i na ten případ, kdy jest $S > s$; ovšem musí pak býti $V < v$, t. j. objem kapaliny vytlačené musí býti větší než vlastní objem tělesa, čehož lze docíliti vhodnou jeho formou.

Tak plove miska skleněná neb porculánová neb železná na vodě, když se položí stranou vrcholovou volně na povrch vody, podobně, jako plovou válečné obrněné lodi s těžkým nákladem na moři.

§ 296. **Poloha tělesa plovoucího.**

Těleso, plovouc na kapalině, jest v poloze rovnovážné, kteráž může býti buď stabilní neb labilní neb indifferentní. Rozhoduje zde tvar tělesa a poloha jeho těžiště.

Budiž dána těleso plovoucí (obr. 229.). Váha tělesa působí v jeho těžišti S; podobně tlak, kterýmž kapalina těleso nadlehčuje, v těžišti O kapaliny vytlačené. Obě síly, sobě rovné, působí všeobecně momentem točným; v rovnováze jest tento moment nullovým, což předpokládá, že body S a O jsou v přímce svislé. Tato přímka zove se osou plování; její poloha vzhledem k tělesu plovoucímu jest určitou.

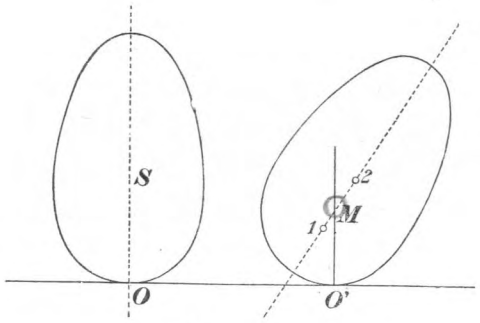


Obr. 229.

Vyšine-li se těleso z rovnovážné své polohy, jakou při plování zaujalo, vejde onen moment točný v platnost; jím se těleso buď uvádí zpět do polohy původní, anebo se od ní oddaluje ještě více. Vizme, na čem to závisí. Vyšinutím tělesa se některé jeho části z kapaliny vynoří a za to jiné do kapaliny vnoří; tím změní se povšechně tvar kapaliny vytlačené a tudíž i poloha jejího těžiště, kteréž z osy plování vystoupí stranou do polohy O'. Směr vztlaku protíná pak osu v bodě M, kterýž se zove *metacentrum* (zástředí). Jest patrno, že rovnováha tělesa při plování jest stabilní neb labilní dle

toho, zdali těžiště S na ose plování jest pod metacentrem (v poloze 1.) nebo nad metacentrem (v poloze 2.). Případ přechodní, kde by těžiště S bylo v metacentru samém, přísluší rovnováze indifferentní.

Význam metacentra objasní se velice, když se poukáže na analogii v případech velmi známých. Těleso plovoucí opírá se o vodu asi tak, jako těleso těžké o vodorovnou pevnou rovinu, na níž spočívá (obr. 230.). Také zde jest přímka, spojující v poloze rovnovážné opěrný bod O a těžiště tělesa S svislou a mohla by se zváti osou rovnováhy. Vyšinutím přejde opěrný bod do polohy O'; síla, kterou pevná rovina proti tlaku tělesa reaguje, velikostí váze tělesa se rovnající, jdouc bodem O, protíná osu rovnovážnou v bodu M; tento bod má týž význam jako při plování metacentrum; dle toho, zdali těžiště S tělesa jest pod ním (v poloze 1.) — nebo nad ním, (v poloze 2.), jest také rovnováha stabilní neb labilní (§ 144.).



Obr. 230.

Pokusem lze výklady zde učiněné objasniti na skleněné trubičce dole zatavené, do níž se přidává rtuti; trubička, jež s počátku v poloze svislé na vodě neplove, majíc rovnováhu labilní, když se dole zatíží, čímž se těžiště sníží, plove pak stabilně. Naopak miska porculánová nebo skleněná, jež na vodě plove stabilně, když se na ni staví náklad, na př. špalíčky dřevěné, čímž těžiště jde do výše, přejde v polohu labilní. Proto se i na lodích klade náklad těžký co možná hluboko.

Redukce vážení na prostor vzduchoprázdný.

§ 297. **Odvození rovnice.**

Vážení provádíme z pravidla ve vzduchu; vah vakuových užívá se jen zřídka, výjimečně. Vzhledem k zákonu Archimedovu dlužno tedy výsledek, k němuž vede vážení ve vzduchu, přepočísti, redukovati na prostor vzduchoprázdný.

Budiž K hmota tělesa, kteréž vážíme, M hmota závaží, methodou Gaussovou nebo Bordovou nalezená, rovnající se hmotě K tělesa zdánlivě, totiž ve vzduchu, jehož specifická hmota budiž σ. Znamenejme dále S a δ specifickou hmotu tělesa a závaží. Pak jest

$$\frac{K}{S} \text{ objem tělesa, } \quad \frac{M}{\delta} \text{ objem závaží.}$$

Přihlížejíce k zákonu Archimedovu, obdržíme rovnici

$$\frac{K}{S}(S-\sigma)g = \frac{M}{\delta}(\delta-\sigma)g,$$

kteráž mathematicky formuluje vážení, se zřetelem k tomu, že vážíme ve vzduchu. Z rovnice pak plyne dále

$$\frac{K}{M} = \frac{1-\frac{\sigma}{\delta}}{1-\frac{\sigma}{S}}$$

čili souměrněji

$$\frac{K}{M} = \frac{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{S}}.$$

Skutečná hmota tělesa má se tedy ke hmotě vážením nalezené, jako rozdíl specifického objemu vzduchu a závaží k rozdílu specifického objemu vzduchu a tělesa. Anebo jinak, určíme-li redukci samotnou,

$$\frac{K-M}{M} = \frac{\frac{1}{S}-\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{S}}$$

čili zkráceně

$$\frac{K-M}{M} = k,$$

z čehož obdržíme konečně

$$K = M + kM.$$

Číselný koefficient k stanoví tudíž, jakou částí hmoty M ona redukce jest. K lepšímu přehledu se udává jeho hodnota buď stonásobná neb tisícnásobná; pak udává, kolik procent (%) neb promille (‰) hmoty M ona redukce činí.

Přesná hodnota koefficientu k jest

$$k = \frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}};$$

pro jeho početní stanovení vychází tudíž pravidlo:

k hodnotám $\sigma,\ S,\ \delta$

počítají se převratné

$$\frac{1}{\sigma},\ \frac{1}{S},\ \frac{1}{\delta}$$

a utvoří rozdíly sousedních. Poměr těchto rozdílů jest koefficient k. Ve většině případů jest $\frac{1}{S}$ mezi hodnotami $\frac{1}{\sigma}$ a $\frac{1}{\delta}$, kteréž jsou jako by krajními. Vybočí-li $\frac{1}{S}$ přes tyto krajní hodnoty, stává se koefficient k negativním. Změna znamení děje se při $S = \delta$ hodnotou nullovou, při $S = \sigma$ hodnotou nekonečnou.

Na místě přesné hodnoty k brává se dle obyčeje všeobecně rozšířeného hodnota přibližná, ač z toho ani pro úvahy věcné ani pro výpočet číselný nevzniká žádný prospěch. Tuto hodnotu přibližnou obdržíme, uvážíce, že specifický objem $\frac{1}{\sigma}$ vzduchu jest veliký proti specifickému objemu $\frac{1}{S}$ těles pevných neb kapalných, kteréž vážíme. Ve jmenovateli onoho přesného výrazu pro k převládá tudíž hodnota $\frac{1}{\sigma}$, tak že proti ní hodnota $\frac{1}{S}$ mizí. Když tedy ji vynecháme, obdržíme

$$k = \frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\sigma}}$$

čili

$$k = \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{\delta}\right)\sigma.$$

Přibližný vzorec tento zastírá však jednoduchý význam koefficientu převodního; při vážení pak plynů neb par jest ovšem neplatný.

§ 298. **Tabulka početní.**

Výraz pro koefficient k obsahuje specifický objem $\frac{1}{\delta}$ závaží a $\frac{1}{\sigma}$ vzduchu. Závaží velká, jež hlavně rozhodují, bývají zpravidla mosazná, zlacená; pak jest

$$\delta = 8{\cdot}4\ \frac{g}{cm^3}, \qquad \frac{1}{\delta} = 0{\cdot}119\ \frac{cm^3}{g}.$$

Vzduch má specifický objem měnlivý, dle tlaku a teploty, poněkud i dle vlhkosti; pro poměry obyčejné jest

$$\sigma = 0{\cdot}00120\ \frac{g}{cm^3} \qquad \frac{1}{\sigma} = 833{\cdot}3\ \frac{cm^3}{g}.$$

Přijmou-li se tyto hodnoty číselné, závisí koefficient k jen na specifickém objemu $\frac{1}{S}$ tělesa, které vážíme; lze tudíž počítati jednou pro vždy tabulku, kteráž pro obyčejné redukce, nejde-li o největší přesnost, stačí.

V následujícím jest tabulka tato uvedena. Koefficient k jest k lepšímu přehledu udán ve smyslu $^0/_{00}$ (promille); kolik tedy grammů činí M, tolik milligrammů činí redukce kM.

Redukce vážení na vakuum.

S	k	S	k	S	k
$\frac{g}{cm^3}$	$^0/_{00}$	$\frac{g}{cm^3}$	$^0/_{00}$	$\frac{g}{cm^3}$	$^0/_{00}$
0·7	+ 1·574	2·0	+ 0·458	8	+ 0·007
0·8	1·359	2·5	0·337	9	— 0·009
0·9	1·192	3·0	0·257	10	— 0·023
1·0	1·058	3·5	0·200	11	— 0·034
1·1	0·949	4·0	0·157	12	— 0·043
1·2	0·858	4·5	0·124	13	— 0·050
1·3	0·781	5·0	0·097	14	— 0·057
1·4	0·715	5·5	0·075	15	— 0·063
1·5	0·658	6·0	0·057	16	— 0·068
1·6	0·608	6·5	0·042	17	— 0·072
1·7	0·563	7·0	0·029	18	— 0·076
1·8	0·524	7·5	0·017	19	— 0·080
1·9	0·489	8·0	+ 0·007	20	— 0·083
2·0	+ 0·458	8·5	— 0·001	21	— 0·086

Grafické znázornění, kteréhož zde pomíjíme, dává větev hyperbolickou, jejížto rovnice, píšeme-li na okamžik y za k a x za S, se dá uvésti na tvar

$$(x - \sigma)\, y + \left(\frac{\sigma}{\delta}\right) = \sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\delta}\right).$$

Asymptoty této hyperboly jsou tudíž na sobě kolmo a jejich rovnice jsou

$$x = \sigma, \quad y = -\frac{\sigma}{\delta}.$$

Redukční koefficient k bliží se při stoupajícím S mezní hodnotě negativní

$$\frac{\sigma}{\delta} = 0{\cdot}143\ {}^{0}/_{00}.$$

§ 299. **Redukce při vážení relativním.**

Při vážení relativním jde o poměr dvou hmot K a K'. Vážením ve vzduchu na vahách, jež mohou býti nerovnoramenné, nalezneme $\frac{M}{M'}$. Formulujíce vážení mathematicky vzhledem k zákonu Archimedovu obdržíme rovnice

$$\frac{K}{S}(S - \sigma)\, g = \frac{M}{\delta}(\delta - \sigma)\, g,$$

$$\frac{K'}{S'}(S' - \sigma)\, g = \frac{M'}{\delta}(\delta - \sigma)\, g.$$

Dělením vychází

$$\frac{K}{K'} = \frac{M}{M'} \frac{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}}$$

čili provedeme-li na pravo dělení,

$$\frac{K}{K'} = \frac{M}{M'} + \frac{M}{M'} \frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}},$$

což píšeme zkráceně

$$\frac{K}{K'} = \frac{M}{M'} + \varrho \frac{M}{M'},$$

kdež značí ϱ číselný koefficient redukce na prostor vzduchoprázdný. Přesná jeho hodnota jest

$$\varrho = \frac{\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}}{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}}.$$

Také zde lze specifický objem $\frac{1}{S}$ proti velkému $\frac{1}{\sigma}$ vzduchu zanedbávati a psáti přibližně

$$\varrho = \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S'}\right)\sigma.$$

Je-li tudíž po ruce tabulka (předešlého odstavce) pro redukci na vakuum při vážení absolutním, počítá se tato přibližná hodnota koefficientu ϱ jakožto difference koefficientů k a k' pro specifické hmoty S a S' dle vzorce

$$\varrho = k - k',$$

což vede rychleji k cíli než přímý počet.

Stanovení hmoty specifické.

§ 300. **Výklad všeobecný.**

Hmota specifická, charakterisujíc materiál, jest veličinou prakticky velmi důležitou. Stanoví se vážením, při čemž má platnost zákon Archimedův; proto se k výkladům o zákoně tomto obyčejně připojuje výklad o stanovení hmoty specifické.

O methodách tohoto stanovení lze povšechně, bez ohledu na určité skupenství, uvésti hlavní myšlenky tyto. Specifická hmota S jest jakožto hmota jednotky objemové definována rovnicí

$$S = \frac{K}{V}.$$

Je-li tedy možno objem V určiti, pak postačí vážení jedno, jež zpravidla nikoli v prostoru vzduchoprázdném, nýbrž ve vzduchu se provádí. Poněvadž jde o vážení absolutní, nutno jednak přihlížeti k eventuální nerovnoramennosti vah, jednak výsledek vážení přepočísti na vakuum; tak se nabude hmota K tělesa skutečná.

Nelze-li objem V určiti, pak se vyloučí tím způsobem, že se vážením stanoví jednak hmota tělesa objemu V, jednak hmota téhož objemu V nějaké kapaliny, jejíž hmotu specifickou s známe. Při témže objemu jest pak poměr hmot absolutních týž jako hmot specifických. Zpravidla váží se ve vzduchu; výsledek se přepočítá na vakuum. Přihlížeti k eventuální nerovnoramennosti vah zde netřeba, poněvadž jde o vážení relativní.

Onou kapalinou, jejíž hmotu specifickou s za známou pokládáme, bývá zpravidla voda; při teplotě 4^0 jest $s = 1$; při každé jiné teplotě jest $s < 1$, ačkoliv se vždy málo od 1 liší.

Uvádíme již zde tabulku, pro teploměrnou škálu vodíkovou, na základě pozorování, jež vykonali *Marek*, *Thiesen*, *Scheel* a *Dies-*

selhorst *). Z tabulky této možno specifickou hmotu s vody pro teploty 0 . . . 30° vypsati. V intervallu tomto liší se obvyklé teploměry rtuťové jen velmi málo (nejvýše asi o 0·1°) od normálního teploměru vodíkového.

Na věci se ničeho nemění, když po případě, z důvodů jakýchkoli, místo vody béřeme nějakou kapalinu jinou, na př. alkohol aethylnatý a pod., jejíž hmotu specifickou s pro teploty, při nichž se pracuje, známe.

Specifická hmota vody.

t	s	*diff.*	t	s	*diff.*
°	$\frac{g}{cm^3}$		°	$\frac{g}{cm^3}$	
0	0·999868		15	0·999126	
		+ 59			— 156
1	927	+ 41	16	0·998970	— 169
2	968	+ 24	17	801	— 179
3	992	+ 8	18	622	— 190
4	1·000000	— 8	19	432	— 202
5	0·999992	— 24	20	230	— 211
6	968	— 39	21	019	— 222
7	929	— 53	22	0·997797	— 232
8	876	— 68	23	565	— 242
9	808	— 81	24	323	— 252
10	727	— 95	25	071	— 261
11	632	— 107	26	0·996810	— 271
12	525	— 121	27	539	— 280
13	404	— 133	28	259	— 288
14	271	— 145	29	0·095971	— 298
15	126		30	673	

Při redukci vážení na prostor vzduchoprázdný jest třeba znáti specifickou hmotu σ vzduchu, ve kterémž se vážení dálo. Přibližně stačí dosaditi

$$\sigma = 0{\cdot}0012 \frac{g}{cm^3};$$

jinak dlužno pozorovati tlak vzduchu, jeho teplotu a vlhkost, a z těchto dat pak přesnou hodnotu σ počítati **).

*) Obšírnější tabulky o specif. hmotě vody viz Thermiku, pag. 113, 1908, dle »Rozprav říšsk. fysik.-techn. ústavu« 3, pag. 68 a 69, 1900.

**) Viz o tom Thermiku, pag. 338, 1908.

Specifická hmota S tělesa pevného má platnost pro jistou teplotu t, kteráž jest dána poměry, při nichž bylo pracováno. Přepočítati tento výsledek na určitou teplotu normální t_0 není nesnadno, je-li znám objemový koefficient α roztažnosti tělesa; neboť jest patrně

$$\frac{S_0}{S} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0},$$

aneb

$$\frac{S_0}{S} = 1 + \frac{\alpha (t - t_0)}{1 + \alpha t_0}$$

tudíž, vynecháme-li ve jmenovateli pravé strany malé číslo αt_0 proti 1, přibližně

$$S_0 = S [1 + \alpha (t - t_0)]$$

čili

$$S_0 = S + S\alpha (t - t_0).$$

Výraz $S\alpha (t - t_0)$ udává tedy redukci specifické hmoty S, jak byla nalezena při teplotě t, na specifickou hmotu S_0 platnou pro jistou teplotu normální; u těles pevných volí se vždy $t_0 = 0$. Avšak koefficient α málokdy bývá znám, proto bývá jen zřídka (na př. u kovů) možno onu redukci na normální teplotu provésti. Podobné redukce bylo by nutno provésti u kapalin. Koefficient α byl by pak průměrným mezi teplotami t a t_0. Zde volí se obyčejně $t_0 = 15°$.

Co nyní zoveme specifickou *hmotou,* zvalo se druhdy specifickou *vahou* a dosud se rozdílu mezi oběma pojmy přesně nešetřívá. Rozdíl tento jest patrně týž jako mezi hmotou a vahou vůbec; jsou to veličiny úměrné a faktorem úměrnosti jest intensita g gravitačního pole. Je-li tudíž S *specifická hmota,* v jednotce $\frac{g}{cm^3}$ jakožto *hmota* jednotky objemové, jest Sg *specifická váha* v jednotce $\frac{dyna}{cm^3}$ jakožto *váha* jednotky objemové. Poslední pojem jest méně důležitý než prvý, poněvadž není význačným jen pro materiál, nýbrž též pro gravitační pole; proto se ho málo užívá.

Tělesa tuhá.

§ 301. Vážení ve vzduchu a měření objemu.

Těleso dané váží se ve vzduchu. Nerovnoramennost vah vymýtí se methodou Gaussovou neb Bordovou; tak se nalezne hmota M, jak by se přímo nalezla na vahách rovnoramenných. Vážení jest mathematicky formulováno — s vynecháním faktoru g —

rovnicí $$V(S-\sigma)=\frac{M}{\delta}(\delta-\sigma),$$

ze kteréž plyne $$S=\frac{M}{V}+\left(1-\frac{\frac{M}{V}}{\delta}\right)\sigma.$$

Výraz $\frac{M}{V}$ jest člen hlavní a dává hledanou veličinu S přibližně.

Výraz $\left(1-\frac{\frac{M}{V}}{\delta}\right)\sigma$ jest korrekce onoho členu hlavního, kteráž k němu přistupuje proto, že vážíme těleso ve vzduchu; pro $\sigma = 0$, t. j. pro vakuum korrekce odpadává. Je-li $\frac{M}{V}=\delta$, stává se korrekce nullou a mění znamení; jinak jest positivní neb negativní, dle toho, je-li $\frac{M}{V}\lesseqgtr\delta$.

Klademe-li $\delta = 8{\cdot}4$ a přestáváme-li na přibližném čísle $\sigma = 0{\cdot}0012$, můžeme pro jednotlivé hodnoty $\frac{M}{V}$ onu korrekci již napřed počítati, čímž pak její účinek v jednotlivých daných případech snadno posoudíme. Výsledek počtu ukazuje tabulka následující:

Korrekční člen při stanovení specifické hmoty z objemu.

$\frac{M}{V}$	$\left(1-\frac{\frac{M}{V}}{\delta}\right)\sigma$	$\frac{M}{V}$	$\left(1-\frac{\frac{M}{V}}{\delta}\right)\sigma$
$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{g}{cm^3}$
0	0·00120	10	— 0·00023
1	106	11	037
2	091	12	051
3	077	13	066
4	063	14	080
5	049	15	094
6	034	16	109
7	020	17	123
8	+ 0·00006	18	137
9	— 0·00009	19	151
10	023	20	166
		21	180
		22	— 0·00194

Vedle vážení tělesa žádá se určení jeho objemu V. Je-li těleso geometricky pravidelné, lze objem jeho z jistých lineárných rozměrů počítati. Jinak nutno sáhnouti k některým methodám volumenometrickým zvláštním. V každém případě zůstává přesnost, s jakou lze objem stanoviti, daleko za přesností, s jakou se stanoví jeho hmota. Nalezená hmota specifická S platí pro tu teplotu, při které provedeno měření objemu.

§ 302. Vážení ve vzduchu a ve vodě.

Při této methodě, ze všech nejčastěji užívané, jedná se o vážení *relativní*; netřeba tedy k nerovnoramennosti vah přihlížeti. Těleso ve vzduchu váží M, ve vodě — aneb v kapalině jiné, jejíž hmotu specifickou s známe — váží M'; rozdíl $M - M' = m$ udává jeho ztrátu na váze. Vynechávajíce faktor g vyjádříme jedno i druhé vážení rovnicemi:

$$V(S-\sigma)=\frac{M}{\delta}(\delta-\sigma),$$

$$V(S-s)=\frac{M'}{\delta}(\delta-\sigma),$$

Odečtouce rovnici dolejší od hořejší obdržíme

$$V(s-\sigma)=\frac{m}{\delta}(\delta-\sigma).$$

Rovnici tuto byli bychom mohli přímo vedle prvé napsati; neboť formuluje podobně vážení hmoty m stejného objemu V s hmotou M, jako by se bylo provedlo přímo. Dělením vyjde

$$\frac{S-\sigma}{s-\sigma}=\frac{M}{m}.$$

Rovnice tato má jednoduchý význam. Kdyby se vážilo ve vakuu, bylo by samozřejmým, že poměr $M : m$ jest týž jako poměr $S : s$, vzhledem ke stejnosti objemu. Když se však relativní vážení provádí ve vzduchu, jeví se toho účinek tím způsobem, že hmoty specifické vstupují do onoho poměru zmenšené o specifickou hmotu σ tohoto prostředí.

Řešíce rovnici poslední obdržíme ve formě, kterouž se ovšem souměrnost dřívější zastírá,

$$S=\frac{M}{m}(s-\sigma)+\sigma.$$

Stanovení specifické hmoty methodou, o níž právě jednáme, děje se obyčejně na vahách tak zvaných hydrostatických; miska vah na levo od pozorovatele bývá krátkou, tak aby se pod ni dala pohodlně postaviti ná-

doba s vodou anebo kapalinou, kterou snad místo vody béřeme. Nemají-li váhy krátké misky, položí se přes dlouhou můstek mosazný, na který se pak ona nádoba postaví. K zavěšení tělesa na háčku misky hodí se, lépe než jakákoli vlákna, tenké drátky platinové anebo mosazné, které, jsou-li tvrdé a tím pružné, žíháním (v kahanu Bunsenově) se stávají měkkými a ohebnými.

Těleso položí se tedy na misku a odvážením se určí M. Pak se zavěsí na drátek vhodné délky, ponoří do vody a odváží poznovu; hned potom se těleso z drátku vyjme a vážení se opakuje pro drátek samotný, tak jak byl zavěšen a jak zasahal do vody; když se toto vážení odečte od předešlého, vymýtí se váha drátku (ve vzduchu i ve vodě) a obdrží jen váha M' tělesa ve vodě; rozdíl $M - M'$ dává pak váhu m. Také jinak lze účinek drátu dle jeho rozměrů uvésti v počet, kterého však vzhledem k jednoduchosti jeho zde neuvádíme.

Je-li dané těleso specificky lehčí než voda, může stanovení jeho hmoty specifické býti určeno touž methodou, v tom provedení, že na levou misku zavěsíme na př. těžší drátěný mosazný zvonec, který jednou pro vždy ponoříme do vody a odvážíme; jeho váha nemá dále žádné důležitosti. Na to položíme těleso na misku a odvážíme ve vzduchu; potom vložíme je do vody pod zvonec a odvážíme znovu; váha jeho bude zde negativní — t. j. musíme od závaží, kterým se zvonec odvážil, něco ubrati; proto také obdržíme jeho »ztrátu na váze« — t. j. váhu téhož objemu vody — nikoliv odčítajíce, nýbrž sečítajíce jeho váhu ve vzduchu a jeho váhu ve vodě pod zvoncem. Na místě zvonce může býti ovšem jakékoliv specificky těžké těleso voleno, kteréž jednou pro vždy necháme ve vodě a ke kterémuž pak ono lehké těleso připojíme.

Obtíž největší při stanovení hmoty specifické dle předpisů, jak zde je uvádíme, činí přečetné bublinky vzduchové, kteréž se při ponoření tělesa do vody na povrch jeho nachytají aneb v jeho porech skryty zůstanou. Zejména tehdáž, když povrch tělesa jest drsný, neb když těleso obsahuje malé skuliny, může množství vzduchu, jež těleso s sebou do vody béře, míti na výsledek měření vliv dosti značný. Jest patrno, že bublinky tyto činí těleso *vždy* specificky *lehčím*, že tedy jde o chybu jednostrannou, kterouž nelze sebe četnějším opakováním měření vymýtiti. Za tou příčinou musí pozorovatel odstranění bublinek věnovati zvláštní pozornost a péči. Mnoho již pomůže, když se těleso opětovně do vody ponoří a vytáhne; malým štětcem lze rovněž bublinky vzduchové na povrchu zachycené odstraňovati; jiným prostředkem jest vyvaření vody, při čemž se ovšem předpokládá, že horká voda těleso nerozpouští; konečně prostředkem nejlepším jest vývěva; nádoba s vodou a s tělesem do vody ponořeným postaví se pod recipient vývěvy a vyčerpá se vzduch; bublinky vzduchové vystupují pak na venek; mírným otřásáním může se odlučování bublinek od tělesa napomáhati.

Při vážení tělesa ve vodě dlužno současně stanoviti jemným teploměrem teplotu vody t; z tabulky (§ 300.) vypíše se pro teplotu t specifická hmota s vody samé. Výsledek S pro těleso pevné má platnost též pro tuto teplotu.

§ 303. Vážení ve vzduchu a v pyknometru.

Methody popsané v § předcházejícím nelze dobře užíti, jde-li o tělísko velmi malé, anebo o drobná tělíska ve větším počtu předložená. Dobré služby koná však v případech takových *pyknometr* *). Jest to skleněná nádobka, jejíž objem lze určitým způsobem vždy stejně omeziti. Obr. 232. znázorňuje pyknometry forem různých, dle účelu, jemuž mají sloužiti. Pokud jde o úkol, o němž jednáme, jest výhodnou úprava, jakouž mají oba poslední pyknometry v obr. 232. na pravo vykreslené. Baňka má skleněnou zátku dobře zabroušenou, jež má podél kapillární trubičku. Příklopem lze vypařování vody v pyknometru zameziti.

Daná drobná tělíska odváží se ve vzduchu; nalezne se hmota M. Jedná se pak ještě o hmotu m téhož objemu vody.

Tuto nalezneme na základě úvahy následující. Mějmež pyknometr naplněný vodou a odvážený; hmota pyknometru i vody dohromady budiž P. Kdybychom vedle něho položili na misku vah daná tělíska, byla by hmota úhrnná $P + M$; kdybychom však ona tělíska vzali a vhodili do pyknometru vodou naplněného, tedy by něco vody vyteklo, právě tolik, mnoho-li tělíska vytlačí; proto, kdybychom nyní položili na misku vah pyknometr s vodou a tělísky uvnitř, byla by úhrnná hmota Q menší než před tím, a to právě o tolik, mnoho-li váží voda tělísky vytlačená, t. j. o hmotu m vody téhož objemu. Při tom jest zřejmo, že právě tak, jako dříve hmota M tělísek objemu V byla hmotou jak se nalezne ve vzduchu, že také takto určená hmota m téhož objemu V vody jest hmotou opět jak se určí ve vzduchu.

Pyknometr se naplní vodou a určí jeho hmota (brutto) P. Na to se něco vody ubéře, tělíska se vhodí do pyknometru, doleje se vody, zátka se uzavře a určí pak hmota pyknometru (s vodou i tělísky uvnitř) Q. Z těchto vážení a hmoty M tělísek samotných vě vzduchu nalezne se hmota m téhož objemu vody ve vzduchu dle vzorce

$$m = P + M - Q$$

a pak hmota specifická S dle vzorce uvedeného v § 302.

$$S = \frac{M}{m}(s - \sigma) + \sigma.$$

K těmto hlavním rysům dlužno připojiti některé podrobnosti. Vytkněme hned zpředu, že se podrobnosti tyto netýkají hmoty M oněch daných drobných tělísek ve vzduchu; byť i byla velmi malá, lze ji přímým vážením na jemných vahách stanoviti s přesností procentuálně velikou.

---

*) z řeckého πυκνός adj. hustý.

Avšak jinak jest tomu při hmotě m téhož objemu vody. Tato jest (předpokládajíc tělíska specificky těžší než voda) ještě menší než hmota M, a stanoví se z *difference* vážení dvou. Jak ihned objasníme, mohou při jednotlivých těchto váženích nastati změny, mající na každé vážení *jednotlivé* procentuálně jen malý účinek, jež však *differenci* obou výsledků mohou *procentuálně* modifikovati velmi značně; proto jest nutno oněm změnám zvláštní věnovati pozornost.

Pyknometr se váží nejprve s vodou bez tělísek, a pak s vodou a tělísky. Může se státi, že se teplota mezi jedním a druhým vážením, i když přímo po sobě následují, poněkud změní, že na př. stoupne, jak obyčejně bývá, blízkostí pozorovatele, manipulacemi s pyknometrem a pod. Anebo může se státi, že vážení jedno, na př. pyknometru s vodou, se již jednou dříve, před delším časem provedlo, kdy vůbec teplota byla zcela jiná, zejména když pozorovatel mnoho takových určení provádí týmž pyknometrem, při čemž stanoví hmotu P pyknometru s vodou při jisté teplotě t jednou pro vždy. Je-li však teplota při vážení pyknometru s vodou a tělísky jiná, na př. t', pak jest také objem pyknometru jiný, také specifická hmota vody jest jiná než jak tomu bylo při teplotě t; ale pak nejsme oprávněni obě pozorování vespolek kombinovati k vypočítání hmoty m, poněvadž hmota Q se již vztahuje jako by k jinému pyknometru, jiného objemu, a také k jiné vodě, jiné hmoty specifické, než hmota P. Následkem toho jest nutno, vážení pyknometru s vodou, jak se dálo při teplotě t, *nahraditi jiným*, jaké by se dálo *při téže teplotě* t', při které vážíme pyknometr s vodou a tělísky; jinými slovy: z výsledku P vážení při teplotě t nutno *počítati* váhu P', jaká by se nalezla při teplotě t'.

Znamenejmež hmotu vody bez pyknometru (netto) p při teplotě t a p' při teplotě t'. Objem pyknometru budiž O při teplotě t a O' při teplotě t'. Konečně budiž s a s' specifická hmota vody při teplotě t a t'.

Formulemi vyjádříme pak (vynechávajíce opět faktor g) váhu ve vzduchu vody v pyknometru obsažené při obou teplotách t a t' rovnicemi:

$$O\,(s-\sigma)=\frac{p}{\delta}\,(\delta-\sigma)$$

$$O'\,(s'-\sigma)=\frac{p'}{\delta}\,(\delta-\sigma).$$

Dělením obou rovnic plyne:

$$\frac{p'}{p}=\frac{s'-\sigma}{s-\sigma}\cdot\frac{O'}{O}.$$

Je-li α kubický koefficient toho druhu skla, ze kterého jest pyknometr zhotoven, pak můžeme psáti:

$$\frac{O'}{O}=1+\alpha\,(t'-t),$$

tak že obdržíme:

$$\frac{p'}{p}=\frac{s'-\sigma}{s-\sigma}\,[1+\alpha\,(t'-t)].$$

Touto rovnicí jest již hořejší úloha rozřešena; je-li P a P' hmota vody s pyknometrem (brutto) při teplotě t a t' a znamenáme-li $\tilde{\omega}$ hmotu pyknometru samého, můžeme psáti

$$\frac{P'-\tilde{\omega}}{P-\tilde{\omega}}=\frac{s'-\sigma}{s-\sigma}\,[1+\alpha\,(t'-t)].$$

Znajíce hmotu P počítáme z této rovnice hmotu P' a teprve z této počítáme m' dle rovnice

$$m'=M+P'-Q,$$

kdež pak m' značí hmotu vody téhož objemu, jaký mají tělíska, a sice hmotu vody teploty t'; proto jest pak specifická hmota tělísek dána rovnicí

$$S=\frac{M}{m'}\,(s'-\sigma)+\sigma,$$

neboť vše přepočítáváme na tu teplotu t', která byla při vážení pyknometru s vodou a s tělísky.

Hořejší výraz

$$\frac{s'-\sigma}{s-\sigma}$$

možno nahraditi jednodušším, velmi přibližným. Jest totiž s i s' velmi blízce $=1$, tak že rozdíly $1-s$, $1-s'$, $s-s'$ jsou malé prvého řádu, jichž součiny lze zanedbávati. Na tom základě odvodíme vztah

$$\frac{s'-\sigma}{s-\sigma}=\frac{1-(1-s'+\sigma)}{1-(1-s+\sigma)}=1-(s-s'),$$

když totiž dělení ve výrazu prostředním provedeme a ony součiny zanedbáme, pamatujíce, že jest též σ velmi malé. Tím vyjde pak dále, na témže základě,

$$\frac{P'-\tilde{\omega}}{P-\tilde{\omega}}=[1-(s-s')]\,[1+\alpha\,(t'-t)]$$

$$=1-(s-s')+\alpha\,(t'-t)$$

vzhledem k tomu, že jest též α velmi malé číslo, jako $s-s'$. Tak obdržíme rovnici definitivní

$$P'=P-(P-\tilde{\omega})\,[(s-s')-\alpha\,(t'-t)],$$

kterouž se váha P (brutto) pyknometru s vodou teploty t přepočítává na váhu P' (brutto) pyknometru s vodou teploty t'. Pozoruhodno jest, že váha $\tilde{\omega}$ pyknometru samého pouze v korrekčním členu přichází; poněvadž pak celý koefficient $[(s-s')-\alpha\,(t'-t)]$ jest velice malý, vzhledem k tomu, že teploty t a t' ve skutečných případech jen mírně od sebe bývají rozdílny, proto rozhoduje o korrekci celé jen hlavní číslo difference $P-\tilde{\omega}$; není tudíž třeba, aby váha $\tilde{\omega}$ pyknometru byla přesně určena, postačí jen hodnota přibližná (okrouhlé číslo). Není-li tedy na př. pyknometr, když se váží o sobě, dobře vysušen, není to nikterak na závadu, aby se již jeho vážení provedlo; nějaké úzkostlivé vysušování zde, na tomto místě, jest zbytečné.

Stanovení teploty vody v pyknometru děje se jemným teploměrem a to před tím, nežli se váží. K tomu cíli naplní se pyknometr vodou jen potud,

aby se ještě malý jemný teploměr dal dovnitř vložiti a voda aby nevytékala; po odečtení — když jest pozorovatel jist, že se teplota ustálila — doplní se pak pyknometr vodou stejně teplou, která se původně do něho nalila. Dobře jest vzíti vodu raději o něco málo teplejší než jest teplota síně, ve které se vážení děje; nic pak nevadí, jestliže mezi vážením voda poněkud chladne a se stahuje; neboť tím se množství její nemění; naproti tomu, v případě opačném, kdyby voda byla značně chladnější než vzduch v pracovně, mohlo by se státi, že by voda znenáhla se oteplujíc kapillární trubičkou vytékala. Aby zde jistá volnost zůstávala, jest dobře, nenechávati kapilláru naplněnou zcela až na kraj, nýbrž raději pijavým papírem vždy něco vody ubrati až klesne k určité značce na zátce samé vryté; objem pyknometru platí pak až k této značce. Také eventuální utírání pyknometru nemá žádného škodlivého účinku, i když by se při tom voda uvnitř poněkud málo zahřála, pokud jen voda nevytéká ven. Ještě přesněji stanoví se teplota vody vnořením pyknometru do lázně, v níž se pak objem vody (odssáváním neb doléváním) adjustuje.

Veliké obtíže činívají bublinky vzduchové, které se při vkládání drobných tělísek do pyknometru vždy ve značném počtu na tělíska nachytají; jich odstranění musí zde s pílí tím větší býti provedeno, poněvadž se zde jedná o tělíska drobná malého objemu, kde tudíž bublinky vzduchové, povrch obalující, poměrně daleko větší mají účinek na výsledek, kterýž umenšují, než u těles velikých, objemu značného. Prostředkem nejlepším k jich odstranění jest vývěva.

Kubický koefficient α roztažnosti pyknometru nebývá zpravidla přesně znám; postačí však vzíti hodnotu okrouhlou $\alpha = 0{\cdot}000025 = \frac{1}{40000}$ vzhledem k tomu, že tepelná difference $t' - t$ nebývá značná a že tudíž eventuální odchylka od koefficientu skutečného jen malý má na úhrnnou korrekci účinek.

Nalezená specifická hmota S tělesa pevného má platnost pro tu teplotu t', při které bylo těleso váženo v pyknometru.

§ 304. **Methoda suspensační.**

Základem této methody, zejména v mineralogii často užívané, jest úkaz, že tělísko pevné v kapalině po případě ani nestoupá, ani neklesá, nýbrž volně se vznáší, zůstávajíc suspendováno. Případ ten nastává, když tělísko a kapalina mají hustotu stejnou. Máme-li tedy kapalinu, hustší než tělísko, a vedle ní jinou, řidší, jež s onou možno míchati, můžeme upraviti směs obou tak, aby se v ní tělísko vznášelo. Tím jest pak úkol, stanoviti hmotu specifickou tělíska, převeden na snažší, stanoviti hmotu specifickou této směsi, což lze methodami, o nichž jednáme níže.

Jakožto kapaliny k účelu tomu vhodné uvádíme následující, připojujíce $\left(\text{v jednotce } \frac{g}{cm^3}\right)$ jich hmotu specifickou. Při hustotách menších

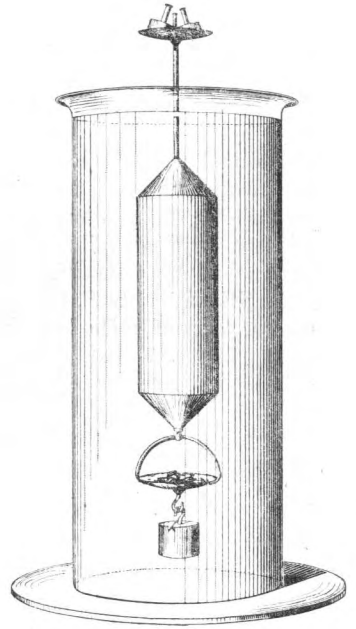
volívá se methyleniodid (3·3), bromoform (2·9), chloroform (1·5); k těmto na míchání benzol (0·88), toluol (0·89), xylol (0·87). Dále kapalina *Thuletova* (3·3), jež jest roztok iodidu rtuťnatého v roztoku iodidu draselnatého; kapalina *Rohrbachova* (3·5), kde iodid draselnatý jest zastoupen iodidem barnatým aneb methyleniodidem. Obě kapaliny zřeďují se vodou anebo též benzolem neb xylolem, také iodmethylem. Pro hustoty ještě větší shledává *Rötgers* tyto kombinace vhodnými. Nasycený roztok triiodidu arsenu neb antimonu ve směsi tribromarsenu a iodmethylenu; hustota 3·70 při 20°. Anebo nasycený roztok tetraiodidu cínu v tribromarsenu; hustota 3·73 při 15°.

Možnost obdržeti kapaliny neb roztoky hustoty 4·0 neb více (rtuť ovšem vyjímajíc) zdá se býti vyloučena *). Jde-li o tělíska hustší, nutno je spojovati s řidšími, na př. s kousky velmi přesně odváženého paraffinu (Jolly 1886).

K definitivnímu zařízení a odečtení napomáhá teplota, poněvadž se touto hustota kapaliny více mění než tuhého tělíska.

Methodou suspensační lze děliti též práškovité směsi tělísek různé hustoty. Jinak lze vhodně použíti diffuse kapalin, kterou se průběhem delší doby kapalina ve vysoké nádobě ustálí tak, že rovnoměrně její hustoty ubývá s výškou. Tím se pak převede určení hmoty specifické tělíska na odměření výšky, v níž tělísko se vznáší (Sollas 1891).

§ 305. **Araeometr Nicholsonův.**



Obr. 231.

Hustotu drobných tělísek tuhých lze též určiti araeometrem, v obr. 231. znázorněným, kterýž r. 1787 udal *W. Nicholson* **). Stroj zastupuje váhy, jež se nahoře závažím dotíží tak, aby zapadly do vody až k jisté značce na drátku označené. Vážením differenčním určí se váha tělíska umístěného jednou nahoře na mističce ve vzduchu, po druhé dole na košíčku ve vodě. Výsledek jest málo přesný, poněvadž araeometr představuje váhy málo citlivé. Mimo to působí rušivě též změny teploty vody.

*) Listy chemické, 1899, p. 34.

**) *William Nicholson* (1753—1815), inženýr v Londýně.

Kapaliny.

§ 306. **Měření objemu a vážení ve vzduchu.**

Je-li M hmota (váha netto) kapaliny, jejíž hmotu specifickou S hledáme a jejíž objem V můžeme stanoviti, vyjádříme výsledek vážení na vahách rovnoramenných rovnicí

$$V(S-\sigma) = \frac{M}{\delta}(\delta - \sigma),$$

ve kteréž značí δ specifickou hmotu závaží a σ specifickou hmotu vzduchu; z rovnice této pak plyne

$$S = \frac{M}{V} + \left(1 - \frac{\frac{M}{V}}{\delta}\right)\sigma.$$

Korrekce, kteráž ke hlavnímu členu $\frac{M}{V}$ přistupuje proto, že vážíme ve vzduchu, bývá u kapalin procentuálně značnou, poněvadž jest jejich hmota specifická zpravidla malá, obyčejně blízce $= 1$. Pro hustotu $= 1$ činí korrekce $0{\cdot}106\%$. Hmota M určí se methodou Gaussovou nebo Bordovou. Objem V lze u kapalin snáze a přesněji stanoviti než u těles tuhých, totiž kalibrovanými nádobami; buď se naleje kapalina do baňky, již kalibrované, kteráž až do určité značky má jistý objem, na př. 1 litr neb $^1/_2$ neb $^1/_{10}$ litru, anebo se vypustí do baňky nekalibrované z byretty neb pipetty, jejížto kalibr byl kontrolován. Vypařování kapaliny dlužno uzavřením nádoby zameziti.

Specifická hmota S, jak se dle methody této vypočte, má platnost pro tu teplotu, kterouž měla kapalina, když se odečetl její objem.

§ 307. **Určení pyknometrem.**

Vzhledem k tomu, že jest snáze *rovnost* objemu dvou kapalin zaručiti než objem jedné přesně určiti, stanoví se specifická hmota kapaliny výhodněji dvojím vážením. Nádobka skleněná vhodného objemu V, kterýž lze přesně odečísti, tak zvaný *pyknometr*, váží se jednou s kapalinou, jejížto specifickou hmotu S hledáme, podruhé s vodou, jejížto specifická hmota s jest známa. Znamená-li M váhu kapaliny samotné (váhu netto) a rovněž m váhu vody samotné (váhu netto), jest jedno i druhé vážení ve vzduchu specifické hmoty σ, je-li δ specifická hmota závaží, vyjádřeno rovnicemi (s vynecháním faktoru g)

$$V(S-\sigma) = \frac{M}{\delta}(\delta - \sigma),$$

$$V(s-\sigma) = \frac{m}{\delta}(\delta - \sigma),$$

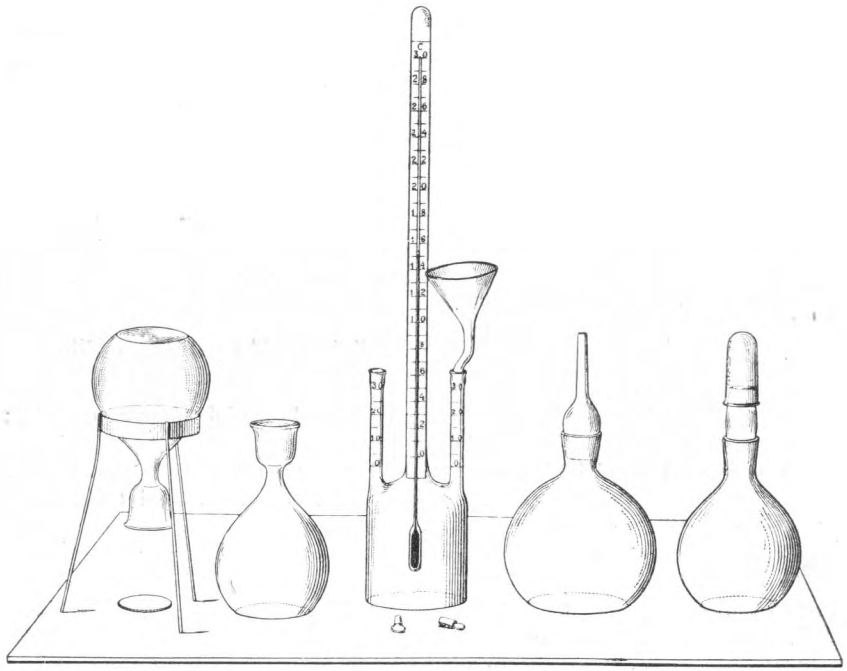
ze kterýchž plyne dělením

$$\frac{S-\sigma}{s-\sigma} = \frac{M}{m},$$

z čehož stanovíme

$$S = \frac{M}{m}(s-\sigma) + \sigma.$$

Rovnice tato předpokládá, že objem V pyknometru byl při vážení prvém — (s kapalinou) — právě takový jako při vážení druhém — s vodou —, kterážto podmínka jenom tehdáž jest přesně vyplněna, byla-li teplota kapaliny právě taková jako teplota vody; v tom případě platí, jak specifická hmota S kapaliny, tak i vody s pro onu společnou teplotu t.



Obr. 232.

Byla-li však teplota t' kapaliny jiná než teplota t vody, na př. $t' > t$, a značí-li V objem pyknometru při teplotě t, pak jest objem pyknometru V' při teplotě t' dán výrazem

$$V' = V[1 + \alpha(t' - t)],$$

kdež znamená α kubicky koefficient skla. Obě hořejší rovnice nabývají pak tvaru následujícího:

$$V\,[1 + \alpha\,(t' - t)]\,(S - \sigma) = \frac{M}{\delta}\,(\delta - \sigma)$$

$$V\,(s - \sigma) = \frac{m}{\delta}\,(\delta - \sigma),$$

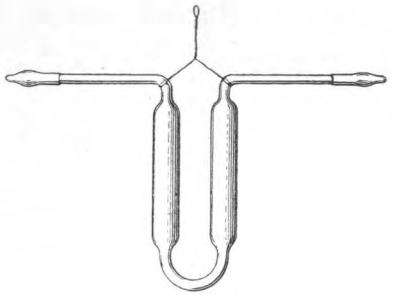
ze kterých plyne

$$\frac{S - \sigma}{s - \sigma}\,[1 + \alpha\,(t' - t)] = \frac{M}{m}$$

čili

$$\frac{S - \sigma}{s - \sigma} = \frac{M}{m + m\,\alpha\,(t' - t)}.$$

Rovnici tuto lze jednoduše vyložiti; aby totiž rovnost objemu byla přísně zachována, nutno k váze (netto) m vody jako korrekci připojiti tolik, mnoho-li přísluší onomu zvýšení objemu pyknometru při přechodu od teploty t k teplotě t' (předpokládajíc $t' > t$); tím převedeme vážení pyknometru s vodou na vážení, jak by bylo vypadlo, kdyby objem pyknometru byl býval také ten, který byl při vážení s kapalinou. Zavedeme-li na místě korrigovaného m označení m^*, obdržíme opět



Obr. 233.

$$S = \frac{M}{m^*}\,(s - \sigma) + \sigma.$$

Ona korrekce $m\alpha\,(t' - t)$ bývá jen při větších rozdílech tepelných značnější; béřeme-li

$$\alpha = \tfrac{1}{40000} = 0{\cdot}000025$$

vychází, že při tepelném rozdílu

$$t' - t = 10^0$$

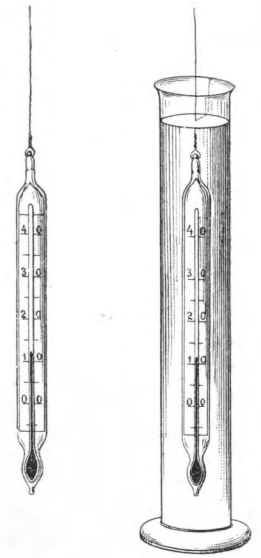
ona korrekce činí pouze $0{\cdot}025\,\%$; při tepelných rozdílech, nepřesahujících 2^0, možno je zanedbávati, ačli nemá stanovení specifické hmoty S býti přesnější než na $\frac{1}{100}$ procenta. Rozmanité formy pyknometrů znázorňuje obr. 232. Stanovení teploty kapaliny i vody se velice usnadní, když v pyknometru samém jest již jemný teploměr umístěn. Jinak vkládá se pyknometr do (vodní) lázně, jejíž teplotu lze určiti. Pyknometr *Sprengelův*, v obr. 233. znázorněný, usnadňuje svou formou rychlou výměnu teplot. V modifikaci *Ostwaldově* jest pyknometr ten rozšířen v nádobku jen na jedné straně, na druhé jest úzká trubička; mimo to jest opatřen v hořejší vodorovné trubičce značkou, až ke které dlužno pyknometr naplniti.

§ 308. Určení tělískem ponorným.

Methodou pyknometrickou stanoví se hmota jistého objemu kapaliny a téhož objemu vody přímo. Téhož cíle lze dojíti nepřímo tím, že se těleso pevné jistého objemu V váží nejprve ve vzduchu,

potom v kapalině a ve vodě, a že se počítá ztráta na váze jeho, a to ztráta M při vážení v kapalině a ztráta m při vážení ve vodě. Vzhledem k zákonu Archimedově jest to tak, jako bychom byli ono množství kapaliny neb vody příslušící objemu V, přímo odvážili, a sice ve vzduchu, poněvadž ono původní vážení tělesa pevného se dálo též ve vzduchu. Proto platí i zde rovnice, jež jsme měli v § předcházejícím.

Ono těleso pevné, objemu V, bývá zpravidla (duté) tělísko skleněné, podélné, háčkem neb očkem opatřené a na drátku platinovém zavěšené; aby v kapalině zapadlo, bývá dole zatíženo na př. rtutí. Tělísko takové lze ze skleněné trubice vhodného průměru snadno improvisovati. Velmi dobře může tělískem takovým býti malý teploměr; teplotu kapaliny a vody lze pak ihned, jakmile vážení bylo ukončeno, na tělísku samém odečísti. Kapalina a voda nalévají se do vysokých a úzkých nádob vhodné velikosti, přiměřené rozměrům tělíska (obr. 234.). Při velmi přesném vážení nutno ovšem též k tomu přihlížeti, aby drátek platinový stejně hluboko do vody jako do kapaliny se ponořil; ta část drátu, která zůstává neponořena, může býti jakkoliv dlouhá a je-li s drátkem spojen na př. mosazný háček na zavěšování, může tento býti jakkoliv veliký; neboť při tvoření differencí mezi vážením v kapalině neb ve vodě a mezi vážením ve vzduchu se váha drátku neponořeného ovšem vymýtí. Drátek platinový nechť jest co možná tenký, aby kapillaritou nevznikaly zbytečné nesnáze; proto také budiž na háčku tělíska otočen krátce, aby neprocházel dvojitě povrchem kapaliny a vody.



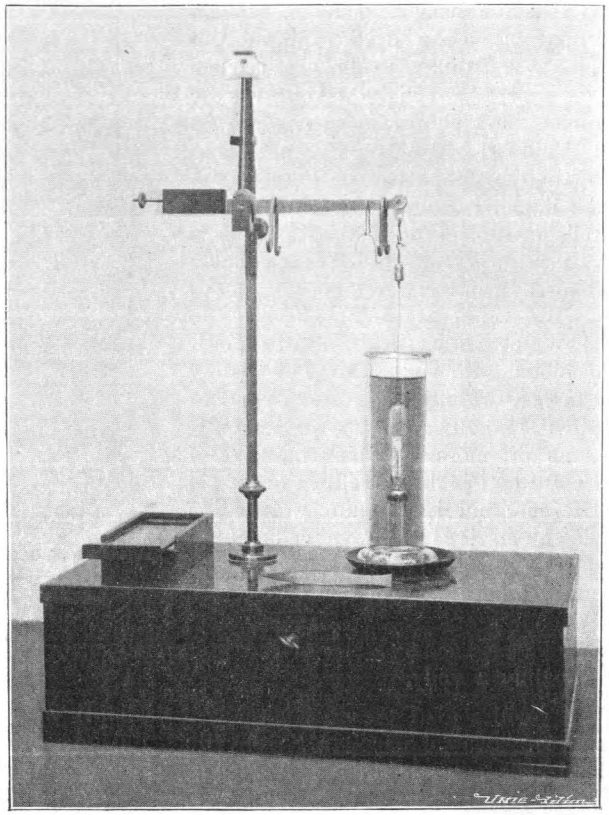
Obr. 234.

Hořejší rovnice platí přesně jen tehdy, byla-li při vážení teplota t' kapaliny právě taková jako teplota t vody. Jinak dlužno rovnici tu korrigovati vzhledem k tomu, že při různých teplotách t a t' také tělísko skleněné různý má objem V a V'. Úvaha jest zde zcela podobna té, kterouž jsme učinili při pyknometru. Formule převodní jsou tytéž. Methoda stanovení hmoty specifické kapalin tělískem skleněným jest ze všech nejpohodlnější; neboť odpadávají zde všeliké nesnáze s přeléváním kapaliny a vody, s vysušováním nádob, jakož i se stanovením teploty; odpadávají též chyby vznikající vypařováním kapaliny neb vody. Methoda tato byla by i ze všech nejpřesnější, kdyby nepřekážel odpor prostředí volné pohyblivosti tělíska v kapalině a ve vodě, jakož i kdyby přilnavostí kapaliny neb vody ku drátku nevznikaly chyby při vážení; kývání pravidelné vah nelze za těchto poměrů očekávati; nezbývá než vyčkati, až se váhy ustálí, což se velmi záhy stane; při tom bývá však rovnovážná poloha nahodilými pří-

činami podmíněna (třením, přilnavostí a pod.) a následkem toho neurčita. Obtíže takové ovšem při methodě pyknometrické odpadávají a proto jest tato přesnější.

§ 309. Vážky Mohrovy.

Vážky Mohrovy umožňují určiti hmotu specifickou kapalin *rychle*, bez všelikého počítání, třebas méně přesně. Methoda, které se při nich užívá, jest methoda tělíska skleněného; bývá jím malý teploměr. Tento



Obr. 235.

jest na konci jednoho ramene vahadla jednou pro vždy na drátku platinovému zavěšen, a na druhém rameni vahadla vyvážen (obr. 235.); tím odpadává jeho vážení ve vzduchu, tak že se může ihned stanoviti jeho ztráta na váze, když se ponoří do kapaliny dané neb do vody.

Pravili jsme, že se u vážek Mohrových nežádá největší přesnosti. Z toho plyne, že smíme zde zanedbávati korrekce, jež jsme o přesném stanovení hmoty specifické uvedli v odstavcích předcházejících.

Tak především zanedbáváme změny objemu skleněného tělíska, vznikající růzností teplot t' a t kapaliny a vody, do nichž se tělísko ponoří. Ale také účinek vážení ve vzduchu můžeme zanedbávati. Jak veliký účinek tento jest, vysvítá z rovnice

$$S = \frac{M}{m}\, s + \left(1 - \frac{M}{m}\right) \sigma.$$

Korrekce za příčinou vážení ve vzduchu činí tedy

$$\left(1 - \frac{M}{m}\right) \sigma \text{ absolutně}, \quad \left(1 - \frac{M}{m}\right) \sigma : \frac{M}{m} \text{ relativně}.$$

Největší počet kapalin — (rtuť ovšem vyjímajíc) — má hmotu specifickou, kteráž se jen málo liší od specifické hmoty vody; můžeme tedy klásti

$$\frac{M}{m} = 1 + \varepsilon,$$

kdež jest ε obyčejně několik málo desetin; pak jest ona korrekce dána výrazem

$$-\varepsilon\sigma \text{ absolutně}, \quad -\frac{\varepsilon\sigma}{1+\varepsilon} \text{ relativně},$$

jedno i druhé číslo jest velmi malé vzhledem k tomu, že jest σ velmi malé. Pro aether $S = 0{\cdot}7$ činí tedy ona korrekce jen $+ 0{\cdot}05\%$, pro koncentrovanou kyselinu sírovou $S = 1{\cdot}8$ jen $- 0{\cdot}05\%$; pro celou řadu obyčejných kapalin (roztoků solí, kyselin) ještě méně; přestáváme-li tedy na tom, aby jen desetiny procenta, nikoli však setiny, byly zabezpečeny, smíme i tuto korrekci zanedbávati.

Tím zbývá vzorec pro kapaliny velice přibližný

$$S = \frac{M}{m}\, s.$$

Vzorec tento zjednodušuje se u vah Mohrových ještě dále, a to tím, že zde jest

$$m = s$$

a v tom spočívá právě zvláštnost Mohrových vážek. Podmínce této lze vyhověti dvojím způsobem. Buď volíme tělísko, jehož objem jest 1 cm^3; pak jest, v mezích vytčené přesnosti, $m = s$; objem tělíska tedy přizpůsobíme jednotce hmoty 1 grammu. Anebo naopak přizpůsobíme jednotku hmoty, jakéž bychom při vážení na vážkách těchto užívali, objemu daného tělíska, volíce tuto jednotku tolikráte větší než 1 gramm, kolik cm^3 objemu ono tělísko má. Je-li tedy objem tento v cm^3, pak si utvoříme zvláštní jednotku v-grammovou, i bude pak všeobecně $m = vs$ a speciálně, v této zvláštní jednotce, $m = s'\ (v \cdot 1) = s$; specifická hmota S jest pak dána rovnicí

$$S = M,$$

kdež M není vyjádřeno v grammech, nýbrž opět v oné zvláštní jednotce v-grammové. Druhý tento způsob lze snáze realisovati než prvý; proto také když se o vahách Mohrových jedná, předpokládá se vždy, že při nich vážíme zvláštní takovou jednotkou.

Tato jednotka vah Mohrových hotoví se obyčejně z mosazi ve formě jezdce a to pro obyčejné kapaliny ve dvou exemplářích; vedle ní hotoví se ještě její desetina, setina, eventuálně též ještě tisícina, ačkoliv se této zřídka užívá. Těchto pět závaží vystačí úplně k vážení, když ještě to rameno vahadla, na kterémž visí tělísko, rozdělíme na 10 dílů, jež opatříme výřezy, tak abychom mohli ona jednotlivá závaží pohodlně a určitě zavěsiti. Majíce pak stanoviti specifickou hmotu dané kapaliny, nalejeme ji do nádobky k tělísku skleněnému vážek Mohrových náležející a zapustíme do ní tělísko; na to zavěsíme v plné vzdálenosti jedničku. Je-li to mnoho, jest daná kapalina lehčí než voda, je-li to málo, jest těžší. V jednom i druhém případě rozvěsíme pak ona závažíčka, aby rovnovážná poloha vah byla táž, jako před ponořením tělíska do kapaliny, a můžeme, dosáhnouce toho, z uspořádání oněch závažíček specifickou hmotu S přímo odečísti dle $S = M$.

Z toho také jest patrno, jak zkoušíme správnost vah Mohrových. Předpokládajíce, že jest dělení vahadla správně provedeno, jakož i že jsou ona závažíčka v poměru 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ správně zhotovena, ponoříme tělísko do vody teploty t a určujeme její hmotu specifickou; musí vyjíti číslo s, které z tabulek (§ 300.) pro danou teplotu vypíšeme. Účelu podobnému, jako vážky Mohrovy, slouží tangenciální vážky, jež sestrojil *K. V. Zenger* (1871). Obšírný popis a tabulky viz v jeho Mechanice, pag. 299.

§ 310. **Araeometry.**

Araeometry (hustoměry) zakládají se na zákonech o plování těles tuhých v kapalinách. Máme-li těleso pevné, objemu V a specifické hmoty S, a zapadne-li objemem v do kapaliny specifické hmoty s zůstávajíc objemem $V - v$ ve vzduchu specifické hmoty σ, platí pro případ, že těleso tuhé na kapalině plove, rovnice

$$\frac{v}{V} = \frac{S - \sigma}{s - \sigma}.$$

Pro jinou kapalinu jest obdobně

$$\frac{v'}{V} = \frac{S - \sigma}{s' - \sigma}.$$

Z obou rovnic odvozujeme výslednou

$$\frac{v'}{v} = \frac{s - \sigma}{s' - \sigma}$$

a touto jest vyjádřena základní myšlenka araeometrů, souditi totiž na specifickou hmotu z objemu, kterým zapadnou do jisté kapaliny, v níž plovou. Přesnost, jakou při tom lze očekávati, jest však jen mírná; araeometr má sloužiti více k rychlé orientaci. Proto také lze přestati na rovnici přibližné

$$\frac{v'}{v} = \frac{s}{s'}$$

a v souhlasu s tím také nedbati eventuálních změn objemových při různých teplotách.

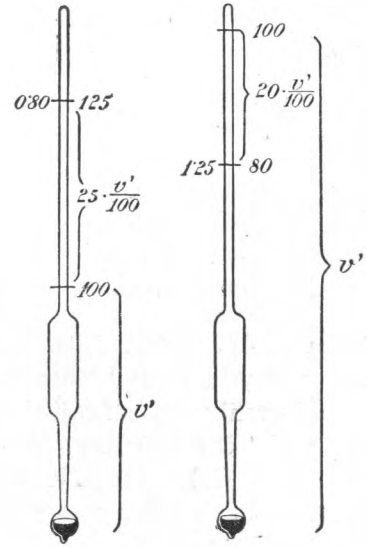
Zaznamenáme-li tedy jednou pro vždy objem v', kterýmž araeometr zapadne do vody 4stupňové, pro niž jest $s' = 1$, a pozorujeme-li objem v, kterýmž araeometr zapadne do kapaliny, jejíž specifickou hmotu s hledáme, bude dle hořejší rovnice

$$s = \frac{v'}{v}.$$

Poněvadž se pak při tom jedná o poměr obou objemů v a v', bude jednostejno, jakou jednotkou objem araeometru vyměřujeme; můžeme na př. aby objem v' byl vyjádřen okrouhlým číslem = 100, vzíti za jednotku objemu $\frac{1}{100}\,v'$ a touto jednotkou vyjádřiti objem v; bude pak

$$s = \frac{100}{v}.$$

Takto jest zařízen araeometr Gay-Lussac-ův, kterýž se zvlášť zove *volumenometrem*, poněvadž dle *objemu počítáme* váhu specifickou. Aby se odečtení objemu v mohlo díti co možná přesně, jest žádoucí, aby se jednotka objemová $\frac{1}{100}\,v'$ jevila dílcem značné délky; proto jest ta část volumenometru, na niž se má škála nanésti, a jež z větší neb menší části z kapalin vyčnívá, úzká a dlouhá, při tom přesně cylindrická, aby dělení objemové pokračovalo, jakož jest nejjednodušším, pravidelně ve stejných dělkových intervallech. Zbývající část volumenometru, jež v kapalinách ponořenou zůstává, jest širší a kratší. Aby pak volumenometr v kapalinách ploval stabilně, jest opatřen dole nádobkou obsahující vhodné množství rtuti. Jinak jest celý přístroj obyčejně skleněný a dutý.



Obr. 236.

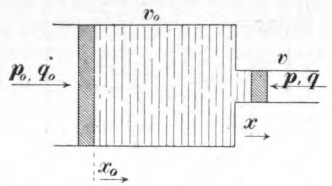
Jest výhodno, hotoviti zvláštní volumenometr pro kapaliny lehčí než voda, a opět zvláštní pro kapaliny těžší než voda; u těchto jest bod 100 na hořejším, u oněch na dolejším konci cylindrické trubičky. Bez tohoto rozdělení úloh vypadl by přístroj buď příliš dlouhým aneb, kdybychom se tomu chtěli vyhnouti, málo citlivým. Přístroj zde popsaný mění se v tak zvaný *densimetr*, když na místě stupnice objemové jest nanesena stupnice hustoměrná; ona pokračuje rovnoměrně, tato od čísel menších k větším urychleně. Souvislost mezi čísly jedné i druhé stupnice jest jednoduchá (obr. 236.). Patrně jsou densimetry pro praxis pohodlnější než volumenometry a proto oblíbenější. Účelům zvláštním slouží mlékoměry, cukroměry a pod. a nejdůležitější ze všech, lihoměry, jimiž se má rychle stanoviti

procentuální množství absolutního líhu ve zředěném. Araeometry Beaumé, Cartier, Beck, jsou zastaralé. S araeometry bývá často spojen teploměr, aby se zároveň s odečtením hustoměrným poznamenala teplota, pro niž platí.

Pohyb kapalin.

§ 311. **Energie proudění.**

Odvozujíce základní rovnice o pohybu kapalin nepřihlížíme — podobně jako při úvodním výkladu o rovnováze kapalin — k tíži. Představujeme sobě dokonalou kapalinu v nádobě konstantního průřezu q_0, uzavřenou pístem bez všelikého tření pošinovatelným; k nádobě připojuje se trubice konstantního průřezu q, v níž jest kapalina též uzavřena pístem volně pohyblivým (obr. 237.). Kdyby na každou jednotku plošnou pístu q_0 a q působil týž vnější tlak p_0 a p, byla by rovnováha i tehdá, kdyby průřez q_0 byl jakkoli větším než průřez q (§ 285.). Proudění kapaliny z nádoby do trubice nastane teprve, když jest $p_0 > p$. Předpokládejme, že se proudění ustálí, v tom smyslu, že na každém místě tlak, jakož i rychlost co do směru i co do velikosti zůstávají stálými. Proudění zove se pak stationárním; částečky kapaliny týmž bodem procházející pohybují se všeobecně v křivkách proudových tvaru stálého. Pošine-li se za jistou dobu píst q_0 o délku x_0 a píst q o délku x, jest přebytek práce dán rozdílem



Obr. 237.

$$p_0 q_0 x_0 - pqx.$$

Předpokládáme-li kapaliny ideálné, kteréž, jsouce nestlačitelnými a dokonale pohyblivými, zcela vyplňují nádoby, platí rovnost objemů

$$q_0 x_0 = qx.$$

Je-li m hmota tohoto objemu kapaliny, záleží účinek onoho přebytku práce v tom, že kapalina m proudící v nádobě rychlostí v_0, jsouc tlačena do trubice, proudí větší rychlostí v tak, že nastává zvýšení energie pohybu o část

$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

Dle principu energie máme tudíž základní rovnici

$$p_0 q_0 x_0 - pqx = \tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

Rovnice tato nabude tvaru jednoduššího, když na místě úhrnné hmoty m kapaliny objemu $q_0 x_0 = qx$ zavedeme hmotu specifickou s objemu jednotkového. Tím obdržíme rovnice

$$p_0 - p = \tfrac{1}{2} s (v^2 - v_0^2)$$
$$p_0 + \tfrac{1}{2} s v_0^2 = p + \tfrac{1}{2} s v^2.$$

Tlaky p_0 a p, vztahované na jednotku plošnou, jsou zde vyjádřeny v absolutní jednotce silové a mají tudíž rozměr

$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{T}^2} : \mathrm{L}^2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}^2} \text{ všeobecně,}$$

$$\frac{cm \,.\, g}{sec^2} : cm^2 = \frac{g}{cm \,.\, sec^2} \text{ zvlášť.}$$

Týž rozměr má souhlasně výraz $\frac{1}{2} s v^2_0$ a $\frac{1}{2} s v^2$, značící kinetickou energii hmoty, obsažené v jednotce objemové.

Podmínka, vyjádřená hořejší rovnicí

$$qx = Const.$$

vyslovuje stejnost objemu kapaliny, kteráž projde jakýmkoli průřezem q v době libovolné. Je-li touto dobou jednotka časová, značí x rychlost pohybu v, a rovnice nabývá formy

$$qv = const.$$

Oběma rovnicemi formuluje se *kontinuita pohybu* kapalin. Součin qv, značící objem kapaliny, jež v době jednotkové projde průřezem q, nazývá se intensitou proudu. Při proudění stationárním jest tedy intensita proudu v průřezech libovolných konstantní.

Na místě názvu intensita užívá se též názvu síla proudu, kde pak ovšem slovo síla, znamenající tolik jako mohutnost proudu, má jiný smysl, než povšechně v mechanice. Podobně užívá se názvu intensita neb síla proudu v elektřině dynamické.

Rychlost v, jakou proudí kapalina v trubici, obdržíme z rovnice hořejší

$$\tfrac{1}{2} s (v^2 - v_0^2) = p_0 - p$$

čili

$$sv^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right) = p_0 - p.$$

V rovnici této můžeme na základě podmínky

$$q_0 v_0 = qv,$$

vyjadřující kontinuitu pohybu, nahraditi poměr rychlostí poměrem průřezů; tím vyjde

$$sv^2 \left(1 - \frac{q^2}{q_0^2}\right) = p_0 - p$$

čili

$$v = \sqrt{\frac{2\,(p_0 - p)}{s\,(1 - q^2/q_0^2)}}.$$

Často bývá průřez q trubice velmi malým proti průřezu q_0 nádoby; pak jest přibližně

$$v = \sqrt{\frac{2\,(p_0 - p)}{s}}.$$

Budiž na př. přebytek tlakový $p_0 - p$ roven tlaku jedné atmosféry. Jak později shledáme, jest tlak jedné atmosféry vyjádřen číslem

$$1{\cdot}01321\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Dle toho obdržíme na př. jednak pro vodu a jednak pro rtuť,

$$s = 1\ \frac{g}{cm^3}, \qquad v = 1423{\cdot}5\ \frac{cm}{sec},$$

$$s = 13{\cdot}6\ \frac{g}{cm^3}, \qquad v = 386{\cdot}0\ \frac{cm}{sec}.$$

Kapaliny různé, jsouce poháněny týmž tlakem, proudí rychlostí, jež jest přibližně úměrnou odmocnině z jich specifického objemu.

Ze základní rovnice hořejší počítáme tlak p, kterým kapalina v trubici proudíc působí na stěny, dle vzorce

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2} s\,(v^2 - v_0^2).$$

Kdyby kapalina neproudila, byl by tlak $p = p_0$ tlakem *hydrostatickým*; když kapalina proudí, umenší se tlak tento o část $\frac{1}{2} s\,(v^2 - v_0^2)$, kteráž vyjadřuje přírůstek energie hmotné jednotky kapaliny; zbývající tlak p zove se *hydrodynamickým*.

Je-li průřez q velmi malým proti q_0, jest dle rovnice, vyjadřující princip kontinuity, rychlost v_0 velmi malou proti rychlosti v. Pak lze počítati přibližně

$$p = p_0 - \tfrac{1}{2} s v^2.$$

Dle toho značí číselné hodnoty, jež jsme svrchu pro rychlost u vody a rtuť vypočítali, zároveň ty rychlosti v, při nichž by tlak hydrodynamický p se rovnal nulle, kdyby tlak p_0 byl tlakem atmosféry. Při rychlostech ještě větších vznikl by tlak hydrodynamický negativní.

§ 312. Výtok kapaliny malým otvorem ve vodorovném tenkém dně nádoby.

V předešlém odstavci nepřihlíželi jsme k váze kapaliny představujíce sobě pokus tak upravený, aby váha tato nepřišla k platnosti a předpokládajíce, že vnější tlaky p_0 a p vznikají silami

zvláštními na písty působícími. U kapalin, jež ve skutečnosti jsou v poli gravitačním naší země, vznikají rozdíly tlakové vahou kapaliny samé.

Mějmež nádobu průřezu q_0, jež jest až do výšky h naplněna kapalinou specifické hmoty s. Učiňme na vodorovném tenkém dně nádoby otvor průřezu q, který budiž velmi malým proti q_0. Kapalina otvorem tímto vytryskuje. Naskýtají se zde otázky dvě: s jakou *rychlostí* vytéká kapalina a v jakém *množství* za určitou dobu.

Otázkou prvou zanášel se již *E. Torricelli* *) — odtud název »theorem Torricelliho« —, stanoviv rychlost v výtoku závislostí

$$v = const.\sqrt{h},$$

kterouž později *J. Bernouilli* doplnil na vzorec

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Tento obdržíme ze vzorce odstavce předešlého

$$v = \sqrt{\frac{2\,(p_0 - p)}{s}},$$

uvážíce, že tlak vzduchu působí shora i zdola stejně a že tudíž přebytkem tlakovým jest tlak hydrostatický, stanovený výrazem

$$p_0 - p = hsg.$$

Hmota specifická s ze vzorce odpadne. Specificky těžší rtuť vytryskuje tudíž stejnou rychlostí jako specificky lehčí voda; hmota každé jednotky objemové rtuti jest sice větší, ale touže měrou jest též větší síla, kteráž ji v pohyb uvádí. Rychlost výtoku jest však podmíněna intensitou pole gravitačního, neboť touto jest určen hydrostatický tlak. Na měsíci byla by na př. hmota kapaliny v pohyb uváděna stejnou, jako na zemi, ale síla, kteráž by pohyb způsobovala, jest menší a proto také rychlost výtoku byla by menší.

Význam zákona Torricelliho jest jednoduchý. Při dané intensitě tíže g jest rychlost výtoku podmíněna jediné výškou h kapaliny nad otvorem. Tato výška se zove rychlostní, rychlost určující. Z pozorované rychlosti v vypočítá se její hodnota dle vzorce

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Rychlost v jest taková, jaké by nabyla kapalina s této výšky v daném poli gravitačním volně padajíc.

---

*) *E. Torricelli*: De motu gravium naturaliter descendentium; obsaženo v souhrnném spise Opera geometrica, Firenze 1644.

Co se druhé otázky týče, tu znajíce rychlost v výtoku obdržíme objem V kapaliny vyteklé v každé jednotce časové, znásobíce rychlost tu průřezem q, tak že jest

$$V = qv;$$

z objemu pak obdržíme hmotu kapaliny v každé jednotce časové vyteklé, když násobíme ještě hmotou specifickou s. Pro libovolnou dobu výtoku připojí se ještě činitel časový.

Nechceme-li vzorec pro výtok kapaliny odvoditi specialisací vzorců všeobecných, můžeme přímo uvažovati takto: Kapalina, vytrysknouc malým otvorem q rychlostí v, nabývá živé síly $\frac{1}{2} mv^2$. Tato vzniká z práce, kterou vykonává tlak hydrostatický f působící podél dráhy ε, kdež značí ε tloušťku dna. Máme tudíž základní rovnici

$$f \,.\, \varepsilon = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Jest však:

$$f = qhs \,.\, g$$
$$m = q\varepsilon s,$$

kdež značí q průřez otvoru s specifickou hmotu kapaliny, h její výšku v nádobě. Máme tudíž vztah

$$qhsg \,.\, \varepsilon = \tfrac{1}{2} q\varepsilon s \,.\, v^2.$$

Z rovnice této krátí se q, s a ε. Nezáleží tedy na velikosti průřezu, na specifické hmotě kapaliny a na tloušťce stěny. Obdržíme, jako dříve

$$hg = \tfrac{1}{2} v^2$$

čili

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Průřez q musí býti velmi malý, aby výška h ve výrazu pro práci mohla za téměř konstantní býti pokládána. Rovněž tloušťka stěny ε musí býti velmi malá, aby nebylo třeba přihlížeti ke tření.

§ 313. Časový průběh výtoku.

Vrhneme-li těleso rychlostí v_1 vzhůru, ubývá této rychlosti při výstupu úměrně s časem t, tak že jest

$$v = v_1 - gt.$$

Zavedeme-li do rovnice této výšky h, h_1 odpovídající rychlosti v, v_1, se kterých by těleso musilo padnouti, aby těchto rychlostí dosáhlo, obdržíme vztah

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2gh_1} - gt$$

čili

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_1} - \sqrt{\frac{g}{2}} \,.\, t.$$

Při výtoku kapaliny lze očekávati vztahy analogické. Kapalina v nádobě padá, ale padání jest časově mírněno tím, že se kapalina z velkého průřezu q_0 nádoby musí protlačiti malým průřezem q otvoru. Vzhledem k tomu platí ony vztahy hořejší sice v podstatě též, jenom že k faktoru časovému t přistupuje jako by umírňující koefficient $\frac{q}{q_0}$, tak že jest

$$v = v_1 - \frac{q}{q_0} gt$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_1} - \frac{q}{q_0} \sqrt{\frac{g}{2}} \,.\, t.$$

Rovnicemi těmito jest tedy časový průběh výtoku charakterisován. Jimi se objasňuje, jak průběhem času klesá hladina kapaliny v nádobě a současně rychlost kapaliny otvorem vytryskující. Z jedné i druhé rovnice určíme souhlasně dobu T, po kterou výtok trvá. Položíce $v = 0$ nebo $h = 0$, obdržíme

$$T = \frac{q_0}{q} \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Kdyby z jiné nádoby stejných rozměrů vytékala kapalina po tuto dobu T plnou rychlostí $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ příslušící plné výšce h_1, vytekl by kapaliny objem

$$V = q \sqrt{2gh_1} \,.\, T$$

čili

$$V = 2q_0 h_1.$$

To však jest dvojnásobný objem kapaliny v nádobě. Stejný objem kapaliny vytekl by tedy při *plné rychlosti* v_1 za dobu *poloviční* $\frac{1}{2}T$, než jest ta, za jakou se nádoba výtokem při rychlosti ponenáhlu klesající v vyprázdní.

Výklad hořejší, na základě analogie vedený, není ovšem přesným důkazem. Tento vede se počtem vyšším velmi jednoduše. Za dobu dt vyteče kapaliny objem

$$-q_0 \,.\, dh = qv \,.\, dt$$
$$-q_0 \,.\, dh = q \sqrt{2gh} \,.\, dt,$$

odtud

$$\frac{dh}{2\sqrt{h}} = -\frac{q}{q_0} \sqrt{\frac{g}{2}} \,.\, dt,$$

z čehož integrací

$$\sqrt{h} = C - \frac{q}{q_0} \sqrt{\frac{g}{2}} \,.\, t,$$

kdež značí C integrační stálou.

Pro $t = 0$ jest $h = h_1$, tedy $C = \sqrt{h_1}$. Máme tudíž

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_1} - \frac{q}{q_0} \sqrt{\frac{q}{2}} \,.\, t.$$

Násobíme-li pak tuto rovnici faktorem $\sqrt{2g}$, obdržíme

$$v = v_1 - \frac{q}{q_0} \cdot gt,$$

jak dříve uvedeno.

Zajímavé věty zde odvozené nalezl první *E. Mariotte.*

§ 314. **Výtok otvorem v postranní tenké stěně nádoby.**

Pokud jest průřez q otvoru postranního tak malým, že lze za to míti, jako by se celý nalézal v téže hloubce h, platí rovnice pro výtok otvorem ve vodorovném dnu odvozené. Všeobecně zasahá však celý otvor do různých hloubek z. Postupujeme pak zcela analogicky jako v § 296. Rozdělíme-li otvor na proužky $f(z) \cdot dz$, jest rychlost výtoku v každém proužku

$$v = \sqrt{2gz}.$$

Objem V kapaliny za každou jednotku časovou vyteklé nalezneme summací

$$V = \int_{h_1}^{h_2} f(z)\, dz \cdot \sqrt{2gz}.$$

Je-li speciálně

$$f(z) = l,$$

kdež jest l konstantní šířka otvoru, jehož výška jest $h_2 - h_1$, vyjde

$$V = \tfrac{2}{3} l \sqrt{2g}\ (h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}})$$

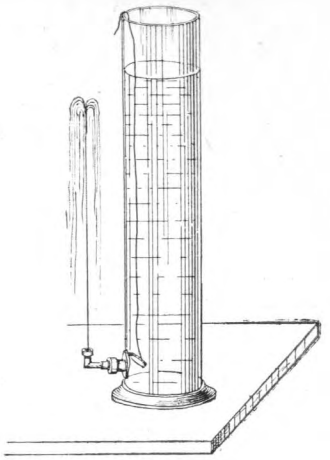
předpokládajíc, že výšky h se průběhem výtoku mění zcela nepatrně.

Zvláštním případem jest $h_1 = 0$, kdy kapalina otvorem postranním hloubky $h = h_2$ přepadá. Pak jest

$$V = \tfrac{2}{3} l \sqrt{2gh^3}.$$

§ 315. **Pokusy.**

Chtějíce theorem Torricelliho zkoušeti pokusy, užíváme (obr. 238.) skleněné válcové nádoby většího průměru (na př. 20 *cm*) a větší výšky (na př. 100 *cm*), kteráž jest dole opatřena širokým tubulem; do tohoto se vloží v zátce kaučukové krátký násadec mosazný, rovněž poněkud širší, který lze uzavříti přibroušeným plíškem, majícím otvor vhodného průměru (na př. 2 *mm*) pro výtok kapaliny. K pokusům volíme ovšem nejvhodněji vodu. Aby pak bylo možno směr výtoku libovolně říditi, jest výhodno, za onen násadec voliti mosaznou kolenovitě v pravém úhlu zahnutou trubici, kterouž lze v zátce kaučukové otáčeti tak, aby kapalina vytryskovala buď svisle dolů neb svisle vzhůru neb vodorovně nebo jakkoli šikmo.



Obr. 238.

Průměr krátké násadkové trubice musí ovšem býti veliký proti průměru otvoru samého. Výhodno jest, ač nikoli nutno, míti na uzavírání a otevírání tubulu uvnitř nádoby mosaznou širokou záklopku, kterou lze shora drátkem zvedati a spouštěti, když má pokus začít neb přestati. Záklopka zavírá se vlastní vahou a tlakem kapaliny těsně tak, že lze pohodlně onen plíšek otvorem přiložiti aneb po případě vyměniti za jiný i když kapalina jest již do velké nádoby nalita. Plíšek jest přitažen maticí šroubovou k násadce.

Konajíce nejprve pokusy o rychlosti v výtoku vody zkoumáme zákon, zdali rychlost tato jest taková, jaké by nabyla voda s výšky h volně padajíc. Obrátíme totiž směr výtoku tak, aby voda přímo vzhůru vytryskovala a přihlížíme, zdali dotryskuje až do této výšky h. Pokus ukazuje, že tomu tak není. Poznáváme však ihned toho příčinu, aspoň jednu, v tom, že kapky padající srážejí kapky vystupující, bráníce plnému výstupu. Proto pootočíme málo jen násadcem; výška výstupu se již zvětší, ač by se dle zákonů o šikmém vrhu očekávalo zmenšení; ale zde kapky padající nesrážejí vodní paprsek. Nicméně ani nyní nevytryskuje voda do plné výšky. V odporu vzduchu nelze toho plnou příčinu hledati.

Obrátíme pak otvor směrem svisle dolů a provedeme pokus o množství kapaliny vyteklé. Volíme vhodně $h = 80$ *cm* a udržujeme tuto výšku i při výtoku. O rychlosti orientujeme se, kladouce

$g = 10 \frac{m}{sec^2}$, $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{\cdot}8} = 4 \frac{m}{sec}$. Přesněji jest

$$g = 981 \frac{cm}{sec^2}, \qquad v = 396 \frac{cm}{sec}.$$

Je-li tedy poloměr kruhového otvoru 1 *mm*, vypočítáme objem vody vyteklé za 1 minutu dle formule

$$V = \pi (0{\cdot}1)^2 \cdot v \cdot 60\ cm^3,$$

což dává $V = 746\ cm^3$.

Zachycujíce vodu nádobou kalibrovanou konstatujeme ihned, že množství skutečné jest menší než toto theoretické.

§ 316. **Příčiny neshody mezi pozorováním a počtem.**

Objem V kapaliny vyteklé za jednotku doby jest určen rovnicí

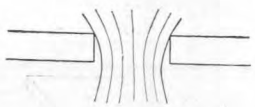
$$V = qv.$$

Objem skutečný jest menší než tento vypočtený. Jak četné práce o výtoku

kapalin ukázaly, vzniká neshoda tím, že jeden i druhý činitel do výpočtu vstupující jest větší než se skutečností souhlasí.

Předně již rychlost v. Třením částic kapalných o sebe i o stěny se kapalina poněkud zadržuje. Rychlost skutečná není tedy v, nýbrž φv, kdež jest φ redukční koefficient, poněkud menší než jednička.

Jiný důvod souvisí s činitelem druhým. Průřez q do počtu zavedený jest větší než skutečný. Důvod toho jest ve zvláštním zjevu, souvisícím s tekutostí kapaliny, kterýž se zove stažením paprsku (contractio venae).



Obr. 239.

Odvození vzorce pro v platilo jako by pro první okamžik vytrysknutí kapaliny. Jakmile kapalina vytékati začala, účastní se výtoku nejenom kapalina přímo nad otvorem stojící, nýbrž také částečky sousední tlačí se k otvoru se strany, následkem vnitřního tření s rychlostí poněkud menší. Paprsek vytryskující válcovým otvorem nemá pak tvar válce, nevyplňuje otvor úplně, nýbrž zužuje se poněkud (obr. 239.) tak, že skutečný průřez výtoku není q, nýbrž αq, kdež jest α opět redukční koefficient. Spojením obou koefficientů vzniká pro objem i pro množství redukční koefficient

$$\mu = \alpha\varphi.$$

Dlužno tedy při výtoku kapalin vždy činiti rozdíl mezi množstvím vypočteným, *theoretickým* a množstvím skutečným, *faktickým*. Vzorce dříve odvozené uvedeme v souhlas se skutečností, znásobíce koefficientem výtoku μ, jehož hodnotu dlužno empiricky pro konkretní případy stanoviti.

Co se týče číselných hodnot koefficientů φ a α, nelze povšechně udati než jen hodnoty průměrné. Koefficient rychlostní φ lze vypočísti, když se vyměří parabolická větev paprsku, který vytryskuje postranním otvorem nádoby; vychází dosti souhlasně

$$\varphi = 0{\cdot}97.$$

Koefficient kontrakční α souvisí s tvarem a rozměry otvoru, vedle toho však též s výškou tlakovou. Povšechně jest α poněkud menším při otvorech větších a při větší výšce tlakové.

Největší kontrakce činí lineárně 0·8; u otvorů kruhových vzniká asi tak daleko od otvoru jako jest jeho poloměr; dle toho byl by koefficient α roven $(0{\cdot}8)^2$, t. j.

$$\alpha = 0{\cdot}64.$$

Spojením obou koefficientů vypočítá se koefficient výtokový

$$\mu = 0{\cdot}62.$$

Úkaz kontrakce byl studován (Tresca) též na tělesech tuhých; písek, hlína, led, též kovy jako cín, olovo, stříbro i železo, když se velikým tlakem (hydraulickým lisem) protlačují otvorem na dně nádoby, dostatečně pevné, aby vydržela tlak dosahující až 100.000 megadyn, tekou podobně jako kapaliny, na důkaz, že i u těles tuhých se tlak šíří všestranně, je-li dostatečně

velikým. Když se pak do oné nádoby vloží látky jmenované v jednotlivých kusech, oddělených vodorovnými rovinami vrstevními, ukazuje se, jak při pokusu roviny tyto se prohlubují a jak přecházejí v plochy křivé, souměrné ke svislé, středem otvoru procházející ose, v niž plochy ty hustě k sobě přiléhají. Tím se dotvrzuje, že nahoře uvedené vysvětlení kontrakce jest správným.

Studie velmi podrobné konány byly (Savart 1833, Magnus 1859 a j.) o složení a povaze paprsku vytryskujícího. V prvé části své jeví se paprsek oku hladkým, čirým, jako sklo; dále však začíná se kaliti, stávaje se neprůhledným, místy se zúžuje, místy rozšiřuje a konečně tříští se v jednotlivé kapky. Dle tvaru, jaký má otvor, který může býti buď jednoduše kruhovým nebo čtverečným, obdélným, křížovým a pod., jeví se ona změna tvaru, ono střídavé zúžování a rozšiřování se někdy ve způsobu velice zvláštním, při čemž se ukazuje jistá centrální část méně měnlivá. Podrobnější zkoumání celého zjevu děje se pozorováním momentním, buď subjektivně při stálém osvětlení tak, že pozorovatel se dívá na paprsek otvory rychle rotujících desk, anebo objektivně tak, že se paprsek osvětlí na okamžiky, záblesky světla slunečního otvory rychle rotujících desk propouštěného, anebo výboji batterie Leydenské, po případě výboji induktoria, pomocí paprsků kathodových, jako v lampě Pulujově a pod.

Tu se pak ukazuje, že paprsek na místech, kde se oku jeví zakaleným, není souvislým, nýbrž že zde již počíná rozdělování v kapky, jež jenom svým prudkým pohybem činí oku při obyčejném osvětlení pozorujícímu dojem souvislosti. Kapky tyto však padajíce smršťují a natahují se střídavě, přecházejíce z tvaru kulového do tvaru rotačního ellipsoidu, jehož osa svislá je brzy největší brzy nejmenší; jsou to tedy pravidelné oscillace kapek, jež způsobují onen zvláštní útvar paprskový, jak při rychlém padání se oku jeví na základě zdánlivé spojitosti. Při tom se mezi kapky velké vkládají jako trabanty kapky malé, jež pak zdánlivou spojitostí tvoří ono méně proměnné centrální jádro paprsku. Periodicita jeví se i akusticky; když paprsek v oné části zakalené dopadá na membranu, vzniká zřetelný tón. Naopak silným tónem vnějším téže výšky se pravidelnost zjevu podporuje, tónem různé výšky pak ruší. Tříštění další paprsku v kapky jest účinek padání; přední částečky vodní nabývají pádem větší rychlosti než zadní, jež za nimi následují, a proto se odtrhávají a smršťují kapky. Avšak ono dělení se paprsku v kapky v části zdánlivě spojité, kde se paprsek kalí, jest následek povrchového napětí. Lze totiž dokázati, že válec kapaliny, jež podléhá povrchovému napětí, není tvarem stabilním, když jeho délka překročí obvod jeho základního kruhu. Mění se proto nejprve ve tvar unduloidu, význačný periodicky se střídajícími místy širšími a užšími a posléze se rozpadává v jednotlivé kapky, oscillující kolem definitivního rovnovážného tvaru koule.

Jiné zvláštnosti, souvisící též s molekulovými silami, jeví se, když paprsek vodní naráží na jiný anebo když naráží na stěnu pevnou po případě v rozmanité tvary upravenou, čímž se paprsek šíří v plochy střechovité, vějířovité a pod., jak bývá u vodotrysků, vodopádů, jež tím nabývají často překvapující skvělosti a zvláštního půvabu.

Tvar paprsku vytryskujícího, jakož i koefficient výtokový mění se nátrubkou, kterouž k otvoru připojíme; nátrubky takové mohou býti válco-

vité, anebo zaoblené; když se tvar nátrubky co možná přizpůsobí formě kontrahovaného paprsku a když se objem kapaliny vyteklé počítá dle otvoru nátrubky, docílí se koefficientu μ značně většího, po případě až $\mu = 1$, tak že theoretické a faktické množství vyteklé vody souhlasí. Ba dokonce lze trubkou zvláštní formy docíliti koefficientu $\mu > 1$, když se totiž nátrubka na venek poněkud konicky rozšiřuje; kapalina strhuje zde částečky vzduchu s sebou, čímž se tlak vzduchu zde umenší a tudíž tlak výtokový poněkud zvětší.

Jakožto reminiscence historická budiž zde připojena poznámka, že *G. Galilei* při pokusech svých o pádu těles po rovině měřil čas dle množství vody, vyteklé malým otvorem ve dně velké nádoby.

§ 317. Dráha paprsku vytryskujícího.

Jedná-li se o studium dráhy paprsku vodního, jest s výhodou užiti velmi krátkého otvoru kuželového mírně sbíhavého (obr. 238.). Paprsek, který se jeví býti oku hladkým a souvislým, dotryskuje skoro až do výše h kapaliny v nádobě, je-li otvor obrácen téměř přímo vzhůru. Když se pak obrací stranou, lze velmi pěkně sledovati parabolický tvar paprsku a jeho změny při různém úhlu elevačním. Přicházejí zde k platnosti zákony o vrhu šikmém.

Je-li speciálně výtok horizontálním, stanovíme dráhu částečky kapalné rychlostí v vržené jednoduchou úvahou následující.

Ve směru vodorovném jest dráha x v době t

$$x = vt,$$

ve směru svislém, ve kterémž částečka padá, jest dráha y v téže době t

$$y = \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Z obou rovnic odvodíme rovnici dráhy, vyloučíce dobu t,

$$\frac{x^2}{y} = 2\frac{v^2}{g}.$$

Dle theoremu Torricelliho jest však

$$v^2 = 2gh,$$

pročež

$$x^2 = 4hy.$$

Parametr paraboly jest tedy $2h$.

Zajímavo jest počítati dálku dotrysku v dané rovině horizontální. Budiž H výška hladiny nad rovinou horizontální, na níž dálku a dopadu chceme stanoviti; otvor C budiž ve hloubce h pod

hladinou a ve výšce h' nad onou rovinou horizontální, tak že jest (obr. 240.)

$$H = h + h'.$$

Z rovnice dráhy

$$x^2 = 4hy,$$

plyne $x = a$ pro $y = h'$, tedy

$$a^2 = 4hh',$$

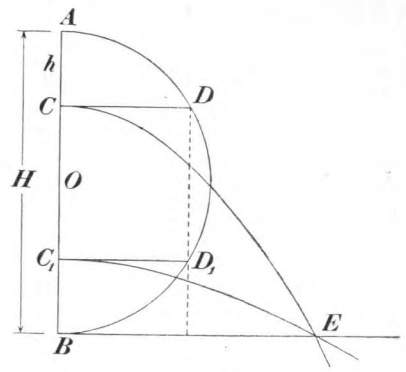
$$\tfrac{1}{2}a = \sqrt{hh'}.$$

Dálku $\frac{1}{2}a$ lze snadno konstruovati. Sestrojíme nad průměrem H polokruh se středem O; dle známé věty jest

$$CD = \tfrac{1}{2}a$$

a dálka hledaná

$$BE = a = 2CD.$$



Obr. 240.

Z konstrukce přímo vidíme, že do téhož místa E dotryskne voda vytékajíc otvorem C_1, je-li

$$AC_1 = h', \quad C_1B = h;$$

neboť výšky h a h', vstupující souměrně do vzorce pro $\frac{1}{2}a$, lze vyměniti. Pro $h = h'$, t. j. pro otvor O, jest dálka $\frac{1}{2}a$ dotrysku

$$a_{\max.} = H.$$

Netřeba připomínati, že pro dotrysk a jest jednostejno, zdali sloupec kapaliny je v celé výšce H čili jen v její nějaké hořejší části. Dobře jest však upozorniti, jak také z konstrukce kruhové ihned jest patrno, že dotrysku a přibývá s hloubkou $h = AC$ s počátku velmi prudce, tak že již pro malou hloubku h jest dálka a dosti veliká; v dalším průběhu přibývá pak dotrysku a s hloubkou h vždy volněji a volněji.

Zajímavo jest též upozorniti na význam tíže. Urychlení g působí na rychlost v výtoku, tím i na objem kapaliny v jisté době vyteklé, nikoli však na tvar dráhy, kterou částečky kapaliny, otvorem v hloubce h umístěným vytryskující, opisují; parametr paraboly jest $2h$, neobsahuje tedy urychlení tíže. Kdybychom v myšlenkách přenesli nádobu s kapalinou na Juppitera, kde jest urychlení g větší v poměru asi $1 : 2^1/_4$, byla by rychlost výtoku větší v poměru $1 : \sqrt{2^1/_4} = 1 : {}^3/_2$, t. j. byla by o $50\,^0/_0$ větší; nicméně parabola dráhy byla by stejnou; neboť větší rychlost ve směru horizontálním jest kompensována prudším padáním ve směru vertikálním a to v témže poměru $1 : \sqrt{g}$, čímž dráha zůstává stejnou.

Skvělého zjevu docílí se osvětlením vodního paprsku horizontálně vytryskujícího (fontana Colladonova). Nádoba k tomuto pokusu upravená jest 130 *cm* vysoká a 24 *cm* široká, z plechu zinkového; má postranní otvor

průměru 1 *cm*, opatřený šroubovou ucpávkou s deštičkou skleněnou; proti němu na spodní straně nádoby jest větší otvor, průměru 8 *cm*, který jest stále uzavřen deskou skleněnou. K této postaví se lampa elektrická, v níž čočkou paprsky světelné se nařídí sbíhavě tak, aby dopadaly na otvor, jímž má paprsek vodní vytrysknouti; zařízení toto jest snadné, poněvadž otvor jest uzavřen sklem, jímž světlo prochází na venek. Voda se zbarví fluoresceinem. Jakmile se ucpávka odšroubuje a voda otvorem vyrazí, neprochází již světlo, jako dříve, otvorem ven, nýbrž zůstává na základě totálního odrazu uvnitř paprsku vodního; tím objeví se celá parabolická větev jako by ohnivou, zářic skvělým světlem vnitřním. Také místo, kam dopadá voda do nádoby, v níž se zachycuje, jeví se světlým, poněvadž světlo paprskem vodním jest sem od lampy převedeno.

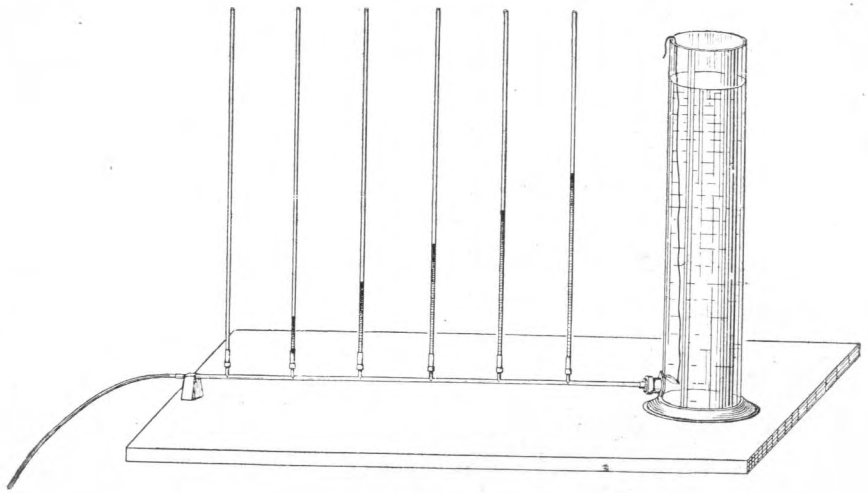
Podobných zjevů lze docíliti u skleněných vhodně zahnutých tyčí; tím lze světlo od nějaké lampy převésti až na konec tyče a jím osvětliti na př. mikroskopické praeparáty.

§ 318. **Proudění kapalin v trubicích.**

Majíce studovati zákony, jimiž se řídí proudění kapalin trubicemi, připojime k tubulu velké nádoby skleněné (obr. 238.), jíž jsme užívali při výtoku vody otvorem, trubici mosaznou, vodorovně umístěnou, délky na př. 120 *cm*, průměru 1 *cm*, na níž jsou svisle nasazeny trubičky skleněné k účelům manometrickým (obr. 241.), ale tak, aby do trubice jen malými otvory ústily. Jest výhodno vodu ve velké nádobě připravenou zbarviti na př. indigokarminem nebo fluoresceinem. Uzavřeme prozatím trubici na jejím konci zátkou a zvedněme záklopku. Voda vteče do trubice, vypudíc vzduch trubičkami, vnikne i do těchto a ustálí se v nich stejně vysoko jako v nádobě. Když však zátku z trubice vytáhneme, vyrazí voda ven v dráze parabolické, v manometrech pak klesne nestejně, více blíže otvoru, méně blíže nádoby. Když doléváme *) do velké nádoby vody, udržujíce její výšku na př. na 80 *cm*, konstatujeme snadno, že povrch vody v trubicích manometrických klesá dle zákona přímky, jež však směřuje pod povrch vody v nádobě; situaci znázorňuje obr. 241. provedený dle fotografie skutečného pokusu. Když výtok náhle ucpáním otvoru zarazíme, pozorujeme prudké stoupnutí tlaku v manometrech, jimiž voda vyrazí.

*) K udržení stálé výšky h doporučuje se při pokusech o výtoku užívati láhve Mariottovy. Avšak pokus ukazuje, že bublinkami vzduchu do láhve vnikajícími pravidelnost parabolické větvě kapaliny velice trpí; výtok jest jako by přerušovaným.

Budiž q (cm^2) průřez, l (cm) délka trubice horizontálně umístěné. V odlehlosti z (cm) od začátku trubice budiž p $\left(\frac{dyna}{cm^2}\right)$ tlak, na jednotku plošnou vztahovaný, tudíž qp tlak na plochu celého průřezu q. Když postupujeme do odlehlosti z větší, shledáme tlak p menší; je-li $z_2 > z_1$, jest $p_2 < p_1$; positivnímu přírůstku $z_2 - z_1$ odlehlosti odpovídá negativní přírůstek (t. j. úbytek) $p_2 - p_1$ tlakový.



Obr. 241.

Ubývání tlaku jest způsobeno odporem, který trubice klade proudící vodě. Když proudění se ustálilo a voda v trubici se žene určitou rychlostí v, jež jest v celé délce konstantní, můžeme k první orientaci odpor, který má svůj základ v tření, klásti úměrným ploše, která kapalinu proudící objímá. Je-li c (cm) obvod trubice, jest tato plocha $c\ (z_2 - z_1)$.

Je-li k koefficient oné úměrnosti, t. j. odpor na jednotku plochy připadající $\left(\frac{dyna}{cm^2}\right)$ obdržíme odpor úhrnný výrazem $kc\ (z_2 - z_1)$. Máme tudíž rovnici

$$-q\,(p_2 - p_1) = kc\,(z_2 - z_1),$$

ze kteréž plyne

$$\frac{p_2 - p_1}{z_2 - z_1} = -k\frac{c}{q}.$$

Spád tlakový jeví se tudíž býti konstantním, v souhlasu s pokusem. Úhrnnou ztrátu tlakovou od začátku až ke konci trubice obdržíme, kladouce $z_2 - z_1 = l$,

$$p_2 - p_1 = -k\frac{cl}{q}.$$

Kdyby trubice výtoková byla o úhel α odkloněna od směru vodorovného dolů (obr. 242.), zmírnil by se spád tlakový; neboť kapalina překonává odpor spolu svou vahou, kterouž stanoví výraz

$$q\,(z_2 - z_1)\,sg\,\sin\alpha.$$

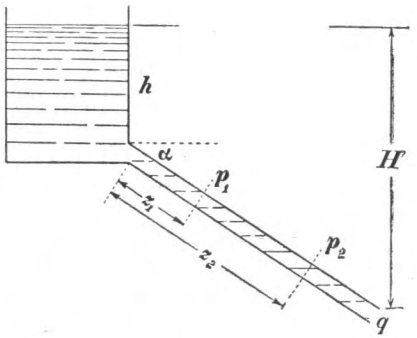
Máme pak rovnici

$$-q\,(p_2 - p_1) + q\,(z_2 - z_1)\,.\,sg\,\sin\alpha = kc\,(z_2 - z_1)$$

čili

$$\frac{p_2 - p_1}{z_2 - z_1} = -\left(k\,\frac{c}{q} - sg\,\sin\alpha\right).$$

Spád tlakový jest tedy i zde konstantním, ale jest menším; ztráta tlaku



Obr. 242.

jest skrovnější, ježto odpor jest spolu překonáván vahou kapaliny. Mohl by spád tlakový býti i nullovým, t. j. při sklonu α, určeném rovnicí

$$sg\,\sin\alpha = k\,\frac{c}{q},$$

by tlak při ústí trubice byl takový, jako při začátku, poněvadž by odpor, který trubice proudění klade, byl cele překonán vahou vody. Rychlost v výtoku při ústí trubice by pak odpovídala výšce h kapaliny v nádobě dle theoremu Torricelliho. Manometry by neukazovaly tlaku žádného; přímka, spojující hladiny v manometrech, padne do směru skloněné trubice samé.

Hořejší rovnice ovšem předpokládá, — má-li α vyjíti reálné, — že jest

$$k\,\frac{c}{q} < sg,$$

což znamená velké q proti c, a malé k. Je-li však podmínce této vyhověno, pak můžeme jíti ještě dále, můžeme předpokládati úhel α ještě větší, na př. až $\alpha = 90^0$. Spád tlakový změní znamení, manometry, jsou-li vhodně zařízeny, ukazují tlak negativní, kapalina malým otvorem v trubici by nevytryskla ven, naopak, nastal by úkaz nový, ssání, aspirace, tak zvané hydrodynamické paradoxon. Vlastní jeho jádro spočívá v kontinuitě pohybu kapaliny. Kapalina v celé trubici proudí stejnou rychlostí, tedy tou, která vzniká tlakem již při ústí trubice panujícím, s odečtením toho tlaku, který se vyčerpá odporem trubice.

Došli jsme těchto výsledků vycházejíce od tlaku sloupce h, kterým se kapalina při *začátku* trubice v pohyb uvádí. Mohli bychom, je-li trubice o úhel α od vodorovného směru dolů odkloněna, vyjíti od tlaku, který jest při *ústí* trubice a odpovídá sloupci

$$H = h + l\,\sin\alpha.$$

Tu pak by se ukázalo, že kapalina vytryskuje rychlostí v, jež neodpovídá této výšce H, dle rovnice

$$\frac{v^2}{2g} = H,$$

nýbrž rychlostí menší, na důkaz, že za všech okolností část tlaku se spotřebuje na překonání odporu.

Zavedli jsme nahoře veličinu $k\left(\frac{dyna}{cm^2}\right)$ jako koefficient úměrnosti, charakterisující tření, jenž udává, jaký odpor klade proudění plocha jednotková kapalinu objímající. Avšak tento koefficient není — jako u těles tuhých — konstatní, nýbrž závislý na rychlosti proudění v. Empiricky klade se úměrným výrazu

$$av + bv^2.$$

Při rychlosti v však jen poněkud větší převládá účinek členu kvadratického bv proti lineárnímu av tak, že lze přibližně přijmouti úměrnost se čtvercem v^2 rychlosti výtokové. Poněvadž však čtverec této rychlosti jest úměrným příslušné výšce tlakové, poznáváme, že lze číslo k položiti přibližně úměrným této výšce. Při úkolech hydraulických lze tedy vyjádřiti odpor trubice jako ztrátu výšky tlakové.

Tím se úkol značně zjednodušuje. Vycházíme pak od výšky H kapaliny v nádobě, počítané od ústí trubice; je-li tato vodorovná (obr. 241.), jest

$$H = h.$$

Je-li o úhel α pod směr vodorovný odkloněna (obr. 242.), jest

$$H = h + l\,\sin\alpha.$$

Budiž H výška kapaliny v nádobě, počítaná od ústí trubice. Kdyby nebylo tření, vytékala by kapalina rychlostí v, která by příslušela výšce H, dle vztahu

$$\frac{v^2}{2g} = H.$$

Účinkem tření vytéká rychlostí menší, která by odpovídala výšce H' menší, dle vztahu

$$\frac{v^2}{2g} = H',$$

$$H' < H.$$

Ztráta výšková $H—H'$ jest měrou odporu trubice. Je-li dle výkladů předchozích odpor tento úměrný čtverci rychlosti v^2, je též úměrný výšce H'. Je-li tedy ξ koefficient této úměrnosti, můžeme psáti

$$H - H' = \xi H',$$

čili

$$H = H' (1 + \xi),$$

aneb

$$H = \frac{v^2}{2g} (1 + \xi),$$

tudíž

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1+\xi}}.$$

Upozorniti dlužno, že koefficient ξ jest prosté číslo. Blíže se empiricky určuje dle tvaru a rozměrů trubice.

Pro trubice průřezu kruhového o průměru d a délky l jest

$$\xi = \lambda \frac{l}{d}.$$

Koefficient λ, jenž jest též prosté číslo jako ξ, charakterisuje materiál trubice, povahu vnitřního povrchu a pod. a určuje se empiricky. *Dupuit* stanovil pro městské vodovody

$$\lambda = 0{\cdot}0303.$$

Když jest l proti d velmi velké, jako při potrubí vodovodů, převládá číslo $\frac{l}{d}$ tak značně, že 1 proti ξ mizí. Pak platí přibližně vzorec jednodušší:

$$v = \sqrt{\frac{2ghd}{\lambda l}}.$$

Z toho lze počítati množství Q vody trubicí tekoucí

$$Q = \tfrac{1}{4}\pi d^2 v, \quad Q = \tfrac{1}{4}\pi \sqrt{\frac{2ghd^5}{\lambda l}}.$$

V praxi bývá Q dáno, žádá se, aby vodovodem jisté množství vody přitékalo; pak lze z rovnice poslední počítati průměr vodovodné trubice.

Úměrnost odporu vodovodných trubic se čtvercem rychlosti jest jenom approximativní; proto ukazují empirická stanovení koefficientu λ ještě souvislost s rychlostí. Tak nalezl na př. *Weisbach* pro hladké trouby při různých rychlostech v $\left(\frac{m}{sec}\right)$

$v =$	0·1,	1·0	5·0
$\lambda =$	0·0443	0·0239	0·0187,

souvislost hleděl vystihnouti empirickým vzorcem

$$\lambda = 0{\cdot}01439 + \frac{0{\cdot}00947}{\sqrt{v}}.$$

Jiný vzorec empirický, pro železné trouby nové průměru d, udává *Darcy*

$$\lambda = 0{\cdot}01989 + \frac{0{\cdot}000508}{d}.$$

Na základě takovýchto empirických dat počítají se praktické úkoly vodovodní.

Vzorec pro v nahoře uvedený lze ve způsobu všeobecnějším rozšířiti a psáti

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots}},$$

ve kterémž každý odpor, každá překážka pohybu kapaliny jest jednotlivě vyjádřena koefficientem ξ. Tak již při přechodu vody z velké nádoby do malé trubice vzniká odpor ξ_0, který se odhaduje hodnotami

$$\xi_0 = 0{\cdot}5 \text{ až } 0{\cdot}06$$

dle toho, zdali vstup do potrubí jest náhlým, při ostrých hranách, anebo zdali jest zaokrouhlením hran ponenáhlým. Podobně rozšíření neb zúžení potrubí, zahnutí, rozvětvení atd. způsobují odpory, jež se do počtu oním koefficientem ξ zavedou.

Až dosavade byl veden výklad tak, jakoby kapalina v trubici proudila rychlostí v, jež jest v celém průřezu q stejnou, a jakoby tření vznikalo na stěnách. U kapalin, jež ke stěnám lnou, vzniká těsně u stěn vrstva, kteráž následkem této přilnavosti se nepohybuje; vrstvy další pohybují se rychlostí vždy větší a větší tou měrou, kterou od stěn se vzdalují k ose trubice. Tření, jež způsobuje retardací celého pohybu, jest tudíž třením vnitřním. Do oněch vzorců dlužno pak zavésti rychlost průměrnou, kterou vypočteme dle vzorce

$$\frac{Q}{q} = v$$

z objemu Q vody za jednotku času vyteklé a z průřezu q trubice.

Podobné rozdíly v rychlosti proudění vznikají též u žlabů, otevřených kanálů, zejména pak při toku vody řečištěm. Rychlost je zde podmíněna spádem. Maximální rychlost v_0 bývá uprostřed řečiště na povrchu neb málo pod povrchem; třením na vzduchu, větrem a pod. vznikají i na povrchu vody překážky. Rychlost průměrná v bývá 70 až 80% rychlosti maximální. (Labe u Poděbrad 70 až 75% dle V. Bukovského.) Stanoviti rychlost proudění vody přímo jest zvláštním úkolem hydrometrie.

Úkoly hydrauliky jsou velmi rozmanité; při nich theorie dává základ, ale empirie má na základě tomto pole působnosti velmi rozsáhlé. Pracemi dosud provedenými zjednán již velmi bohatý číselný materiál, na jehož základě mohou praktické úkoly z hydrauliky zejména také technické býti řešeny. Srovnej v příčině té *Červený* a *Řehořovský*, Technický průvodce, 1896 I. p. 164 a násl.

Na tomto místě, kde se k theoretickým základům poukazuje, budiž uveden vynikající spis souborný; Hydrodynamika, kterou sepsal Dr. *F. Koláček* (1899), Sborníku Jednoty českých mathematiků číslo II.

Stává-li se průřez trubice proti obvodu vždy menším a menším, t. j. přechází-li trubice v kapillaru, pozmění se zákony o výtoku kapalin velmi značně. O tom pojednáme níže na svém místě.

§ 319. **Reakce výtoku kapalin.**

V nádobě, z níž kapalina otvorem vytéká, jeví se tlak hydrostatický na stěny vesměs, vyjímajíc otvor, kterým kapalina proudí. Odtud vzniká tendence pohybu v opačném směru, než jak kapalina vytéká. Je-li tedy nádoba pohyblivou, nalézajíc se na př. na jakési loďce na vodě pohyblivé, vzniká pohyb onomu jednostrannému tlaku příslušný, při němž společné těžiště zůstává na svém místě, rychlosti pak se řídí zákonem o zachování hybnosti (§ 111.). Místo pohybu postupného může na témž základě vzniknouti pohyb rotační.

Nejznámějším toho příkladem jest kolo Segnerovo *); válcovitá nádoba, otáčivá kolem vlastní osy geometrické, má dole nasazených několik trubic ve směru radiálním, jichž otvory jsou stranou umístěné. Reakční tlak působí tu momentem rotačním. Na podobném základě spočívají turbiny tak zvané škotské čili reakční, přístroje zavlažovací v zahradách, při nichž voda tlakem se žene do křídla podobně jako Segnerovo kolo otáčivého, kde pak otvory vytryskujíc do dálky se kolkolem rozprašuje.

§ 320. **Využitkování energie vodní.**

Voda proudíc nebo padajíc má energii. Využitkovati energii tuto k účelům pracovním jest pro život praktický úkolem velice důležitým, jehož řešení lze stopovati do dob velmi dávných. Stroj, který záměnu energie sprostředkuje, zove se *motorem vodním*. Záměna záleží v tom, že se motor uvádí vodou v pohyb rotační, a tento pohyb že se pak k daným účelům pracovním přiměřeně dále převádí. Dle toho, zdali rotace se děje kolem osy vodorovné nebo svislé, rozeznávají se vodní motory vertikální a horizontální; k těmto náleží hlavně turbiny, k oněm vodní kola.

*) *Jan Segner* (1704—1777), původně lékař, pak prof. math. a fys. v Halle. Příslušné pojednání, z roku 1750, má název: »Programma, quo theoriam machinae cujusdam hydraulicae praemittit.« Mathematicky zpracoval úkaz Segnerova kola Euler.

Při installaci motorů vodních dlužno určiti pracovní effekt E vody, t. j. práci, kterouž by voda mohla vykonati za každou jednotku časovou. K cíli tomu počítá se především hmota M vody, která za každou jednotku časovou prochází profilem kanálu, žlabu, řečiště a pod. Profil se vyměří, počítá jeho průřez q, určí se hydrometricky průměrná rychlost v vody a počítá objem vody qv; je-li s specifická hmota vody, která ostatně zde vždy za rovnou jedničce může býti pokládána, obdrží se hledaná hmota

$$M = qvs.$$

Jedná-li se o energii proudění, připojí se faktor $\frac{1}{2}v^2$, tak že jest

$$E = \tfrac{1}{2}Mv^2.$$

Padá-li voda výškou h, působí váha Mg vody výškou h, čímž jest

$$E = Mgh.$$

Všeobecně, proudí-li voda a padá zároveň, jest

$$E = \tfrac{1}{2}Mv^2 + Mgh.$$

Ve vzorci tomto lze rychlost v nahraditi výškou rychlostní h' dle vztahu

$$\frac{v^2}{2g} = h'.$$

Tím vyjde souhlasně

$$E = Mg\,(h + h')$$

čili

$$E = Mg\,.\,H.$$

V případech obyčejných, kde se voda nepohání tlakem vnějším nýbrž jen padá svou vlastní vahou, značí H rozdíl hladin na obou stanicích, mezi nimiž se vodní motor nalézá, kde voda přitéká a odtéká.

V soustavě absolutní

$$cm,\ g,\ sec$$

vyjde effekt E v jednotce

$$\frac{cm^2\,.\,g}{sec^3} = \frac{erg}{sec}.$$

Poněvadž jednotka tato jest velmi malou, jeví se býti prakticky výhodnější, počítati v soustavě

$$m,\ t,\ sec,$$

tedy vyjádřiti délky v metrech, objem v krychlových metrech a hmotu v tunách. Urychlení tíže jest pak dáno číslem

$$g = 9{\cdot}8\,\frac{m}{sec^2}.$$

Z rovnic

$$\frac{m^2 \,.\, t}{sec^3} = \frac{(10^2 \,.\, cm)^2 \,.\, (10^6 \,.\, g)}{sec^3} = 10^{10} \frac{erg}{sec}$$

$$= 10^3 \frac{Joule}{sec} = kilowatt$$

poznáváme, že obdržíme effekt hledaný přímo v jednotce nyní všeobecně užívané, t. j. v kilowattech. Dělíce výsledek koefficientem 0·736 (§ 109.) obdržíme effekt ve starší jednotce, v koňských silách. Kdyby tedy na př. při množství vody $\frac{1}{2} m^3$ byl úhrnný spád 12 m, byl by effekt

$$E = \tfrac{1}{2} \,.\, 9{\cdot}8 \,.\, 12 = 58{\cdot}8 \text{ kilowatt.}$$

Pro starší jednotku pracovní metrkilogramm by se počítalo

$$E = \frac{500 \,.\, 12}{75} = 80 \; HP.$$

Effekt E takto vypočítaný jest theoretický čili absolutní. Effekt faktický čili relativní lze vyjádřiti ve formě kE, kdež jest $k < 1$. Koefficient k jest měrou působnosti motoru a vyjadřuje se v procentech; činí ovšem vždy $< 100\%$. Motor nezachytí veškeré množství vody, kteráž teče též stranou. Také živá síla vody nepřenáší se úplně na motor, poněvadž voda ještě s jistou rychlostí odtéká. K tomu se druží rozmanité překážky pohybu, tření a nárazy, pohyby vířivé a pod. Nicméně celkem motory vodní využitkují značnou část daného absolutního effektu. Vodní kola na spodní vodu 25 až 60 procent, na vrchní vodu až 75 procent, turbiny až 80 procent. To jsou čísla veliká, oproti nimž parní stroje ukazují poměry daleko nepříznivější; neboť zde se využitkuje sotva 15 proc. té energie tepelné, jež jest obsažena v uhlí. Při konkurrenci motorů vodních a parních rozhodují ovšem ještě otázky jiné, zejména na jedné straně stálost a spolehlivost síly vodní, a na druhé straně cena paliva. Vzhledem k tomu, že otázka přenášení síly vysoce napiatými proudy elektrickými v dobách našich jest rozřešena, lze pochopiti, že užívání motorů vodních se stále rozmáhá. Zejména turbiny konají tu služby dobré, poněvadž jich lze užívati při malém i při velkém spádu a v tomto případě i při malém množství vody. Tak lze využitkovati energii bystřin horských, vodopádů, jakož toho velkolepým příkladem jsou installace při vodopádu Niagary.

XIX.

Úkazy rovnováhy a pohybu plynů.

§ 321. Význačné vlastnosti plynů.

Vědomosti naše o plynech vyšly z poznání vlastností, kteréž má vzduch, tento plyn nejznámější a nejdůležitější, jenž jest hlavním všech zástupcem *). Vzduch obklopuje zemi naši, tvoře jako by obal jisté výšky, kteráž není určitě omezenou a kterouž lze (dle výšek, v nichž se ještě objevují meteority) odhadovati na 300 až 400 km; obal tento zove se ovzduším čili atmosférou **).

O vlastnostech vzduchu, v němž žijeme, který dýcháme, jehož účinky pociťujeme ve větrech a bouřích, uvažovali již staří filosofové a mnohé též správně poznali. Tak na př. velikou pohyblivost, pošinutelnost nejmenších částic, kteroužto mají již kapaliny, kterou však u plynů pozorujeme v míře daleko větší. Kdežto kapaliny kladou pohybu, zvláště prudšímu, přece jistý odpor, mizí tento u vzduchu téměř úplně, a jen tehdá přichází k platnosti, když se pohyb děje velikou plochou. Toliko poznání, že vzduch podléhá tíži, že jest těžký, proniklo poměrně velmi pozdě, a i tu náhodou.

Pravda jest ovšem, že Aristoteles a snad i mnozí před ním tušili, že vzduch jest těžký; také mnohé účinky, jež se na tíži vzduchu zakládají, byly známy, avšak byly jinak vysvětlovány. Sem náleží hlavně účinek ssání. Od dávných dob bylo užíváno ssacích pump k čerpání vody, ale jich působnost byla ve středověku a i v prvních stoletích věku nového vykládána

---

*) Řecké jméno vzduchu jest aer, ἀήρ, -έρος ὁ; slovem tím označovali Řekové vzduch dolejší, méně čistý, kdežto hořejší, skvělý, zvali αἰθήρ, -έρος ὁ; odtud náš název aether pro hypothetické prostředí světelné. Slova aer užíváme v povšechných názvech aerostatika, aerodynamika a t. d., podobně jako slova hydor v názvech analogických.

**) Od řeckého σφαῖρα ἡ koule a ἀτμός ὁ pára, výpar, ἀτμίζω vypařovati se.

zvláštním názorem, souvisícím s otázkou o možnosti neb nemožnosti prostoru zcela prázdného, názorem, dle něhož příroda nepřipouští žádného prostoru prázdného, majíc proti němu odpor (horror, odtud horror vacui). Proto když by vyssáním vzduchu měl vzniknouti prostor prázdný, příroda vyplní jej kapalinou, může-li tato do něho vnikati. Názor tento měl též *G. Galilei.* Avšak v posledních letech jeho života nahodilou událostí stalo se nutným názor ten změniti. Velkovévoda Toskanský, chtěje míti zařízeny vodotrysky na terrasse svého paláce ve Florencii, přál si, aby voda z blízké nádržky byla pumpována na výši této terrassy. Ukázalo se však (1640), že pumpy ssací nezvedly vodu přes určitou výšku. Záhadná tato věc byla oznámena Galileovi, tehdá již kmetu téměř 80letému. Galilei představoval si odtržení sloupce vodního asi tak, jako odtržení lana, kteréž by, jsouc zvedáno, také v jisté délce se odtrhlo vlastní vahou. Dle toho měl horror vacui jistou mez. Názor ten byl přechodním. Žák Galileův, *Jan Ev. Torricelli* (1608—1647) pojal myšlenku zkoušeti otázku nikoli vodou, nýbrž rtutí; jeho popudem provedl *Vincenzo Viviani* roku 1643 pokus nyní jménem pokusu Torricelliho známý, jehož význam Torricelli ihned správně vystihl, položiv za *horror vacui určité velikosti* pojem nový, dotud neznámý, totiž *tlak vzduchu určité velikosti.* Avšak názor starší byl tak zakořeněný, že ještě *B. Pascal,* jenž o tlaku vzduchu konal pokusy velmi četné a rozmanité, z počátku zjevy pozorované dle onoho staršího názoru vykládal. Teprve když se ukázalo, že výška sloupce rtuťového při opakování pokusu Torricelliho jest jiná na horách než v údolích, tak že by dle toho také horror vacui byl jiný na horách než v údolích, uznal správnost výkladu nového. Odtud šířilo se poznání význačných vlastností vzduchu vždy dále, hlavně také vynalezením a zdokonalením vývěvy, kterouž pokusy velmi četné provedl zejména *Otto z Guericke.*

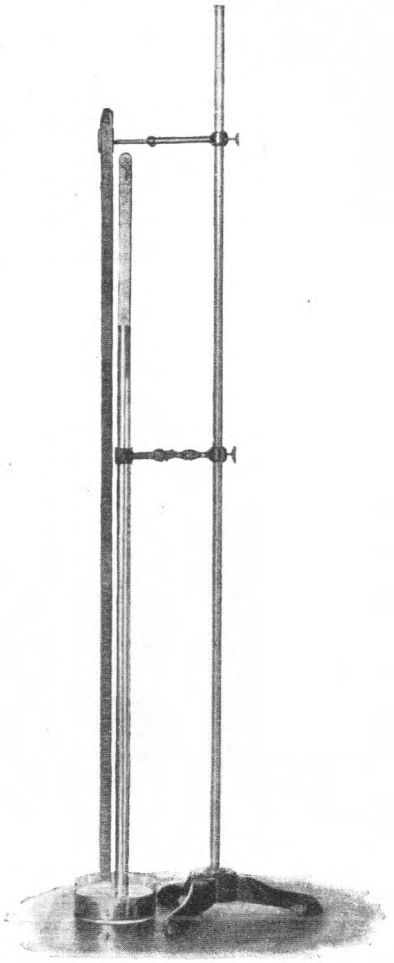
Tlak vzduchu.

§ 322. **Pokus Torricelliho.**

Chtějíce opakovati pokus Torricelliho vybéřeme skleněnou trubici průměru na př. 1 *cm* a dobře ji vyčistíce a vysušíce zatavíme na jednom konci asi v délce 1 metru a pak naplníme rtutí. Aby se nenachytalo mnoho bublinek vzduchových na stěnách trubice, jest výhodno užívati při tomto naplňování dlouhé až na dno trubice sahající nálevky skleněné; bublinky vzduchové zůstávají uvnitř této nálevky, kdež nevadí, v trubici samé pak stoupá rtuť pozvolna výše a tlačí vzduch před sebou. Naplníce pak trubici úplně rtutí uzavřeme palcem, obrátíme a vnoříme nezatavený konec trubice i palce do širší nízké nádoby se rtutí. Když pak palec oddálíme, klesne rtuť v trubici, ale jen do jisté výše, ve které stane. Upevníce svisle trubici ke stativu a připojíce měřítko millimetrové změříme výšku sloupce rtuťového a shledáme, že činí okrouhle $\frac{3}{4}m$. Sloupcem

rtuti této výšky jest tedy dána míra tlaku vzduchového. Uspořádání znázorňuje obr. 243., dle skutečnosti (ve zmenšení $\frac{1}{10}$) provedený.

Nade rtutí vzniká prostor prázdný, vakuum zvané Torricelliho. Skláníme-li trubici, vniká rtuť do prostoru tohoto, při čemž výškový rozdíl hladin rtuťových v trubici a vnější nádobě zůstává nezměněný. Při náhlejším sklonění trubice vyplní se onen prostor rtutí úplně, při čemž rtuť, dorazíc na sklo, způsobuje zvuk, který jest kovově ostrý, nezůstalo-li v prostoru ani stopy vzduchu, jinak tlumený. Aby se docílilo vakua dokonalého, bez všelikých stop vzduchu, jest nutno učiniti při naplňování trubice rtutí opatření zvláštní, o kterýchž jednáme níže obšírněji.



Obr. 243.

Jak dobře Torricelli vlastní podstatu pokusu po něm zvaného postihl, vysvítá z listu d. d. 11./6. 1644, kterýž od něho obdržel *Ricci.* »Žijeme na dně oceanu vzdušného, a víme z pokusů nepochybných, že vzduch jest těžkým. Na povrchu kapaliny ve vnější nádobě spočívá sloupec vzduchový výšky 50 mil. Může-li býti s podivením, že rtuť, která nemá ani odporu ani náklonnosti k trubici, do této vniká a v ní stoupá, až se docílí rovnováhy se vzduchem, který ji tlačí?« A dodává: »Vymyslil jsem pokus nejen abych jednoduchým způsobem vakuum zjednal, nýbrž abych opatřil přístroj, který může udávati změny tlaku vzduchu, jenž jest brzy těžší a hustší, brzy lehčí a řidší.«

Roku 1908 uspořádalo vlašské město *Faenza,* kdež se Torricelli 15. října 1608 narodil a kde mu byl též pomník postaven, výstavu a slavnost na památku třistaletých jeho narozenin. Viz článek Evangelista Torricelli, *Fr. Michl,* Časopis pro pěst. math. a fys. 38., pag. 257, 1908.

§ 323. Základy tlakoměrů.

Pokus Torricelliho jest pokusem nejen kvalitativním, nýbrž též kvantitativním; nejen že se jím tlak vzduchu dokazuje, nýbrž též měří, a to výškou sloupce rtuťového, jehožto tlak na danou plochu jest takový jako tlak vzduchu. Avšak tlak tento není stálým, mění se časem i místem. Proto nestačí měření oné výšky provésti jednou pro vždy, jako se na př. stanoví urychlení tíže na daném místě jednou pro vždy, nýbrž nutno měření opakovati často, po případě prováděti pravidelně. Proto jest s výhodou, sestrojiti k účelu tomu zvláštní přístroje, *tlakoměry* neb *barometry* *), jimiž lze měření taková prováděti jednak co možná pohodlně, jednak co možná přesně. Čeho při tom dlužno šetřiti, aby se dosáhlo účelu jednoho i druhého, seznáme z následující úvahy orientační, založené na pokusu Torricelliho.

Měření výšky sloupce rtuťového musí vycházeti od hladiny rtuti v nádobě. Avšak výška této hladiny jest měnlivou; klesá, když se tlak zvětšuje, stoupá, když se zmenšuje. Proto dlužno při úpravě tlakoměru toho dbáti, aby tyto *změny* vnější hladiny rtuťové přišly při měření náležitě k platnosti.

Měření, vycházejíc od této vnější hladiny rtuťové, sahá až k hladině rtuti uvnitř trubice barometrické. Čistá rtuť nelne ke sklu; působením sil kapillárních utváří se povrch rtuti v trubici vypukle, vznikne tak zvaný meniskus *) rtuťový; musí tudíž měření sahati až k vrcholu tohoto menisku jakožto bodu nejvyššímu.

S utvářením se menisku rtuťového souvisí snížení, depresse kapillární. Vrchol menisku jest níže, než by se srovnávalo s tlakem vzduchu; snížení pak jest podmíněno především průměrem trubice, ale též výškou menisku samého. Dle tohoto dvojího argumentu jsou tudíž upraveny tabulky, udávající na základě zvláštních pozorování velikost depresse. Tato jest větší, je-li průměr trubice menší a výška menisku větší. Přesné její stanovení činí obtíže značné; data nejnovější (dle Mendělějeva a slč. Gutkovské) jsou zde v tabulce sestavena.

Dlužno však již zde poznamenati, že eliminace této kapillární depresse na základě tabulky zůstává vždy více méně pochybnou, poněvadž zvláštními poměry, zejména povahou skla, čistotou rtuti, způsobem jak se utváří meniskus, může skutečná depresse dopadnouti poněkud jinak, než v tabulce udáno. Tato nejistota zvyšuje se ještě tím, že údaje kapillární konstanty pro rtuť dle různých pozorovatelů se dosti značně od sebe liší.

Konečně závisí úprava barometru též na rozhodnutí, má-li jistý barometr býti *staničným* nebo *přenosným*, t. j. má-li se montovati na

*) Z řeckého *βαρύς* těžký, *μέτρον τὸ* míra, měřítko. Pojmenování toho užil ponejprv *R. Boyle* r. 1665.

**) Z řeckého *μηνίσκος ὁ* diminutivum od *μήνη ἡ*, měsíc, luna, tedy měsíček lunula.

určitém místě v síni pozorovací, kdež stále zůstává, anebo má-li se upraviti tak, aby se dal přenášeti a k pozorování použíti na př. též venku, na volném prostranství, na místě jakémkoli.

Rozmanité systémy barometrické, o nichž jednáme dále podrobněji, rozeznávají se mezi sebou právě způsobem, jak uvedeným požadavkům jest vyhověno.

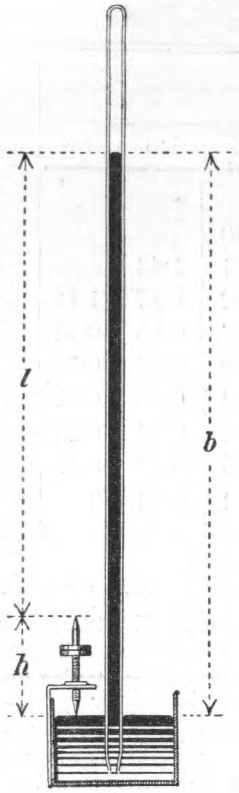
Kapillární depresse rtuti v *mm*.

Průměr	Výška menisku v *mm*.							
mm	0·4	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	1·8
4	0·83	1·22	1·54	1·98	2·37			
5	0·47	0·65	0·86	1·19	1·45	1·80		
6	0·27	0·41	0·56	0·78	0·98	1·21	1·43	
7	0·18	0·28	0·40	0·53	0·67	0·82	0·97	1·13
8		0·20	0·29	0·38	0·46	0·56	0·65	0·77
9		0·15	0·21	0·28	0·33	0·40	0·46	0·52
10			0·15	0·20	0·25	0·29	0·33	0·37
11			0·10	0·14	0·18	0·21	0·24	0·27
12			0·07	0·10	0·13	0·15	0·18	0·19
13			0·04	0·07	0·10	0·12	0·13	0·14

Všechny systémy barometrické mají společné jisté redukce, jež k výsledku přímého odečtení dlužno připojiti, aby bylo lze výsledky takové na různých místech a za různých poměrů zjednané vespolek srovnávati. Tyto redukce týkají se především účinku teploty, pak účinku polohy stanice pozorovací a to jak její výšky nad mořem, tak i její šířky geografické. Přesnost, s jakou redukce takové prováděti dlužno, závisí na tom, až na jakou část millimetru má výška sloupce rtuťového býti ještě zaručena. Udává se obyčejně, že jest snadno zaručiti ještě 0·1 *mm*, ba dokonce 0·02 *mm*. Vskutku jest sice snadno *odečtení* do té míry zjemniti, ale nikoli *výsledek* celého měření do té míry *zaručiti*. I když se přestane na přesnosti 0·1 *mm*, jest patrno, že nesmí vlivy rušivé dostoupiti velikosti 0·05 *mm*, má-li výsledek až na 0·1 *mm* býti zaručen. Ale pak dlužno přihlížeti též, jaké účinky má zavěšení barometru a čistota rtuti. Na všechny tyto otázky budiž zde souborně poukázáno; v následujícím pak bude o nich jednáno podrobně.

§ 324. Normální tlakoměr Regnaultův.

Tlakoměr normální, dle úpravy, kterouž mu dal *H. V. Regnault* *), předpokládá kathetometr; tím pak vlastní tlakoměr jest velmi jednoduchým. Normálním stává se tím, že u něho kapillární depresse jest nepatrnou, že tudíž mizí právě ta veličina, jejíž přesná eliminace z měření barometrických, jak již naznačeno, činí veliké obtíže. Toho docílí se pak volbou barometrické trubice velkého průměru, 25 až 30 *mm*. V souhlasu s tím bývá též nádoba vnější, skleněná neb železná, také rozměrů větších.



Obr. 244.

Při odčítání barometru jest nutno, hladinu rtuti v nádobě přivésti jako by na venek a učiniti tak měření přístupnou. K tomu konci jest na hořejším kraji nádoby upevněna matice šroubová, v níž se otáčí a tím též pošinuje podélný vertikální ocelový šroub, zakončený nahoře i dole hrotem. Vertikální odlehlost h (obr. 244.) obou hrotů určí se kathetometrem jednou pro vždy přesně a to při různých teplotách, aby se pak interpolací odlehlost ta pro teplotu jakoukoli dala z grafického znázornění anebo z tabulky na základě pozorování počítané vypsati. Šroubem tímto se tedy hladina rtuti v nádobě jako by převede z vnitř nádoby na venek o h výše. Před odečtením přivede se dolejší hrot šroubu v dotek s hladinou rtuti. Okamžik, kdy tento dotek nastává, lze ve světle odraženém citlivě zjistiti dle důlku, který tvoří hrot ve rtuti; jest zde výhodno šroubovati nejprve poněkud níže, až se důlek vytvoří a pak zpátky, až kdy důlek právě mizí.

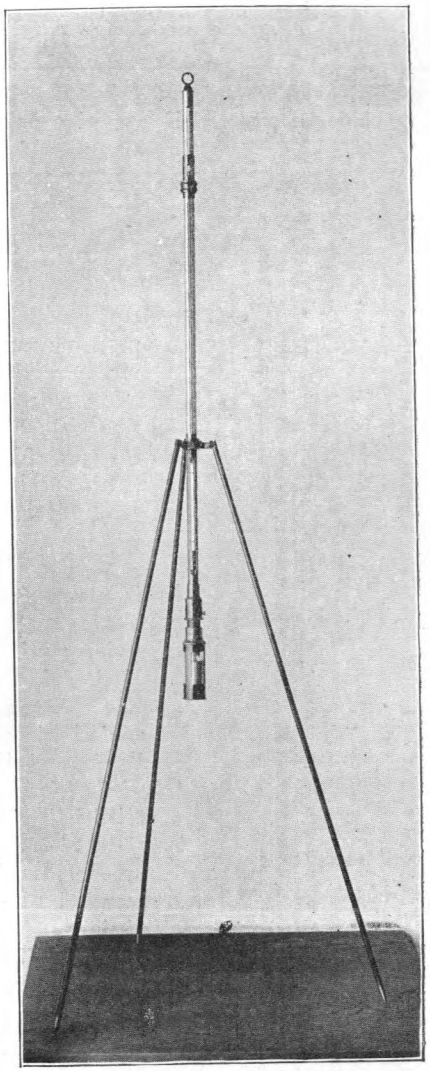
Variace výšky rtuťové hladiny v nádobě vstupuje tedy do měření přímo. Zbývá pak jenom určiti kathetometrem odlehlost l hořejšího hrotu a vrcholu menisku v barometrické trubici.

Užívání kathetometru, jakož i větší rozměry barometru samého, podmiňující velké množství rtuti, způsobují, že lze barometr tento jen pro určité místo v síni pozorovací sestaviti a k měření připraviti; jest tudíž tento tlakoměr, jakož i kterákoli jeho modifikace staničním v plném slova smyslu.

*) *Henri Victor Regnault*, slavný badatel v oborech chemie i fysiky (zde zejména v otázkách thermických), žil v letech 1810—1878; byl (1847—1854) professorem chemie na École polytechnique a fysiky na Collège de France, později (1854—1870) ředitelem továrny na porculán v Sèvres.

§ 325. Tlakoměr Fortinův.

Na rozdíl od předešlého sestrojil *Fortin* *) tlakoměr svůj jako přenosný. Význačnou jest úprava, jakou se variace ve výšce hladiny rtuťové v nádobě kompensují. Dno nádoby jest totiž kožené, uvnitř kaučukem obložené, a dá se šroubem zvedati a snižovati, čímž se též hladina rtuťová v nádobě zvedá neb snižuje. Nullový bod stupnice, na mosazném pouzdru provedené, jest dole v nádobě označen bodcem malého kužele z oceli neb slonoviny. Zařídí se tudíž *před každým odečtením* hladina rtuti v nádobě tak, aby se právě onoho bodce dotýkala.

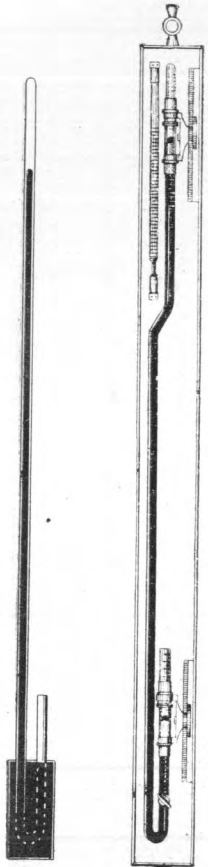

Obr. 245.

Dotek hrotu a rtuti zjistí se zde způsobem podobným jako u normálního tlakoměru Regnaultova; avšak jest tu přece rozdíl. Tam byla hladina rtuti dána a pohybovalo se šroubem; zde jest naopak hrot dán a pohybuje se hladinou rtuti. Tento rozdíl by konečně byl vedlejším. Ale vzhledem k menisku rtuťovému, jehož forma se pošinováním dolejší hladiny rtuťové mění, musí zde býti šetřeno pravidla, aby se tento meniskus tvořil *vždy vzestupně*; jinak, když by se tvořil někdy vzestupně, a jindy sestupně, nebylo by lze korrekci kapillární brátí vždy stejně. Proto nutno dole šroubem vždy šroubovati v před; po případě, když již hrot při klesajícím tlaku jest ve rtuti, šroubuje se zpátky,

*) *Fortin*, mechanik v Paříži, člen Bureau des longitudes, žil v letech 1750—1831.

až hladina rtuti přijde pod hrot, a pak teprve v před; dlužno tudíž ve světle odraženém zjistiti, kdy důlek ve rtuti právě se tvořiti začíná.

Výhodněji upraví se barometr Fortinův tak, že se dá zvedati nikoli dno nádoby, nýbrž nádoba celá (Arago). V tom případě má nádoba ocelovou matici šroubovou, kterou visí na šroubu, s pouzdrem pevně spojeném. Zařízením tímto docílí se důležité výhody jiné. Oproti Regnaultově sestrojil totiž Fortin barometr svůj zřejmě jako přenosný. Tu pak jest důležito, aby se stroj dal, jak říkáme, arretovati, t. j. aby se rtuť dala plně do trubice barometrické vpraviti a pak v ní uzavříti. Za tím účelem jest na dně nádoby ucpávka (korková) tak umístěna, aby se jí trubice barometrická uzavřela, když se nádoba na šroubu dotáhne. Postačí tedy barometr skloniti, aby rtuť vnikla plně do trubice a pak trubici došroubováním nádoby dole uzavříti. Závity šroubu jdou zde těsně, tak že jimi rtuť z nádoby nepronikne; naopak, když se zase před odečtením barometr desarretuje, jdou závity v nižších částech šroubu volněji, tak že může mezerami vzduch pronikati a tlak vnějšího vzduchu s tlakem vzduchu v nádobě se vyrovnati. Aby se pak barometr dal venku na každém místě k odečtení zaříditi, má zvláštní trojnohý stojan se závěsem Cardanovým (obr. 245.).



Obr. 246.

Obr. 247.

V souhlasu s účelem, tlakoměr přenášeti, jsou rozměry nádoby a zejména též rozměry trubice malé, tak že se vystačí s malým množstvím rtuti. Trubice barometrická bývá v té části, kde se odčítá, asi 7 *mm* v průměru, dole pak se zúžuje ještě více. Tím však vzniká značná depresse kapillární, 0·2 až 1·1 *mm*. Vypisovati ji z tabulky a tak do počtu zavésti bývá však vždy pochybné; lépe jest zjistiti ji jakožto korrekci přímým srovnáváním s tlakoměrem normálním; když se, jak nahoře určeno, meniskus tvoří vždy vzestupně, lze korrekci tuto pokládati za konstantní. Srovnáváním s barometrem normálním vezmou se ostatně i jiné eventuální chyby do korrekce, jako zejména neshoda nullového bodu měřítka s hrotem.

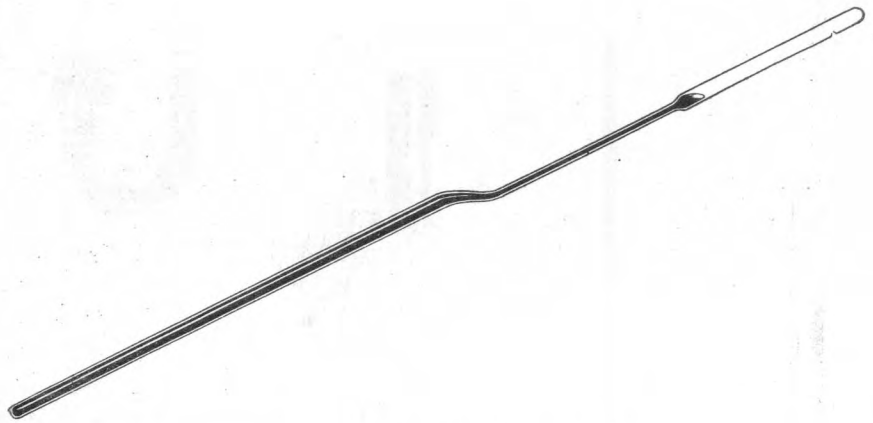
§ 326. Tlakoměr násoskový.

Vedle tlakoměru nádobkového bylo záhy již užíváno (Torricelli, Pascal) tlakoměru násoskového. Souvislost obou znázorňuje schematicky obr. 246. (ve zmenšení $\frac{1}{10}$). Dělení může býti na trubici barometrické

přímo. Nullový bod bývá buď *mezi* hořejším a dolejším meniskem anebo *pod* dolejším meniskem; toto uspořádání jest výhodnější onoho, poněvadž se odčítá nahoře i dole v témž smyslu, totiž zdola nahoru. Obr. 247. ukazuje tlakoměr takový, nástěnný; má-li se přenésti, skloní se tak, aby rtuť vyplnila vakuum; pak se tlakoměr kohoutem skleněným dole uzavře a tím arretuje. Ohnutím trubice, jak v obrazci jest znázorněno, docílí se toho, že osy hořejšího a dolejšího ramena trubice splývají v téže přímce, tak že dělení na stroji dělícím lze provésti souvisle v jednom směru.

§ 327. Tlakoměr Gay-Lussacův.

Tlakoměr násoskový má oproti nádobkovému důležitou výhodu v tom, že kapillární depresse jest vymýcena. Je-li totiž kalibr ramena dolejšího a hořejšího týž, je také depresse dole i nahoře stejná a tudíž se z výškové difference obou menisků vyloučí. Vzhledem k této výhodě hleděl *Gay-Lussac* *) zdokonaliti tlakoměr násoskový v tom smyslu, aby se pohodlněji



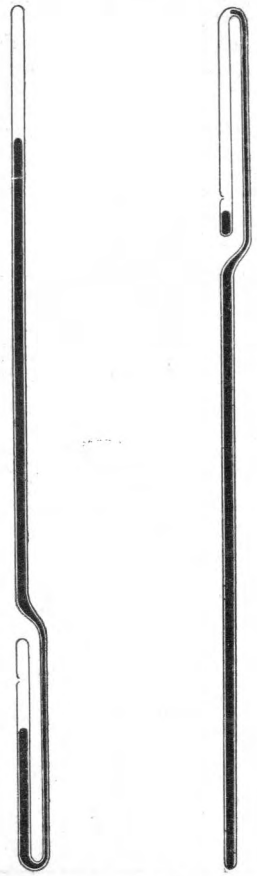
Obr. 248. a)

a jistěji dal přenášeti. Proto přitavil z téže trubice skleněné část určenou za rameno hořejší a část určenou za rameno dolejší k silné (ve skle) kapillární trubici, jak obr. 248. a) znázorňuje, naplnil celek rtutí, zatavil pak i rameno za dolejší ustanovené a propíchl stranou sklo žhavou jehlou tak, aby vzduch jen tímto malým otvorem měl přístup; potom upravil do formy obr. 248. b). Tím docílil výhody, že pro transport se tlakoměr jednoduše

*) *Gay-Lussac, Louis Joseph* (1778—1850), Description d'un nouveau baromètre, Ann. chim. et phys. I. 1816.

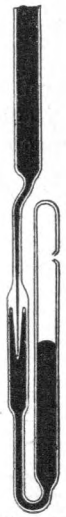
mohl obrátiti, jak obr. 248. c) znázorňuje, čímž užívání kohoutu k arretaci se stalo zbytečným. (Obrazce mají zmenšení $\frac{1}{10}$).

Barometr byl později zdokonalován. Bunten učinil opatření (obr. 249.), aby malé bublinky vzduchové, jež by eventuálně po stěnách trubice

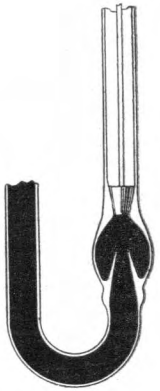


Obr. 248. b)

Obr. 248. c)



Obr. 249.



Obr. 250.

se pošinovaly, byly zachyceny a nevnikaly do vakua. Greiner sesílil trubici v části ohnuté a dal opatření proti bublinkám vzduchovým do ramena otevřeného, v němž se mimo to rtuť, nachýlením barometru do vakua vpravená, ucpávkou dá arretovati (obr. 250.). Pro účely přednášek jest pohodlno barometr takový montovati na trojnožce, aby se dal na místě jakémkoli postaviti.

Srovnávajíce barometry Fortinův a Gay-Lussacův, usoudíme, že tento jest přesnější, poněvadž depresse kapillární jest při něm vymýcena, onen

však že jest k přenášení pohodlnější, poněvadž se dá jistěji arretovati a poněvadž jest pouzdrem mosazným dobře chráněn. Avšak ona přesnost barometru Gay-Lussacova ukazuje se bližší úvahou býti illusorní. Kapillární depresse by se vymýtila, kdyby se meniskus v rameni otevřeném a zavřeném tvořil zcela stejně. To však není již proto možným, poněvadž se vždy jeden tvoří vzestupně a druhý sestupně. Mimo to okysličuje se vzduchem povrch rtuti v rameni otevřeném, prach vniká sem a znečišťuje rtuť i sklo, což vše modifikuje tvar menisku. Poněkud se tomu dá zabrániti, když se barometr mimo pozorování nechává v poloze šikmé, ve které rtuť vyplní vakuum a v rameni otevřeném sejde dolů, a když se teprve před pozorováním postaví, čímž v rameni otevřeném vyjde čistá rtuť na povrch. Celkem však není pochybnosti, že barometru Fortinově dlužno dáti přednost před Gay-Lussacovým. Ovšem nutno jak co se srovnání s barometrem normálním, tak co se vytváření menisku vždy vzestupně týče, šetřiti pravidel dříve již uvedených.

§ 328. Normální tlakoměr dvouramenný.

Výklad o barometru tomto, kterýž udal *J. Wild* a sestrojil *R. Fuess*, a při kterém oba systémy, nádobkový a násoskový, jsou jako by sloučeny, připojuje se k poznámkám ke konci odstavce předešlého uvedeným. Kdyby se tlakoměr dvouramenný tím způsobem pozměnil, aby se hladina rtuti *v obou ramenech* dala zvedati, jako se zvedá v uzavřeném rameně tlakoměru Fortinova, a kdyby zároveň bylo učiněno opatření, aby i v rameně otevřeném sklo a rtuť *zůstávaly čistými*, docílilo by se menisku *vždy stejného v obou ramenech*, čímž by pak v differenci obou odečtení vliv depresse kapillární se vymýtil. Jak základní tato myšlenka jest provedena, znázorňuje obr. 251. schematicky a obr. 252. v průřezu dle skutečnosti.

Obr. 251.

Obr. 252.

Obě ramena souvisí vespolek nádobou rtutí naplněnou, jejížto dno se dá šroubem zvedati tak, jako u barometru Fortinova. Když se tedy před každým odečtením rtuť zvedá, utvoří se meniskus vzestupně v ramenech obou, jak na-

hoře žádáno. Aby pak prach nevnikal dovnitř, uzavírá se v ramenu otevřeném po odečtení postranní otvor příklopkou na šroubu. Mimo to šetří se přísně pravidla, aby se po každém odečtení šroubováním spustila rtuť dolů do nádoby tak, aby v ramenu tomto nezůstávala; neboť kysličník rtuti usazuje se na skle, tvoře zde kruhy a znečišťuje tak sklo. Když se pak před odečtením rtuť šroubováním zvedne, přichází do ramena tohoto vždy nová a čistá, ježto kysličník zůstává zpět.

Tlakoměr tento jest zařízen jako přenosný. K cíli tomu vyšroubuje se rtuť tak vysoko, aby vyplnila rameno zavřené i otevřené, načež se, když rtuť do postranního otvoru právě začíná vnikati, otvor tento onou ucpávkou na šroub pevně uzavře. Proto hodí se barometr tento zejména pro službu kontrolní, aby se jím, na př. na stanicích meteorologických, jednotně revidovaly a kontrolovaly barometry staniční. Při tomto přenášení vkládá se barometr do zvláštního pouzdra dřevěného, toto pak zase do pouzdra koženého s řemenem, kterým se celek na rameni pozorovatelově v poloze mírně nakloněné dá pohodlně nésti. Pro ústavy metronomické k účelům nejpřesnějším hotoví se barometry tyto v provedení velmi dokonalém, zejména co se týče způsobu odčítacího.

§ 329. **Barometr variační.**

U barometrů dosavad popsaných jest třeba provésti *dvojí manipulaci*, než se obdrží hledaná výška sloupce rtuťového; jedna manipulace týká se úpravy anebo odečtení hladiny rtuťové *dolní* a druhá odečtení hladiny rtuťové *horní*. Dvojí tato manipulace vyžaduje ovšem jistého času a jisté práce a pozornosti. Odčítá-li se na barometru jen někdy za čas, není věc ta příliš závadou. Jde-li však o pozorování barometrická velmi častá, několikrát za den pravidelně se opakující, jakáž se konají na stanicích meteorologických, jest již každá úspora času a práce velmi vítána. Úsporu takovou poskytuje barometr variační, který se v novější době začíná zaváděti na stanicích meteorologických i v laboratořích fysikálních a chemických a dobře se osvědčuje.

Barometr variační jest v podstatě své nádobkovým, podobným Fortinově; nádobka válcovitá má však dno pevné. Budiž R poloměr této nádobky a r poloměr barometrické trubice. Změní-li se výška sloupce rtuťového v trubici o x, změní se současně ve smyslu opačném výška rtuti v nádobě o y. Změna tlaku barometrického jest pak $x + y$. Vzhledem k tomu, že výšky x a y přísluší témuž objemu rtuti, platí rovnice

$$\pi r^2 x = \pi (R^2 - r^2)\, y,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r^2}{R^2 - r^2},$$

$$x + y = x \frac{R^2}{R^2 - r^2}$$

čili

$$x + y = \frac{x}{1 - \frac{r^2}{R^2}}.$$

Odečítajíce tedy jen na trubici barometrické, nalézáme změnu x, kdežto změna skutečná jest $x + y$. Tato skutečná se má k odečtené, jako $1 : \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, čili jako millimetr skutečný k millimetru redukovanému, t. j. zmenšenému o $\frac{r^2}{R^2}$. Aby tedy odečtená změna byla zároveň skutečnou, upravíme stupnici redukovanou, v níž každý millimetr jest zmenšen o $\frac{r^2}{R^2}$, a odečítajíce na této stupnici, obdržíme skutečnou změnu tlaku barometrického.

Obr. 253. ukazuje takový barometr variační v průřezu. Při něm jest

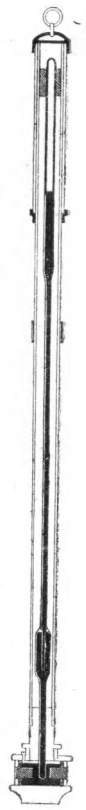
$$2r = 10\ mm, \qquad 2R = 70\ mm,$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{49}.$$

Zde jest tedy každý millimetr zmenšen velmi přibližně o 2 procenta, tak že dílec stupnice činí

$$1 - 0{\cdot}02$$

v millimetrech. Když se tedy barometr jednou pro vždy dle normálního přesně zařídí, přidáváním nebo ubíráním rtuti v nádobě, udává pak i při jediném odečtení správně tlak barometrický.

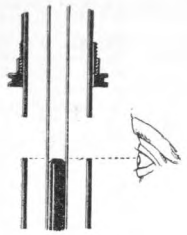


Obr. 253.

§ 330. **Přesnost odčítání a přesnost výsledku.**

Při odčítání barometrickém jde o to, promítnouti vrchol menisku *horizontálně* na měřítko *vertikální*. Dlužno tudíž zabezpečiti horizontálnost visury. U tlakoměrů násoskových, u nichž bývá dělení provedeno přímo na skleněné trubici, lze si pomoci zrcátkem, které se těsně k trubici přidrží; oko visiruje v rovině, jež jest tečnou k menisku skutečnému i zrcadelnému; desetiny millimetru lze při tom odhadnouti. Zpravidla usnadňuje se odčítání noniem, který lze podél měřítka hlavního pošinovati. Na jeho trubici jest pak vpředu i vzadu výřez, jehož ostré hrany (obr. 254.) určují rovinu visirovací, souhlasící s nullovým bodem nonia. Užívá-li se k odčítání kathetometru, zařídí se dalekohled přesně horizontálně libellou. Může však při tomto odčítání vzniknouti nejistota tím, že se meniskus v dalekohledu nejeví dosti určitě a ostře. Často se tvoří na menisku reflexy, jimiž vrchol sám se zakrývá a jimiž vznikají jiné zdánlivé ostré hranice, jež

však jsou chybné. Tím se přesnost odčítání kathetometrického může státi illusorní. Obtíži se odpomůže zvláštním stínítkem, na kteréž se jako na pozadí dalekohledem meniskus promítá; toto stínítko vertikálně postavené jest v dolejší části bílé, v hořejší černé; horizontální přímka hraničná zařídí se něco málo nad meniskem tak, aby se v menisku zrcadlila černá část stínítka, čímž se meniskus sám jeví v dalekohledu též tmavým, ale aby se meniskus tento promítal na dolejší bílou polovici stínítka. Dobře jest též vhodně umístěným diafragmatem zabrániti, aby do dalekohledu nevnikalo světlo se stran. Zařízení tato platí pro odčítání menisku rtuťového v trubicích vůbec. Šetří-li se pravidel zde uvedených, lze snadno toho dosáhnouti, že odečtení jest přesné při obyčejném noniu na $\frac{1}{20}$ *mm*, při užívání mikroskopu na $\frac{1}{50}$ *mm*, a při užívání kathetometru a šroubu mikrometrického eventuálně až $\frac{1}{100}$ *mm*.



Obr. 254.

Avšak přesnost odčítání neznamená ještě přesnost výsledku. Má-li přesnost právě uvedená míti platnost i pro výsledek, musí s ní býti v souhlasu všechny ty účinky, jež zde vedle odčítání o výsledku rozhodují. Sem náleží

1. Čistota rtuti.
2. Dokonalost vakua.
3. Správnost zavěšení.

Vezměme za základ dalších úvah přesnost jen mírnou, $\frac{1}{20}$ *mm*. Při průměrném tlaku 750 *mm* činí tato přesnost relativně

$$\tfrac{1}{20} : 750 = \tfrac{1}{15000},$$

tedy $\frac{1}{15}$ promille. S touto přesností musí tudíž býti v souhlasu vše ostatní.

1. Specifická hmota S_0 rtuti při teplotě tajícího sněhu jest

$$S_0 = 13{\cdot}5956 \frac{g}{cm^3}.$$

Přesnost $\frac{1}{15}\,{}^0/_{00}$ znamená 0·0009; musí tudíž čistota rtuti býti zabezpečena aspoň tak, aby třetí místo decimální ve specifické hmotě bylo na jedničku zaručené.

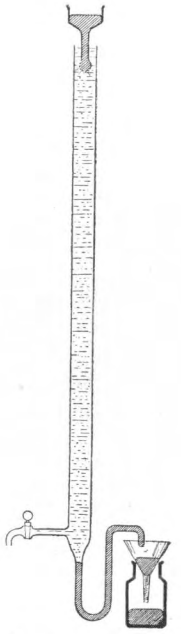
K čištění rtuti užívá se jednak filtrace, jednak třepání kapalinami, jednak destillace.

Filtrací zbavuje se rtuť prachu a přimíšenin, jež nejsou ve rtuti rozpuštěné; filtrem jest buď pijavý papír, v kornout stočený a jehlou dole propíchnutý, anebo lépe čistá kůže, jejížto pory se rtuť vlastní vahou protlačuje.

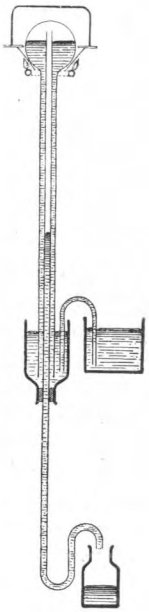
Třepání kapalinami má za účel zbaviti rtuť látek, kteréž jsou v ní rozpuštěné a kteréž promícháváním přejdou ze rtuti do kapaliny, v níž se též rozpouští. Pro obyčejné kovy (zejména měď) a pro kysličník rtuťnatý volí se nejraději zředěná kyselina dusičná, též se doporučují roztoky chloridu železnatého aneb dvojchromanu draselnatého; pro tuky louhy sodnaté, neb draselnaté, po případě benzol. Třepání děje se v pevných skleněných lahvích skleněnou zátkou uzavřených. Naposled se musí rtuť protřepati několikráte čistou destillovanou vodou. Jde-li o větší množství rtuti, která

se má vyčistiti, vyplatí se, na místě obtížného třepání sestaviti zvláštní přístroj, v obr. 255. znázorněný. Rtuť nečistá vylévá se do nálevky opatřené četnými, velmi malými dírkami ve skle, jimiž se v jemných kapkách protlačuje a jako déšť padá dlouhým sloupcem čistící kapaliny, na př. zředěné kyseliny dusičné, nalité do trubice skleněné, 1—2 *m* dlouhé, přiměřeně široké, ke zdi upevněné. Dole má trubice ta postranní trubičku s kohoutem na vypouštění čistící kapaliny, poněkud níže pak se zúžuje v trubičku úzkou, nahoru ohnutou, v níž jest rtuť, jejížto krátký sloupeček jest v hydrostatické rovnováze s dlouhým sloupcem čistící kapaliny; když se nahoře rtuť nalévá, kape odtud rtuť již čistější do láhve, do níž po případě na sušení se může ještě vložiti v nálevce filtr z pijavého papíru. Když veškerá rtuť jednou proběhla sloupcem čistící kapaliny, vypustí se tato a nahradí novou, načež se čištění opakuje. Naposled dá se na místo čistící kapaliny destillovaná voda, kterou se rtuť k vyprání ještě jednou neb i vícekráte nechává probíhati.

Destillace rtuti má hlavně za účel zbaviti rtuť kovů těžkých, které se nerozpouštějí leč jen v kapalinách, jež by také rtuť samou rozpouštěly. Při tom jest nejvýhodnější destillovati rtuť ve vakuu. Přístroje k tomu cíli upravené spočívají na té základní myšlence, rozšířiti vakuum Torricelliho a zde rtuť zahřívati; nutno pak ještě páry rtuťové odváděti a chladiti, aby se kondensovaly. Obr. 256. znázorňuje jeden z přístrojů takových, který se velmi dobře osvědčuje. Jest jako nádobkový barometr; tam, kde jest prostor vzduchoprázdný Torricelliho, rozšiřuje se barometrická trubice v baňku, ve kteréž se rtuť plamínky kruhově kolem rozloženými zahřívá. K odvádění a kondensování par rtuťových slouží úzká a dlouhá trubička skleněná, procházející rtutí až do hořejšího prostoru, dole pak prostupující nádobkou barometrickou, a končící částí přiměřeně ohnutou tak, aby trubička tato opět představovala jako by tlakoměr násoskový; zde pak při destillování rtuť v kapkách padá do láhve. Apparát tento jest pohodlný hlavně tím, že možno při něm destillaci každé chvíle zahájiti a též každé chvíle přerušiti. Je-li jednou sestaven, lze jím pracovati po dlouhý čas, zejména, není-li rtuť k předestillování určená příliš nečistou. Tato se nalévá do barometrické nádoby, po případě spojí se rtuť



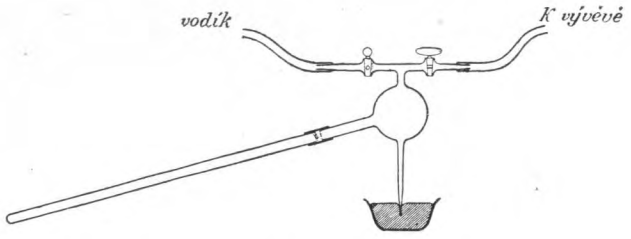
Obr. 255.



Obr. 256.

v této nádobce násoskou s jinou větší zásobou rtuti, aby odtud průběhem destillování do nádoby barometrické přecházela. Nahoře, kde se rtuť zahřívá, jest dobře vložiti mezi plaménky a sklo asbestový papír, aby snad sklo přímým účinkem plamene neprasklo.

2. Je-li pro naplňování tlakoměru zjednána rtuť co možná čistá, nastává úloha provésti naplnění tak, aby vakuum Torricelliho bylo co možná dokonalé, t. j. aby neobsahovalo ani stopy vzduchu a také ne vlhkosti. K cíli tomu doporučuje se trubici barometrickou plniti postupně a rtuť vyvářeti. Nehledíc však k nebezpečí, že při tom trubice praskne, nelze se ubrániti, aby se při tom netvořil kysličník, kterým se znečistí i rtuť i stěny trubice. Daleko výhodnějším jest naplňování trubice provésti za současné evakuace vývěvou, na př. ve způsobu, jaký obr. 257. schematicky znázorňuje.



Obr. 257.

Barometrická trubice, která se naplniti má, připojí se kaučukem — po případě přitaví — v poloze mírně nakloněné k baňce; tato má směrem dolů úzkou skleněnou trubičku, dole zatavenou, která sahá do zásoby čisté rtuti k plnění připravené; nahoře pak má trubici, jež se rozvětvuje na dvě strany, jednak směrem k vývěvě, jednak směrem k železnému recipientu s vodíkem. Dobrými kohouty lze spojení otevříti neb uzavříti. Práce děje se tak, že se trubice barometrická vyčerpá, pak naplní suchým vodíkem, opět vyčerpá, opět naplní vodíkem, ke konci zahříváním ještě zvlášť suší, načež se konec zatavené, do rtuti sahající trubičky skleněné ulomí; rtuť vniká pak ponenáhlu vzhůru do baňky a do trubice mezi tím, co se stále vývěvou dále čerpá až naplnění jest provedeno.

Máme-li barometr již naplněný před sebou, neznajíce, jak pečlivě naplňování bylo prováděno, jest důležito věděti, jak se můžeme o dokonalosti Torricelliho vakua přesvědčiti. K první orientaci koná dobré služby methoda akustická. Nakloníme-li opatrně barometrickou trubici, vniká rtuť do vakua a narazí konečně na trubici; náraz způsobuje zvuk kovově ostrý, je-li vakuum dokonalé, naproti tomu tlumený, jsou-li nad rtutí stopy vzduchu neb vodní páry. Jemnější jsou methody elektrických výbojů pomocí induktoria (Grunmach). Nejlepší jest však methoda zmenšování objemu vakua Torricellova. U obyčejných barometrů provede se zmenšení toto tak, že se do nádoby barometrické nebo do otevřeného ramena doleje rtuti. Nejpohodlněji provádí se methoda tato u barometru normálního Wild-Fuessova tak, že se o dokonalosti vakua rozhodne nejen kvalitativně, nýbrž

i kvantitativně. Zmenší se totiž, vyšroubováním rtuti, prostor Torricelliho na polovičku. Shledá-li se, že odečtení tlaku dává hodnotu proti dřívější o β menší, jest tato difference zároveň korrekcí, kterouž nutno k výšce barometrické před tím pozorované připojiti, aby se dostal tlak správný. Neboť je-li tento $= b$, byl tlak pozorovaný při prvém odečtení $b - \beta$, při druhém (dle zákona Boyle-Mariottova) $b - 2\beta$, tak že difference obou odečtení jest

$$(b - \beta) - (b - 2\beta) = \beta$$

právě korrekce hledaná. U barometru Wild-Fuessova, kde se menisky rtuťové vždy zcela stejně tvoří, vyjde korrekce tato velmi spolehlivě; u jiných tlakoměrů mohou z nejistoty kapillární depresse vzniknouti chyby dosti značné.

3. Konečně dlužno též přihlédnouti, aby barometr visel svou osou, kteráž jest též osou trubice barometrické, přesně vertikálně. Když jest o malý úhel ε chybně zavěšen, odčítá se větší délka $\frac{b}{\cos \varepsilon}$ na místě b, tak že vzniká chyba

$$\frac{b}{\cos \varepsilon} - b \text{ čili } \frac{2b}{\cos \varepsilon} \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

aneb

$$2b \sin^2 \frac{\varepsilon}{2},$$

poněvadž jest velice přibližně $\cos \varepsilon = 1$. Počítáme-li, při jakém úhlu dostoupí chyba $\frac{1}{20}$ *mm*, obdržíme pro $b = 75$ *cm* úhel

$$\varepsilon = 0^0 39{\cdot}7'.$$

Chyba $\frac{1}{20}$ *mm* vzniká tedy již úhlem ε velmi malým, jen o málo větším než $\frac{1}{2}{}^0$. Nemá-li barometr stativ se závěsem Cardanovým, jest nejlépe, když v prodloužení osy barometru se nalézá tyč v polokouli se rozšiřující a do podobné duté polokoule na hřebíku zapadající, tak že barometr má úplnou volnost polohu vertikální zaujmouti.

§ 331. Redukce odečtení barometrického na normální teplotu.

Stoupá-li v síni pozorovací teplota z 0^0 na t^0, klesá specifická hmota rtuti z hmoty S_0 na S_t a zároveň prodlužují se dílce měřítka. Zpravidla jest normální teplota měřítka — při níž tedy dílce jsou skutečnými millimetry, — teplota nullová. Je-li α lineární koefficient roztažnosti měřítka, značí dílec stupnice při teplotě t v millimetrech

$$1 + \alpha t.$$

Čteme-li tudíž při teplotě t na barometru b_t dílců, znamená odečtení toto v millimetrech

$$b_t (1 + \alpha t).$$

Poněvadž pak hydrostatický tlak jest úměrný součinu z výšky sloupce rtuťového a specifické hmoty, máme pro teploty 0^0 a t^0 rovnici

$$b_0 S_0 = b_t (1 + \alpha t) S_t.$$

Značí-li β objemový koefficient roztažnosti rtuti, jest

$$S_t = \frac{S_0}{1 + \beta t}.$$

Násobením obou rovnic obdržíme

$$b_0 = b_t \frac{1 + \alpha t}{1 + \beta t}.$$

Rovnice tato jest základem pro redukci odečtení při teplotě t vykonaného na odečtení, jakéž by se za týchž poměrů tlakových vykonalo při normální teplotě 0^0. Volíme-li formu úměry

$$\frac{b_0}{b_t} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \beta t},$$

obdržíme, utvořice úměru rozdílovou, ihned

$$\frac{b_t - b_0}{b_t} = \frac{(\beta - \alpha)\, t}{1 + \beta t},$$

tudíž

$$b_0 = b_t - \frac{(\beta - \alpha)\, t}{1 + \beta t} \cdot b_t.$$

Výraz

$$\frac{(\beta - \alpha)\, t}{1 + \beta t} \cdot b_t$$

udává tedy redukci odečtené výšky barometrické na teplotu nullovou. Internacionální tabulky meteorologické (Paříž 1890) přijímají číselné hodnoty pro rtuť

$$\beta = 0{\cdot}0001818,$$

pro měřítko pak mosazné

$$\alpha = 0{\cdot}0000184, \qquad \beta - \alpha = 0{\cdot}0001634,$$

a pro skleněné

$$\alpha = 0{\cdot}0000085, \qquad \beta - \alpha = 0{\cdot}0001733.$$

Přibližně lze onu redukci na 0^0 psáti ve formě

$$(\beta - \alpha) \cdot b_t \cdot t,$$

když se malý člen βt proti 1 zanedbává. Redukce jeví se tudíž tak, jako by rozhodoval relativní koefficient $\beta - \alpha$ rtuti a materiálu měřítka. Při vyšších teplotách, asi od 25^0 počínajíc, zasahá však člen βt do setin millimetru, tak že jen tehdá lze jeho účinku nedbati, když se redukce počítá toliko na desetiny *mm*.

Redukce odečtení tlakoměrného na 0^0.

t	Odečtený tlak v *mm*									Korrekce na sklo $0{\cdot}00736 \cdot t$
	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
$^0 C$	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*
0	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00	0·00
1	0·11	0·12	0·12	0·12	0·12	0·12	0·12	0·13	0·13	0·01
2	0·23	0·23	0·24	0·24	0·24	0·25	0·25	0·25	0·25	0·01
3	0·34	0·35	0·35	0·36	0·36	0·37	0·37	0·38	0·38	0·02
4	0·46	0·46	0·47	0·48	0·48	0·49	0·50	0·50	0·51	0·03
5	0·57	0·58	0·59	0·60	0·60	0·61	0·62	0·63	0·64	0·04
6	0·69	0·70	0·71	0·71	0·72	0·73	0·74	0·75	0·76	0·04
7	0·80	0·81	0·82	0·83	0·85	0·86	0·87	0·88	0·89	0·05
8	0·91	0·93	0·94	0·95	0·97	0·98	0·99	1·01	1·02	0·06
9	1·03	1·04	1·06	1·07	1·09	1·10	1·12	1·13	1·15	0·07
10	1·14	1·16	1·17	1·19	1·21	1·22	1·24	1·26	1·27	0·07
11	1·26	1·27	1·29	1·31	1·33	1·35	1·36	1·38	1·40	0·08
12	1·37	1·39	1·41	1·43	1·45	1·47	1·49	1·51	1·53	0·09
13	1·48	1·50	1·53	1·55	1·57	1·59	1·61	1·63	1·65	0·10
14	1·60	1·62	1·64	1·67	1·69	1·71	1·73	1·76	1·78	0·10
15	1·71	1·74	1·76	1·78	1·81	1·83	1·86	1·88	1·91	0·11
16	1·82	1·85	1·88	1·90	1·93	1·96	1·98	2·01	2·03	0·12
17	1·94	1·97	1·99	2·02	2·05	2·08	2·10	2·13	2·16	0·13
18	2·05	2·08	2·11	2·14	2·17	2·20	2·23	2·26	2·29	0·13
19	2·17	2·20	2·23	2·26	2·29	2·32	2·35	2·38	2·41	0·14
20	2·28	2·31	2·34	2·38	2·41	2·44	2·47	2·51	2·54	0·15
21	2·39	2·43	2·46	2·50	2·53	2·56	2·60	2·63	2·67	0·15
22	2·51	2·54	2·58	2·61	2·65	2·69	2·72	2·76	2·79	0·16
23	2·62	2·66	2·69	2·73	2·77	2·81	2·84	2·88	2·92	0·17
24	2·73	2·77	2·81	2·85	2·89	2·93	2·97	3·01	3·05	0·18
25	2·85	2·89	2·93	2·97	3·01	3·05	3·09	3·13	3·17	0·18
26	2·96	3·00	3·04	3·09	3·13	3·17	3·21	3·26	3·30	0·19
27	3·07	3·12	3·16	3·20	3·25	3·29	3·34	3·38	3·42	0·20
28	3·19	3·23	3·28	3·32	3·37	3·41	3·46	3·51	3·55	0·21
29	3·30	3·35	3·39	3·44	3·49	3·54	3·58	3·63	3·68	0·21
30	3·41	3·46	3·51	3·56	3·61	3·66	3·71	3·75	3·80	0·22
31	3·53	3·58	3·63	3·68	3·73	3·78	3·83	3·88	3·93	0·23
32	3·64	3·69	3·74	3·79	3·85	3·90	3·95	4·00	4·05	0·24
33	3·75	3·81	3·86	3·91	3·97	4·02	4·07	4·13	4·18	0·24
34	3·87	3·92	3·98	4·03	4·09	4·14	4·20	4·25	4·31	0·25
35	3·98	4·03	4·09	4·15	4·21	4·26	4·32	4·38	4·43	0·26

Pro praxi pozorovací počítá se jednou pro vždy tabulka, z níž lze redukci dle dvojího argumentu, b_t a t, snadno (interpolací) vypsati, a to buď pro stupnice skleněné nebo mosazné. Poněvadž tlakoměry se stupnicí mosaznou jsou daleko rozšířenější, jest přijata sem tabulka (na stránce předešlé) pro tento případ platící. Při měřítku skleněném jest redukce *větší* o část

$$0{\cdot}0000099 \,.\, b_t \,.\, t.$$

Přijmeme-li pro b hodnotu střední (Praha)

$$b_t = 743\ mm,$$

obdržíme pro onu korrekci výraz

$$0{\cdot}00736 \,.\, t$$

a tento výraz jest v posledním sloupci tabulky též spolu uveden. Tím lze tabulky té také pro stupnice skleněné užívati, aspoň pro takové hodnoty b_t, kteréž od oné střední se příliš neliší.

§ 332. Redukce odečtení tlakoměrného na normální intensitu tíže zemské.

Tlak barometrický vyjádřujeme *výškou* sloupce rtuťového na normální teplotu redukovanou. Veličiny tyto jsou však úměrny jen při téže intensitě g tíže zemské, jako jest tomu při čteních na témže tlakoměru staničném. Jedná-li se však o srovnávání údajů tlakoměrných pro stanice v různých šířkách zeměpisných a v různých výškách nad mořem položené, kde intensita g jest různou, pak třeba odečtení b přepočísti na odečtení b^*, jež by příslušelo intensitě normální g^*; za tuto volíme intensitu v zeměpisné šířce 45^0 při hladině mořské.

Redukce se provede vzorcem

$$b^* = b\,\frac{g}{g^*}.$$

Jde-li o změny intensity g šířkou geografickou ψ, jest (§ 228.)

$$\frac{g}{g^*} = 1 - 0{\cdot}0025523 \,.\, \cos 2\psi,$$

tudíž

$$b^* = b - b \,.\, 0{\cdot}0025523 \,.\, \cos 2\psi.$$

Pro rovník, $\psi = 0^0$, činí tedy redukce více než $^1/_4{}^0/_0$; hodnoty k sobě náležející jsou zde na př.

$$b = 76\ cm, \qquad b^* = 75{\cdot}806\ cm.$$

Vzorce analogické odvodí se, jde-li o změny intensity g výškou stanice nad hladinou mořskou (§ 187.).

Zde jest

$$\frac{g_h}{g} = 1 - \varepsilon h,$$

tudíž

$$b = b_h - b_h \varepsilon h,$$

kdež značí koefficient ε dle toho, zdali jde o stanice isolované (na př. v ballonu) nebo o stanice na horách, číselně

buď $$\varepsilon = 0{\cdot}000000314$$

nebo $$\varepsilon = 0{\cdot}000000196,$$

je-li h vyjádřeno v metrech. Redukce $b_h \varepsilon h$ korriguje tedy barometrické odečtení b_h, provedené ve výšce h, na takové odečtení, jež bychom v téže výšce obdrželi, kdyby zde intensita tíže byla taková jako dole ve výši nullové. Nejedná se tedy ve vzorci tom o redukci tlaku barometrického na hladinu mořskou, což jest úkolem zcela jiné povahy.

Výška meteorologické stanice Sonnblicku jest

$$h = 3100\ m.$$

Pro takováto na temeni vysokých hor položená místa béře se za ε ona hodnota menší; jest tedy pro tento příklad

$$\varepsilon h = 0{\cdot}000000196 \,.\, 3100 = 0{\cdot}00061.$$

Redukce činí tedy jenom 0·06 procent; hodnoty k sobě náležející jsou na př.

$$b_h = 51{\cdot}73\ cm, \qquad b = 51{\cdot}70\ cm;$$

redukce jeví se tedy jen v desetinách millimetru; jest negativní, poněvadž jest na temeni Sonnblicku rtuť lehčí, sloupec její proto vyšší, než hluboko v údolí a ve výši nullové. V praktické meteorologii spojuje se redukce tato hned s redukcí tlaku na hladinu mořskou ve formuli jednotné.

V § 187. bylo vyloženo, jakým způsobem se přichází k číselnému koefficientu $\varepsilon = 0{\cdot}000\,000\,196$ pro stanice na horách. V novější době byla otázka tato studována empiricky. Tak nalezl *v. Sterneck* ve východních Alpách a na jižním úpatí Krkonoš čísla 18 až 26, *Messerschmitt* v Alpách průměrně 21, *Defforges* v Alpách francouzských 22 až 26, *Putnam* na Pikes Peak v Rocky Mountains 22, *Preston* na Havaii 19 až 23, *Mendenhall* na Fusijama 25, celkem tedy více, než 19·6, jak nahoře udáno. Proto soudí *J. Hann*, že by se správněji měl voliti koefficient empirický

$$\varepsilon = 0.000000220$$

na místě hořejšího, jak se dle Bouger-a přijímá. Viz Zeitschr. f. Instr.-Kunde 24, pag. 275, 1904.

Když jest pro určitou stanici intensita tíže g určena pozorováním, počítá se přímo dle rovnice

$$b^* = b\,\frac{g}{g^*}.$$

čímž se obě ty redukce spojují dohromady.

Tak jest pro Prahu, Clementinum

$$g = 981{\cdot}010\ \frac{cm}{sec^2} \qquad g^* = 980{\cdot}606\ \frac{cm}{sec^2}$$

$$log\ b^* = log\ b + 0{\cdot}0001789$$

$$b^* = b + b\ .\ 0{\cdot}000412.$$

Hodnotami k sobě náležejícími jsou tedy zde na př.

$$b = 76\ cm, \qquad b^* = 76{\cdot}031\ cm.$$

Jak z příkladů uvedených patrno, není redukce, o níž jednáme, tak zcela nepatrnou. Uvážíme-li, že se při pozorování nebo při počítání (zejména hodnot průměrných) přihlíží i k setinám millimetru, a na druhé straně že i pro místa tak málo od střední šířky 45° vzdálená, jako jest na př. Praha, činí ona redukce několik desetin millimetru, pak poznáváme, že by v dobách našich, kde se dbá přesnosti největší, bylo aspoň nedůsledným, redukce takové nedbati. Proto také bylo na sjezdu meteorologickém v Mnichově 1896 usneseno, aby, pokud možná, odečtení barometrická byla na normální intensitu tíže redukována. V souhlasu s tímto usnesením provádí se tato redukce, od roku 1900 počínajíc, též při pozorováních hvězdárny Pražské v Clementinu.

§ 333. **Tlak vzduchu v míře absolutní.**

V duchu absolutní soustavy měr dlužno tlak vzduchu udávati v jednotce

$$\frac{dyna}{cm^2} \text{ nebo } \frac{megadyna}{cm^2},$$

vztahovati tudíž na jednotku horizontální plochy a počítati dle vzorce

$$p = bSg.$$

V převodním tomto vzorci znamená b barometrickou výšku sloupce rtuťového, S specifickou hmotu rtuti, při té teplotě, jakou právě rtuť má, eventuálně při teplotě nullové, je-li b, jak se *zpravidla* děje, na teplotu nullovou redukováno; konečně g faktické urychlení tíže na stanici pozorovací.

Převodní koefficient Sg se počítá pro jistou stanici, t. j. pro určité g jednou pro vždy. Pro Prahu, Clementinum, jest na př.

$$g = 981{\cdot}0\ \frac{cm}{sec^2}, \qquad S = 13{\cdot}5956\ \frac{g}{cm^3}$$

$$p = 0{\cdot}013337\ .\ b\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Aby se pak počítání nemusilo pokaždé zvlášť prováděti, propočítá se jednou pro vždy tabulka.

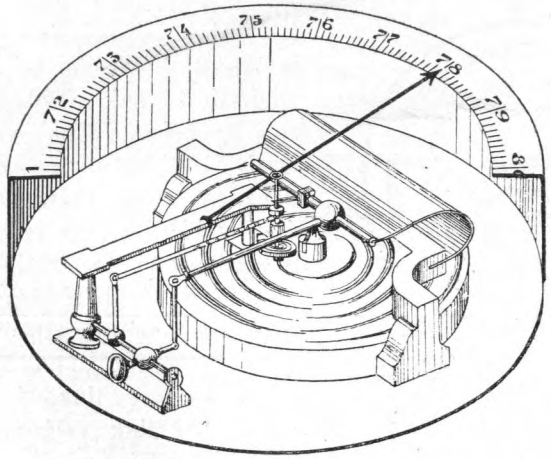
Dle toho byl by na př. průměrný tlak barometrický v Praze, Clementinum (197·2 *m* výšky n. hl. m.) pro rok 1899 vyjádřen číslem obvyklým a v míře absolutní

$$b = 74{\cdot}45\ cm, \qquad p = 0{\cdot}9929\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

§ 334. **Aneroidy.**

Aneroidy *) udávají variace tlaku vzduchového na základě pružnosti. Jsou rozšířeny dva typy, starší, kterýž sestrojil anglický mechanik *Vidi* (1847) a pozdější, kterýž udal *Bourdon* (1853).

Aneroid Vidiho, v obr. 258. schematicky znázorněný, má za hlavní část krabici téměř vzduchoprázdnou, uzavřenou s jedné strany víkem z tenkého, vlnitého plechu; změnou tlaku vzduchového uvádí se toto víko v pohyby, jež se regulují širokým, pružným pérem, s jedné strany s víkem spojeným a na druhé straně ke stěně celého stroje upevněným. Stoupá-li tlak vzduchu, vtlačuje se víko dovnitř a péro se více napíná; klesá-li tlak vzduchu, táhne se pérem víko nazpět, vždy tak, že mezi pružností péra a tlakem na víko jest rovnováha.



Obr. 258.

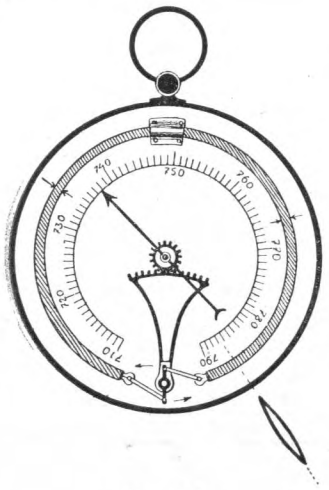
Aneroid Bourdonův, v obr. 259. schematicky znázorněný, má za podstatnou část zvláštní trubici, průřezu elliptického nebo čočko-

*) Z řeckého α privativum a νηρός = ναρός (νάω téci) kapalný, tudíž aneroid, tlakoměr bez kapaliny (rtuti).

vitého, stočenou kruhovitě do úhlu asi 330°, téměř vzduchoprázdnou a uprostřed upevněnou tak, že konce jsou volné. Tlak vzduchu působí silněji na stranu konvexní, jejíž plocha jest větší, než na konkavní, čímž se trubice buď více neb méně zakřivuje, když tlak vzduchu stoupá neb klesá.

Jinak mají oba typy úpravu další podobnou. Jedná se o to, aby jednak pohyby onoho víka, jednak pohyby obou konců oné trubice se převedly pomocí pák, řetízků, ozubených okoleček a pod. na ukazovatele, který po způsobu ukazovatele hodinového se otáčí podél kruhovitě rozložené stupnice, jako ručička u hodin vpřed, když tlak stoupá, zpět, když klesá.

Stupnice upraví se tak, aby změna tlaku vzduchového, udaná pohybem ukazovatele o jeden dílec, souhlasila se změnou výšky sloupce rtuťového o jeden millimetr. V tomto smyslu se říkává, že aneroidy mají stupnici millimetrovou; vskutku může dílec aneroidu činiti délkově několik millimetrů, čímž pak stroj citlivěji změny tlakové udává.



Obr. 259.

Poměr mezi barometry rtuťovými a mezi aneroidy lze vystihnouti případným přirovnáním; jest takový, jako mezi vahami pákovými a pérovými; ude užíváme pružnosti kovového péra, tam zváží. Jest však všeobecně známo, že i hrubší váhy pákové jsou spolehlivějšími než pérové*); neboť pružnost péra mění se mnohými účinky. Právě tak lze i aneroidu užívati jen za stálé kontroly, kterouž dává občasné jeho srovnávání s barometrem rtuťovým. Jinak udávají se jimi spolehlivěji obyčejné *variace* tlakové, pro jisté místo, než tlak *celkový*; kde jde o změny větší, na př. při stoupání do vysokých vrchů a hor, nebo v ballonu, pozoruje se zpravidla, že aneroid při návratu na stanici původní neukazuje totéž jako původně, následkem dopružování se materiálu. Oproti těmto vadám nelze však neuznati, že aneroidy pro účely, při nichž nejde o velkou

*) Váhy pérové se na př. k úřednímu cejchování vůbec nepřipouštějí.

přesnost, mají mnohé výhody. Jsouce kompendiosní, dají se snadno umístiti a bez obavy porušení přenášeti; odčítání jest jednoduché a dá se citlivě zaříditi; orientují pozorovatele dobře o rozdílech výškových, když vystupuje (na př. v ballonu) neb sestupuje; k cíli tomu mívají aneroidy vedle stupnice millimetrové (barometrické) pro odčítání výškové druhou parallelní metrovou (orometrickou); v krajinách polárních, kde rtuť venku zamrzá, konají při expedicích zvláště služby dobré. Vzhledem ke všem těmto přednostem snažili se mnozí zdokonaliti aneroid, zejména Vidiho; uvádíme zde jména Breguet, Naudet, Hulot, Goldschmidt a j. Účinek teploty hledí se vystihnouti empirickými formulemi. Když ukazovatel vázne, nedokonalostí mechanismu, třením a pod., možno mírným poklepáváním odečtení učiniti správnějším.

Jakožto zvláštnost charakteristická budiž ještě vytčena ta, že aneroidy nepodléhají změně intensity tíže. Jest tudíž možno srovnáváním barometru rtuťového a správného aneroidu na různě položených stanicích souditi na intensitu tíže.

§ 335. Hypsothermometr.

Tlakoměr rtuťový může býti též zastoupen teploměrem, kterýž v okolí bodu 100° má dělení tak jemné, aby ještě setiny stupně neb i tisíciny mohly býti odečteny. Když se pak určí teplota vařící se vody, anebo lépe teplota nasycených vodních par toho napětí, jaké právě vzduch má, možno z oné teploty na toto napětí souditi a tím tlak vzduchu určiti. K tomu slouží zvláštní tabulky, jež udávají napětí nasycených vodních par pro každou teplotu. Z tlaku vzduchu lze pak po případě souditi na výšku stanice, kde určení bodu varu provedeno, nad stanicí jinou, kde se současně tlak barometrický pozoroval; odtud název stroje*).

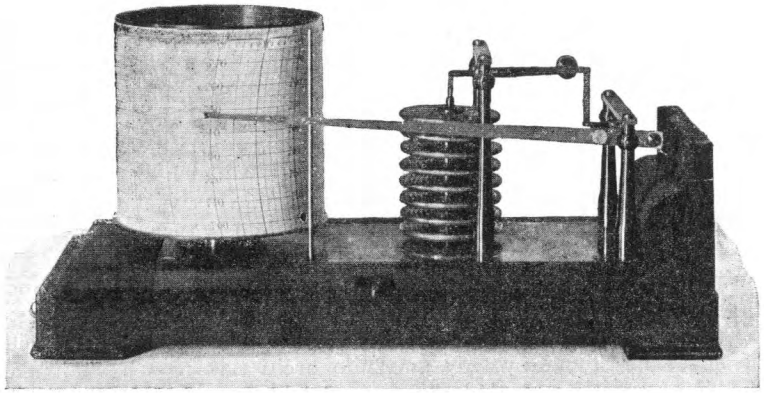
V novější době, která přinesla mnoho detailových studií o teploměru, poukazuje se s větším důrazem na hypsothermometr. Variace tlaku o 1 *cm* způsobuje v okolí tlaku normálního variaci bodu varu o 0·37°; odečtení přesné na setinu stupně by tedy umožnilo určiti tlak na 0·3 *mm*, tak že by obvyklá přesnost 0·1 *mm* byla dosažena, kdyby se teplota varu vody dala odečísti na třetinu setiny stupně**). Význačnou vlastností hypsothermometru jest, jako při aneroidu, nezávislost odečtení na intensitě tíže.

*) Z řeckého *ὕψος* — *εος τό* výška. Lépe hypsothermometr, než hypsometr, poněvadž hypsometrem jest každý stroj, jímž lze výšku stanoviti, na př. barometr, theodolit a pod.

**) Professor Mohn, proslulý meteorolog, objednal u firmy Tonnelot v Paříži hypsothermometry, kteréž v intervallu 95·4° až 101·6° měly jednotlivé stupně v délce 30 *mm*, tak že bylo možno stupeň ještě rozděliti na 50 dílů a konstatovati při odčítání dalekohledem až i tisícinu stupně. Hypsothermometrem této citlivosti při současném odčítání barometru bylo by lze velmi dobře studovati změny urychlení tíže *g* a zjistiti tak zejména anomalie lokální. Srovnej též Thermiku, pag. 32, 1908.

§ 336. Barografy.

Vzhledem k významu tlaku barometrického jakožto nejdůležitějšího elementu meteorologického bylo záhy na to pomýšleno, sestrojiti *barometry registrující, barografy*, jež by změny tlakové graficky zaznamenávaly. Přístroje tyto byly sestrojeny s použitím hlavně barometrů rtuťových; registrace jest fotografická, neb elektrická, nebo mechanická, a děje se buď tak, že barogramm jest spojitou čarou anebo že jest naznačen řadou jednotlivých bodů vznikajících registrací v určitých aequidistantních okamžicích. Na hvězdárně Pražské (Clementinum) jest v činnosti barograf, jejž sestrojil meteorolog *Karel Kreil* (1798—1862) v dobách, kdy byl dílem jako adjunkt dílem jako ředitel hvězdárny (1838—1851) v Praze činným. Základem jest rtuťový barometr dvouramenný; na povrchu rtuti v ramenu otevřeném spočívá plavač, jehož pohyby, souhlasné se stoupáním neb klesáním hladiny rtuťové, se nití přenášejí na volnou páku dvouramennou; na konci delšího ramena jest psací tužka umístěná před papírem do rámečku vloženým, a to volně, aby tření nebránilo pohybu; jen při registraci se tužka na krátko k papíru přitiskne. Tato registrace provádí se hodinovým strojem, který jednak rámeček s papírem rovnoměrně táhne, jednak mechanicky každých pět minut tužku k papíru přitlačuje. Papír se vyměňuje každý den. Barogramm jest tedy dán řadou jednotlivých bodů.



Obr. 260.

Náhlé změny tlakové, jež by mezi jednotlivými registracemi mohly vzniknouti (na př. při bouřce), vyjdou poněkud nedokonale. Jinak pracuje však barograf tento velmi spolehlivě, nyní již půl století. Ve Francii jest mnoho užíván barograf *A. Rédierův*, v Německu barograf *A. Sprungův;* oba stroje jsou úpravy složitější.

V letech 80-tých zavedla firma pařížská *Richard Frères* (nyní *Jules Richard*) barograf, jehož zařízení znázorňuje obr. 260.*). Základem jest

*) Víko zasklené bylo při fotografování stroje odšroubováno.

barometr kovový, složený z osmi jednotlivých k sobě sešroubovaných krabiček vzduchoprázdných, jež jsou pérem uvnitř spirálově stočeným zpruženy. Stoupá-li tedy tlak vzduchu, stlačují se krabičky a péro se více stlačuje; klesá-li, ustupují krabičky tlaku pružného péra. Soustava krabiček jest dole upevněna na skříně stroje (malé korrekční pošinutí jest tu ještě šroubem možné); proto vznikají změnami tlaku vzduchového pohyby na hořejším konci soustavy a pohyby tyto převádějí se různými pákami až na psací péro; toto doléhá na papír koordinatní, dělený jednak na millimetry přímkami vodorovnými, jednak časově na hodiny čarami obloukovými, rýsovanými dle poloměru páky, jež nese psací péro. Papír jest navinut na plášti válce, který se hodinovým strojem, uvnitř válce umístěným, za týden jednou kolem otáčí. Registrace jest tedy spojitou a dává barogramm za celý týden. Barograf tento má mnohé výhody. Jest rozměrů velmi vhodných, dá se snadno umístiti a přenášeti, nevyžaduje nesnadné obsluhy a jest při tom poměrně laciný. Proto se stroj ten stal záhy velmi oblíbeným a rozšířil se nejen do ústavů vědeckých, zejména meteorologických a fysikálních, nýbrž i do kruhů obecenstva širšího, kde vzbudil anebo utvrdil zájem o zjevy meteorologické. Vskutku registruje velmi čistě a přehledně a registrace podávají mnohdy překvapující obraz současných zjevů meteorologických, větrů, srážek a zejména bouřek*). Velmi platné služby prokazuje stroj ten jakožto registrační v ballonech.

§ 337. Variace tlaku vzduchového.

Tlak vzduchu mění se ustavičně. Barograf velmi zřídka ukazuje tlak stálý, ba i tlak takový objevil by se jakožto měnlivý, kdyby se zkoumal citlivěji na př. aneroidem, u něhož pohyblivé víčko jest opatřeno zrcátkem, jehož pohyby (pozorováním objektivním nebo subjektivním) se opticky zveličí. Změny tlakové jsou jednak pravidelné, jednak nepravidelné. Změny pravidelné vystupují v popředí v krajinách poblíž rovníku; zde se ukazuje průběhem dne dvojí maximum a dvojí minimum v intervallech 6-hodinových, a to, počítáme-li hodiny od 0^h (půlnoc) do 24^h, minimum 4^h, maximum 10^h, druhé minimum 16^h, druhé maximum 22^h. Hodiny udané zovou se tropické**), poněvadž se v nich pohyb rtuti v barometru obrací. Nicméně i zde vznikají různosti jak v amplitudě, tak v hodinách tropických jednak dle ročních počasí, jednak dle polohy místa. Čím dále však od rovníka k pólům, tím více vystupují v popředí změny tlakové nepravidelné, zakrývajíce změny pravidelné, kteréž lze jen ještě v hodnotách průměrných dokázati.

*) Před letní bouřkou tlak ponenáhlu klesá, při bouřce a dešti náhle stoupne a trvá pak na výši původní; diagramm upomíná na konturu nosu. Odtud název u meteorologů běžný: bouřkové nosy.

**) Z řeckého *τρέπω*, obracím.

Na stanicích meteorologických konají se pravidelná pozorování barometrická. V Praze děje se tak v Clementinu, kde s hvězdárnou je spojena též stanice meteorologická, a na Petříně, kde byla roku 1892 zařízena stanice druhá. Výška, ve kteréž jest nullový bod barometru umístěn, činí v Clementinu 197·2 *m*, na Petříně 325 *m*. Pozorování se publikují *).

Jak značnými jsou variace tlaku vzduchového v Praze, objasňuje následující tabulka, sestavená z pozorování v Clementinu za posledních 18 let. V tabulce jest roční maximum a minimum, jakož i hodnota roční průměrná. Čísla vztahují se na výšku 197·2 *m* nad mořem, ve kteréžto výšce se nalézá (od 1./6. 1889) nullový bod barometru Tonnelot 831, na němž se pravidelná pozorování konají.

Barometrický tlak v Praze, Clementinum.

Rok	maximum *mm*	minimum *mm*	amplituda *mm*	tlak průměrný *mm*
1890	762·8	716·4	46·4	744·68
91	762·7	727·3	35·4	745·00
92	760·4	721·3	39·1	743·92
93	765·3	720·6	44·7	744·71
94	760·4	724·3	36·1	744·87
95	760·6	722·2	38·4	743·37
96	764·8	722·1	42·7	745·05
97	762·2	720·8	41·4	745·10
98	764·2	718·7	45·5	744·55
99	759·0	717·7	41·3	744·53
1900	759·4	722·4	37·0	743·34
01	762·8	717·2	45·6	743·88
02	761·4	724·8	36·6	744·72
03	763·0	716·3	46·7	744·06
04	764·5	722·7	41·8	745·36
05	764·9	721·3	43·6	745·25
06	762·9	719·4	43·5	744·80
07	770·8	720·3	50·5	745·30
08	762·7	723·5	39·2	746·36
19 let	770·8	716·3	54·5	744·67

*) Viz ročníky hvězdárny Pražské, jež vydává ředitel hvězdárny, nyní prof. Dr. *L. Weinek*; nejnovější ročník, který (do června 1909) dosud vyšel, za rok 1908, jest již šedesátým devátým. Srovnej dále publikace České Akademie, kdež ve Věstníku i v Rozpravách podával o pozorováních na Petříně zprávy prof. Dr. *F. Augustin* (1846—1908), jenž stanici na Petříně založil a organisoval. Rozsáhlé práce jeho týkaly se hlavně klimatologie Čech. Nového českého ústavu meteorologického, o jehož zřízení všemožně usiloval a který v roce 1908 se začal stavěti, se již nedočkal.

V době 1840—1908 byl pozorovaný tlak v Praze, Clementinum

největší	. . . .	770·8 ($^{23}/_{1}$ 1907)
nejmenší	. . . .	713·2 ($^{26}/_{12}$ 1856)
amplituda	. . . .	57·6

Na zemi vůbec byl největší dosud pozorovaný tlak 789·2 *mm* (Barnaul, v západní Sibiři $^{23}/_{1}$ 1900, 7 h.), nejmenší 689·2 *mm* (False Point, u Kattaku, hlavn. města divise Orisy indobrit. prov. Bengalska, $^{22}/_{9}$ 1885, v centru cyklonu). Amplituda činí zde 100 *mm*, tedy téměř dvakrát tolik, jako udaná amplituda v Praze.

§ 338. **Normální tlak atmosférický.**

Stanovení jistého tlaku za normální jest důležité pro výpočet specifické hmoty plynů, kterýž se vede pro teplotu nullovou a pro tlak *jedné atmosféry*. Tímto tlakem se nyní rozumí tlak, jakým na jednotku plochy cm^2 působí 76 *cm* vysoký sloupec rtuti nullstupňové při normální intensitě tíže.

Číslo 76 není ničím odůvodněno, než že jest číslem okrouhlým; podobně se dříve volilo číslo 28 pařížských palců anebo 30 palců anglických. Přibližně jest tlak 76 *cm* průměrným tlakem ročním při hladině mořské. Číslo 76 *cm* souhlasí s číslem 28·075 pařížských palců a 29·722 anglických palců.

Majíce tento tlak normální vyjádřiti v jednotce absolutní, počítáme převodní koefficient Sg^* vzorce

$$p = bSg^*$$

z hodnot

$$g^* = 980{\cdot}606\ \frac{cm}{sec^2} \qquad S = 13{\cdot}5956\ \frac{g}{cm^3}.$$

Tak obdržíme:

$$p = 0{\cdot}013332\ .\ b\ \frac{megadyna}{cm^2}$$

$$b = 76{\cdot}00\ cm, \qquad p = 1{\cdot}01321\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Tlak jedné atmosféry jest tedy jen o 1·3% větší než tlak megadyny na plochu jednoho cm^2.

Můžeme též počítati součin

$$bS = 1{\cdot}03327\ \frac{kg}{cm^2}$$

a obdržíme hmotu, jejížto váha při normální intensitě tíže, na

plochu jednoho cm^2 působí týmž tlakem jako jest jedna atmosféra; hmota tato jest tedy jen o 3·33% větší než kilogramm.

Vzhledem k této blízké shodě zavedena byla ještě nová, technická aneb, jak se také zove, metrická atmosféra, jakožto tlak, kterým působí váha kilogrammu na jeden cm^2; při jaké intensitě tíže, se neudává, vzhledem k tomu, že jednotka tato má sloužiti k účelům technickým. Mnohé manometry na vyšší tlak jsou dle této nové atmosféry graduovány. Oproti ní zove se atmosféra dříve definovaná často theoretickou. Jinak, když se ve vědeckém výkladu mluví o tlaku atmosféry, míní se ovšem vždy tato theoretická.

Definice tak zvané nové atmosféry souvisí s onou starší jednotkou síly, kterou byla váha kilogrammu, při čemž se ke změnám intensity tíže nehledělo. Jak málo i za dnů našich se přednosti absolutní soustavy měr oceňují, jest viděti z návrhu analogického, aby se za »novou koňskou sílu« zavedlo 100 metrkilogrammů za sekundu, ačkoli tato jednotka, bez ohledu na změny intensity tíže definovaná, se jen o málo (asi 2) procent liší od jednotky kilowattu, zcela přesně definované a v oboru elektřiny všeobecně užívané. Nutno ovšem připustiti, že realisování jisté síly závažím jest vždy pohodlné a jednoduché a že se tohoto způsobu bude vždy užívati, ale rovněž tak možno připustiti, že přepočítání výsledků tak nabytých, při malém rozdílu mezi megadynou a vahou kilogrammu, vzhledem k faktickému urychlení tíže, jest požadavkem moderní přesnosti a určitosti, jenož nutno dbáti. Právě tak užívá astronom hodin, kteréž právě na observatoři má, ale údaje hodin těch přepočítává dodatečnou korrekcí vždy na hodiny absolutní, jimiž jest střední slunce.

Není pochybnosti, že průběhem času se pro tlak barometrický zavede jednotka absolutní a že pak tlakem normálním bude tlak

$$1\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Jakým sloupcem rtuťovým b jest tlak jedné megadyny na cm^2 realisován při jisté intensitě tíže, vychází z rovnice

$$b\ .\ 13{\cdot}5956\ .\ g = 10^6.$$

Tak počítáme jednak pro normální intensitu tíže g^* v geografické šířce 45° při hladině mořské a jednak pro Prahu, Clementinum, hodnoty k sobě příslušné

$$g^* = 980{\cdot}606\ \frac{cm}{sec^2} \qquad b = 75{\cdot}008\ cm$$

$$g = 981{\cdot}010\ \text{„} \qquad b = 74{\cdot}977\ \text{„}$$

Přechod k jednotce absolutní od oné theoretické atmosféry by se byl již všeobecněji stal, kdyby tato atmosféra nebyla sepiatou se stupnicí teploměrnou. Neboť i při reformě, kteráž se stala zavedením teploměru vodíkového za normální, zůstal bod varu definován na základě oné atmosféry, a nikoli na základě absolutní jednotky tlakové, jak by bylo bývalo důslednější.

Z výkladu předešlého poznáváme, že ve způsobu, jak se tlak měří, zavládla dosti značná pestrost. Někdy se udává tlak výškou sloupce nullstupňové rtuti při té intensitě tíže, jaká nahodile jest, zřídka se redukuje výška ta na normální intensitu tíže. Někteří počítají tlak dle staré, jiní dle nové atmosféry, při čemž opět u staré atmosféry se buď správně k normální intensitě tíže přihlíží anebo se zůstává při intensitě tíže nahodilé, jako jest tomu zpravidla u nové atmosféry. Konečně se začíná zaváděti absolutní jednotka tlaková $\frac{megadyna}{cm^2}$, jež jediná vyniká jednoduchostí definice a všeobecností významu, třebas že při užívání svém vyžaduje některých malých počtů korrekčních, jež ostatně vhodnými tabulkami lze usnadniti.

Rozpínavost plynů.

§ 339. **Přehled úkolů.**

Vlastností plynů význačnou jest jich rozpínavost (expanse). Plyn, dané hmoty M, zaujme objem V jakýkoli a snaží se zaujmouti objem ještě větší. Snaha tato jeví se napětím, t. j. tlakem, kterým plyn působí na stěny nádoby. Představme si stěny tyto pohyblivými; může se na př. plyn nalézati ve válci, jenž jest uzavřen pístem bez tření pošinovatelným. Pak jest rovnováha, je-li vnější tlak na píst působící právě takový jako napětí plynu. Když vnější tlak povolí, ustupuje píst většímu napětí, plyn se rozpíná, tím klesá jeho napětí, až opět nastane rovnováha s tlakem vnějším. Pakli vnější tlak na píst se zvětší, stlačuje se plyn, tím však napětí stoupá až opět nastane rovnováha s tlakem vnějším.

Tlak vnitřní i vnější jest úměrný velikosti plochy, na kterou působí. Proto zavádíme zde vždy, podobně jako v hydromechanice, tlak p na jednotku plošnou, jakožto napětí plynu.

Rozměr jeho jest tedy

$$\frac{LM}{T^2} : L^2 = \frac{M}{LT^2} \quad \text{všeobecně,}$$

$$\frac{cm\ .\ g}{sec^2} : cm^2 = \frac{dyna}{cm^2} \quad \text{zvlášť.}$$

U kapalin jsme též jednali o tlaku, kterým působí na stěny nádoby; avšak tlak tento měl při veliké pohyblivosti částic svůj základ v tíži. Naproti tomu jest tlak plynu na stěny úkaz zvláštní, nezávislý na tíži.

Z uvedeného výkladu jest patrno, že objem V plynu jest teprve tlakem vnějším určen, že jest na něm závislý. Tím vzniká úkol,

závislost tuto studovati a ji pokud možná mathematickou formulací vystihnouti. Úkol tento řeší *zákon Boyle-Mariottův.*

Avšak nejen tlakem p jest podmíněn objem plynu, nýbrž též jeho teplotou t; stoupá-li teplota, stoupá též napětí plynu a tím snaha objem zvětšiti. Proto vzniká úkol další, studovati též závislost objemu na teplotě plynu a nalézti pro ni formulaci mathematickou. Úkol tento řeší *zákon Gay-Lussacův.*

Každý z těchto zákonů předpokládá druhou z podmiňujících veličin za konstantu, ovšem arbitrární. Zákon Boyle-Mariottův určuje tudíž, jak se mění objem V tlakem p při stálé teplotě t; změny takové zoveme *isothermické* *). Zákon Gay-Lussacův stanoví rovněž, jak se mění objem V teplotou t při stálém tlaku p; změny takové zoveme *isobarické* *). K těmto dvěma zákonům přistupuje třetí vzhledem k tomu, že lze plyn uzavříti tak, aby objem jeho V i při zahřívání vzrůstati nemohl. Účinek zahřívání jeví se pak vzrůstáním tlaku; neboť můžeme si představiti, jako by nejprve plyn zahříváním se roztáhl na objem větší isobaricky a pak tlakem převeden byl na objem původní isothermicky. Poněvadž pak zákony pro obě tyto sukcessivní změny platící jsou již dány, jest patrno, že lze vzrůstání napětí plynu zahříváním vystihnouti zákonem, jenž jest obou předešlých důsledkem; nazývá se též zákonem *Gay-Lussacovým*; změny pak napětí teplotou způsobené při stálém objemu zovou se *isochorické* *).

O zákonu Gay-Lussacově v obou jeho stránkách jedná se obšírně v nauce o teplotě. Vzhledem však k problému hypsometrickému, který náleží do mechaniky, jest nutno již zde o zákonu tomto alespoň v hlavní věci pojednati.

Oba zákony, jak Boyle-Mariottův tak i Gay-Lussacův v obou jeho stránkách lze sloučiti ve formulaci jednotnou. Tak vzniká spojený zákon, v němž všechny veličiny pro stav plynu význačné, jeho objem V, teplota t a napětí p jsou v jedinou relaci sloučeny. Jest pak jednostejno, kterou z veličin těch považujeme za základní (za argument) a kterou za odvisle proměnnou (za funkci) a kterou po případě za arbitrární konstantu.

*) ἴσος, ἴση, ἴσον stejný, θερμός, -ή, -όν teplý, βαρύς, -εῖα, -ύ těžký. Na místě slova *isobarické* užívá se též označení *isopiestické* od πιέζω tlačím. Podobně na místě *isochorické*, z řeckého χῶρος ὁ prostor, místo, říká se *isometrické* od řeckého μέτρον τὸ míra, ale také, co vyměřiti lze, délka, prostor; vzhledem však k tomu, že pojmenování *isometrie* (na př. isometrická projekce) má též význam jiný, je lépe, užívati výhradně pojmenování *isochorické*. Někteří užívají názvu *isovolumické*, vhodněji *aequivolumické*, kterýžto název latinský jest zcela dobrý, ale k oněm řeckým názvům se méně hodí.

§ 340. Zákon Boyle-Mariottův.

Budiž dán plyn hmoty M; teplota jeho t budiž jakákoliv, předpokládejme však, že se udržuje stálou; jest tudíž konstantou arbitrární. Měnlivými jsou objem plynu V a tlak p. Při takovýchto isothermických změnách zůstává součin objemu a tlaku konstantním, čili jinak řečeno, kolikrát se zvětší tlak, tolikrát se zmenší objem a naopak, obě veličiny jsou obráceně úměrny. Platí tudíž rovnice

$$pV = C$$
$$V : V' = p' : p.$$

Na místě objemu V můžeme zavésti hmotu specifickou S plynu, dle vzorce

$$VS = M.$$

Tak obdržíme za rovnice hořejší tyto nové

$$S = Ap$$
$$S : S' = p : p'.$$

Při změnách objemu isothermických jest specifická hmota, a tudíž i hustota *) plynu, přímo úměrnou tlaku.

Zákon zde uvedený objevil *Robert Boyle* (1627—1691), znamenitý experimentátor, vrstevník Huygensův, a uveřejnil ve spise: New experiments physico-mechanical, touching the spring of the Air and its effects, Oxford 1660. Později uveřejnil zákon ten *Edme Mariotte* (1620 až 1684) ve spise: Seconde essai de physique, de la nature de l'air, Paris 1679. Ač dle toho priorita náleží onomu, přece dlouho zákon ten jakožto Mariottův byl označován a dosud v mnohých spisech se označuje, poněvadž jasnější formulací Mariottovou stal se známým.

Chtějíce zákon Boyle-Mariottův znázorniti graficky naneseme tlak p za úsečku, objem V nebo hmotu specifickou S po případě hustotu za pořadnici. Rovnice

$$pV = C$$

dává pak rovnoosou hyperbolu, jejíž asymptotami jsou osy souřadnic. Tato hyberbola jest tedy obrazem změn isothermických objemu s tlakem. Rovnice

$$S = Ap$$

dává přímku. Konstanty C a A souvisí vespolek relací

$$AC = M.$$

*) Můžeme říci, že *hustota*, nikoli však, že *hutnost* plynu, jest úměrna tlaku; neboť hutnost plynu, tak jak jsme pojem tento praecisovali (§ 64.), není vůbec na tlaku závislou.

Jich hodnoty číselné závisí především na volbě jednotek. V absolutní soustavě vyjádřuje se objem jednotkou cm^3, specifická hmota jednotkou $\frac{g}{cm^3}$, tlak jednotkou $\frac{dyna}{cm^2}$ nebo $\frac{megadyna}{cm^2}$. Jedná-li se o *relativní* měření tlaku na určitém místě, může se tlak stanoviti barometricky, t. j. vyjádřiti výškou sloupce rtuťového, teploty nullové anebo jakékoli jiné, ale stejné. Při určité volbě jednotek rozhoduje dále teplota plynu o číselné hodnotě oněch konstant, tudíž také, při grafickém znázornění, o poloze oné hyperboly a přímky. Povšechně budiž již zde poznamenáno, že, když jest teplota plynu větší, stává se konstanta C větší, t. j. hyperbola se od os souřadnicových více oddaluje, — naproti tomu konstanta A menší, t. j. přímka, se k ose úseček více přikloňuje.

§ 341. **Zkouška experimentální.**

Majíce zákon Boyle-Mariottův zkoumati neb objasniti, vycházíme od tlaku barometrického, jaký právě jest, a postupujeme buď ke tlakům vyšším, t. j. zhušťujeme plyn, anebo sestupujeme k tlakům nižším, t. j. zřeďujeme plyn. Za plyn, jehož napětí zkoumáme, volíme zpravidla vzduch.

Apparát určený pro zhušťování vzduchu znázorňuje obr. 261. (Houdek a Hervert). Hlavní jeho částí jsou dvě skleněné do železného kování zatmelené trubice, jedna krátká, na jednom konci zatavená (po případě dobrým kohoutem opatřená), druhá dlouhá, otevřená. Kováním svým jsou obě trubice svisle zašroubovány do železné prismatické příčky, na apparátu vodorovně upevněné, kteráž jest provrtána a postranním kohoutem opatřena. Příčkou touto souvisí tedy trubice jedna s druhou. Za trubicemi na stojanu jest svislá stupnice centimetrová (neb millimetrová), jdoucí u krátké trubice od 0 do 30, u dlouhé od 0 do 180. Délkou 30 jest také úměrně vyjádřen objem V krátké trubice, jejíž průřez jest co možná konstantní.

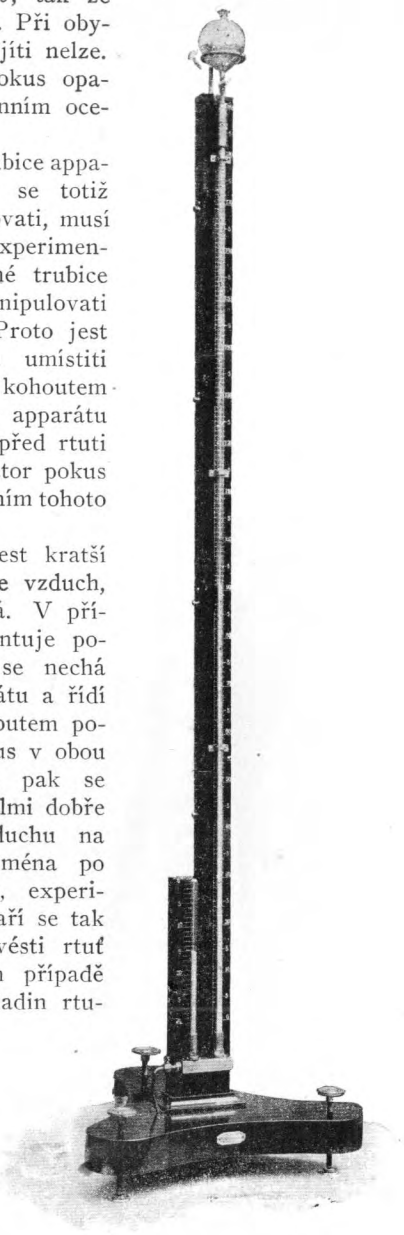
Při experimentování naleje se do trubic tolik rtuti, aby sahala až k bodům nullovým, stejně vysoko umístěným. Tak se uzavře v krátké trubici vzduch objemu V, jehož napětí se rovná tlaku atmosférickému. Tlak tento se určí na barometru, vedle umístěném, sloupcem rtuti výšky b při teplotě síně. Na to se dolévá do otevřené trubice rtuti. Jest viděti, jak rtuť v obou trubicích vystupuje, ale v uzavřené volněji. Když rozdíl hladin rtuťových dosáhl výšky b, čímž úhrnný tlak jest dán sloupcem $2b$, konstatuje se, že v trubici zavřené objem vzduchu, původně V (30 *cm* v délce) se zmenšil na $\frac{V}{2}$ (15 *cm* v délce). Podobně, když se dále rtuti dolévá, lze konstatovati, že objem jest $\frac{V}{3}$ (10 *cm* v délce), když rozdíl

hladin rtuťových dosáhl výšky $2b$, tak že úhrnný tlak jest dán sloupcem $3b$. Při obyčejných rozměrech apparátu dále jíti nelze.

V pořádku opačném lze pokus opakovati, když se dole rtuť postranním ocelovým kohoutem vypouští.

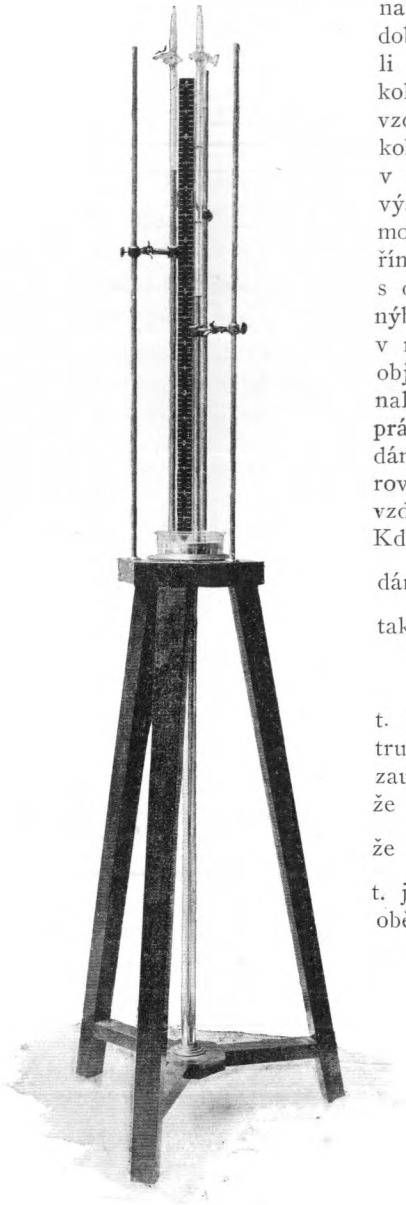
Nalévání rtuti do dlouhé trubice apparátu jest dosti nepohodlné. Aby se totiž změny objemu vzduchu mohly sledovati, musí býti celý apparát postaven na experimentální stůl. Tím přijde ústí dlouhé trubice značně vysoko a ve výši této manipulovati těžkou rtutí jest dosti obtížno. Proto jest výhodno, nad trubicí otevřenou umístiti baňku skleněnou, jejíž trubička, kohoutem opatřená, ústí do dlouhé trubice apparátu (obr. 261.). Do baňky se naleje napřed rtuti mnoho-li třeba, tak že experimentátor pokus prováděje ovládá přítok rtuti otáčením tohoto kohoutu.

Nahoře bylo řečeno, že jest kratší trubice apparátu, v níž se uzavře vzduch, zatavená anebo kohoutem opatřená. V případě tomto se ovšem experimentuje pohodlněji nežli v onom. Kohout se nechá otevřený, naleje se rtuti do apparátu a řídí její výška (vypouštěním rtuti kohoutem postranním) tak, aby přesně meniskus v obou trubicích šel k bodům nullovým; pak se kohout uzavře. Avšak musí býti velmi dobře zabroušen, aby při stlačení vzduchu na 3 atmosféry držel spolehlivě zejména po delší dobu. Je-li trubice zatavena, experimentuje se jistěji; ale ovšem nezdaří se tak snadno, při začátku pokusu přivésti rtuť k oběma bodům nullovým. V tom případě připojí se eventuální difference hladin rtuťových k pozorovanému tlaku barometrickému a experimentuje se dále dle tohoto tlaku úhrnného.



Obr. 261.

Apparát vhodný na zřeďování vzduchu znázorňuje obr. 262. (Houdek a Hervert). Hlavní jeho část jest skleněná trubice většího průřezu, délky asi 1 *m*, do přiměřeného stativu dřevěného upevněná, která se nahoře šíří v nádobu; trubice tato a z části i nádoba naplní se rtutí.



Obr. 262.

Další jeho částí jsou skleněné trubice na jednom konci otevřené a na druhém dobrým kohoutem opatřené. Ponoříme-li jednu takovou trubici s otevřeným kohoutem úplně do rtuti tak, aby se vzduch zcela vytlačil, uzavřeme-li pak kohout a vytáhneme-li trubici, stoupá v ní rtuť zároveň, ale jen do jisté výšky b; pokus tento jest poučnou modifikací pokusu Torricelliho. Ponoříme-li pak druhou takovou trubici s otevřeným kohoutem, ale ne úplně, nýbrž jen tak hluboko, až zůstane v ní vzduch jistého, napřed určeného objemu V a uzavřeme-li pak kohout, nalézá se vzduch tohoto objemu právě pod tlakem atmosférickým. Zvedáme-li trubici, stoupá v ní rtuť zároveň, na důkaz, že, když objemu vzduchu přibývá, jeho napětí ubývá. Když vzrostl objem dvojnásobně, shledáme, že rtuť vystoupila o výšku $\frac{b}{2}$ tak že zbývá tlak sloupce

$$b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2},$$

t. j. tlak poloviční. Když zvedáme trubici ještě výše, tak že vzduch zaujme objem trojnásobný, shledáme, že rtuť vystoupila do výšky $\frac{2}{3}\,b$, tak že zbývá tlak sloupce $b - \frac{2}{3}\,b = \frac{b}{3}$, t. j. tlak třetinový. Na měřítku, mezi oběma trubicemi umístěném, lze výšky sloupců rtuťových odečísti.

Při zhušťování i zřeďování vzduchu předpokládá se, že jsou změny objemu *isothermické*, t. j., že teplota vzduchu se nemění. Toto lze dosáhnouti jen *nenáhlým* zhušťováním a zřeďováním, aby na vyrovnání teplot bylo dosti času. Vskutku se vzduch při zhušťování otepluje, při zřeďování chladí. Při pokusech k účelům vědeckým nutno stálost teploty zaručiti vodní lázní v tom způsobu, že se trubice se vzduchem obklopí jinou, do níž proudí voda stálé teploty.

Jest také možno sestrojiti apparát (Feilitsch), jehož lze užíti jak ke zhušťování, tak ke zřeďování současně, ale ovšem v mezích užších než u apparátů uvedených.

§ 342. **Zákon Gay-Lussacův.**

Budiž M hmota daného plynu. Objem jeho V jest podmíněn tlakem p, ale též jeho teplotou t. Je-li V_0 objem při teplotě 0^0 a tlaku jakémkoli, a vzrůstá-li teplota, co zatím tlak zůstává konstantním, roztahuje se plyn a zaujme při teplotě t^0 objem $V > V_0$. Rozdíl $V - V_0$ jest přírůstek objemu absolutní, výraz $\frac{V - V_0}{V_0}$ udává přírůstek relativní, v dílech objemu původního, čili, jak se obyčejně stanoví, v procentech. O tomto relativním přírůstku objemu platí zákon

$$\frac{V - V_0}{V} = \beta t.$$

Při změnách objemu isobarických jest relativní přírůstek objemu úměrný teplotě.

Konstanta β jest nezávislá na tlaku p a má pro všechny plyny hodnotu (téměř) stejnou, totiž

$$\beta = 0{\cdot}00367 = \tfrac{1}{273}.$$

Obyčejně psává se hořejší rovnice ve tvaru

$$V = V_0\,(1 + \beta t),$$

tak že se vyjadřuje nikoli změna objemu, nýbrž objem sám.

Na místě objemu V_0 a V lze zavésti hmoty specifické S_0 a S příslušné tlaku p. Pak jest

$$M = V_0 S_0 = VS.$$

Roste-li tudíž objem, klesá hmota specifická. Obdržíme pak souhlasné rovnice

$$\frac{S_0 - S}{S} = \beta t$$

$$S = \frac{S_0}{1 + \beta t}.$$

Zákon tento objevil *Louis J. Gay*, zvaný *Lussac*; tak psal se otec jeho, dle svého statku v okolí St. Léonard, aby se rozeznával od jiných osob téhož příjmení Gay. Pojednání příslušné má název: Recherches sur la dilatation des gaz et des vapeurs, Ann. chim. XLIII. 1892.

Když se teplota t stanoví normálním teploměrem *vodíkovým*, jakož jest nyní pravidlem, pak platí rovnice

$$\beta t = \frac{V - V_0}{V_0}$$

pro *vodík* jakožto normální látku thermometrickou »*ex definitione*«, a není zákonem. Jádro zákona Gay-Lussacova spočívá však právě v tom, že všechny plyny se roztahují s vodíkem rovnoměrně v širokém rozmezí tlakovém a že se všechny roztahují stejně, t. j. dle téhož koefficientu β.

§ 343. **Spojený zákon.**

Znajíce jednotlivé zákony pro změny isothermické a isobarické odvodíme snadno zákon, jímž se stanoví, jak se změní objem V_0 plynu při tlaku p_0 a při teplotě 0^0, když současně tlak přejde v jiný p a teplota se změní na t^0. Objem V při těchto nových poměrech tlakových a tepelných vypočítáme tak, že interpolujeme objem V^*, jak by při původní teplotě nullové se utvářil jediné změnou tlakovou z p_0 na p. Máme pak přehledně:

$$\begin{array}{lll} V_0, & p_0, & 0^0 \\ V^*, & p, & 0^0 \\ V, & p, & t. \end{array}$$

Formulujíce přechody sukcessivní, uvážíme, že přechod $V_0 \ldots V^*$ jest isothermický, přechod pak $V^* \ldots V$ isobarický. Dle toho jest

$$\frac{V^*}{V_0} = \frac{p_0}{p}$$

$$\frac{V}{V^*} = 1 + \beta t,$$

tudíž násobením

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p_0}{p}(1 + \beta t)$$

$$Vp = V_0 p_0 (1 + \beta t).$$

Rovnice tato vyjadřuje *spojený zákon* Boyle-Mariotte-Gay-Lussacův. Z ní plyne jednotlivě:

Pro změny isothermické ($t = const.$) zákon Boyle-Mariottův

$$Vp = C;$$

pro změny isobarické ($p_0 = p$) zákon Gay-Lussacův v jedné své stránce

$$V = V_0 (1 + \beta t);$$

konečně pro změny isochorické ($V = V_0$) zákon Gay-Lussacův v druhé své stránce

$$p = p_0 (1 + \beta t).$$

Napětí plynu při konstantním objemu roste tudíž s teplotou

právě tak jako objem plynu při konstantním napětí. Zároveň vyniká význam konstanty zákona Boyle-Mariottova

$$C = V_0 p_0 (1 + \beta t)$$

a její vzrůstání s teplotou jakožto konstantou arbitrární.

O všech těchto zákonech a otázkách s nimi souvisících jedná se obšírně v Thermice § 46. a násl. 1908. V označování zde a tam jest tak dalece rozdíl, že objem se v thermice označuje malou písmenou v, zde v mechanice velkou V, a to proto, že v mechanice označení v znamená rychlost (velocitas).

§ 344. **Specifická hmota vzduchu.**

Specifická hmota plynů vůbec a vzduchu zvlášť uvádí se vždy pro poměry *normální*, t. j. pro teplotu nullovou a tlak jedné atmosféry. Dle zákonů, o nichž právě jednáno, jest snadno, tuto hmotu specifickou přepočísti na poměry jiné od normálních jakkoli rozdílné. Úkol tento jest zvláště důležitý pro vzduch.

Pro specifickou hmotu vzduchu při poměrech normálních (0^0, 76 *cm Hg* 0^0) nalezl A. Leduc (1898) v Paříži 0·00129316 (23·2% kyslíku dle váhy); před tím pak Lord Rayleigh (1893), přepočteno na Paříž, 0·00129327. Přijme-li se hodnota střední 0·0012932 a přepočítá-li se výsledek vzhledem na normální intensitu tíže při hladině mořské, v geograf. šířce 45^0, obdrží se výsledek

0·0012928.

Tato hodnota přijímá se v tabulkách Landolt-Börnsteinových, 3. vyd. 1905.

Jinou hodnotu přijímá F. Kohlrausch ve své Praktické fysice, 10. vyd. 1905, totiž

0·0012932.

Číslo je odvozeno z předpokladu, že vzduch obsahuje kysličník uhličitý v množství 0·06% dle objemu. Hlavní pak plyny jsou zastoupeny, jak udávají čísla následující:

Kyslík	21·0%	dle objemu,	23·2%	dle váhy	
Dusík	78·05%	» »	75·5%	»	»
Argon	0·95%	» »	1·3%	»	»

V prostorech uzavřených, v pracovnách, mohou nastati malé změny v obsahu kysličníku uhličitého. Ve volné atmosféře bývá tohoto plynu okrouhle 1 *mg* na litr.

Pro účely, o nichž se jedná zde v mechanice ve výkladu následujícím, postačí úplně voliti hodnotu, kteráž jest středem obou uvedených

0·0012928 a 0·0012932

a jest při tom zaokrouhlena ve čtvrtém platném místě.

Specifická hmota suchého vzduchu při poměrech normálních jest vyjádřena číslem

$$0{\cdot}001293\ \frac{g}{cm^3}.$$

Pro poměry libovolné vypočítáme z toho specifickou hmotu σ suchého vzduchu dle schematu

$$\begin{array}{cccccc} 0{\cdot}001293, & 0^0, & 76\ cm, & 45^0, & 0\ m \\ \sigma, & t, & b, & \psi & h. \end{array}$$

Přejdeme tedy od teploty 0^0 k teplotě t^0 dle zákona Gay-Lussacova (koefficient $\beta = 0{\cdot}00367$), od tlaku daného sloupcem nullstupňové rtuti 76 *cm* vysokým ke tlaku danému sloupcem výšky b libovolné dle zákona Boyle-Mariottova, při čemž přihlédneme, jak se intensita gravitační mění se šířkou geografickou ψ (§ 228., koefficient $\varrho = 0{\cdot}0025523$) a s výškou h stanice (§ 187., koefficient $\varepsilon = 0{\cdot}000000314$, po případě $0{\cdot}000000196$, při čemž jest výška udána v metrech). Tak obdržíme:

$$\frac{\sigma}{0{\cdot}001293} = \frac{1}{1+\beta t} \cdot \frac{b}{76} \cdot (1 - \varrho\ cos\ 2\psi)\ (1 - \varepsilon h)$$

a z toho pro specifickou hmotu σ vzduchu suchého

$$\sigma = \frac{0{\cdot}001293}{1+\beta t} \cdot \frac{b}{76}\ (1 - \varrho\ cos\ 2\psi)\ (1 - \varepsilon h).$$

Zpravidla jest vzduch *vlhkým*, obsahuje vodní páry, jichž napětí e se dá methodami hygrometrickými určiti; na vzduch suchý připadá pak napětí $b - e$. Pak lze vzduch vlhký pokládati za směs vzduchu suchého a vodní páry. Tato má hutnost $0{\cdot}635 = \frac{5}{8}$. Dle toho obdržíme úhrnnou hmotu obou plynů, téže teploty, obsaženou v každé jednotce objemové, summací výrazů

$$0{\cdot}001293\ \frac{b-e}{76} + \tfrac{5}{8} \cdot 0{\cdot}001293\ \frac{e}{76},$$

nehledíc k ostatním koefficientům v hořejším vzorci obsaženým, kteréž se v obou sčítancích opakují. Provedením summace vyjde

$$0{\cdot}001293\ \frac{b - \frac{3}{8}e}{76}.$$

Specifická hmota σ vzduchu vlhkého jest tudíž dána výrazem

$$\sigma = \frac{0{\cdot}001293}{1+\beta t} \cdot \frac{b - \frac{3}{8}e}{76}\ (1 - \varrho\ cos\ 2\psi)\ (1 - \varepsilon h).$$

Odtud pravidlo, často uváděné, že se hmota specifická σ vzduchu vlhkého počítá tak jako vzduchu suchého, s tím jen rozdílem, že se tlak b zmenší o $\frac{3}{8}e$. Poznámka tato jest důležitá

vzhledem k tomu, že se pro specifickou hmotu suchého vzduchu počítají jednou pro vždy tabulky, dle argumentu t a b uspořádané. Na základě onoho pravidla lze tabulek takových užívati též pro vzduch vlhký.

Pro obyčejné účely laboratorní postačí tabulka, jež zde následuje, počítaná pro mírný rozsah teplot (0^0 . . . 30^0) a tlaku (70 *cm* . . . 77 *cm*).

Specifická hmota suchého vzduchu

při teplotě t^0 C a tlaku b *mm* Hg 0^0 C na 45^0 zem. šířky při hladině mořské.

t^0	700 *mm*	710	720	730	740	750	760	770	P. P.
0	0·00 1191	0·00 1208	0·00 1225	0·00 1242	0·00 1259	0·00 1276	0·00 1293	0·00 1310	**17**
1	1187	1204	1221	1237	1254	1271	1288	1305	1 2
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1301	2 3
3	1178	1195	1212	1228	1245	1262	1279	1296	3 5
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291	4 7
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1286	5 8
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	1265	1282	6 10
7	1161	1178	1194	1211	1227	1244	1261	1277	7 12
8	1157	1174	1190	1207	1223	1240	1256	1273	8 14
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268	9 15
10	1149	1165	1181	1198	1214	1231	1247	1264	**16**
11	1145	1161	1177	1194	1210	1227	1243	1259	1 2
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1238	1255	2 3
13	1137	1153	1169	1185	1202	1218	1234	1250	3 5
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246	4 6
15	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1226	1242	5 8
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1237	6 10
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	1233	7 11
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229	8 13
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225	9 14
20	1110	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1220	**15**
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1200	1216	1 1
22	1102	1118	1133	1149	1165	1181	1196	1212	2 3
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1192	1208	3 4
24	1095	1110	1126	1141	1157	1173	1188	1204	4 6
25	1091	1106	1122	1138	1153	1169	1184	1200	5 7
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1180	1196	6 9
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1176	1192	7 10
28	1080	1095	1111	1126	1142	1157	1173	1188	8 12
29	1076	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184	9 13
30	1073	1088	1103	1119	1134	1149	1165	1180	

Uvedené vzorce pro specifickou hmotu suchého vzduchu σ jsou jen proto složitějšími, že se tlak udává *vahou* sloupce rtufového, kteráž jest podmíněna intensitou gravitačního pole, tudíž,

nehledíc k anomaliím lokálním, hlavně geografickou šířkou a výškou stanice.

Když se pro tlak vzduchu volí jednotka absolutní, na př. $\frac{megadyna}{cm^2}$, jest jednoduše

$$\sigma = 0{\cdot}001276 \frac{p}{1 + \beta t}.$$

Nová číselná konstanta tohoto vzorce udává specifickou hmotu suchého vzduchu pro nové poměry normální, t. j. pro

$$t = 0^0, \qquad p = 1 \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Odvodíme ji z konstanty dřívější, 0·001293, uvážíce, že tlak jedné megadyny za normální intensity tíže jest dán sloupcem nullstupňové rtuti výšky 75·008 *cm* (§ 338.). Proto jest konstanta nynější s konstantou dřívější jednoduše v poměru 75·008 : 76·000, čili

$$0{\cdot}001276 = 0{\cdot}001293 \frac{75{\cdot}008}{76{\cdot}000},$$

jak nahoře uvedeno.

Když se na místě *megadyny* volí jednotka *dyna*, stává se číslo p millionkráte větším, a jest tudíž pak číselná konstanta millionkráte menší. Pro tento případ platí tudíž vzorec

$$\sigma = 0{\cdot}001276 \,.\, 10^{-6} \cdot \frac{p}{1 + \beta t}.$$

Při zavedení jednotky absolutní měřil by se i nadále tlak vzduchu sloupcem rtuti výšky b, z tohoto pak by se tlak v absolutní jednotce vypočítal dle vzorce (§ 333.)

$$p = bSg$$

na základě faktického urychlení g tíže na místě, kde se pozorování činí. Když se sloupec rtuti redukuje na teplotu nullovou, jak se zpravidla děje, jest S konstanta 13·5956, a poněvadž pro určité místo jest také g určitá konstanta, vypočítá se pro b a pro p tabulka, dle níž se převod rychle provede.

Návrh, který autor již při prvém vydání Mechaniky v roce 1901 učinil, aby se tlak vzduchu udával v jednotce absolutní

$$\frac{megadyna}{cm^2}$$

učinili později též (1906) *Bjerknes* a *Sandström*, kteří pro tuto jednotku navrhli jméno 1 *bar*. Nejnověji vrací se k témuž návrhu *W. Köppen* (Meteorolog. Zeitschrift, Heft 5, pag. 198. 1909). Násobky a díly jednotky

bar tvořily by se dle známých zásad soustavy metrické (decibar, centibar, millibar a pod.). Ale, jak již řečeno, fysikové sotva budou moci novou tuto jednotku tlakovou »bar« přijmouti, poněvadž dle jednotky dosavadní jest normován bod varu teploměru, jakož i jiné veličiny na př. specif. hmota vzdušin a j. Bylo chybou, že při zavedení normální stupnice teploměrné, na vodík vztahované, se též bod varu neupravil dle jednotky absolutní.

§ 345. Stanovení rozdílů výškových na základě barometrickém (hypsometrie).

Volme dvě pozorovací stanice, nižší 1. a vyšší 2., ve výškách h_1 a h_2 nad hladinou mořskou. Pozorováním určíme na obou stanicích tlak barometrický b_1 a b_2 a napětí par vodních e_1 a e_2, redukujíce odečtení barometrická i hygrometrická na teplotu nullovou rtuti. Z těchto dat má se vypočísti rozdíl výškový $h_2 - h_1$.

Základní rovnice jest formálně velmi jednoduchou. Nalézáme-li se ve výši h, kdež jest σ specifická hmota vzduchu a vystoupíme-li o malou výšku dh, změní se tlak barometrický o $-db$. Sloupec vzduchový výšky dh a specifické hmoty σ jest tudíž v rovnováze se sloupcem rtuti výšky db a specifické hmoty S. Analogicky jako u spojitých nádob platí i zde úměra

$$-\frac{db}{dh} = \frac{\sigma}{S}.$$

Do rovnice této, kteráž jest základní celého problému, dlužno za σ dosaditi výraz, v předešlém § odvozený. Zde, při problému hypsometrickém, volí se za koefficient ε vždy hodnota (§ 187.)

$$\varepsilon = \frac{2}{R},$$

kdež jest R poloměr země. Dosadíme tedy

$$\sigma = \frac{0{\cdot}001293}{1 + \beta t} \cdot \frac{b - \frac{3}{8}e}{76} (1 - \varrho \cos 2\psi) \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

$$S = 13{\cdot}5956.$$

Integrace rovnice, kterou bychom obdrželi, jest velice znesnadněna tím, že ve sloupci vzduchovém mezi stanicemi 1. a 2. se mění teplota t i napětí vodních par e s výškou h, a to dle zákona neznámého. Co se teploty vzduchu týče, lze místo teploty t s výškou *proměnné* brátí teplotu střední $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ za *konstantní*. Co se pak napětí e vodních par týče, lze přibližně za to míti, že se mění úměrně s tlakem, tak že jest

$$e = kb.$$

Obdržíme tedy, dosadíce,

$$-\frac{db}{dh}$$

$$= \frac{0{\cdot}001293}{13{\cdot}5956} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}\beta\,(t_1+t_2)} \cdot \frac{1-\frac{3}{8}k}{76} \cdot b\,(1-\varrho\,cos\,2\psi)\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

anebo, když číselné hodnoty sloučíme v číslo jediné,

$$= \frac{1}{799123} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}\beta\,(t_1+t_2)} \cdot (1-\tfrac{3}{8}k)\,(1-\varrho\,cos\,2\psi)\,b\left(1-\frac{2h}{R}\right).$$

Spojíce vše, co jest vzhledem k proměnným b a h stálé, v jediné číslo C ke zkrácení, obdržíme

$$-\frac{db}{b} = C\left(dh - \frac{2h\,dh}{R}\right),$$

tudíž integrací, v mezích 1 a 2,

$$log\ nat\ b_1 - log\ nat\ b_2 = C\,[(h_2-h_1) - \frac{1}{R}\,(h_2^2 - h_1^2)].$$

Zaveďme zde logarithmy briggické, znásobíce celou rovnici koefficientem 0·43429. Když pak ještě za C dosadíme výraz příslušný, obdržíme:

$$log\ b_1 - log\ b_2 =$$

$$\frac{0{\cdot}43429}{799123}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\beta\,(t_1+t_2)}\,(1-\tfrac{3}{8}k)\,(1-\varrho\,cos\,2\psi)\,(h_2-h_1)\left(1-\frac{h_1+h_2}{R}\right).$$

Rovnice tato obsahuje mimo číselnou konstantu, jakožto hlavní, rozhodující veličiny,

$$(log\ b_1 - log\ b_2) \quad \text{a} \quad (h_2 - h_1).$$

Vedle těchto pak řadu korrekčních faktorů, vesměs formy

$$1+\delta,$$

kdež jest δ číslo velmi malé proti jedničce.

Pro takováto malá čísla platí přibližné vztahy, jichž v následujícím budeme stále užívati, totiž

$$(1+\delta)\,(1-\delta) = 1$$
$$(1+\delta_1)\,(1+\delta_2)\,(1+\delta_3)\ldots = 1+\delta_1+\delta_2+\delta_3\ldots$$

Řešíce tedy poslední rovnici dle $h_2 - h_1$, obdržíme číselnou konstantu

$$\frac{799123}{0{\cdot}43429} = 1840000,$$

kteráž platí pro centimetr jakožto jednotku. Přijmeme-li však, jak

se zde vždy děje, pro rozdíly výškové metr za jednotku, zmenší se tato konstanta stokrát a vyjde pak rovnice:

$$h_2 - h_1 = 18400\,(log\ b_1 - log\ b_2)\left(1+\beta\frac{t_1+t_2}{2}\right)(1+\tfrac{3}{8}k)$$
$$\cdot\,(1+\varrho\,cos\,2\psi)\left(1+\frac{h_1+h_2}{R}\right).$$

2. K rovnici, kterou jsme zde jakožto první provisorní výsledek obdrželi, dlužno však přičiniti některé další, dílem informativní, dílem korrektivní poznámky.

Faktor k určí se tím způsobem, že se stanoví poměr $\frac{e}{b}$ na obou stanicích a vezme hodnota průměrná, tedy

$$k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e_1}{b_1}+\frac{e_2}{b_2}\right).$$

Mnohdy se však účinek vlhkosti vzduchu brává v počet prostě zvětšením koefficientu β, dle zkušenosti, že vlhký vzduch se roztahuje větší měrou než suchý. Brává se hodnota

$$\beta = 0{\cdot}00400$$

a vynechává faktor $1+\frac{3}{8}k$.

Také číselná konstanta stanoví se raději empiricky, když se vzorce použije pro známé rozdíly výškové, trigonometricky určené. Bureau des longitudes přijímá hodnotu

18336.

Konečně dlužno ještě toho vzpomenouti, že výška barometrická b_1 nedá se prostě srovnávati s výškou b_2 na stanici vyšší, poněvadž rtuť je zde lehčí, vzhledem k menší intensitě tíže. Nebýti toho byla by výška b_2 ještě menší, a to v poměru (§ 187.)

$$1 : \left[1 - \frac{2}{R}\,(h_2 - h_1)\right].$$

Aby se docílilo souhlasu, dlužno tudíž v rovnici hypsometrické položiti

$$\text{za } b_2 \text{ hodnotu } b_2\left[1 - \frac{2\,(h_2-h_1)}{R}\right]$$

čili za $log\ b_2$ hodnotu $log\ b_2 + log\left[1 - \frac{2\,(h_2-h_1)}{R}\right]$.

Znamená-li x číslo proti 1 velmi malé, platí známé vztahy přibližné

$$log\ nat\ (1+x) = x$$
$$log\ brigg\ (1+x) = 0{\cdot}43429\ .\ x.$$

Možno tedy psáti přibližně

$$log\left[1 - \frac{2\,(h_2 - h_1)}{R}\right] = -\,0{\cdot}43429\,\frac{2\,(h_2 - h_1)}{R}.$$

Dosadíce tento výraz do formule, a provedouce násobení

$$18336\,.\,0{\cdot}86858 = 15926,$$

obdržíme již definitivní rovnici

$$h_2 - h_1 = 18336\,.\,(log\,b_1 - log\,b_2)\left(1 + \beta\,\frac{t_1 + t_2}{2}\right)(1 + \tfrac{3}{8}k)$$
$$.\,(1 + \varrho\,cos\,2\psi)\,.\left(1 + \frac{h_1 + h_2}{R}\right)$$
$$+\,\frac{15926}{R}\,.\,(h_2 - h_1).$$

Podle rovnice této jest možno již výpočet prováděti. Není závadou, že neznámá $h_2 - h_1$ se vyskytuje též na pravé straně rovnice; jednou ve faktoru $1 + \frac{h_1 + h_2}{R}$, kdež jest $h_1 + h_2 = 2h_1 + (h_2 - h_1)$, po druhé v additivním členu. Zde lze za $h_2 - h_1$ vzíti tu hodnotu, kteráž resultuje, když jak onen faktor, tak tento additivní člen prozatím vynecháme, což úplně stačí, poněvadž vzhledem k veliké číselné hodnotě poloměru R oba ony výrazy mají význam jen podřízený.

Lépe se věc objasní konkretním příkladem. Volíme následující:

Dne 29. srpna 1844 vystoupili pozorovatelé Bravais a Martins z observatoře v Ženevě na Montblanc. Výška observatoře v Ženevě jest

$$h_1 = 408{\cdot}0\ m.$$

Střední geografická šířka obou stanic činí $\psi = 46^0$.

Data pozorovací byla následující:

$(b_1) = 729{\cdot}65\ mm$ . . . $18{\cdot}6^0\ Hg$, $t_1 = 19{\cdot}3^0$
$(b_2) = 424{\cdot}05$ „ . . . $-\,4{\cdot}2^0$ „ $t_2 = -\,7{\cdot}6^6$.

Barometr měl stupnici mosaznou. Redukce výšek barometrických na teplotu nullovou činila

$$729{\cdot}65 - 2{\cdot}21 = 727{\cdot}44$$
$$424{\cdot}05 + 0{\cdot}29 = 424{\cdot}34.$$

Jest tedy

$b_1 = 727{\cdot}44$ $log\,b_1 = 2{\cdot}861797$
$b_2 = 424{\cdot}34$ $log\,b_2 = 2{\cdot}627714$.

Pozorování hygrometrická nebyla konána. Proto nutno ve formuli faktor $1 + \frac{3}{8}k$ vynechati a v náhradu za to zvětšiti koefficient β. Provedeme tedy počet dle vzorce

$$h_2 - h_1 = 18336\,(log\,b_1 - log\,b_2)\left(1 + 0{\cdot}004\,\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$
$$.\,(1 + \varrho\,cos\,2\psi)\left(1 + \frac{h_1 + h_2}{R}\right) + \frac{15926}{R}\,(h_2 - h_1).$$

Pro poloměr R země píšeme (jako bureau des longitudes)

$$R = 6366198\ m.$$

V následujícím jest sestaven výsledek počtu a to tak, že jest vypočítána hodnota nejprve výrazu hlavního a že jest udáno, jakou korrekci způsobují pak jednotlivé podřízenější výrazy další.

$18336\,(log\,b_1 - log\,b_2)$	=	4292·2
$1 + 0{\cdot}004\,\frac{t_1 + t_2}{2}$ . . .		+ 100·4
$1 + \varrho\,cos\,2\psi$ . . .		— 0·4
$1 + \frac{h_1 + h_2}{R}$ . . .		+ 3·6
Součet	=	4395·8
$\frac{15926}{R}\,(h_2 - h_1)$	=	+ 11·0
$h_2 - h_1$	=	4406·8
h_1	=	408·0
h_2	=	4814·8.

Poněvadž pak stanice pozorovací na hoře Montblanc byla 1 m pod vrcholem, činí výška této hory $h = 4815{\cdot}8$.

Z provedeného počtu dobře jest patrný význam jednotlivých výrazů. Účinek teploty jest největší. Změna intensity gravitačního pole jest vzhledem k šířce ψ malá, poněvadž rozdíl šířky této od 45^0 jest nepatrný, ale vzhledem k výšce dobře znatelná. Tato změna se týče hustoty vzduchu. Velmi znatelný jest však účinek této změny vzhledem k hustotě rtuti; tato jest nahoře lehčí; proto k závěru ještě korrekce positivní (§ 332.).

3. K účelům početním upravuje se vzorec hypsometrický ještě dále, a to dvojím způsobem: jeden přijímá bureau des longitudes, druhý je proveden v internacionálních tabulkách meteorologických.

a) Výraz $1 + \frac{3}{8}k$ se vynechá. V náhradu se zvýší koefficient β na hodnotu $\beta = 0{\cdot}004$. Do additivního korrekčního výrazu dosadí se za rozdíl $h_2 - h_1$ hodnota hlavní

$$h_2 - h_1 = 18336\,(log\,b_1 - log\,b_2)\left(1 + \beta\,\frac{t_1 + t_2}{2}\right)(1 + \varrho\,cos\,2\psi)$$

s vynecháním korrekčního faktoru $1 + \frac{h_1 + h_2}{R}$. Pak se spojení provede summací výrazů

$$1 + \frac{h_1 + h_2}{R} + \frac{15926}{R} = 1 + \frac{h_1 + h_2 + 15926}{R}.$$

To by vlastně již úplně postačilo. Ale bureau des longitudes rozděluje, co v tomto posledním faktoru připadá na stanici prvou a co na další rozdíl výškový $h_2 - h_1$ dle identity

$$h_1 + h_2 = 2h_1 + (h_2 - h_1)$$

a klade zároveň přibližně

$$1 + \frac{2h_1}{R} + \frac{(h_2 - h_1) + 15926}{R} = \left(1 + \frac{2h_1}{R}\right)\left(1 + \frac{h_2 - h_1 + 15926}{R}\right).$$

Tím vyjde vzorec v úpravě závěrečné

$$h_2 - h_1 = 18336\,(log\ b_1 - log\ b_2) \cdot \left(1 + 2\,\frac{t_1 + t_2}{1000}\right)$$

$$\left(1 + 0{\cdot}00265\ cos\ 2\psi + \frac{h_2 - h_1 + 15926}{6366198}\right)\left(1 + \frac{h_1}{3183099}\right).$$

Tak uveřejňuje formuli hypsometrickou Annuaire publié par le bureau des longitudes *) a upravuje k snazšímu počítání pro jednotlivé výrazy tabulky.

Příklad, nahoře propočítaný, jest vzat z Annuaire 1900. Tam jest určen dle tabulek a dochází se výsledku $h_2 - h_1 = 4406{\cdot}9$; tento souhlasí velmi dobře s výsledkem svrchu dle jiného vzorce přímo počítaným.

b) Druhý způsob formální úpravy vzorce hypsometrického záleží v tom, že se korrekční additivní výraz přenese na levou stranu a spojí s faktorem $h_2 - h_1$ v jediný výraz

$$(h_2 - h_1)\left(1 - \frac{15926}{R}\right).$$

Když se pak koefficientem k rozdílu $(h_2 - h_1)$ přistupujícím dělí, zvětší se konstanta hypsometrická na hodnotu

$$18336\left(1 + \frac{15926}{R}\right) = 18336 + 46 = 18382.$$

Vezme-li se za základ konstanta původní, theoretická, 18400, vyjde konstanta zvětšená

$$18400\left(1 + \frac{15982}{R}\right) = 18400 + 46 = 18446.$$

Internacionální tabulky meteorologické přijímají na základě jiných ještě trigonometricky zjednaných hodnot za konstantu zvětšenou číslo 18429.

Dle toho zní definitivní vzorec hypsometrický

$$h_2 - h_1 = 18429\,(log\ b_1 - log\ b_2)\left(1 + \beta\,\frac{t_1 + t_2}{2}\right)(1 + \tfrac{3}{8}k)$$

$$\cdot\,(1 + \varrho\ cos\ 2\psi)\left(1 + \frac{h_1 + h_2}{R}\right).$$

O barometrickém měření výšek pojednal v novější době *J. Liznar* (Die barometrische Höhenmessung 1904, Leipzig und Wien); rovněž prof. *Grossmann* (Die barometrische Höhenformel und ihre Anwendung, Meteorolog. Zeitschr. pag. 152. 1906).

*) Vzorec jest tam ještě tak dalece komplikovanější, že se nepředpokládá redukce odečtení barometrických na nullu. Proto vstupují tam do hlavního vzorce též teploty rtuti na obou stanicích. Tabulky obsahuje též Technický průvodce, Červený a Řehořovský, oddíl VI D. pag. 336. Koefficient ϱ béře zde Annuaire větší, než na jiném místě udává.

Barometrické měření výšek dává výsledky spolehlivé jenom, je-li atmosféra klidná. Větrem může výsledek i při malých rozdílech výškových se státi nejistým, ještě více pak anomálním rozdělením teploty. Vzhledem k tomu jest oprávněnou snaha, postaviti měření výšková (zejména výšek velmi značných) na jiný základ. V novější době poukazuje se *) na základ *gravimetrický*. Váha p_1 nějakého tělesa ve výšce h jest jiná než váha p_0 při hladině mořské. Tuto váhu bylo by lze dynamometrem (ovšem velmi citlivým) přesně stanoviti. Váhy ubývá úměrně s urychlením gravitačním g. Přišly by pak k platnosti vzorce odvozené v § 187., při čemž by též bylo nutno přihlížeti k rotaci zemské.

§ 346. **Redukce tlaku barometrického na hladinu mořskou.**

V praktické meteorologii vyskytuje se úkol, aby se tlak barometrický, odečtený na stanici ve výšce h nad mořem se nalézající, redukoval na hladinu moře. Tím způsobem lze pak odečtení barometrická, vykonaná na stanicích rozmanitě vysoko rozložených, po redukci na společnou nullovou výšku vespolek srovnávati.

Položíme-li ve formuli hypsometrické $h_1 = 0$, $h_2 = h$, a souhlasně $b_1 = b_0$ a $b_2 = b$, podobně $t_1 = t_0$, $t_2 = t$, obdržíme

$$log\ b_0 = log\ b + \frac{h\left(1 - \tfrac{3}{8}\,\frac{e}{b}\right)}{18429\left(1 + \beta\,\frac{t_0 + t}{2}\right)\left(1 + \varrho\ cos\ 2\psi\right)\left(1 + \frac{h}{R}\right)}$$

anebo v jiné číselné formě

$$log\ b_0 = log\ b + \frac{h\left(1 - \tfrac{3}{8}\,\frac{e}{b}\right)}{\left(18429 + 67{\cdot}6\,\frac{t_0 + t}{2} + 0{\cdot}0029\ h\right)(1 + \varrho\ cos\ 2\psi)},$$

kteráž resultuje na základě hodnot

$$\beta = 0{\cdot}00367, \qquad R = 6366198\ m.$$

Dle vzorce tohoto počítá se logarithmická korrekce, kterou dlužno přičiniti k logarithmu tlaku barometrického b na stanici, aby se obdržel logarithmus příslušného tlaku b_0 na hladině mořské. Pro

*) *A. Berget*, Compt. rend. 148, pag. 59., 1909. Autor vyzývá konstruktéry, aby se snažili dynamometr veliké citlivosti sestrojiti.

určitou stanici, na př. Praha, Clementinum nebo Petřín, jest konstantní h, ψ, tak že se může pro hlavní výraz additivní na pravo rovnice, s vynecháním faktoru $1 - {}^3/_8 \frac{e}{b}$, počítati tabulka dle střední teploty $\frac{1}{2}(t_0 + t)$ zařízená.

Redukce tlaku barometrického na hladinu mořskou dává výsledky spolehlivé jen za týchž podmínek, jako barometrické měření výšek. Poněvadž však podmínky tyto zřídka bývají vyplněny, zůstává tato redukce vždy více méně nejistou. Vzhledem k tomu zachovává se v praktické meteorologii pravidlo, u stanic *velmi vysoko položených*, horských, redukovati tlak na společné niveau 2500 metrů a nikoli na hladinu mořskou.

Vzhledem k zajímavosti tohoto předmětu buďtež zde uvedeny některé významnější meteorologické stanice horské, dle stavu počátkem 20. století, s udáním jich výšky (v metrech) nad hladinou mořskou.

Rakousko-Uhersko čítá celkem 24 výše položených stanic, nejvyšší Sonnblick (3106), Schneeberg v Tyrolsku (2232), Glocknerhaus v Korutanech (2127), Bělasniča v Bosně (2067) a j. *Německo* má celkem 17 horských stanic, nejvyšší Zugspitze (2965), Wendelstein (1728), Sněžka v Krkonoších (1603) a j. *Italie* má vysoko položenou stanici Monte Rosa (4560), Etna (2942) a j. *Ve Švýcarech* jest Säntis (2500), Velký Sv. Bernhard (2475), Sv. Gotthard (2114), Pilatus (2067) a. j. *Ve Francii* Mont-Blanc (4359), Pic du Midi v Pyrenejích (2859) a j.

Z ostatních uvádíme jen Quezahtenango, Guatemala v Sev. Americe (2350), Mount Misti (5850) a Arequipa (2600), obě v Peru, v Jižní Americe a j.

U nás v Čechách je zařízena od několika let stanice na Milešovce (835).

Na věži Eiffelově v Paříži konají se pozorování ve výšce 332, tedy téměř takové, jako je výška 328 naší stanice v Praze na Petříně.

§ 347. **Výsledky orientační. Grafické znázornění.**

Problém hypsometrický, sám sebou zajímavý, stává se méně přístupným formální komplikovaností vzorců v předešlých odstavcích odvozených. Proto jest k orientaci povšechné výhodno položiti důraz na věc hlavní a ukázati číselně i graficky, jak v základních rysech ubývá tlaku i teploty vzduchu s výškou.

Za základ postačí relace následující:

$$\log b_0 - \log b = \frac{h}{18429 + 73{\cdot}7\,\frac{t_0 + t}{2} + 0{\cdot}0029\,h}.$$

Zde značí b_0, t_0 tlak a teplotu vzduchu při hladině moře, b, t ve výšce h metrů; za koefficient roztažnosti vzduchu β vzata hodnota 0·004 s vynecháním faktoru vlhkoměrného; počet se vztahuje na místa blízká střední šířce geografické $\psi = 45^0$, pro kteréž faktor gravitační lze vynechati.

V tabulce následující proveden jest počet pro výšky od 0 do 10 *km* pokračující, a to pro hodnoty průměrné jak teploty tak tlaku vzduchu. Za gradient temperaturní zvoleno číslo $^1/_2{}^0$ na 100 *m*.

Ubývání tlaku a teploty vzduchu s výškou.

h	t	$\frac{t_0 + t}{2}$	$\log b - \log b_0$	b	$\Delta \log b$	T	ΔT
m	°	°		*cm*	(100 *m*)	°	(100 *m*)
0	10	10·0	0·0000	76·00		100·0	
1000	5	7·5	— 0·0527	67·32	— 0·0053	96·7	0·33
2000	0	5·0	— 0·1064	59·49	— 0·0054	93·3	0·34
3000	— 5	2·5	— 0·1611	52·45	— 0·0055	90·0	0·33
4000	— 10	0·0	— 0·2169	46·12	— 0·0056	86·6	0·34
5000	— 15	— 2·5	— 0·2738	40·46	— 0·0057	83·3	0·33
6000	— 20	— 5·0	— 0·3319	35·39	— 0·0058	79·9	0·34
7000	— 25	— 7·5	— 0·3911	30·88	— 0·0059	76·6	0·33
8000	— 30	— 10·0	— 0·4516	26·87	— 0·0060	73·3	0·33
9000	— 35	— 12·5	— 0·5133	23·31	— 0·0062	69·9	0·34
10000	— 40	— 15·0	— 0·5763	20·16	— 0·0063	66·6	0·33

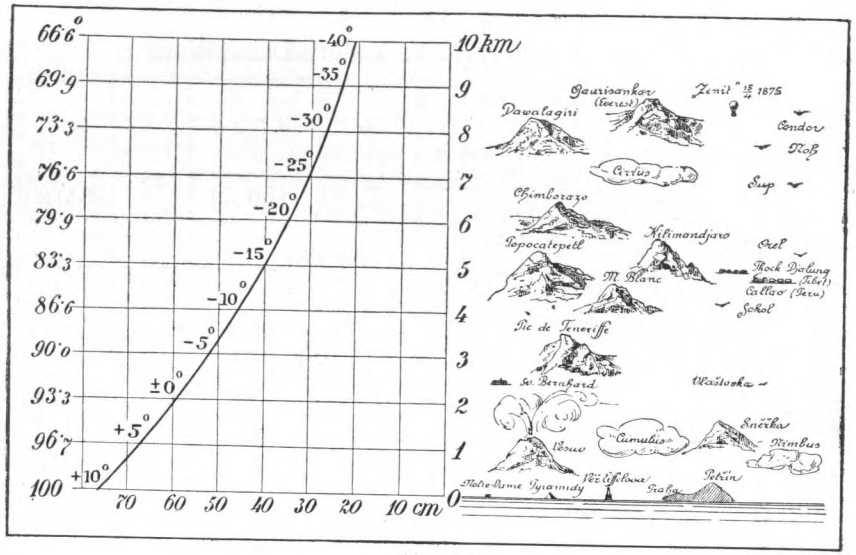
Z tabulky této jest viděti, jak teplota a tlak vzduchu průměrně při stoupání do výšek klesá. Sloupec $\Delta \log b$ udává, oč se zmenšuje logarithmus tlaku barometrického průměrně na 100 *m*. Logarithmu ubývá téměř rovnoměrně; malé urychlování jest způsobeno klesající teplotou. Pro interpolaci dlužno užívati jen těchto hodnot logarithmických.

Vzhledem k hypsothermometru (§ 335.) připojen jest v tabulce ještě sloupec, udávající, při jaké teplotě T se ve výši h vaří voda; sloupec poslední objasňuje, jak se tato teplota mění průměrně na každých 100 metrů výškového rozdílu.

Změna tato činí $\frac{1}{8}$ stupně a jeví se býti až do 10 *km* konstantní, Kdyby se tedy na hypsothermometru vedle stupnice teploměrné též na-

nesla stupnice výškoměrná, postupovaly by obě rovnoměrně. Příčinou této pozoruhodné shody, v mezích udaných, jest ta okolnost, že napětí nasycených par vodních stoupá s teplotou dle křivky podobné jako stoupá tlak barometrický s ubývající výškou. Zároveň jest z toho patrna citlivost hypsothermometru. Na 100 *m* připadá $\frac{1}{5}^0$; aby se tedy mohly výšky měřiti na 1 *m*, musila by teplota *T* se dáti odečísti ještě na $\frac{1}{800}^0$.

Teplota a tlak vzduchu jakož i bod varu vody v různých výškách.



Obr. 263.

Na základě tabulky jest nakreslen diagramm v obr. 263. Z něho jediným pohledem poznáváme, jaký jest tlak vzduchu ve výškách různých hor starého i nového světa, ve výškách největších ještě stále obydlených (Thock Djalung, Tibet) ve výškách, v nichž se vznáší orel, sup, kondor a j., a do nichž se ještě vystoupilo ballonem.

Řídkost vzduchu na horách jeví se mnohými účinky fysiologickými, kteréž pociťuje každý, kdo sleze vysoké hory i našich krajů (Velký Zvon 3797 *m*, Vedretta Marmolata 3494 *m* a j.), tím více pak velikány Alpské neb hory jiných dílů světa. Největší výšky dostoupili bratří Schlagintweitové, dne $\frac{19}{8}$ 1855 na Ibi-Gaminu v Himalaji, totiž 6882 *m*. V ballonu (»Zenit«) dosáhli $\frac{15}{4}$ 1875 ohromné výšky Tissandier, Crocé-Spinelli a Sivel, 8600 *m*, soudíc z registrace barometrické; ve výši této dva z větroplavců zahynuli, Tissandier, jenž omdlel, jako zázrakem byl zachráněn. Výšky ještě větší dosáhli $\frac{17}{7}$ 1862 Glaisher a Coxwell totiž 8850 m, snad i více, při čemž však Glaisher též upadl do mdloby.

Ballony meteorologické, bez pozorovatelů, opatřené přístroji autografickými, dostaly se $\frac{5}{11}$ 1908 až do výšek 29000 *m*.

O účincích fysiologických, jakéž se ukazují při stoupání na vysoké hory, píše odborník: »Na horách těchto (peruanských), kde lidé ještě ve výši 5000 *m* a i více žijí a pracují, jest vzduch již tak řídký, že jej ne každý organismus snese. A téměř každý nový příchozí do těchto vysokých krajů, zejména jako my, který přišel od břehu moře, pociťuje dosti nepříjemně tuto řídkost vzduchu. Člověk nemůže se pohybovati a namáhati jako dole v nížinách. Chůze, byť i sebe pomaleji se dála, unavuje, srdce bije, člověku jest horko, každou chvíli se musí zastaviti a lapá po dechu, a chce-li pevnou vůlí tuto zdánlivou únavu překonati, padne mnohdy bez vědomí k zemi a dlouho potřebuje než se zotaví. Někomu zase počne krváceti z uší, nosu i z úst a je vždy dlouhého šetření potřebí, než krvácení takové přestane. Těžkou práci nový příchozí vůbec vykonávati nemůže a mnozí z těch, kteří do těchto krajin přijdou, aby zde žili, musí několik dní zůstati na lůžku pro značnou slabost, závratě, nechuť k jídlu a podobné obtíže. Nepozornost nebo přepínání vlastních sil v tomto ohledu ukázalo se na četných případech býti osudným. Zajímavo jest, že jako lidi, také i zvířata, která přišla zdola, stihne soróча (vysl. soróča), tato nemoc peruanských hor. Kůň, který přišel z Limy do Chiely (asi 3800 *m*) po dráze, musí prve i více neděl volně státi a se pásti, než může se naň vloziti sedlo.« (Z listu Dra. J. Pečírky.)

Dr. Workman, jenž v Himalaji vystoupil až do výšek nad 6000 *m*, popisuje, že v končinách těchto účinkem velmi řídkého vzduchu se dostavují při stoupání obtíže v dýchání a jich následek — nespavost. »Umdleni byli ukrutně, ale sotva zaklímali, ihned vzbouzeli se unavenější než prve. Po tomto náhlém vzbuzení zmocnila se jich úzkost a sklíčenost, již přemoci nebyli s to.« (Živa, pag. 247. 1906.)

Historicky budiž vzpomenuto památného pokusu ze dne 19. září 1648, kteréž z návodu Pascalova provedl jeho švakr Périer. Tlak barometrický stanoven jakožto na stanici prvé v zahradě konventu Františkánů Clermontských, kde P. Chastin po celý den stav barometru kontroloval, a pak na vrcholu hory Puy-de-Dôme, jakožto stanici druhé. Výškový rozdíl obou stanic byl asi 500 toise, pozorované výšky barometrické byly 26″3½‴ (712 *mm*) a 23″2‴ (627 *mm*). Výsledek učinil na všechny súčastněné dojem veliký. Pokus opakován zejména také ještě na stanici asi uprostřed mezi oběma se nalézající. Když Pascal krátce na to obdržel písemnou zprávu o výsledku expedice, opakoval sám pokus na věži St.-Jacques v Paříži při výškové differenci pouze asi 25 toise. Pokusy těmito byl starý »horror-vacui« nadobro zvrácen. Jak *P. Duhem* udává (Beiblätter, pag. 173. 1907) byl to *P. Mersenne*, jenž již v předmluvě, datované 1. října 1644, k svému dílu: Novarum observationum physico-mathematicarum Tomus tertius navrhl onen pokus, který 19. září 1648 Perier na Puy-de-Dôme provedl, což by nasvědčovalo tomu, jak P. Mersenne rychle pochopil význam pokusu Torricelliho. P. Mersenne zemřel 1. září 1648, tak že se provedení své myšlenky nedočkal. Na vrcholu hory Puy-de-Dôme jest nyní meteorologická stanice.

§ 348. Zkouška zákona Boyle-Mariottova.

Zákon Boyle-Mariottův vyniká svou jednoduchostí; ale právě tato pobádá ke kritickému zkoumání, zdali v této jednoduchosti má zákon platnost plnou či jen přibližnou. Dlužno zjistiti, především u vzduchu a pak u plynů jiných, zdali zákon se osvědčuje pro tlaky libovolně veliké i libovolně malé a zejména, zdali má platnost pro teploty malé i velké.

Práce, jež v těchto směrech zejména ve století 19tém byly provedeny, tvoří dnes již zvláštní literaturu tohoto předmětu; jsou velmi rozsáhlé a vyžadovaly vzhledem k nesnadnosti úkolu mnohdy opatření nákladných. Ze starších prací budiž zde vzpomenuto těch, jež z uložení akademie Pařížské provedla zvláštní kommisse vědecká (1830); práce, jež řídil *Dulong*, vztahovaly se jenom ke vzduchu, jehož napětí bylo zkoušeno až do 27 atmosfér. Napětí plynů jiných studoval později *Pouillet* (1837), zvláště pak *Regnault* (1847 a 1862). V dobách novějších zabýval se otázkou *Cailletet*, zejména pak *Amagat*. Pominouce práce starší *) pojednáme obšírněji o výsledcích, jichž došel *Amagat* **), připojíce sestavení tabellární i znázornění grafické.

Při jistém tlaku p budiž v objem plynu skutečný, jak se pozorováním stanoví, v^* objem theoretický, jak vychází počtem dle zákona Boyle-Mariottova. Tlak p jest při tom základní proměnnou, argumentem, teplota plynu pak konstantou arbitrární, kteráž při jisté řadě pozorování se nemění, ale při různých řadách je různou. Jakožto závisle proměnnou, čili funkci argumentu p pokládáme rozdíl $v - v^*$ mezi objemem plynu faktickým a theoretickým, a to nikoli tento rozdíl absolutní, nýbrž relativní, vzhledem k objemu skutečnému, tudíž rozdíl

$$\varepsilon = \frac{v - v^*}{v}.$$

Jinak vyjádříme tento relativní rozdíl ε píšíce zákon Boyle-Mariottův ve formě

$$v^* p = 1,$$

t. j. pokládajíce konstantu zákona pro jistý tlak p za jedničku. Pak jest

$$\varepsilon = -\frac{v - \frac{1}{p}}{v}, \quad \text{čili} \quad 1 - \varepsilon = \frac{1}{pv},$$

*) Obšírně referuje se o těchto starších pracích v Mechanice, kterou sepsali Zenger a Čecháč, pag. 429.—446. Srovnej též referát, Úchylky od zákona Boyle-ova, Dr. B. Mašek, Časopis pro pěst. mathem. a fys. XXVI, p. 190. 1897.

**) *Emile Hilaire Amagat*, narozen r. 1841, původně professor fysiky na universitě v Lyonu, později od r. 1892 na polyt. škole v Paříži. Jest v oboru, o kterém zde jednáme, autoritou nad jiné vynikající.

a poněvadž rozdíl ε jest velmi malý, lze psáti přibližně

$$1 + \varepsilon = \frac{1}{1 - \varepsilon} = pv,$$

z čehož plyne

$$\varepsilon = pv - 1.$$

Dle toho jest upraven číselný materiál v následujících tabulkách obsažený.

V práci své *) z roku 1881 realisoval *Amagat* tlak rtuťovým sloupcem až do výšky 320 metrů, tedy přibližně do 400 atmosfér. V následujících tabulkách, jež obsahují některé příklady, jest tlak p udáván výškou sloupce rtuťového. Za jednotku součinu pv volena jeho hodnota při tlaku 30 *m Hg* 0° a při teplotě v tabulkách udané.

Stlačitelnost vodíku H_2.

p (*m Hg* 0°)	17·7°			60·4°			100·1°		
	pv	$\frac{pv}{2830}$	ε	pv	$\frac{pv}{2830}$	ε	pv	$\frac{pv}{2830}$	ε
30	2830	1·000	± 0·000	3235	1·143	+ 0·143	3610	1·276	+ 0·276
100	2985	1·055	+ 0·055	3400	1·201	+ 0·201	3780	1·336	+ 0·336
200	3240	1·145	+ 0·145	3685	1·302	+ 0·302	4055	1·433	+ 0·433
320	3550	1·254	+ 0·254	3890	1·375	+ 0·375	4385	1·549	+ 0·549

Stlačitelnost dusíku N_2.

p (*m Hg* 0°)	17·7°			50·4°			100·1°		
	pv	$\frac{pv}{2745}$	ε	pv	$\frac{pv}{2745}$	ε	pv	$\frac{pv}{2745}$	ε
30	2745	1·000	± 0·000	3080	1·122	+ 0·122	3575	1·302	+ 0·302
60	2740	0·998	— 0·002	3100	1·129	+ 0·129	3610	1·315	+ 0·315
100	2790	1·016	+ 0·016	3170	1·155	+ 0·155	3695	1·346	+ 0·346
200	3075	1·120	+ 0·120	3465	1·262	+ 0·262	4020	1·464	+ 0·464
320	3525	1·284	+ 0·284	3915	1·426	+ 0·426	4475	1·630	+ 0·630

*) Ann. de chim. et phys. (5) 22. pag. 353. 1881.

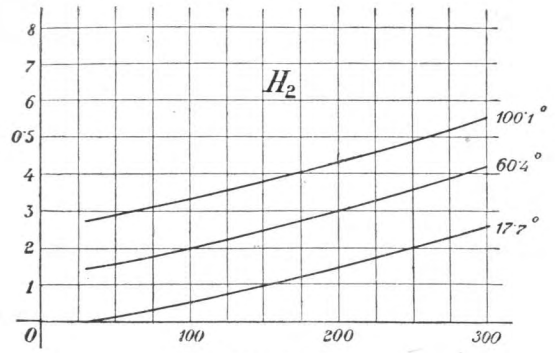
Stlačitelnost kysličníku uhličitého CO_2.

$\frac{m}{Hg\ 0^0}$	18·2°			35·1°			40·2°		
p	pv	$\frac{pv}{2360}$	ε	pv	$\frac{pv}{2360}$	ε	pv	$\frac{pv}{2360}$	ε
30	tekutý	—	—	2360	1·000	0·000	2460	1·042	+ 0·042
70	„	—	—	725	0·307	— 0·693	950	0·402	— 0·598
100	760	0·322	— 0·678	870	0·369	— 0·631	920	0·390	— 0·610
130	955	0·405	— 0·595	1060	0·449	— 0·551	1115	0·472	— 0·528
170	1210	0·513	— 0·487	1310	0·555	— 0·445	1360	0·576	— 0·424
200	1405	0·595	— 0·405	1500	0·636	— 0·364	1550	0·657	— 0·343
320	2135	0·905	— 0·095	2240	0·949	— 0·051	2280	0·966	— 0·034

$\frac{m}{Hg\ 0^0}$	60·0°			80·0°			100·0°		
p	pv	$\frac{pv}{2360}$	ε	pv	$\frac{pv}{2360}$	ε	pv	$\frac{pv}{2360}$	ε
30	2730	1·157	+ 0·157	2995	1·269	+ 0·269	3225	1·367	+ 0·367
70	1890	0·801	— 0·199	2380	1·008	+ 0·008	2750	1·165	+ 0·165
100	1315	0·557	— 0·443	1940	0·822	— 0·178	2425	1·028	+ 0·028
130	1315	0·557	— 0·443	1735	0·735	— 0·265	2190	0·928	— 0·072
170	1520	0·644	— 0·356	1780	0·754	— 0·246	2135	0·905	— 0·095
200	1705	0·723	— 0·277	1930	0·818	— 0·182	2215	0·939	— 0·061
320	2440	1·034	+ 0·034	2620	1·110	+ 0·110	2830	1·199	+ 0·199

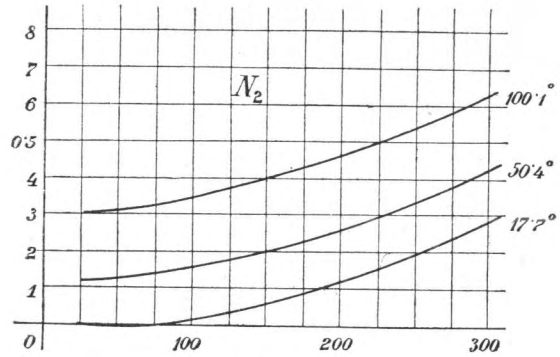
Na základě tohoto číselného materiálu kresleny jsou diagrammy obr. 264., 265. a obr. 266. Z nich seznáváme, že zákon Boyle-Mariottův jest jenom approximací. Kdyby byl plně platným, bylo by $\varepsilon = 0$ anebo $\varepsilon = const.$ Z diagrammů pozorujeme však, že ε klesá neb stoupá. Klesající ε znamená, jak krátce dle analogie chodu hodin řekneme, akceleraci při stlačování, t. j. znamená, že objem plynu proti objemu theoretickému jest menším (čili stlačitelnost že jest větší). Naopak stoupající ε značí retardaci při stlačování; t. j. značí, že proti theoretickému jest objem plynu větším (čili stlačitelnost že jest menší).

Z diagrammů, jež zde pro tři repraesantanty plynů byly sestrojeny, lze odvoditi zajímavé výsledky závěrečné. Rozhodující jest tu teplota plynu kritická, t. j. teplota, nad kterouž plyn tlakem již kondensovati nelze. Má-li plyn teplotu nižší než kritickou, stlačuje se urychleně až zkapalní. Má-li plyn teplotu vyšší než jest kritická, ukazuje při stou-



Obr. 264.

pajícím tlaku s počátku akceleraci, při jistém tlaku nastává obrat, načež při tlaku ještě dále stoupajícím jeví plyn retardaci. Poloha bodu obratu souvisí s teplotou plynu. Při rostoucí teplotě pošinuje se bod obratu k tlakům vyšším, rozdíly stlačitelnosti v okolí jeho se umenšují, křivka se

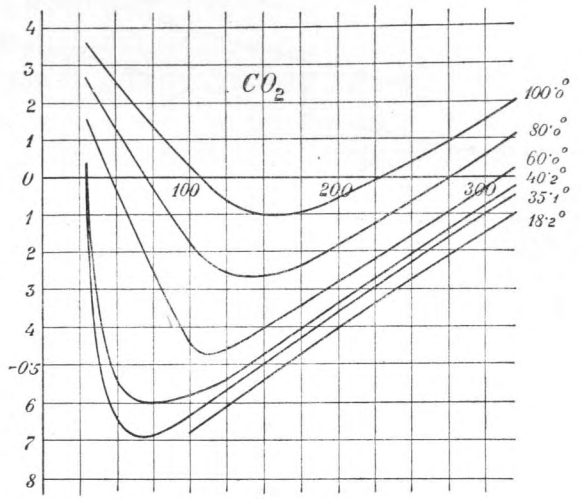


Obr. 265.

stává méně prohloubenou; v nejbližším okolí bodu obratu platí pak zákon Boyle-Mariottův. Konečně při teplotě plynu ještě dále rostoucí bod obratu, ovšem daleko méně již vyslovený (křivka plochá!), nastává postupně za tlaků nižších, až konečně mizí a plyn jeví ve své stlačitelnosti již jen retardaci. Co však pro určitý plyn jest teplotou nízkou neb vysokou, závisí

na povaze plynu samého, na poměrech, při nichž se zkapalní, na jeho teplotě kritické. Tak jest na př. pro CO_2 teplota 40·2° nízkou, ale pro H_2 jest i teplota 17·7° již velmi vysokou.

Pozorování další, velice obsáhlé a předmět dokonale vyčerpávající uveřejnil *Amagat* v práci *) z roku 1893. Vyšetřoval vzduch, kyslík, dusík, vodík, kysličník uhličitý, aethylen a některé plyny vzácné (helium, neon, argon, xenon, krypton), a to při různých teplotách. Při tom postoupil až k tlaku 1000 atmosfér, později dokonce až ke tlaku 3000 atmosfér. Výsledky jeho číselné obsahují p v atmosférách jako proměnnou



Obr. 266.

základní, součin pak pv a objem v jako funkci, při čemž teplota plynu jest konstantou arbitrární. Lze tedy z jeho číselných dat rýsovati isothermy plynu anebo jen křivku udávající odchylku ε součinu pv od jedničky t. j. $\varepsilon = pv - 1$. Jednotkou objemu jest objem jednoho grammu plynu při poměrech normálních, t. j. tlaku 1 atm. a teploty 0°. Následující tabulky podávají jeho pozorování jen v nejstručnějším výtahu, více jako příklady, a to pro dokonalé plyny: vzduch, vodík, kyslík a dusík jen pro teplotu 0° (Amagat stanovil vedle toho isothermy ještě pro teploty okrouhle 15°, 50°, 100° a 200°), pro kysličník uhličitý pak pro teploty 0°, 20°, 30°, 40°, 60°, 100°, 198° (Amagat ještě pro četné jiné).

*) Ann. de chim. et phys. (6) 29. pag. 40. 1893.

Stlačitelnost vzduchu o teplotě 0°.

p	pv	v
1	1·0000	1·000000
200	1·0100	0·005030
400	1·2145	0·003036
600	1·4700	0·002450
800	1·7368	0·002171
1000	1·9990	0·001999
1200	2·2596	0·001883
1400	2·5081	0·001792
1600	2·7528	0·001721
1800	2·9916	0·001662
2000	3·2260	0·001613
2200	3·4540	0·001570
2400	3·6804	0·001534
2600	3·9000	0·001500
2800	4·1146	0·001470
3000	4·3230	0·001441

Stlačitelnost vodíku o teplotě 0°.

p	pv	v
1	1·0000	1·000000
200	1·1380	0·005690
400	1·2830	0·003200
600	1·4322	0·002387
800	1·5760	0·001970
1000	1·7250	0·001725
1200	1·8690	0·001558
1400	2·0048	0·001432
1600	2·1352	0·001335
1800	2·2644	0·001258
2000	2·3890	0·001195
2200	2·5102	0·001141
2400	2·6340	0·001098
2600	2·7547	0·001060
2800	2·8686	0·001025
3000	—	—

Stlačitelnost kyslíku o teplotě 0°.

p	pv	v
1	1·0000	1·000000
200	0·9140	0·004570
400	1·0515	0·002620
600	1·2702	0·002117
800	1·5040	0·001880
1000	1·7360	0·001736
1200	1·9620	0·001635
1400	2·1798	0·001557
1600	2·3960	0·001498
1800	2·6073	0·001449
2000	2·8160	0·001408
2200	2·0217	0·001374
2400	3·2244	0·001344
2600	3·4229	0·001317
2800	3·6176	0·001292
3000	—	—

Stlačitelnost dusíku o teplotě 0°.

p	pv	v
1	1·0000	1·000000
200	1·0390	0·005195
400	1·2570	0·003142
600	1·5260	0·002543
800	1·8016	0·002252
1000	2·0700	0·002070
1200	2·3352	0·001946
1400	2·5942	0·001853
1600	2·8456	0·001779
1800	3·0861	0·001715
2000	3·3270	0·001664
2200	3·5640	0·001620
2400	3·8004	0·001584
2600	4·0378	0·001553
2800	4·2700	0·001525
3000	4·4970	0·001499

Stlačitelnost kysličníku uhličitého. Součin pv při různé teplotě.

p	0°	20°	30°	40°	60°	100°	198°
1	1·0000	—					
100	0·2020	0·2285	0·2550	0·3090	0·6610	1·0300	1·5820
200	0·3850	0·4190	0·4400	0·4675	0·5425	0·8145	1·4960
300	0·5595	0·5985	0·6225	0·6485	0·7100	0·8900	1·4935
400	0·7280	0·7710	0·7950	0·8230	0·8840	1·0385	1·5630
500	0·8905	0·9380	0·9630	0·9900	1·0540	1·2005	1·6775
600	1·0495	1·0995	1·1275	1·1570	1·2190	1·3655	1·8120
700	1·2055	1·2590	1·2890	1·3190	1·3825	1·5285	1·9560
800	1·3580	2·4170	1·4475	1·4790	1·5435	1·6890	2·1080
900	1·5090	1·5685	1·6000	1·6325	1·6995	1·8460	2·2600
1000	1·6560	1·7160	1·7480	1·7800	1·8475	1·9990	—

Chování se plynů za teplot velmi nízkých zkoumal prvý *Wróblewski* (1888), pak i *Witkowski* (1891—1899) a zvláště mnoho *Kamerlingh Onnes* a jeho žáci (od r. 1898) v kryogenní laboratoři v Leidenu. Pro teploty t našli minima součinu pv pro vodík za tlaků p (v atmosférách), jak udáno v násl. tabulce:

t	p pro $pv =$ min.
— 182° 81	33·36
— 195· 27	47·69
— 204· 70	52·10
— 212· 82	53·63
— 217· 41	51·57

Zajímavo jest zmíniti se též o manometrech, jimiž lze vysoké tlaky přesně měřiti. Jak *Regnault* tak *Amagat* užívali velmi vysokých trubic rtutí naplněných; stanovili tedy tlak přímo. Trubice byly umístěny ve věžích nebo šachtách. *Cailletet* umístil (1891) takovýto manometr na Eiffelově věži, jest vysoký 300 metrů; tlak rtuti činí při něm (okrouhle) 400 atmosfér.

Amagatova měření tlaků až do 3000 atm. byla umožněna užitím t. zv. manometru *Desgoffe-ova*, jehož princip je úplným obrácením principu hydraulického lisu. Vysoký tlak působí na píst malého průřezu a přenáší se na píst průřezu velikého, kterým se tlačí rtuť do manometrické trubice. Tlak se manometrem redukuje v poměru průřezů. V laboratoři, kterou v Leidenu řídí *Kamerlingh-Onnes*, užívá se 15 za sebou spojených parciálních manometrů rtuťových, z nichž každý má 3·14 *m* výšky. Přenášení tlaku z vrchní nádoby jednoho manometru do spodní druhého děje se komprimovaným plynem, který se vpouští do trubic oba konce spojujících.

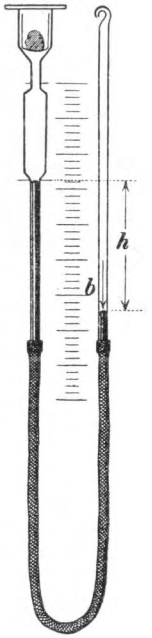
Nutno ostatně připomenouti, že mnozí badatelé (*Mendělějev, Amagat, Fuchs* a j.) našli úchylky od zákona Boyle-Mariottova nejen za tlaků velmi vysokých, ale i za tlaků menších jedné atmosféry. Zvláště budiž vytčena *Bohrem* (1886) nalezená a od těch dob častěji zkoumaná anomalie u kyslíku za tlaku 0·70 *mm* nastávající, kde se jeví přímo skok objemu. Přičítává se tvoření ozonu.

Jako zákon Boyle-Mariottův, tak jest approximací též zákon Gay-Lussacův a tudíž i zákon spojený. Z plynů skutečných řídí se zákonem spojeným některé jen málo přibližně, některé více, některé téměř úplně. Vzhledem k tomu tvoříme si pojem plynu *dokonalého* (analogicky jako kapaliny dokonalé), a pravíme, že plynem takovým byl by ten, který by se přesně řídil spojeným zákonem. Tím nabývá zákon tento povahy *definitorické*; neboť jím se *definuje* plyn dokonalý čili ideálný. Pro plyny skutečné dlužno pak zákon spojený ve zvláštní rovnici stavojevnou přiměřeně skutečnosti přizpůsobiti *).

§ 349. **Stereometr.**

Zákona Boyle-Mariottova použil způsobem zajímavým *Horace Say*, (důstojník francouzský, professor polytechnické školy v Paříži), sestrojiv (již roku 1797) apparát, stereometr neb též volumenometr zvaný, k tomu zvláštnímu účelu, aby se dal určiti objem střelného prachu a tím jeho hmota specifická bez ponoření do vody. Nejjednodušší jeho formu znázorňuje obr. 267. Nádoba skleněná, formy zvonovité, kteráž se dá nahoře deskou dobře přibroušenou uzavříti, přechází dole v trubici, jež má dvojí dělení, jedno délkové (*mm*), druhé objemové (cm^3). Trubice tato vkládá se až po zvonovitou nádobu do stojaté, válcovité, nahoře poněkud rozšířené nádoby, do níž se naleje rtuť. Manipulace jest následující.

Obr. 267.



Obr. 268.

*) Viz *Thermiku*, pag. 147 a násled., 1908.

Stroj se vnoří do rtuti až po nullový bod dělení; na to se zvonovitá nádoba deskou neprodyšně zakryje. Tím se uzavře v ní vzduch objemu V, jehož napětí jest dáno tlakem barometrickým b. Na to se stroj zvedne; rtuť vystoupí zároveň do výše h a vzduch se roztáhne na objem $V + v$. Výška h se odečte na dělení délkovém, přírůstek objemu v na dělení objemovém. Dle zákona Boyle-Mariottova vyjádříme současné změny objemu a napětí vzduchu rovnicí

$$\frac{V}{V+v} = \frac{b-h}{b}$$

čili

$$\frac{V}{v} = \frac{b-h}{h}.$$

Při výškách rtuťových b a h jest předpokládána stejná teplota. Objem V se z rovnice dá počítati.

Vloží-li se pak do prostoru zvonce na mističku, jež tam stále zůstává, nějaká látka a provede-li se měření poznovu, vyjde objem vzduchu V' menší než dříve. Rozdíl $V - V'$ dává objem oné látky. Stanoví-li se vážením její hmota, lze snadno specifickou hmotu počítati (§ 301.).

Methody této užívá se u látek sypkých, zejména solí, po případě u látek v drobných kouskách, zrnkách předložených, u střelného prachu aneb konečně u látek takových, jež do žádné kapaliny vložiti se nesmí, u dřeva, hedvábí, vlny, konopí, nebo zase mouky, popela atd.

Stereometr zdokonalil *Kopp* (1840) a *Regnault* (1845). Modifikaci stroje pro účely laboratoře vhodnou ukazuje schematicky obr. 268. Jinou vhodnou modifikaci dal stroji prof. *V. Jelínek*; viz Časop. pro pěst. math. a fys. 15. pag. 119. 1886. Nejnovější a nejspolehlivější tvar, vhodný i pro větší rozdíly temperaturní, udal *L. Zehnder*. Drud. Ann. 15. 328. 1904. Kritické práce ukázaly ovšem, že výsledky stereometry zjednané jsou jen přibližně spolehlivé, poněvadž se vzduch na povrchu práškovitých neb sypkých látek zhušťuje.

Vývěvy.

§ 350. **Úvod historický.**

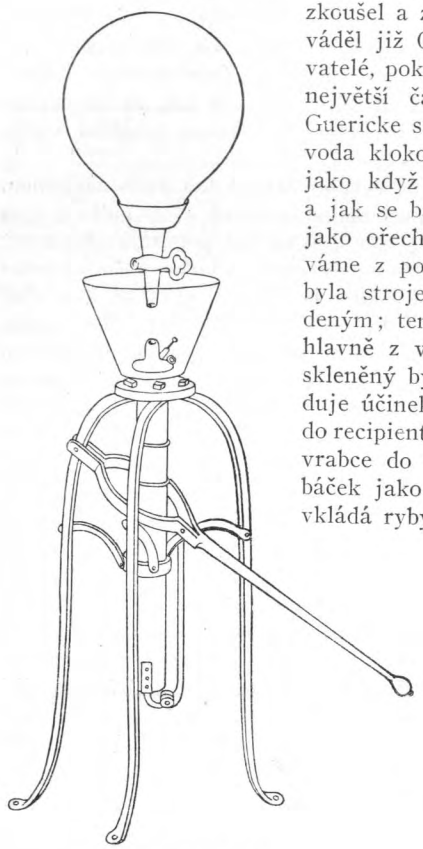
Vývěvy slouží k vyvětí, t. j. ke zřeďování plynu, zpravidla vzduchu, a to na základě jeho rozpínavosti. Vzduch, zaujímající daný prostor, rozšíří se do každého prostoru dalšího k onomu připojeného a zaujme tak objem větší než původně. Jeho hmota, vyjádřená součinem z objemu a hmoty specifické, zůstává při tom stálou. Srovnávajíce tudíž součin tento při objemu původním a zvětšeném, obdržíme rovnici, ze kteréž lze počítati, jak každým rozpětím vzduchu klesne jeho hmota specifická a tím i jeho hustota.

Jest zajímavo historicky konstatovati, že sestrojení první vývěvy se nestalo dojmem, jakýž způsobil objev tlaku vzduchu, nýbrž zcela samostatně popudem sporů filosofických o možnosti neb nemožnosti vakua. *Otto z Guericke* *) umínil si otázku rozřešiti pokusem a vakuum možno-li uskutečniti.

Jak se mu při tomto pokusu vedlo a jak ponenáhlu od zařízení primitivních postupoval k dokonalejším, až konečně cíle vytčeného dosáhl, vypisuje v díle svém »Experimenta nova« obšírně a upřímně a nezamlčuje i mnohý nezdar, s jakým se často potkal. Otto z Guericke pokládal vzduch za něco hmotného, velmi jemného, co jest rozpínání a roztahování schopno; domnívá se, že jest to jakýsi výron vodstva a země a jiných hmot. Vzduchoprázdnotu snažil se uskutečniti tak, že obyčejnou pumpou čerpal vodu ze sudu; avšak vzduch sykotem pronikal všemi skulinami dřeva do prostoru vyčerpáním vody vznikajícího. Dal tedy menší soudek, z něhož vodu táhl, do většího, který byl vodou naplněn, aby vzduch do onoho soudku vniknouti nemohl; za to však vnikala tam voda. Vida již, že dřevo není materiálem k takovým pokusům vhodným, dal sestrojiti velkou dutou kouli měděnou. Čerpání vzduchu šlo s počátku snadno, ale při postupujícím zředění vždy nesnadněji, tak že dva silní mužové měli co dělat, aby píst utáhli. Když již se zdálo, že vakua dosaženo, tu náhle s velikým třeskotem ke zděšení všech koule tlakem vzduchu byla smáčknuta, »jako se rukou smáčkne šat anebo jako by byla s nejvyšší věže prudkým pádem vržena«. Dal tedy Guericke zhotoviti novou kouli, pevnější, rozkázav zároveň, aby s větší péčí, než se stalo u koule prvé, byla pravidelně do tvaru kulového vypracována. Koule, opatřená kohoutem, byla pak poznovu připojena k pumpě a vyčerpána. Pokus se podařil; zředění pokročilo tak daleko, že z pumpy žádný vzduch dále na venek se nevyrážel. Když pak se otevřel kohout, tu vzduch takovou silou se hnal do vnitř, že se zdálo, »jako by člověka blízko stojícího chtěl s sebou strhnouti; a bylo nebezpečné, dáti ruku k otvoru, aby vzduchem nebyla do něho vtlačena«. Když takovýmto způsobem možnost evakuace byla dokázána, pomýšlel Guericke na to, aby místo improvisovaného přístroje na čerpání vzduchu dal sestrojiti apparát definitivní. Tak vznikla (1652) první vývěva, kterou v hlavních rysech znázorňuje obr. 269. Poznáváme na ní hlavní části každé vývěvy, válec s pístem, a na konci válce ventil, kterým se vzduch z da-

*) *Otto z Guericke*, narozen 1602 v Magdeburku, studoval práva v Jeně, Lipsku a j., mathematiku a mechaniku v Leidenu, konal mnohé cesty ve Francii i v Anglii. R. 1627 stal se radním svého rodného města, a když 1631 Tilly město zpustošil, byl ve službách švédských jako vrchní inženýr v Erfurtu do roku 1636. Vrátiv se do Magdeburka stal se purkmistrem 1646, ve kterémžto úřadě setrval do roku 1681; přesídlil pak do Hamburku, kdež roku 1686 zemřel. Guericke byl muž znamenitý, osvědčiv v dobách velmi zlých osobní statečnost, mužnou rozvahu i diplomatickou zručnost, čímž prokázal svému rodnému městu služby velmi platné. O jeho pracích vědeckých, na něž věnoval 20.000 tolarů, summu na ten čas velikou, podává zprávu: »Experimenta nova, ut vocantur Magdeburgica, de vacuo spatio« (v manuskriptu ukončen r. 1663). Amstelodami 1672, spis zajímavý jak textem tak illustracemi.

ného prostoru vyčerpávaný vyráží ven. Touto vývěvou prováděl pak Guericke pokusy další, mnohé s překvapující originálností. Dal především zhotoviti skleněný »recipient« — tohoto pojmenování užívá již Guericke — totiž skleněný ballon s otvorem tak velikým, aby do vnitř mohl rozmanité předměty vkládati, jako ptáky, ryby, myši, také svíčky, hodinky atd. Bylo zajisté »vakuum« něco nového, dosud jen tušeného; studovati jeho účinky na všem možném bylo tak přirozeno, jako se za našich dnů účinek paprsků Roentgenových zkoušel a zkouší na všem možném. A tak prováděl již Guericke, a ještě více jeho pokračovatelé, pokusy velmi četné a rozmanité, z nichž největší část dosud při vyučování opakujeme. Guericke s úžasem pozoruje, s jakou prudkostí voda klokotem vniká do ballonu vyčerpaného, jako když pramen ze země prudce vyráží, a jak se ballon vodou plní až na jakýsi zbytek, jako ořech veliký, kde zůstal vzduch. Poznáváme z pokusu tohoto, že vývěva Guerickova byla strojem mechanicky velmi dobře provedeným; tento zbytek vzduchu pocházel zajisté hlavně z vody samé, tak že velký recipient skleněný byl vyčerpán dokonale. Guericke studuje účinek hoření na vzduch, vkládá hodinky do recipientu a konstatuje ubývání zvuku, vkládá vrabce do vakua a pozoruje, jak otvírá zobáček jako by lapal vzduch až konečně hyne, vkládá ryby a vidí, jak jich těla se nabubřují.



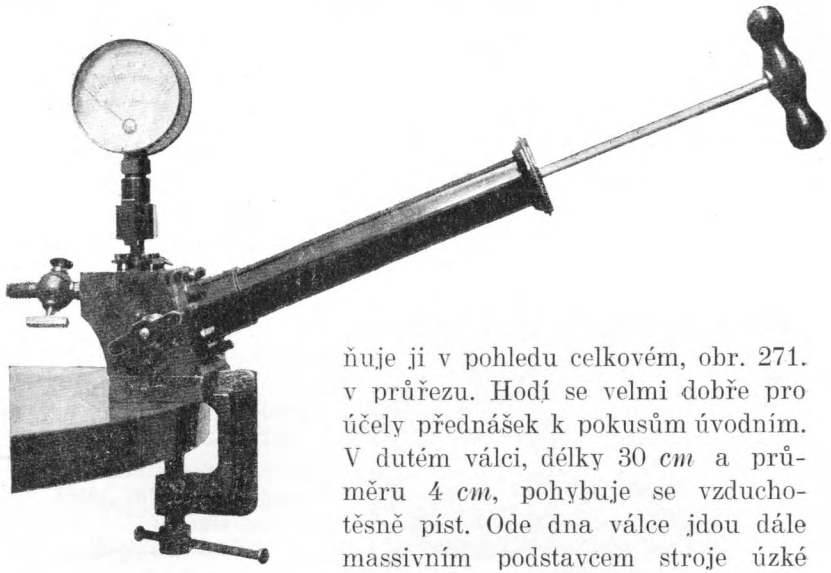
Obr. 269.

Ukazuje též váhu a tlak vzduchu. Dutá koule, v níž vzduch vyčerpán, stává se lehčí. Tlakem vzduchu se zvedá do veliké výše sloupec kapaliny v trubicích do sebe sestavených a nahoře širší nádobou končících, kdež malá figurka ukazovala i změny tlaku vzduchového. Všechny tyto a jiné pokusy vrcholí v těch, jež Guericke za příležitosti říšského sněmu v Řezně 1654 předváděl shromážděným tam mocnářům a velmožům, při čemž, aby dosáhl účinků co možná frappantních, experimentoval (jakož to byla vůbec jeho záliba) ve velkém. Ukazuje, jak 50 až 100 silných mužů, táhnoucích za provazy, nemůže odolati tlaku vzduchu, působícího na píst nádoby, ze které se vzduch náhle (spojením s jinou již evakuovanou nádobou) vyssaje. Velká závaží zvedají se podobně tlakem vzduchu. Konečně 16 koní, po 8 na obou stranách, táhne na velikých polokoulích, jež jenom tlakem vzduchu k sobě přiléhají, až konečně s velkým třeskotem od sebe se odtrhnou.

V nových směrech badání fysikálního, jež vynalezením vývěvy byly objeveny, pracoval dále zejména *Robert Boyle* a pak *Ch. Huygens*, který však sám podával více návod, dle něhož pracoval jeho žák *Denis Papin*. Učiněny četné zkušenosti nové, jež ovšem též vedly k postupnému zdokonalování vývěvy samé.

§ 351. **Vývěva příruční.**

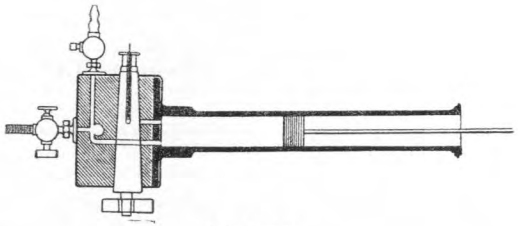
V úpravě zcela podobné, jakou měla první vývěva Otty z Guericke, sestrojena jest vývěva příruční. Obr. 270. znázorňuje ji v pohledu celkovém, obr. 271. v průřezu. Hodí se velmi dobře pro účely přednášek k pokusům úvodním. V dutém válci, délky 30 *cm* a průměru 4 *cm*, pohybuje se vzduchotěsně píst. Ode dna válce jdou dále massivním podstavcem stroje úzké vzduchovody až ke dvěma (násadci opatřeným) kohoutům; mimo to jest ještě třetí velký kohout umístěn hned za válcem. Z oněch dvou malých kohoutů připojí se jeden silnostěnnou kaučukovou trubicí k prostoru, z něhož se vzduch má čerpati.



Obr. 270.

Prostor tento jest dán tak zvaným recipientem, zvonovitou nádobou, dole rovinně přibroušenou, jež se postaví na skleněnou silnou desku, připevněnou na zvláštní stolek, který k oné příruční vývěvě jakožto doplňující část náleží. Úpravu nejvhodnější tohoto stolku znázorňuje obr. 272. Nohou stolku jest silnostěnná mosazná trubice, ústící nahoře mosaznou a skleněnou deskou až do prostoru recipientem krytého. K této trubici jest připojen dvojí násadec, ústící do vzduchu, a za každým jest kohout, kterým se vzduchovod otvírá neb zavírá. Kaučuková trubice od vývěvy připojí se k hořejšímu násadci. Při čerpání vzduchu uzavře se kohout dolejší a

otevře hořejší. Když zředění se provedlo, zavře se kohout hořejší a trubice kaučuková může se po případě sejmouti. Chce-li se pak vzduch do prostoru recipientem uzavřeného vpouštěti, otvírá se kohout dolejší, při čemž spojení s vývěvou se nemusí přerušovati.



Obr. 271.

Když se vývěvou pracuje, může se k výkladu manipulovati oběma kohouty malými. S počátku se otevře kohout k recipientu, zavře kohout do vzduchu a píst se táhne vzhůru; tím se vzduch z recipientu čerpá. Na to se zavře kohout k recipientu, otevře kohout do vzduchu, píst se tlačí dolů; tím se vzduch z válce vytlačí na venek. Potom se manipulace opakuje. Každým novým vytažením pístu stupňuje se zředění.

Obr. 272.

Avšak manipulace dvěma kohouty byla by nepohodlná. Vskutku jest jakožto manipulační míněn onen velký kohout třetí, který je umístěn hned za válcem. Kohout tento má dvojí vrtání. Při postavení podél válce, jak zkrátka řekneme, jde kohoutem spojení k recipientu; při postavení však na příč, od předešlého o 90° rozdílném, jde spojení ventilem na venek. Když tedy se píst ve válci táhne vzhůru, postaví se kohout podél válce, když se píst tlačí dolů, postaví se na příč, tak že vzduch z válce se ventilem vytlačí na venek. Onen druhý menší kohout může pak míti kaučukem spojení k nějakému manometru, na němž postup zřeďování lze sledovati. Účinný prostor vývěvy — po odečtení objemu pístu — činí $\frac{1}{3}$ litru.

§ 352. **Postup zřeďování.**

Vzduch, obsažený pod recipientem objemu R, rozšíří se při každém vytažení pístu ještě do prostoru V válce a zaujme objem celkový $R + V$; následkem toho zmenší se jeho původní specifická hmota S_0 postupně na S_1, S_2, S_3, . . ., S . Úhrnná jeho hmota, t. j. součin z objemu a specifické hmoty, zůstává při každém rozpětí z objemu R na objem $R + V$ stálou. Formulujíce tuto větu, obdržíme rovnice:

$$\begin{aligned} RS_0 &= (R + V)\, S_1 \\ RS_1 &= (R + V)\, S_2 \\ RS_2 &= (R + V)\, S_3 \\ &\vdots \\ RS_{n-1} &= (R + V)\, S_n . \end{aligned}$$

Jak patrno, rozhoduje o postupu zředění koefficient

$$\frac{R}{R + V} = \alpha .$$

Zaveďme na místě specifické hmoty S_0, S_1, S_2 . . ., ke zkrácení hustoty $1, \delta_1, \delta_2, \ldots$ dle rovnice

$$\frac{S}{S_0} = \delta$$

vztahujíce tak hustotu δ na vzduch, jak původně byl.

Tak obdržíme rovnice přehlednější

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta_1 \\ \alpha\delta_1 &= \delta_2 \\ \alpha\delta_2 &= \delta_3 \\ &\vdots \\ \alpha\delta_{n-1} &= \delta_n . \end{aligned}$$

Z těchto rovnic obdržíme, znásobíce je vespolek, jednoduše

$$\alpha^n = \delta_n .$$

Avšak výsledek tento, dle něhož by hustoty klesaly řadou geometrickou, jest vzhledem ke skutečnosti jenom approximací. Předpokládá totiž, že se vzduch při doražení pístu úplně na venek vypudí. Vskutku však zůstává vždy jistý zbytek v prostoru tak zvaném škodlivém, objemu v, a zbytek tento má specifickou hmotu S_0 stejnou jako vzduch okolní.

Hmota vS_0 tohoto vzduchu přistupuje po každé ke vzduchu již zředěnému, který se má z recipientu R rozepnouti do válce V.

Proto dlužno rovnice hořejší doplniti tímto additivním množstvím vS_0 vzduchu ze škodlivého prostoru a tudíž psáti je takto:

$$\begin{aligned} RS_0 + vS_0 &= (R+V)\,S_1 \\ RS_1 + vS_0 &= (R+V)\,S_2 \\ RS_2 + vS_0 &= (R+V)\,S_3 \\ &\vdots \\ RS_{n-1} + vS_0 &= (R+V)\,S_n . \end{aligned}$$

Dle toho rozhoduje vedle koefficientu α ještě jiný β, a oba jsou určeny obdobně vzorci

$$\frac{R}{R+V} = \alpha, \qquad \frac{v}{R+V} = \beta .$$

Zavedeme-li pak opět hustoty δ, obdržíme přehledné rovnice

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \delta_1 \\ \alpha\delta_1 + \beta &= \delta_2 \\ \alpha\delta_2 + \beta &= \delta_3 \\ &\vdots \quad\; \vdots \\ \alpha\delta_{n-1} + \beta &= \delta_n . \end{aligned}$$

Z těchto odvodíme rovnici závěrečnou, když násobíme rovnice, jak po sobě jdou, koefficienty

$$\alpha^{n-1}, \quad \alpha^{n-2}, \quad \alpha^{n-3}, \ldots \alpha, \quad 1$$

a sečteme. Tak obdržíme

$$\alpha^n + \beta\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) = \delta_n$$

čili

$$\alpha^n + \beta\,\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \delta_n .$$

Poněvadž pak jest

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{v}{V},$$

vyjde konečně

$$\alpha^n + \frac{v}{V}\,(1-\alpha^n) = \delta_n .$$

Kdyby tedy nebylo prostoru škodlivého, pokračovalo by zředění stále až k hodnotě

$$\delta_n = 0.$$

Účinkem škodlivého prostoru pokračuje však zředění volněji a blíží se mezní hodnotě

$$\delta_n = \frac{v}{V},$$

přes kterou zředění převésti nelze.

§ 353. **Příklady početní.**

Jasný názor o významu rovnic v předešlém § odvozených zjedná se provedením výpočtu číselného pro dané konkretní případy; výpočet tento jest velice snadný, když se užije rovnic v té formě, jak v předešlém odstavci byly odvozeny, při čemž se, jde-li o postup zředění, počítá rekurrentně ještě rychleji než dle rovnic závěrečných.

Chtějíce na př. studovati, jak zředění pokračuje, volme

$$R = V, \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Tabulka následující ukazuje výsledek počtu pro případy

$$\frac{v}{V} = 0, \quad \tfrac{1}{1000}, \quad \tfrac{1}{100}, \quad \tfrac{1}{10}$$

$$\beta = 0, \quad 0{\cdot}0005, \quad 0{\cdot}0050, \quad 0{\cdot}0500.$$

Postup zředění δ účinkem škodlivého prostoru v v případu $R = V$.

$\alpha = \frac{1}{2}$	$\frac{v}{V} = 0$	$\frac{v}{V} = \frac{1}{1000}$	$\frac{v}{V} = \frac{1}{100}$	$\frac{v}{V} = \frac{1}{10}$
1	0·5000	0·5005	0·5050	0·5500
2	0·2500	0·2508	0·2575	0·3250
3	0·1250	0·1259	0·1338	0·2125
4	0·0625	0·0634	0·0719	0·1563
5	0·0312	0·0322	0·0409	0·1281
6	0·0156	0·0166	0·0255	0·1141
7	0·0078	0·0088	0·0177	0·1070
8	0·0039	0·0049	0·0139	0·1036
9	0·0020	0·0030	0·0119	0·1018
10	0·0010	0·0020	0·0110	0·1009

Z čísel těchto jest patrno, jak v prvních stadiích zřeďování škodlivý prostor, není-li příliš veliký, jako na př. $\frac{v}{V} = \frac{1}{10}$, jen velmi málo jest na závadu; teprve když již značného zředění dosaženo, brání škodlivý prostor postupu dalšímu. Jak se znenáhla dostavuje limita, jest viděti zřetelně. Bez škodlivého prostoru by po 10. vyčerpání klesla hustota již na $\delta = \frac{1}{1000}$, což by příslušelo tlaku asi $\frac{2}{3}$ *mm*; při škodlivém prostoru $\frac{v}{V} = \frac{1}{1000}$ jest dosaženo zředění jen polovičního, při $\frac{v}{V} = \frac{1}{100}$ již se dostavuje mezní hodnota $\delta = \frac{1}{100}$.

Ještě poučnější jest počítati, po kolikátém vytažení pístu dosáhne se při daném poměru $\frac{R}{V}$ určitého zředění, na př. $\delta = \frac{1}{1000}$, což při obyčejných vývěvách stačí, a to bez škodlivého prostoru a se škodlivým prostorem. Výpočet se děje z rovnice v odstavci předešlém odvozené

$$\alpha^n \left(1 - \frac{v}{V}\right) = \delta_n - \frac{v}{V}.$$

Výsledek počtu pro některé význačné případy jest obsažen v tabulce následující, ve kteréž číslo n ovšem dlužno zaokrouhliti na nejbližší celé.

Účinek škodlivého prostoru na dosažení zředění $\delta_n = \frac{1}{1000}$.

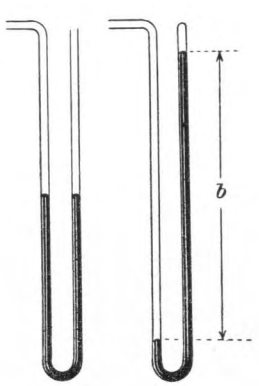
$\frac{R}{V}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10	
α	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{11}$	*Škodlivý prostor*
n	2·9	3·9	6·3	10·0	17·0	37·9	72·5	$v = 0$
n	3·2	4·2	6·9	11·0	18·7	41·7	79·7	$v = \frac{1}{2000} V$
n	3·3	4·5	7·3	11·6	19·7	43·9	84·0	$v = \frac{1}{1500} V$
n	3·8	5·1	8·4	13·3	22·7	50·5	96·6	$v = \frac{1}{1200} V$

Tabulka tato mluví zvlášť poučně. Ukazuje především, jak prostory velké se poměrně jen po dlouhé práci dají na udanou míru zřediti; ukazuje však zároveň, že účinek škodlivého prostoru není tak veliký, jak se za to všeobecně mívá; je-li škodlivý prostor jen poněkud menší než ta limitní jeho hodnota, kteráž by vytknutému zředění odpovídala — v našem případě $\frac{v}{V} = \frac{1}{1000}$ — pak není, zejména jde-li o zředění prostorů menších, práce příliš větší, než kdyby škodlivého prostoru vůbec nebylo. Proto když se u vývěv pozoruje, že zředění volně pokračuje a že nelze docíliti zředění pod 1 *mm* tlaku, není toho příčinou škodlivý prostor, nýbrž nejčastěji vnikání vzduchu následkem nedostatečného uzavírání kohoutů, záklopek, následkem nedoléhání pístu ke stěnám válce a pod.

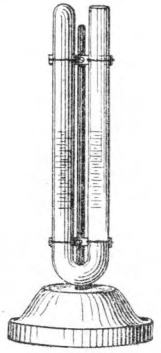
§ 354. **Manometry.**

Stupeň zředění, jehož se vývěvou docílilo, lze posouditi, manometry *); udávají zbývající napětí vzduchu sloupcem rtuťovým. Ve svém provedení jsou dvojího způsobu. Má-li manometr citlivě ukázati malé rozdíly tlakové oproti vzduchu atmosférickému, tudíž slabé zředění, jest druhé jeho rameno otevřené (obr. 273. *a*); má-li naproti tomu citlivě ukázati, mnoho-li ještě do úplného vakua schází, tedy má-li se ho užívati při zředění velmi značném, jest druhé rameno zavřené a vzduch jest z něho vypuzen (obr. 273. *b*). Při vývěvách užívá se vždy manometrů tohoto druhého způsobu. Jsou to pak vlastně dvouramenné barometry, a je-li jich délka přiměřená, lze na nich sledovati postup zřeďování od samého počátku; obyčejně bývají však zkrácené, poněvadž mají udati, kdy zředění se již blíží vakuu. Takový zkrácený manometr znázorňuje obr. 274. Jest montován na zvláštním stativku, aby se dal kdekoli pod recipient umístiti; dělení millimetrové jest naneseno přímo na sklo.

*) Z řeckého $\mu\alpha\nu\acute{o}\varsigma$ řídký, oproti $\delta\alpha\sigma\acute{\upsilon}\varsigma$ hustý.



a) *b*)
Obr. 273.



Obr. 274.

U manometrů takových dlužno vždy pamatovati, aby se do evakuovaného prostoru, kde jsou postaveny, nevpustil vzduch náhle; neboť rtuť, prudce dorazíc na sklo, mohla by sklo proraziti. Aby se náraz zmírnil, bývá manometr blízko zatavenému konci zúžen, tak že se rtuť ve svém prudkém pohybu zúženinou poněkud mírní. Místo rtuťových lze též užívati manometrů kovových po způsobu aneroidů.

§ 355. **Vývěvy dvojčinné.**

Vývěva příruční, popsaná v § 351., jest vývěvou, jak říkáme jednočinnou; čerpá totiž vzduch jen, když se píst táhne vzhůru. Uspořádání takové není výhodným.

Při postupujícím čerpání stává se tlak vzduchu vnějšího značně větším než jest tlak zbývajícího vzduchu vnitřního; pře-

bytek tlakový musí experimentátor, čerpaje vzduch dále, překonávati.

Tím vzrůstá značně práce, kterou již se zřetelem ke tření pohyb pístu vyžaduje. Když již zředění značně pokročilo, činí onen přebytek tlakový megadynu na každý cm^2 povrchu pístu.

Při vývěvě příruční, v odstavci 351. popsané, jejíž píst má 4 *cm* v průměru a tudíž $12\frac{1}{2}$ cm^2 v průřezu, činí tlak ten 12 megadyn. Při práci touto vývěvou musí tudíž experimentátor tak se namáhati, jako by zvedal závaží do výše rovnající se délce pístu, a to závaží, jehož velikost během čerpání stoupá až do 12 kilogrammů. Za práci tu jest malou náhradou, že při zpátečním pohybu pístu tlak vzduchu pomáhá.

Vzhledem k této vadě byly záhy sestrojeny vývěvy tak zvané dvojčinné. Starší vývěvy tohoto druhu vznikly sloučením dvou vývěv jednočinných v přístroj jednoduchý. Písty pohybovaly se pákou ve spojení s ozubeným kolem a ozubenými tyčemi tak, že, když jeden píst se táhl vzhůru, tlačil se druhý dolů; tím se tlak vzduchu vnějšího vyrovnával. Novější vývěvy dvojčinné mají jen jediný válec s jedním pístem. Vývěva pracuje, t. j. čerpá vzduch i když jde píst nahoru i když jde dolů; následkem toho, je-li již jistého zředění dosaženo, nepůsobí na píst vůbec tlak vzduchu, poněvadž na obou stranách pístu jest vzduch zředěn. Zbývá pak jenom překonávati tření.

Než vývěvou dvojčinnou docílí se ještě důležité výhody jiné. Poznali jsme, že zředění, jež lze vývěvou obdržeti, má své meze. Je-li V objem válce, v objem prostoru škodlivého, nelze docíliti menší hustoty než *lim.* $\delta = \frac{v}{V}$, totiž takové, kdy vzduch zředěný, zaujímající objem V válce, po stlačení svém až do škodlivého prostoru má hustotu vzduchu atmosférického. Tu pak lze vývěvy dvojčinné vhodnou záměnou vzduchovodů použíti tak, aby jednou, jde-li na př. píst nahoru, čerpala vzduch z recipientu, po druhé však, jde-li píst dolů, aby čerpala vzduch z onoho škodlivého prostoru. Dorazí-li pak píst dolů, zůstává ve škodlivém prostoru vzduch již zředěný, hustoty $\frac{v}{V}$, následkem čehož limita hustoty se sníží na $\frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V} = \left(\frac{v}{V}\right)^2$, tudíž velmi značně.

Dle toho pracuje se vývěvou dvojčinnou nejprve tak, aby při pohybu nahoru i dolů čerpala vzduch z recipientu; když pak zředění již značného stupně — málo millimetrů tlaku — dosáhlo, zamění se spojení vzduchovodní tak, aby vývěva si čerpala svůj vlastní škodlivý prostor.

Práce zřeďování jest pak ovšem dvojnásobná. Aby měla žádoucí účinek, dlužno pamatovati na dokonalé vysušení vzduchu. Záměna spojení vzduchovodů provede se zvláštním vhodně vrtaným kohoutem (Babinet).

§ 356. **Vývěva Deleuilova.**

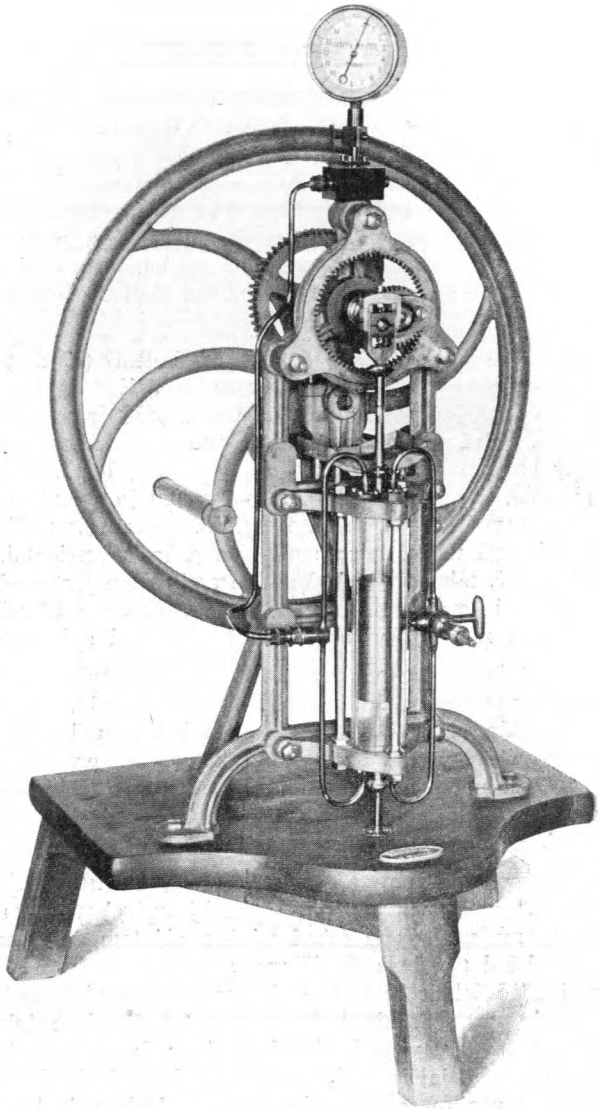
Jde-li při pracích fysikálních nebo chemických o docílení zředění mírného, koná služby velmi dobré vývěva Deleuilova *), kterou znázorňuje obr. 275. Ve válci skleněném, délky 35 *cm* a průměru 6 *cm*, pohybuje se píst mosazný, kolem rýhovaný, zaujímající polovici celého válce; účinný prostor válce činí tudíž $^1/_2$ litru. Píst tento nepřiléhá však těsně ke sklu, nýbrž pohybuje se volně; mezi pístem a sklem zůstává totiž mezera asi půl desetiny millimetru. V četných rýhách pístu drží se bublinky vzduchové a ty hlavně brání, že vzduch z jedné části válce neproudí kolem pístu do druhé.

Při práci točí se velkým setrvačným kolem (obr. 275.). Tento pohyb točný přeměňuje se v pohyb nahoru a dolů, jak je třeba píst vésti, pomocí ozubených kol, mechanickým uspořádáním, jehož základ jest následující. Když se po vnitřním obvodu kružnice valí kruh menší, opisuje každý bod jeho obvodu křivku tak zvanou hypocykloidu. V tom zvláštním případu, kdy poloměr kruhu se valícího je poloviční proti poloměru kružnice pevné, stává se tato křivka přímkou, totiž průměrem kružnice pevné. Jeden bod opisuje při tom průměr vertikální. K tomuto bodu připojí se tyč, táhnoucí píst. Valícím se kruhem jest ozubená deska, jejíž zuby zasahují do vnitřních zubů kola pevného, a jejíž střed při otáčení velkého kola setrvačného obíhá, čímž se valení způsobuje.

Vývěva má jediný kohout rozváděcí; jinak pracuje jen záklopkami. Pozoruhodná jest souměrnost v uspořádání vzduchovodů. Jak vývěva pracuje, jak se záklopky otvírají a zavírají a jak proudí při tom vzduch, jest objasněno výkresy (obr. 277.) dle skutečnosti provedenými, a to, když jde píst nahoru (*a*) i když jde dolů (*b*). Pohyb vzduchu zhuštěného jest při tom naznačen šipkami opeřenými, pohyb vzduchu zředěného šipkami prostými.

Kohout hlavní má po způsobu kohoutu Babinetova dvojí vrtání. Otočí-li se o 90°, vejde v platnost malý úzký vzduchovod na pravo ve výkresu naznačený, následkem čehož vývěva při tom postavení kohoutu jinak pracuje. Před tím byla dvojčinnou; vzduch se čerpal i když šel píst nahoru i když šel dolů; změnu situace po otočení hlavního kohoutu o 90° znázorňuje obr. 278. Jde-li píst nahoru (*a*), čerpá se dolejší stranou hořejší škodlivý prostor; vzduch cirkuluje shora úzkou vzduchovodní trubičkou, kohoutem a dolejší trubicí vzduchovodnou dolů. Když se pohyb pístu obrátí (*b*), uzavře se dole záklopkou vzduchovod, který by vedl

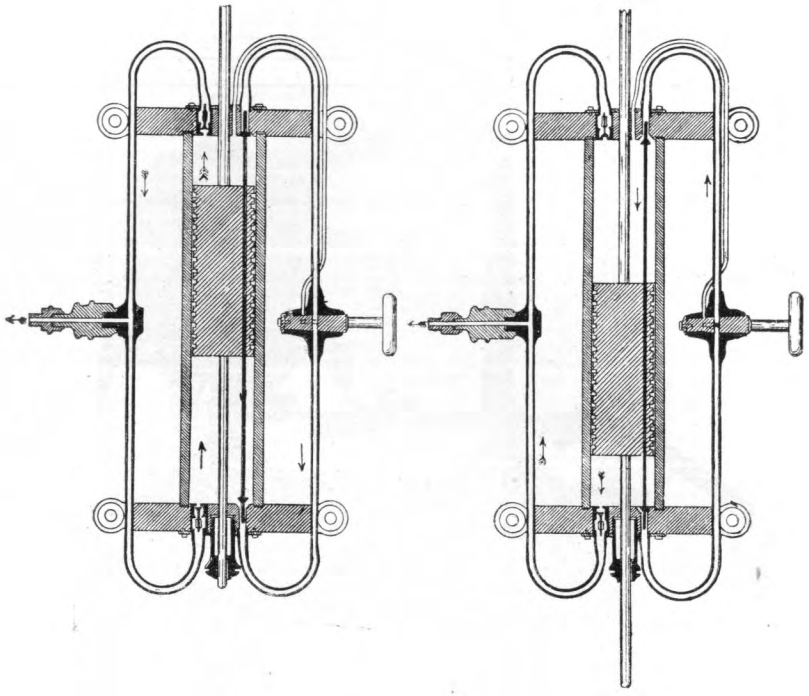
*) Jean A. Deleuil *1825, chef závodu mechanického v Paříži. Vývěvu svou nazval »pompe à piston libre« a podal o ní zprávu v Ann. chim. & phys. 5. 1865 a Comptes rendus, 64, 1867. Vývěva jest tedy již stará, nicméně ani dnes není zastaralou, konajíc v laboratoři služby stále dobré.



Obr. 275.

Obr. 276.

k onomu škodlivému prostoru a vývěva čerpá hořejškem vzduch z recipientu, totiž oním širším vzduchovodem skrze hlavní kohout. Zařízení tohoto kohoutu, jakož i úpravu záklopek znázorňuje obr. 279.

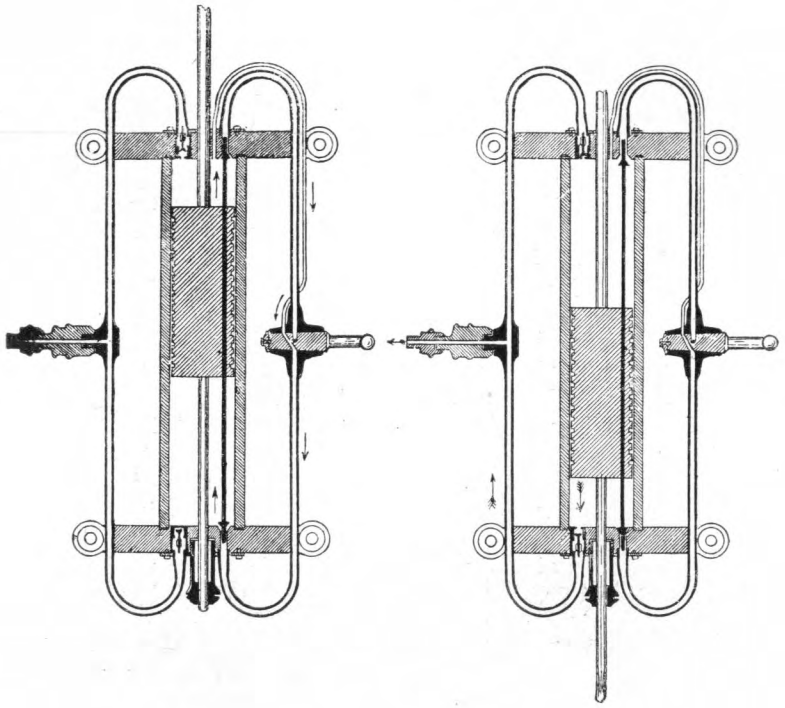


a) *b)*

Obr. 277.

Hlavní kohout má násadec k nastrčení silnostěnné kaučukové trubice, jež se pak připojí ke vzduchovodům zvláštního stolu pokusného, v obr. 276. znázorněného. Zde jest postaven manometr, který lze pro sebe kohoutem zvláštním uzavříti neb otevříti; zde má své místo recipient na stolku; zde pak rozvětvuje se ještě vzduchovod ve dvě větve, na jichž koncích jsou kohouty; může se tedy jednak ještě nějaký další přístroj k evakuování určený kaučukem připojiti, jednak do prostorů již vyčerpaných vzduch vpouštěti.

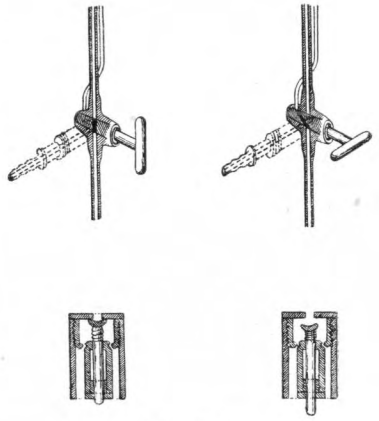
Aby se u recipientu docílilo uzavírání neprodyšného, jest obyčejem, přibroušený dolejší jeho kraj, jímž ke skleněné desce přiléhá, mazati tukem a pod. Pohodlnější jest, rozestříti na skleněnou desku kaučukový věnec, a na tento volně recipient postaviti. Když se začíná čerpati, přitlačí se tlakem vzduchu recipient na kaučuk neprodyšně. Naopak, když se vzduch zase vpustí, lze recipient bez obtíží sejmouti; je-li dole na krajích namazán, lne pevně ke sklu a jeho uvolnění (pohybem otáčivým) vyžaduje pak opatrnosti, aby se při odtržení nepoškodil.



a) *b)*

Obr. 278.

Vývěva Deleuilova má píst volný; v tom spočívá, nehledíc k celkové úpravě velmi účelné a přehledné, její zvláštnost a její přednost; neboť píst takový nemusí býti mazán, nemusí tudíž býti často čištěn a vývěva jest každou chvíli k práci pohotově. Pro účely laboratoře má výhoda tato význam veliký; neboť rozebírání a čištění vývěv jest prací obtížnou a choulostivou. K dosažení velmi značného zředění není vývěva ta určena.



Obr. 279.

§ 357. Vývěva Staudingerova.

Vývěva v obr. 280. znázorněná (v. Gehren, 1884) náleží k největším, jež pro účely laboratoří fysikálních byly sestrojeny. Mosazný, uvnitř cínovaný válec jest 32 *cm* dlouhý a má 10 *cm* v průměru. K jeho stěnám doléhá těsně píst 6 *cm* dlouhý, složený z desk kožených, jež jsou sešroubovány mezi deskami mosaznými. Účinný prostor válce činí tedy 2 litry. Tyč železná, kterou se píst táhne, jest po celé délce provrtaná, rovněž tak píst, až do prostřed, kdež ve směru radiálním vrtání ve třech směrech pokračuje k perifericképu žlábku uprostřed pístu do kola soustruhovanému. Zařízením tímto jest možno z venčí nalévati čistý minerální olej, který stéká dolů až do onoho žlábku, kdež se rozlévá kolem, čímž se píst po celém obvodu stejnoměrně maže. Pod válcem a nad ním jsou massivní kusy mosazné, v nichž jsou zasazeny kohouty a v nichž jsou provedeny vzduchovody; pokračování vzduchovodů jde trubicí mosaznou, vedle pístu rovnoběžně upevněnou.

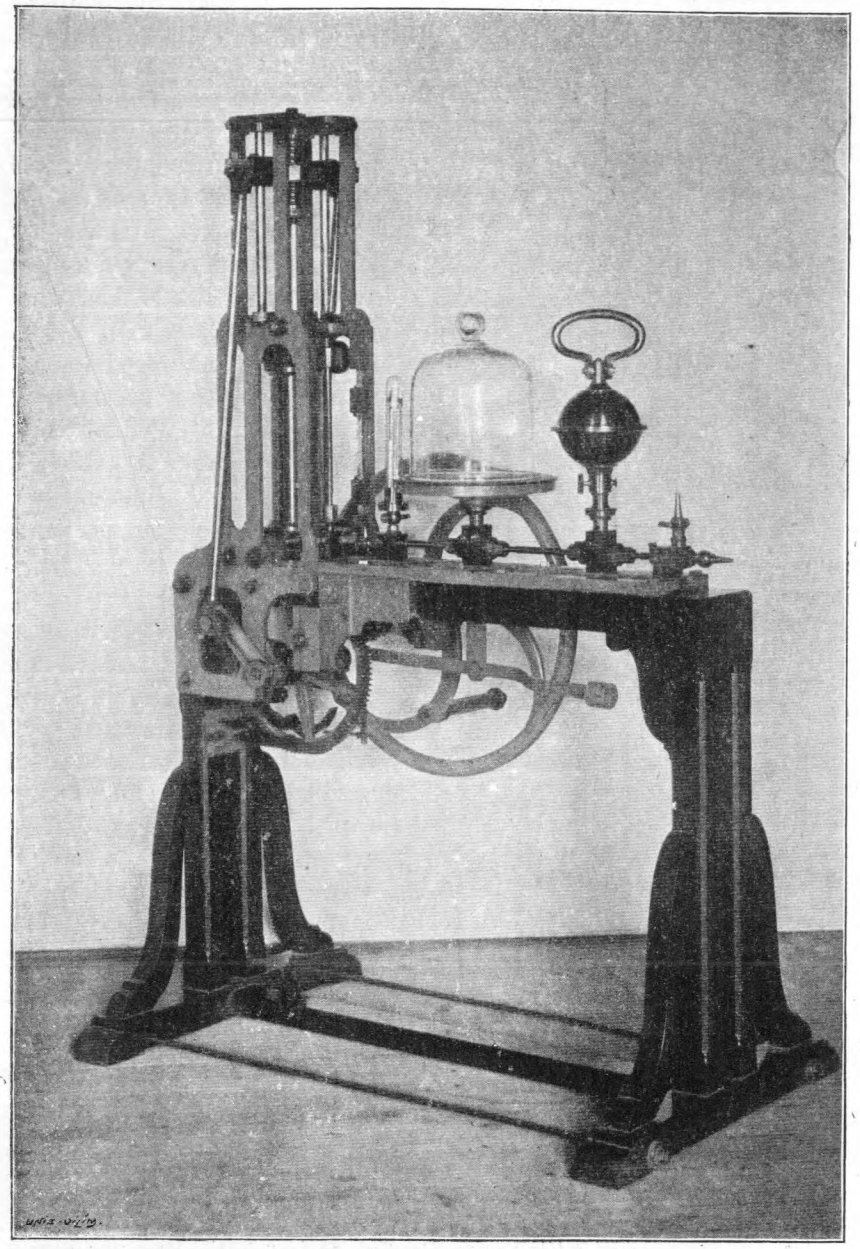
Vývěva uvádí se v činnost velkým setrvačným kolem. S tímto se otáčí zároveň malé ozubené kolo, jež zase uvádí v pohyb ozubené kolo střední. Na ose tohoto kola jsou upevněna dvě ramena, jedno v předu a druhé v zadu, ramena tato nesou dlouhé železné tyče, jež jdou nahoru k příčce, na níž uprostřed jest nasazena tyč od pístu. Tato příčka má vedení na dvou vertikálně stojících tyčích železných. Tímto zařízením převádí se tedy otáčivý pohyb onoho středního ozubeného kola v pohyb pístu nahoru a dolů. Při tomto pohybu přichází píst do dvou bodů obratu, t. j. do dvou nejzazších poloh, nahoře a dole, kde se pohyb obrací. Při obratu nastává zvláštním mechanismem otočení vzduchovodných kohoutů o 90°. Kohouty mají totiž na vnějším kraji oblouk ozubený, do něhož zasahá tyč svislá, rovněž ozubená, která dole je spojena s jedním ramenem páky. Pohybem onoho středního kola dostává v bodech obratu páka ta popud nahoru neb dolů, tak že se ono otočení kohoutů provede.

Tam, kde postranní trubice mosazná je zasazena do dolejšího massivního podstavce, jest umístěn ještě jeden kohout, Babinetův, který při práci v jisté poloze zůstává. Může však míti polohu dvojí. V prvé poloze pracuje vývěva dvojčinně. Když se však Babinetův kohout o 90° otočí, pracuje vývěva jednočinně, ale vyčerpává svůj škodlivý prostor. Jde-li píst nahoru, čerpá vývěva vzduch z recipientu; pakli jde píst dolů, čerpá vývěva horem svůj škodlivý prostor dolejší, tak že při doražení pístu dolů jest v tomto prostoru vzduch již zředěný.

Vzduchovody, vedoucí k manometru, ke stolkům pro recipienty, ke kohoutům s násadci, jsou vedeny vesměs v kovu a vše jest montováno na velkém dřevěném stativu. Stolky na recipienty jsou dva: každý lze však odšroubovati a na jeho místo přišroubovati jiné přístroje k evakuaci určené, jako na př. Děvínské polokoule.

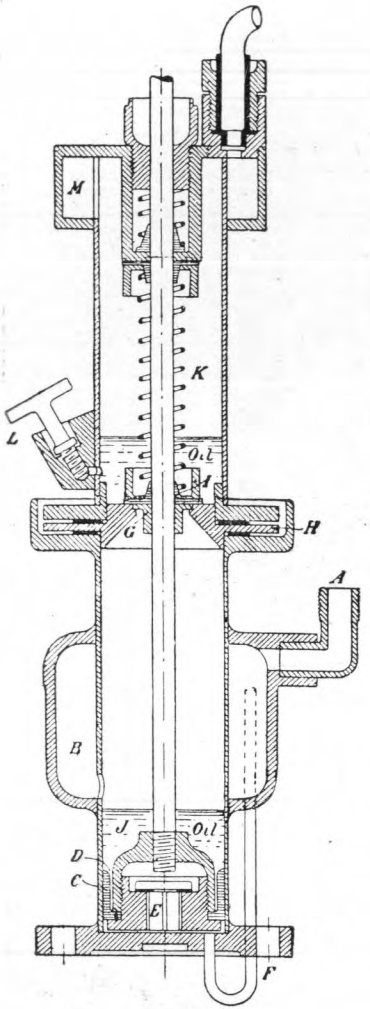
§ 358. Vývěva olejová.

Vývěva Staudingerova, v předešlém odstavci popsaná, čerpá vzduch v prvním stadiu práce velmi rychle, avšak k docílení značného vakua nestačí. V posledních letech rozšířila se z Anglie vý-



Obr. 280.

věva, pojmenovaná Geryk *), při níž se s prospěchem užívá dobrého minerálního oleje k těsnění pístu a docílení snadnější jeho pohyblivosti. Sestrojuje se jako vývěva jednočinná i jako dvojčinná. Obr. 281. ukazuje v průřezu, jak je zařízen válec a píst u vývěvy dvojčinné **). Válec má polovici dolejší a hořejší; obě jsou od sebe vzduchotěsně oddělené přehradou *H*, kterou prochází vzduchotěsně tyč s pístem. Tento jest ke kovovému válci utěsněn koženým prstencem *C*, který jest nahoře od pístu oddělen volným úzkým prostorem *D*. Nad přehradou *H* i nad pístem *I* jest olej. V přehradě i v pístu jsou však ventily *G* a *E*, jimiž může olej a ovšem i vzduch se protlačovati. Válec má v dolejší polovici kovový dutý obal *B*, do něhož ústí vzduchovod *A* od recipientu. Obal jest otvorem při *B* spojen s válcem. Do něho ústí též malá trubice dole ohnutá, jež vychází od prostoru pod pístem a jež se počítá ke vzduchovodům. Obr. 281. ukazuje píst, jak dosedl až dolů. Když se táhne nahoru, ssaje onou trubicí vzduch z recipientu, ale zároveň, jakmile přešel přes otvor *B*, tlačí vzduch i s olejem nahoru před sebou, otevře pak ventil *G* a vytlačí jím vzduch i část oleje nad přehradu *H* do oleje tam se nalézajícího. Když pak jde dolů, uzavře se ventil *G* tak, že se nad pístem utvoří vakuum, do něhož se rozšíří vzduch z recipientu,

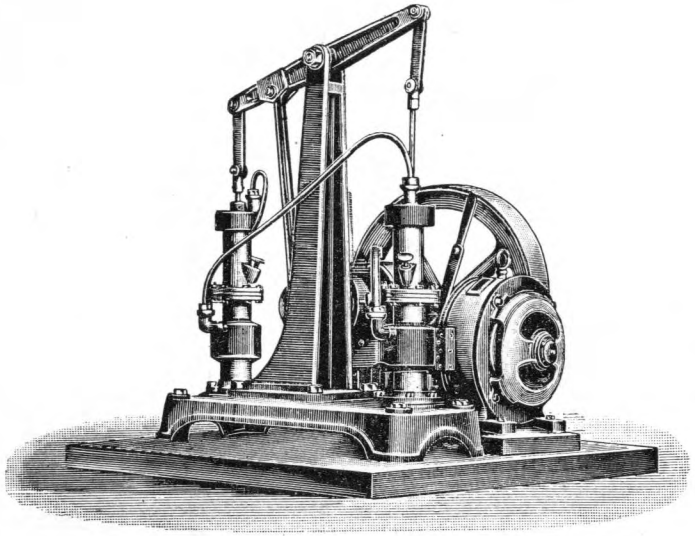


Obr. 281.

*) V Anglii vyrábí ji firma Pulsometer Engineering Co, Ltd., Nine Elms Iron Works, London, S. W. dle patentu Fleussova, v Německu firma Pfeiffer, Wetzlar. Obšírně pojednal o této vývěvě Dr. *Jul. Suchý* v XXVI. Programu c. k. v. gymnasia v Příbrami 1905.

**) Obrazec je kopie z pojednání anglického.

jakmile píst přejde přes otvor u *B* a dosedne dolů. Ventil *E* vyzvedne se jen, pokud zředění v recipientu nepokročilo až alespoň na 3 *mm Hg*; pak již zůstává nečinným. Ona malá, dole ohnutá trubička má jen ten účel, aby při pohybu pístu z nejnižší polohy nahoru se pod pístem neutvořilo vakuum, čímž by pohyb pístu byl obtížným vzhledem ke tlaku vzduchu, který by shora na píst působil.



Obr. 282.

Zajímavo jest ještě poznamenati, jak se dociluje toho, aby nad pístem i nad přehradou se vždy nalézalo vhodné množství oleje. Ventil *G* vyzvedne se pístem do určité výšky $6^1/_2$ *mm*; olej vytlačuje se nad přehradu, kdež steče s tamějším olejem dohromady. Když pak píst se začne pohybovati dolů, zůstane s počátku onen ventil *G* ještě otevřen; může tedy olej téci shora dolů na píst a zde se hromaditi. Teprve, když píst sejde o $6^1/_2$ *mm* dolů, zavře se ventil. Nad pístem jest pak vrstva oleje $6^1/_2$ *mm* vysoká; zbytek oleje zůstal nad přehradou.

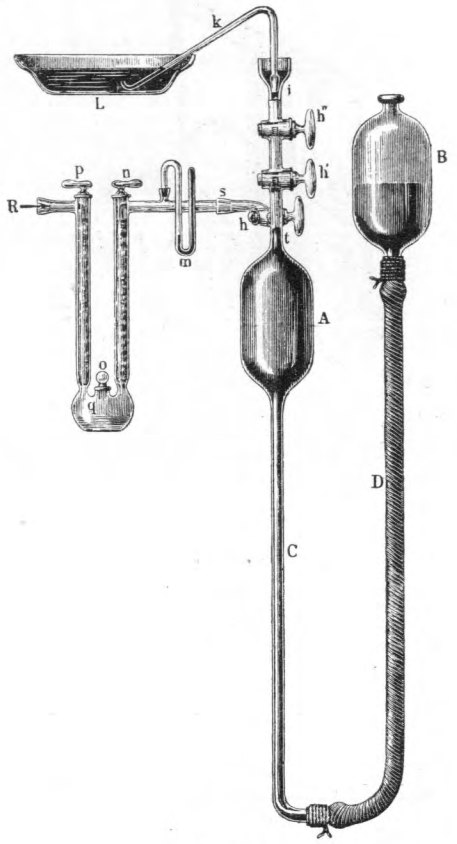
Vývěvy dvojčinné této soustavy mají dva takové válce, jako jest v obr. 281. znázorněn; píst jde pak v jednom na př. nahoru, v druhém současně dolů. Vzduch se čerpá, jde-li píst dolů, čerpá se tedy střídavě jedním i druhým válcem, kteréž oba jsou spojeny jakoby vedle sebe. Může však se státi záměna, aby byly spojeny za sebou. Pak čerpá píst v jednom válci vzduch nad přehradou válce druhého. V tomto druhém vytlačuje se vzduch do prostoru již zředěného, lze tedy spíše poslední zbytky vzduchu vypuditi a tak docíliti zředění značného.

V činnost uvádějí se tyto vývěvy buď rukou, zařízením pákovým nebo setrvačným kolem, anebo elektromotory (obr. 282.).

Pravidlem jest pohybovati píst zvolna, aby olej, který se otvorem *L* do válce nalévá, mohl zde volně při pohybu pístu cirkulovati.

§ 359. **Vývěvy rtuťové.**

Vývěva rtuťová v té původní úpravě, kterou jí dal *Geissler* *), jest úplné analogon jednočinné vývěvy, popsané v § 351. Pohyb-



Obr. 283.

livým pístem je zde rtuť. Jako se píst pošinuje v mosazném válci, tak se rtuť pošinuje ve skleněné, na vhodném místě rozšířené trubici. Úpravu vývěvy znázorňuje schematicky obr. 283. *C* jest ona

*) *Jindřich Geissler* (1815—1879), hotovitel fysikálních přístrojů skleněných, s počátku v různých městech universitních, v Německu a v Hollandsku, od r. 1854 v Bonnu. Svou dovedností vynikl nad jiné a zjednal si o vědu skutečné zásluhy, pro které byl r. 1868 jmenován čestným doktorem university v Bonnu.

silnostěnná, vertikálně postavená skleněná trubice, jež se v *A* rozšiřuje v nádobu. K této jsou připojeny — zcela jako u vývěvy v § 351. — kohouty, jež vedou jednak na venek (*h'*, *h''*), jednak k recipientu (*h*). Pošinování rtuti znamená zde zvedání a spouštění, a to dle zákonů hydrostatických pomocí druhé nádoby *B*, která jest s trubicí *C* spojena silnostěnnou kaučukovou *) trubicí *D*, a kterou lze vhodným způsobem zvedati a spouštěti. Při zvedání žene se rtuť trubicí *C* do nádoby *A* a vypuzuje vzduch, při čemž jest kohout *h* zavřen, kohout *h'* i *h''* otevřen. Při spouštění neklesá rtuť v nádobě *A* hned dolů, poněvadž se tlakem vzduchu ve výši příslušné udržuje. Teprve když hladina rtuti v *B* se sníží o tolik, mnoho-li odpovídá tlaku atmosférickému, začíná rtuť pod kohout *h'* klesati. Také v tom jest analogie s vývěvou v § 351., kde se též při zpátečním pošinování pístu musí překonati tlak atmosférický. Když se pak kohout *h* otevře, proudí vzduch z recipientu do vakua (Torricelliho), kteréž se vytvořuje v nádobě *A* nad rtutí. Zvedání těžké rtuti v nádobě *B* usnadňuje se na stativu vhodným mechanickým zařízením. Dva kohouty *h'* a *h''* mají ten účel, aby se poslední zbytky vzduchu vypuzovaly nikoli přímo ven, kde působí tlak vzduchu, nýbrž nejprve do prostoru mezi oběma kohouty *h'* a *h''*. Manometr *m* udává, mnoho-li ještě do úplného vakua chybí.

Důležito jest, aby vzduch z recipientu vyssávaný byl úplně suchým. K tomu slouží vysušovač *q*, naplněný koncentrovanou kyselinou sírovou; k zvětšení povrchu bývají v obou ramenech *p* a *n* malé kousky pemzové nebo malé kuličky skleněné, namočené v koncentrované kyselině sírové. Ještě lépe se jako vysušovadlo osvědčuje kysličník fosforečný (P_2O_5).

Vývěva Geisslerova byla postupem doby v některých jednotlivostech zlepšována; tak na př. byly kohouty (skleněné nebo též ocelové) vhodně vrtány, nebo byly nahrazeny ventily, také se kombinovala s vývěvami obyčejnými, předčerpávajícími a pod.

Vadou vývěvy Geisslerovy jsou četné její kohouty; i kdyby sebe lépe byly zabroušeny, přece nedrží vzduchotěsně, zejména, když se jimi stále manipuluje. Mazadlo, jímž musí býti natřeny, během doby se prachem znečišťuje, tvrdne, a musí býti častěji obnovováno. Rtuť, kteráž hlavním kohoutem prochází a zde se s mazadlem stýká, též se znečišťuje.

§ 360. **Vývěva Töplerova v úpravě Bessel-Hagenově.**

Vad, kteréž byly vytčeny u vývěvy Geisslerovy, jest prosta vývěva, kterou r. 1862 sestrojil *A. Töpler*, při níž není žádných ko-

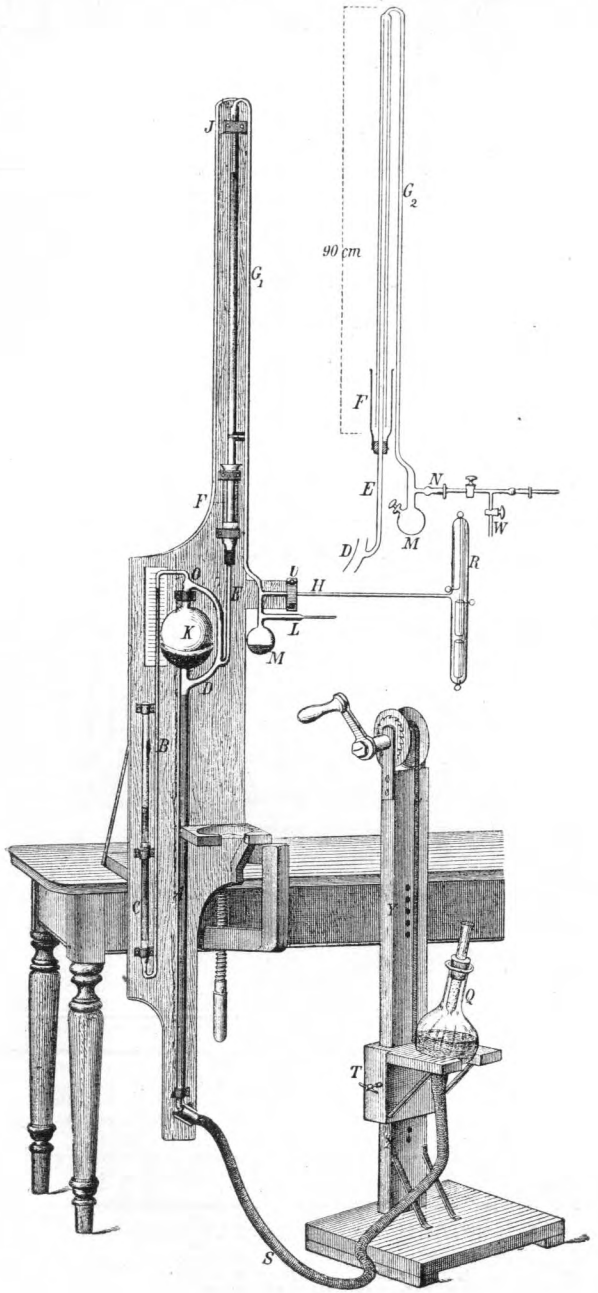
*) Kaučuk nesmí býti vulkanisován, t. j. nesmí obsahovati žádné síry. Nejlepší je kaučuk černý. Trubice se obaluje dobrým plátnem, kterým se kaučuku dodává náležité pevnosti při dokonalé ohebnosti.

houtů. Tuto vývěvu zdokonalil *Neesen* (1878), zejména pak *Bessel-Hagen* (1881), v jehož úpravě se rychle rozšířila do fysikálních laboratoří v době, kdy k pokusům elektrickým dobrá vývěva zvlášť byla vítána *).

Jest znázorněna v obr. 284. Poznáváme z obrazce hlavní část vývěvy Geisslerovy; trubici A' s nádobou K kulovitě rozšířenou, k níž dole, v nejnižším bodě, je v sádře připevněna trubice z černého kaučuku, obalená plátnem, s baňkovitou nádobou Q. V obou trubicích a nádobách jest rtuť. Tato úprava jest tedy zcela taková jako u vývěvy Geisslerovy. Avšak vypuzování vzduchu na jedné straně a vyssávání vzduchu z recipientu na druhé neděje se skrze kohouty, nýbrž závěrem rtuťovým. Především vzduch, který na venek se má vytlačiti, uniká skleněnou, dostatečně dlouhou trubicí BC, jež jest při O k nádobě přitavená a pak dvojnásob dolů a nahoru ohnuta. Když se nádoba Q zvedá, pak rtuť, vytlačujíc vzduch, přeteče konečně do této trubice a vystupuje v širší části její C. Když se zase nádoba Q spouští, pak rtuť, tlačena okolním vzduchem, teče sice v trubici CB s počátku zpět, ale jen tak dlouho, až rozdíl výškový v části C a B se vyrovná sloupci barometrickému. Pak tedy rtuť zde zůstává a tvoří pro vytlačovaný vzduch závěr. Na druhé straně, když se v nádobě K začíná tvořiti vakuum, vniká sem vzduch z recipientu trubicí E, jež jest přitavena dole k vedlejší větvi DO. Trubice E stoupá však jenom až k výšce asi jednoho metru; přes ni jest překlopena trubice širší G_1G_2, která vlastně vede k recipientu, a která v té širší překlopené části zasahá do nádobky F, jež jest k trubici E kaučukem těsně připojena a rtutí naplněna. Jakmile se v recipientu začíná vzduch zřeďovati, vstupuje rtuť tlakem vzduchu vnějšího z nádobky F do prostoru mezi trubicí E a širší, přes ni překlopenou G_1, a tvoří tak opět závěr proti okolnímu vzduchu, který svým tlakem nemůže rtuť na větší výšku vytlačiti, než jak odpovídá tlaku barometrickému.

Dvojí tento barometrický závěr rtuťový tvoří vlastní podstatu vývěvy Töpler-Hagenovy. Pravíme barometrický; neboť vskutku, když již vyčerpání pokročilo až téměř k vakuu, jest na straně jedné, při BC, barometr dvojramenný, na straně druhé, při FG, barometr nádobkový. Vlastní recipient, (na př. trubice Crookesova, nebo lampa Röntgenova), jest přitaven ke vzduchovodní trubičce H, k níž stranou se připojuje baňka M s pentoxydem fosforu na vysušování vzduchu.

*) *Ernst Bessel-Hagen*, Ueber eine neue Form der Töpler'schen Quecksilberluftpumpe etc. Wiedemann Ann. 12, pag. 425, 1881. Obr. 284. jest reprodukcí z tohoto původního pojednání. Podnětem k této práci byly pokusy velice zajímavé, jež nedlouho před tím uveřejnil *Crookes* ve Phil. Trans. 165, pag. 519, 1875.

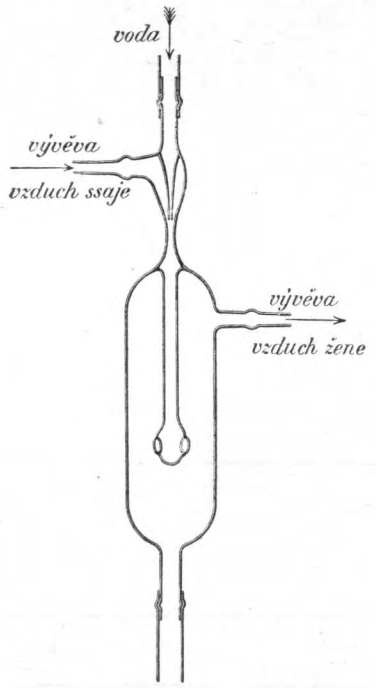


Obr. 284.

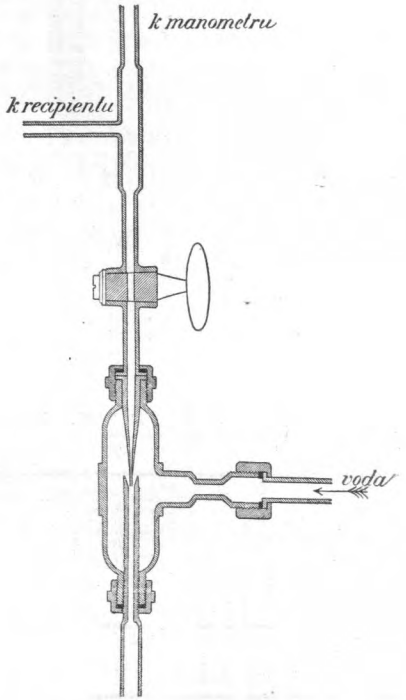
Při práci dlužno si počínati opatrně, zejména při začátku zřeďování a pak při konci. S počátku vzduch, rozpínaje se do nádoby K, vhání rtuť, jež jest v trubici DO, s velkou prudkostí proti otvoru O, tak že zde jest nebezpečí, že by rtuť mohla sklo rozbíti. Když naopak jest již vakua téměř docíleno, dlužno nádobu Q zvedati málo a opatrně, aby rtuť, stoupajíc do nádoby K, při náhlém zúžení nevrazila do trubice O prudce a nerozbila výměnu. Dle bublinky vzduchové, která ještě zůstává a do trubice B se vhání, lze posouditi, v jakém stupni jest již vzduch v recipientu zředěn *).

§ 361. **Výměny vodní.**

Výměny vodní jsou velmi pohodlné, poněvadž nevyžadují spolučinnosti experimentátora. Jich základ jest hydrodynamický. Obrazce



Obr. 285.



Obr. 286.

285. a 286. dle skutečnosti rýsované znázorňují působnost výměn vodních na dvou určitých příkladech. Výměna obr. 285. jest celá skleněná. Voda

*) V letech, kdy objev Röntgenův zaměstnával celý fysikální svět, bylo ve fysikálním ústavu č. university, Klementinum, pracováno dvěma výměnami Töpler-Hagenovými po mnoho let a osvědčily se velmi dobře.

proudíc z vodovodu vstupuje do prostoru, do něhož ústí trubička od recipientu; zde se proud vodní náhle zúžuje, ale hned za otvorem této trubičky rozšiřuje. Výměnou čerpá se velké množství vzduchu, čerpá se tedy rychle, ale dociluje se zředění jen mírného. Výměna obr. 286. (Arzberger-Zulkowski) jest celá kovová. Také zde vstupuje voda, z vodovodu prudce proudíc, do komory, do níž sahá ssací trubička od recipientu; při jejím ústí do trubice odpadní nastává náhlé zúžení a pak zase rozšíření trubice vodovodní; tato jest na šroubu, čímž lze její postavení regulovati. Výměnou se čerpá vzduch volně, ale dociluje se zředění značného. Tlak nasycených vodních par zbývá zde ovšem vždycky.

Na podobném principu jest založena rtuťová výměna soustavy *Sprenglovy* (1873), kterouž zdokonalil *Gimingham* (1877), a kteréž užíval zejména *Crookes* při svých pokusech elektrických. Daleko podstatněji zlepšil ji však *Kahlbaum* (1894), jenž jí užil při svých pokusech o destillaci kovů ve vakuu. Spojí-li se s výměnou vodní, lze z ní učiniti výměnu automatickou; tak docílil Kahlbaum zředění až na tlak 0·000003 *mm* rtuti.

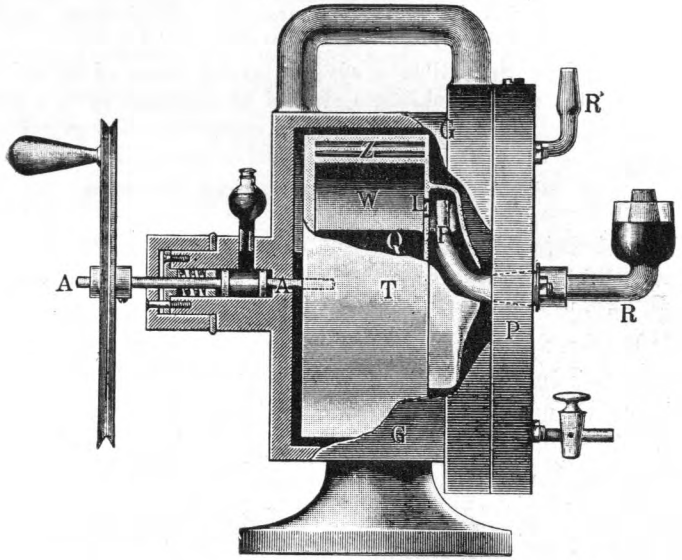
§ 362. **Rotační rtuťová výměna Gaedeho.**

V posledních letech byly sestrojeny výměny rtuťové rotační. Takovou udal *W. Kaufmann* *). Jinou úpravu, velmi vhodnou, založenou na obrácení principu gasometrického, dal své výměně *Gaede* **). Obr. 287. znázorňuje tuto výměnu v průřezu podélném (podél osy rotační), obr. 288. v průřezu příčném (kolmo k ose rotační). Výměna má tvar kruhového, dutého válce z litiny pracovaného, který je dole opatřen kulatou nohou, nahoře pak k přenášení silným uchem. Na přední straně jest válec uzavřen silnou skleněnou deskou P. Touto prostupuje vzduchotěsně trubice R, jež vede k recipientu, pak trubice R', jež se spojí s pomocnou výměnou, a trubice dolejší s kohoutem, sloužící k vypouštění rtuti. U novějšího tvaru jest trubice dolejší a R' vsazena nahoře a dole do železného válce, aby se mnohým vrtáním sklo neseslabovalo. Uvnitř výměny, která jest něco více než z polovice naplněná rtutí, otáčí se porculánový buben T, upevněný na ose AA, která jde na venek ke kolu a jest rtutí proti vnikání okolního vzduchu dovnitř výměny utěsněna. Tento porculánový buben, mající rovněž tvar kulového válce, jest

*) *Walter Kaufmann*, prof. na universitě v Bonnu. Viz Zeitsch. f. Instrumentenkunde, 25., pag. 129, 1905. Výměna spotřebuje málo rtuti, jest však ve své hlavní, skleněné části velice křehká, tak že manipulace vyžaduje největší opatrnosti.

**) *W. Gaede* ve Freiburku v Br. O své výměně přednášel na 77. sjezdu něm. přírodozpytců v Meranu. Referát o tom přinesl Physik. Zeitschrift 6., pag. 758, 1905. Od té doby byla výměna zdokonalena. Popis zde udaný jest dle exempláře, který jest ve sbírkách fysik. ústavu. Vyobrazení jsou kopie z pojednání původních od Gaedeho.

vlastní, význačnou částí vývěvy Gaedeho. Uvnitř jest rozdělen stěnami zvláštního tvaru, který v obr. 288. jest znázorněn, ve tři komory *), jež se uzavírají teprve prostřednictvím rtuti, ale jinak i vespolek i s částí vnější jsou v souvislosti. Každá z těch komor má otvor L, který ústí do zvláštní válcovité předkomory, vytvořené porculánovým, od bubnu odbočujícím, pláštěm, který zasahuje do rtuti ve způsobu, v obr. 288. znázorněném. Do této předkomory vede trubice R spojená s recipientem.

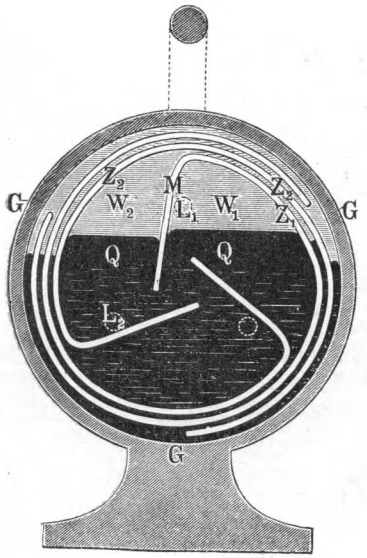


Obr. 287.

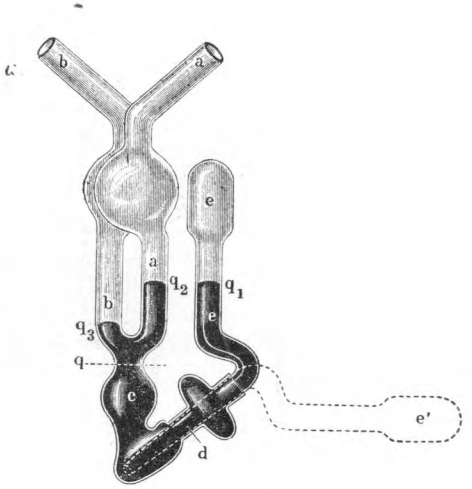
Práce začíná tím, že se pomocnou vývěvou, na př. vodní nebo i olejovou, která je připojena k vedení R', vnitřek vývěvy, jakož i recipient vyčerpá na tlak asi 10 *mm*. Pak začne experimentátor vnitřní buben zvolna otáčeti, a to ve smyslu opačném než ručičky hodinové. Při tom se stěny oněch tří komor střídavě ze rtuti vynořují a do rtuti vnořují, čímž se objem oněch komor mění. V obr. 288. znázorněna situace, kdy komora W_1 se ze rtuti právě vynořila; při tom se vytvořilo vakuum Torricelliho, do něhož otvorem L_1 vzduch z recipientu se rozpíná. Komora W_2 naproti tomu zapadá již do rtuti, vzduch, který z recipientu otvorem L_2 — nyní již do rtuti vno-

*) Původní konstrukce, z roku 1905, měla jen dvě komory.

řeným — se do ní rozšířil, stlačuje se a unikne v dalším postupu točení mezi stěnami Z_1 a Z_2 na venek do prostoru, z něhož se vývěvou pomocnou odčerpává. Komora třetí jest celá ve rtuti. Možno si tedy představiti, jak při volném otáčení bubnu každá ze tří komor se ze rtuti vynoří, jak se vytvoří vynořením prázdný a stále se zvětšující prostor, jak do něho otvorem proudí vzduch z recipientu, dokud tento otvor se nevnoří pod rtuť, jak potom dále komora se zmenšuje, vzduch v ní stlačuje a na venek mezi stěnami vypouští, kdež se odssává vývěvou pomocnou. Poněvadž pochod se stále opakuje, jest patrno, že evakuace recipientu stále pokračuje až do mezí



Obr. 288.



Obr. 289.

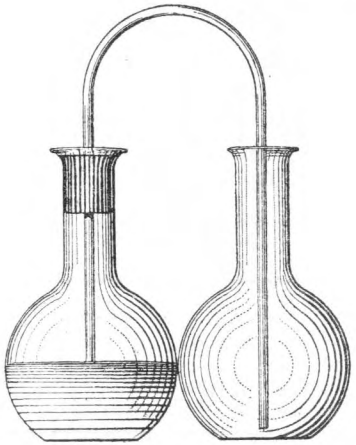
nejzazších. Při tom zůstává rtuť uvnitř bubnu i v předkomoře jen asi o 10 *mm* výše než venku, kde se čerpá vývěvou pomocnou; čím lépe tato čerpá, tím je ovšem rozdíl hladin menší. V tom právě spočívá výhoda této vývěvy pomocné, že rozměry bubnu mohou býti poměrně malé. Vývěva nepřevádí vzduch z recipientu do okolní atmosféry, nýbrž do prostoru již valně zředěného, tak že zředění, jehož jest již docíleno, stupňuje do mezí vůbec dosažitelných.

K vedení R a R' připojuje se kaučukem skleněný, manometrický přístroj, který dle původního modelu měl tvar znázorněný v obr. 289. Spojení jde od a k R, od b k R'. Proto udává

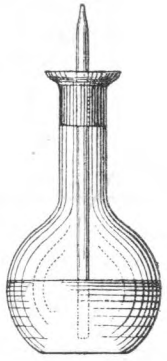
rozdíl q_3q_2 přetlak mezi vnitřkem a vnějškem bubnu. Část e obsahuje Torricelliho vakuum. Rozdíl q_2q_1 obou hladin rtuťových naznačuje, čeho ještě v recipientu do vakua se nedostává. Část e manometrického přístroje lze pootočením přivésti do polohy e'; tím rtuť steče níže až pod q a do recipientu se vpustí vzduch. Ten lze do recipientu také dostati tak, že se bubnem otáčí opačně. Uspořádání manometrického přístroje jest ostatně u novějších vývěv Gaedeho poněkud odchylné a připojuje se k R zábrusem, nikoli kaučukem. S přístrojem tím je též spojen prostor s kysličníkem fosforečným (P_2O_5), kterým se vzduch v recipientu vysušuje.

§ 363. Pokusy vývěvou.

Z velikého počtu pokusů, jež vývěvou lze konati, buďtež zde uvedeny některé zvlášť význačné. Jimi dokazuje se buď rozpínavost vzduchu, nebo jeho tlak, nebo jeho váha, po případě vůbec účinek zředěnosti vzduchu.



Obr. 290.



Obr. 291.

Rozpínavost vzduchu lze dokázati pokusy těmito:

1. Měchýř, částečně vzduchem naplněný a těsně uzavřený, nadýmá se pod recipientem rozpínavostí vzduchu vnitřního, když se vyčerpává vzduch vnější.

2. Dvě baňky, z nichž pravá jest prázdná, druhá asi do polovice rtutí naplněná, spojí se skleněnou, vhodně ohnutou, až na dno sahající trubičkou, která jde volně hrdlem baňky prvé, ale neprodyšně hrdlem

baňky druhé (obr. 290.). Vzduch, v této baňce uzavřený, rozpíná se pod recipientem vývěvy při čerpání vzduchu okolního a tlačí na rtuť, která pak přetéká do baňky prázdné. Když se zase vzduch do recipientu vpustí, přetéká větším tlakem tohoto vzduchu rtuť zpět do baňky, v níž byla původně.

3. Rozpínavostí vzduchu vytryskuje voda nebo rtuť z baňky Heronovy (obr. 291.). K pokusu hodí se vysoká válcovitá nádoba, jejíž hořejší kraj jest rovinně přibroušen. Baňka se do nádoby shora vloží, na to se na kraj nádoby napne kaučukový pásek, a na ten se položí železná deska, která má uprostřed železný násadec pro kaučukovou trubici na čerpání vzduchu. Jakmile se čerpati začne, přitlačí se tlakem vzduchu vnějšího deska neprodyšně na kaučukový pásek, při čemž vytryskování rtuti nebo vody začíná a pokračuje při rychlém čerpání do výše značné.

4. Dá-li se pod recipient nádoba s vodou, vystupují z ní při evakuaci četné bublinky vzduchové. Postaví-li se pod recipient vysoká kádinka, do níž se naleje něco málo mydlinové kapaliny zpěněné, vystupují bublinky při evakuaci šíříce se zároveň, tak že vzniká pěna vysoko až přes kraj kádinky se rozestírající, která citlivě reaguje na malé změny tlakové zředěného vzduchu. Naleje-li se do kádinky něco piva, tvoří se rovněž pěna vystupujícími bublinkami kysličníku uhličitého. Také ze dřeva na vodě plovoucího vyčerpává se vzduch, voda vniká do mezer dříve vzduchem naplněných, a dřevo vodou prosáklé, jež dříve na vodě plavalo, po případě klesá dolů, když se zase vzduch do recipientu vpustí.

5. Rozpínavostí vzduchu, obsaženého v pouku vajíčka, může se vytlačiti téměř celý obsah vajíčka, když se toto proti pouku provrtá, a pak na vhodném stojánku se skleničkou dá pod recipient (obr. 276.). Naopak, když se zase vzduch vpustí, vtlačí se obsah ze skleničky až na malý zbytek zpět do vajíčka.

Tlak vzduchu jeví se již na recipientu, který nelze od talíře odtrhnouti, jakmile se vývěvou jen málo začal vzduch vyčerpávati. Jinak jeví se tlak vzduchu účinky mohutnými, kdykoli se stává jednostranným.

6. Tlakem vzduchu proráží se s třeskotem pergamentový, těsně (navlhčením) napjatý papír. Tvar skleněné nádobky, k pokusu tomuto se hodící, znázorňuje obr. 272. Podobně skleněná deska, kterou se přikryje neprodyšně mosazný válec, roztříští se tlakem vzduchu, když se z válce vzduch vyčerpá. Deska i válec přikryje se suknem, aby se kusy skla nerozlétly.

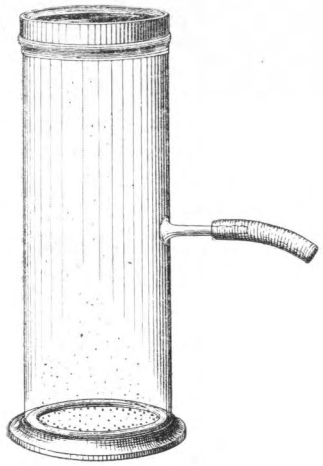
7. Zvláště pěkně ukazuje se tlak vzduchu rtuťovým deštěm. Úpravu pokusu nejvhodnější znázorňuje obr. 292. Vysoká skleněná nádoba, formy válcovité, nahoře otevřená, má asi uprostřed postranní skleněnou trubičku, na niž se nastrčí kaučuková trubice jdoucí k vývěvě. Nádoba přikryje se dřevem, jež jest pevně zapuštěno do železného kruhu, který dosedne na kaučukový pásek, napjatý na okraj nádoby. Na dřevo naleje se rtuti. Tlakem vzduchu, když se vývěvou začne čerpati, přitlačí se železný kruh neprodyšně na kaučuk, načež rtuť začíná pory dřeva se protlačovati, padajíc jako jemný déšť do nádoby. Tloušťka dřeva může při tom býti několik centimetrů. Někdy vzniká při pokusu tomto elektrisace třením rtuti

a dřeva, zvláště když se pokus jistým dřevem koná ponejprv; elektrisaci lze ukázati elektroskopem; po případě přeskakují i malé jiskřičky, když se ruka k železnému kruhu přiblíží.

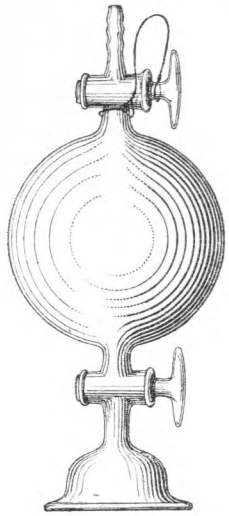
8. Tlak vzduchu ukazuje se dále Děvínskými polokoulemi (obr. 280.). Největší originální polokoule Guerickovy měly průměr 70 *cm*; tlak vzduchu při evakuaci rovnal se váze téměř 4 tun.

Váhu vzduchu lze ukázati dvojím způsobem.

9. Ballonek zatavený se vzduchem zavěsí se na vahadlo malých vážek a vyváží; když se vážky postaví pod prostranný recipient a když se vzduch vyčerpává, je viděti z porušení rovnováhy, jak se ballon stává těžším (dasymetr).



Obr. 292.



Obr. 293.

10. Obráceně experimentuje se tak, že se z podobného ballonu, který jest kohouty opatřen (obr. 293.), vyčerpá vzduch, načež se ballon zavěsí na váhy ve vzduchu a vyváží. Když se pak do ballonku vzduch vpustí, ukazuje se převaha. Jsou-li dva takové ballonky po ruce, lze oba vyčerpati, zavěsiti na váhy a vyvážiti; potom vpouští se vzduch střídavě do jednoho a do druhého. Stanovíme-li objem ballonku a jeho váhu za dvou známých tlaků vzduchu (ev. jiného plynu), můžeme počítati spec. hmotu vzduchu (plynu).

Četné pokusy jiné lze konati o účincích evakuace na hoření, dýchání, na vedení zvuku, na vypařování a var kapalin a pod. Sem náleží též účinky ssání vzduchu, jak se ho užívá u násosek, pipet, byret atd. Některé byrety mají kohout nahoře. Nemá-li kapalina, do byrety vstupující, přijíti v kontakt ani s kaučukem, ani s kohouty skleněnými,

jež nutno vždy poněkud namáznouti, manipuluje se kohoutem nahoře; kapalina udržuje se v byretě tlakem vzduchu; musí však otvor byrety býti silně zúžený, aby i po uzavření kohoutu hořejšího se netvořily kapky. Vyčerpáním vzduchu z dlouhé trubice skleněné lze ukázati, že ve vakuu padají tělesa lehká i těžká (na př. olověná kulička a peří) s urychlením stejným. Pokus, který se obyčejně obracením trubice provádí, lze učiniti poněkud přesnějším, když se užije vybavení elektromagnetického při spuštění tělísek (Puluj). Zejména však lze pokusy velmi četné a rozmanité konati o účincích evakuace na výboje elektrické, o čemž se obšírně jedná ve zvláštním oddílu nauky o elektřině. Technicky užívá se vývěv u parních strojů na kondensaci, k přípravě umělého ledu, při pneumatické poště, při impraegnování dřeva a j.

§ 364. **Vývěvy zhušťovací.**

Ve významu širším označujeme jakožto vývěvy též stroje, jichž účelem jest vzduch zhušťovati. Užívání téhož slova jest motivováno jednak tím, že základ vývěv zřeďovacích a zhušťovacích jest týž, jednak tím, že často téhož stroje můžeme užívati ke zřeďování i ke zhušťování.

Tak lze již vývěvy příruční, popsané v § 351., užívati ke zhušťování vzduchu. Třeba jen z manipulačního kohoutu, za pístem umístěného, vyndati ventil a pak obráceně kohout stavěti. Táhne-li se tedy píst vzhůru, postaví se kohout na přič, čímž se z okolí ssaje do válce vzduch; když se pak má píst tlačiti dolů, otočí se kohout o 90° podél, čímž se vzduch z válce tlačí do prostoru, v němž se má zhustiti. Připojení tohoto prostoru, na př. nějakého kovového ballonu, k vývěvě děje se cínovou trubicí, šroubem. Vývěva (obr. 270.) má v hořejší části manometr, na němž lze tlak v atmosférách (tak zvaných nových) odečísti.

Co o této vývěvě příruční řečeno, platí ve zvýšené míře o vývěvě Deleuilově. Též tato jest zároveň zřeďovací a zhušťovací. Užívá-li se jí jako zřeďovací, ssaje vzduch z recipientu a vytlačuje na venek. Má-li se jí užívati jako zhušťovací, ssaje vzduch přímo z okolí a vtlačuje do prostoru, kde se docíliti má zhuštění vzduchu. Proto jest (obr. 275.) od toho místa, kde by jinak se vzduch vyrážel ven, vedena cínová trubice nahoru k manometru, dle (nových) atmosfer graduovanému, na němž lze stoupání tlaku sledovati; odtud vede se dále cínová trubice, šrouby připojená, až k prostoru, v němž se vzduch má zhustiti. Vývěvou Deleuilovou lze docíliti zhuštění až 10 atmosfér.

Také vodní vývěva, v obr. 285. znázorněná, slouží zcela analogicky též ke zhušťování vzduchu. K cíli tomu sevře se odpadní kaučuková trubice tak, aby se odtok vody zmírnil; pak se vzduch, který vývěva přímo z okolí ssaje, hromadí v dolejší prostranné komoře, ze které se žene přitékající vodou ven. Lze tedy vývěvou touto docíliti stálého proudu vzduchového na př. ke dmuchání a pod.

§ 365. **Postup zhušťování.**

Podobnou úvahou, jako v § 352., seznáme postup zhušťování. Vzduch specifické hmoty S_0, obsažený ve válci objemu V, vtlačí se do recipientu objemu R, kdež specifická hmota postupně se zvětšuje. Platí tu rovnice:

$$\begin{aligned} VS_0 + RS_0 &= RS_1, \\ VS_0 + RS_1 &= RS_2, \\ VS_0 + RS_2 &= RS_3, \\ &\vdots \\ VS_0 + RS_{n-1} &= RS_n. \end{aligned}$$

Sečtouce rovnice tyto, obdržíme jednoduše

$$nVS_0 + RS_0 = RS_n.$$

Zavedeme-li podobně jako v § 352. hustotu vzduchu δ dle vzorce

$$\frac{S}{S_0} = \delta,$$

obdržíme

$$\delta_n - 1 = n \cdot \frac{V}{R}.$$

Při zřeďování, nehledě ke škodlivému prostoru, měli jsme analogicky

$$\delta_n - 0 = \left(\frac{R}{R+V}\right)^n,$$

kdež k docílení formální shody značí 0 hustotu vakua. Jest tudíž rozdíl δ_n — 1 měrou zhušťování, jako rozdíl δ_n — 0 měrou zřeďování. Poznáváme, že zřeďování pokračuje řadou *geometrickou*, tím účinněji, čím jest větší poměr $\frac{R}{R+V}$, naproti tomu že zhušťování postupuje řadou *arithmetickou*, tím účinněji, čím jest větší poměr $\frac{V}{R}$. Kdyby byl $V = R$, dosáhlo by se každou kompressí stoupání tlaku o jednu atmosféru.

Dle výkladu tohoto postupovalo by zhušťování stále a stále, do stupně libovolného. Ve skutečnosti tomu tak není. Jako zřeďování, tak má i zhušťování své meze následkem škodlivého prostoru. Když se píst doráží až dolů, nevtlačí se vzduch z celého objemu V

boty do recipientu; jistá část zůstává stlačena ve škodlivém prostoru v. Postup práce vyjádřují pak rovnice následující:

$$\begin{aligned} RS_0 + VS_0 &= (R+v)\,S_1, \\ RS_1 + VS_0 &= (R+v)\,S_2, \\ RS_2 + VS_0 &= (R+v)\,S_3, \\ &\vdots \\ RS_{n-1} + VS_0 &= (R+v)\,S_n. \end{aligned}$$

Dle toho rozhodují o postupu zhušťování koefficienty

$$\frac{R}{R+v} = a, \quad \frac{V}{R+v} = b.$$

Zavedeme-li ještě hustoty δ, obdržíme přehledné rovnice

$$\begin{aligned} a + b &= \delta_1, \\ a\delta_1 + b &= \delta_2, \\ a\delta_2 + b &= \delta_3, \\ &\vdots \\ a\delta_{n-1} + b &= \delta_n. \end{aligned}$$

Způsobem tímto docílili jsme úplného formálního souhlasu s výkladem o postupu zřeďování (§ 352.). Proto stejně, jako tam, obdržíme závěrečný výsledek

$$a^n + \frac{V}{v}(1 - a^n) = \delta_n.$$

Existuje tedy i zde jistá hodnota mezní

$$lim\ \delta = \frac{V}{v},$$

přes kterou zhuštění dále vésti nelze.

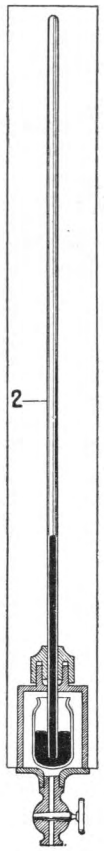
Hodnoty mezní, $\frac{v}{V}$ při zřeďování a $\frac{V}{v}$ při zhušťování, jsou reciproké. Formální shoda postupu zřeďování a zhušťování byla zjednána zavedením koefficientů analogických

$$\frac{R}{R+V} = \alpha, \quad \frac{R}{R+v} = a.$$

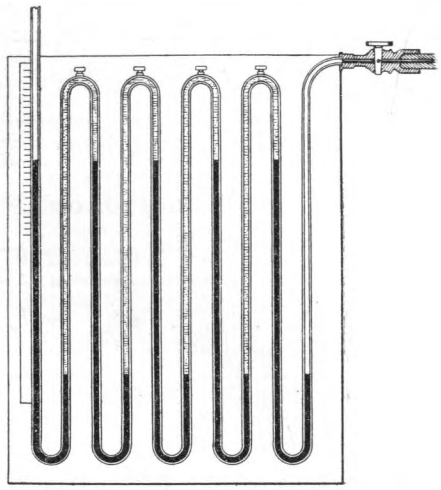
Oba koefficienty jsou menší než jednička, čím jsou menšími, tím rychleji, t. j. při menším n dosáhne se mezního zředění neb zhuštění. Rozhoduje tu, v jakém poměru jest objem recipientu k objemu jednak válce, jednak škodlivého prostoru. Při daném objemu recipientu postupuje zředění daleko rychleji než zhuštění, poněvadž celý objem válce jest daleko větší než objem škodlivého prostoru.

§ 366. **Manometry při zhušťování.**

Podobně jako při zřeďování vzduchu užívá se též při zhušťování tak zvaných manometrů *), aby bylo lze postup zhušťování sledovati. Jsou buď rtuťové anebo kovové.



Obr. 295.



Obr. 294.

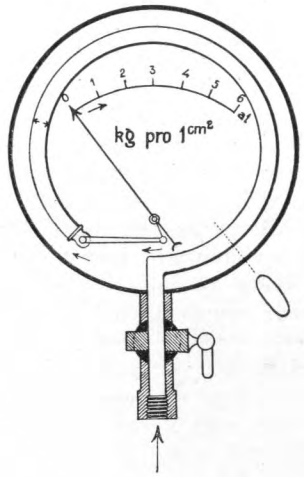
Nejjednodušší manometr rtuťový na zhušťování jest týž, jako na zřeďování, jak je v obr. 273. *a)* znázorněn. Při zřeďování stoupá rtuť v jednom, při zhušťování v druhém rameni. Pokaždé se udává difference tlaková proti tlaku atmosférickému. Kdyby se jednalo o difference velké, musil by býti manometr velmi dlouhým, podobně, jako u apparátu Mariottova (obr. 261.). V případě takovém jest výhodnější, několik malých manometrů spojiti za sebou. Spojení sprostředkuje se vodou. Tak jest zařízen manometr v obr. 294. znázorněný. Udává-li zde jednotlivý manometr rozdílem hladin rtuťových tlak h, jest tlak skutečný nh. Při počtu přesnějším

*) Řecké $\mu\alpha\nu\acute{o}\varsigma$ značí řídký, kdežto hustý znamená $\delta\alpha\sigma\acute{\upsilon}\varsigma$; měly by se tedy stroje tyto pro zhušťování zváti dasymetry; toto slovo jest však zadáno pro přístroj jiný. Užíváme tedy slova manometr ve významu všeobecném podobně jako slova vývěva.

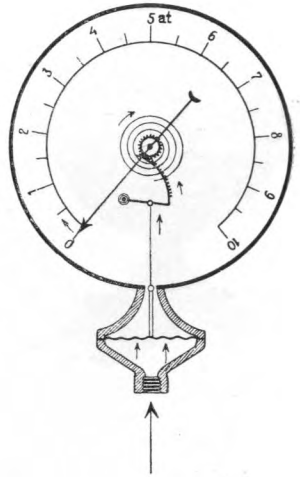
dlužno odečísti zpáteční tlak sloupců vodních, jichž výška jest jednotlivě též h a jichž počet jest $n - 1$. Na rtuť redukován jest pak tlak skutečný

$$nh - (n - 1)\,\frac{h}{13{\cdot}6}\,.$$

Jiný způsob manometrů rtuťových zakládá se na zákonu Mariottově. Pozorujeme-li, že jistý objem vzduchu, stanovený při tlaku atmosféry, jest vyšším tlakem zmenšen na n-tou část, činí tlak ten n atmosfér. Na tom základě jest zařízen manometr v obr. 295. znázorněný. Při graduování nutno přihlížeti ke změnám výšky rtuťové v trubici i ve vnější nádobě. (Srovnej § 329.)



Obr. 296.

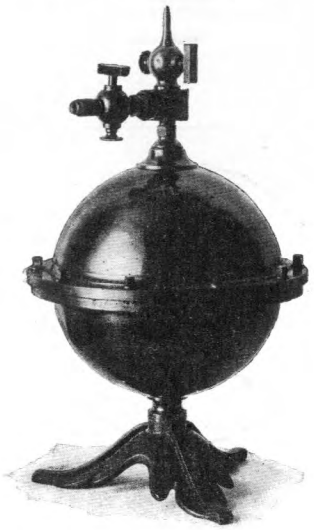


Obr. 297.

Zpravidla užívá se však zde manometrů kovových. Jsou dvojího typu, jako manometry kovové. Manometr dle principu Bourdonovy trubice reaguje větším neb menším zakřivením trubice do oblouku točené, do níž se žene vzduch zhuštěný. Manometr s vlnitým plechem udává prohnutí plechu tlakem, jež se přenáší na ručičku a zvětšuje, dle empirické graduace. Schematicky jsou oba manometry znázorněny v obr. 296. a 297. Graduace děje se empiricky závažím, jímž se vzduch v určité míře pístem stlačuje. Proto zde bývá často jednotkou atmosféra nová.

§ 367. **Pokusy vývěvami zhušťovacími.**

Účinek kompresse vzduchu lze nejpatrněji demonstrovati Heronovou bání v provedení, jak ji obr. 298. znázorňuje. Stroj jest pracován z mosazi, jsa složen ze dvou velikých polokoulí. Jeden z hořejších kohoutů přišroubuje se k cínové trubici, jež jde k vývěvě zhušťovací. Druhý uzavírá trubici, sahající až na dno báně, do kteréž se naleje voda. Když se vývěvou na př. Deleuilovou začíná pracovati, vystřikuje voda vždy víc a více. Na témže základě je sestrojena stříkačka vozní. Vzduch se zde v báni Heronově stlačuje vodou, která se do ní pumpuje, čímž se zároveň voda vytryskující nahrazuje.



Obr. 298.

Technicky užívá se vývěv zhušťovacích při komprimování plynů, zejména kyslíku, vodíku a kysličníku uhličitého; tyto stlačují se do železných recipientů na objem obyčejně 1000-kráte menší, než by měly při tlaku atmosférickém; v této úpravě užívá se pak plynů těch i v praxi. Právě tak užívá se vývěv zhušťovacích, jde-li o kondensaci plynů.

Zhuštěný vzduch může býti motorem (systém V. Popp). Při stavbách tunnelů (sv. Gotthardt, Mont-Cenis) užito s velkým prospěchem komprimovaného vzduchu, při čemž vzduch, jehož tlakem, podobně jako jinak parou, se vrtací přístroje udržovaly v činnosti, zároveň tunnel ventiloval. Vývěvy zhušťovací pak samé, postavené před tunnelem, uváděly se v činnost motory vodními neb parními. Vzduch byl stlačen na 5 atmosfér. U pneumatické pošty užívá se mnohdy k docílení rozdílů tlakových místo zřeďování vzduchu na straně jedné raději zhušťování na straně druhé. Komprimovaným vzduchem mohou býti řízeny veškeré hodiny pneumatické celého města zcela souhlasně z jediné centrály. Uveďme ještě důležitého užívání zhuštěného vzduchu při potápěcím zvonu, při skafandru, zejména pak při stavbách vodních, jako pilířů mostních a j. Poznáváme z přehledného výpočtu tohoto, že vývěvy zhušťovací mají větší význam technický, kdežto vývěvy zřeďovací, jichž technická praxe užívá na př. při hotovení elektrických žárovek, mají větší důležitost vědeckou.

Pohyb plynů.

§ 368. **Výtok plynu malým otvorem nádoby.**

Východištěm úvah o pohybu plynů mohou býti rovnice, odvozené na základě všeobecně platného principu energie pro pohyb

kapalin (§ 311.). Přestávajíce na případu, kdy průřez nádoby jest veliký proti průřezu otvoru, určujeme rychlost výtoku kapaliny vzorcem

$$v = \sqrt{\frac{2\,(p_0 - p)}{s}}.$$

Užijeme-li téhož vzorce pro výtok plynů, značí p_0 tlak, který působí na plyn v nádobě, p protitlak v okolí, do něhož plyn malým otvorem proudí, oba v jednotce $\frac{dyna}{cm^2}$. Souhlasně značí s specifickou hmotu plynu, při onom tlaku p_0 a při teplotě t, v jednotce $\frac{g}{cm^3}$. Je-li σ specifická hmota vzduchu při týchž poměrech, Δ hutnost plynu, platí vztah

$$s = \Delta \,.\, \sigma,$$

při čemž jest (§ 344.)

$$\sigma = 0{\cdot}001276 \,.\, 10^{-6} \,.\, \frac{p_0}{1 + \beta t}.$$

Dosadíce výrazy ty do hořejšího vzorce obdržíme

$$v = \sqrt{2\,\frac{p_0 - p}{p_0} \,.\, \frac{10^6}{0{\cdot}001276} \,.\, \frac{1 + \beta t}{\Delta}}$$

aneb, když číselné koefficienty sloučíme v součin a odmocníme,

$$v = 39590\sqrt{\frac{p_0 - p}{p_0} \,.\, \frac{1 + \beta t}{\Delta}}.$$

Rychlost výtoku řídí se tudíž přetlakem nikoli absolutním $p_0 - p$, nýbrž relativním $\frac{p_0 - p}{p_0}$, jehož odmocnině jest úměrnou. Při stejném relativním přetlaku a při stejné teplotě jest rychlost výtoku obráceně úměrnou hutnosti plynu, tak že jest

$$v : v' = \sqrt{\Delta'} : \sqrt{\Delta}.$$

Číselná konstanta má význam jednoduchý; značí rychlost $\left(\frac{cm}{sec}\right)$, s jakou by vzduch ($\Delta = 1$) teploty nullové ($t = 0$) proudil do vakua ($p = 0$). V jednotce přehlednější činí rychlost tato 396 *m/sec*. Jiný plyn teploty nullové proudí do vakua rychlostí v téže jednotce $396 : \sqrt{\Delta}$, tedy na př. vodík $\left(\Delta = \frac{1}{14{\cdot}4}\right)$ rychlostí 1500 *m/sec*. Pozoruhodno jest, že rychlost tato jest stejnou, ať jest plyn zhuštěný nebo zředěný; přetlak relativní jest při velkém i při malém tlaku p_0 vždy týž, totiž 100%, jakmile protitlak p mizí.

Vzhledem k tomu, že pro rychlost výtoku plynu rozhoduje jenom přetlak relativní, jest jednostejno, zdali při měření tlaku užíváme jed-

notky dyny nebo i jiné, na př. megadyny, atmosféry, anebo zdali tlaky měříme barometricky, výškami b_0 a b sloupců rtuťových. Jest tudíž i pro tento obvyklý způsob měření tlaku

$$v = 39590\sqrt{\frac{b_0 - b}{b_0}\,\frac{1+\beta t}{\Delta}}.$$

Proto také nerozhoduje tu urychlení tíže. Plyn neproudí vlastní vahou, jako kapalina, když vytéká otvorem nádoby, nýbrž tlakem zvláštním. Vhodným příkladem jest proudění plynu z gasometru na venek tlakem jistého sloupce vodního; při počítání rychlosti dlužno tento přetlak přepočísti na rtuť; když se pak připočítá k tlaku barometrickému b vnějšího vzduchu, obdrží se tlak b_0. Proto se někdy psává

$$\frac{b_0 - b}{b_0} = \frac{h}{b+h},$$

kdež značí h onen přetlak na rtuť přepočítaný.

Odvození hořejšího vzorce pro rychlost v bylo jednoduchým, ježto jsme pro σ použili výrazu na absolutní jednotku tlakovou vztahovaného (§ 344.). Jinak když se tlaky měří barometricky, dlužno psáti (§ 344.)

$$\sigma = \frac{0{\cdot}001293}{1+\beta t}\cdot\frac{b_0}{76}\,(1 - \varrho\cos 2\psi)\,(1 - \varepsilon h)$$

$$p_0 - p = (b_0 - b)\,.\,13{\cdot}596\,.\,980{\cdot}6\,(1 - \varrho\cos 2\psi)\,(1 - \varepsilon h),$$

tudíž

$$2\frac{p_0 - p}{\sigma} = \frac{b_0 - b}{b_0}\cdot\frac{2\,.\,13{\cdot}596\,.\,980{\cdot}6\,.\,76}{0{\cdot}001293}\,(1+\beta t).$$

Číselná konstanta vychází pak souhlasně jako dříve

$$\sqrt{\frac{2\,.\,13{\cdot}596\,.\,980{\cdot}6\,.\,76}{0{\cdot}001293}} = 39590.$$

Do počtu tohoto vstupuje sice urychlení tíže, ale jen jakožto urychlení určité, jakéž jest v šířce 45° při hladině mořské; jinak faktory lokální, urychlení určující, se dělením vyloučí.

Často se přizpůsobuje vzorec $v = \sqrt{2gh}$, platný při theoremu Torricelliho také na výtok plynů, v tom způsobu, že se tlaky p_0 a p vyjadřují vahou sloupce plynového konstantní specifické hmoty a příslušné výšky. Formulace taková má význam více mathematický než fysikální, poněvadž podmínka, aby sloupec plynový jisté výšky měl veskrz konstantní specifickou hmotu, jest nesplnitelná. Při té formulaci, kde se tedy tlak vyjadřuje vahou, má pak ovšem intensita tíže podobný význam jako u kapalin.

Dlužno ještě všeobecně poznamenati, že poměry výtokové u plynů jsou vzhledem k rozpínavosti plynů přece jiné povahy než u kapalin.

Při přetlaku větším plyn přecházeje do okolí tlaku menšího rozpíná se a tím se ochlazuje. Proto lze vzorců nahoře odvozených používati jen pro přetlaky malé, při nichž změny teploty nejsou značné, takže lze zjev považovati za isothermický.

Z rychlosti výtoku v a průřezu otvoru q počítá se objem V plynu za dobu Θ otvorem prošlého dle vzorce

$$V = qv\Theta.$$

O významu vzorce tohoto platí analogicky vše, co uvedeno bylo u kapalin. Oproti množství theoretickému jest množství faktické vždy menší. Redukční koefficient výtokový μ závisí na tvaru, jaký má otvor anebo nátrubka, ale též na tlaku, kterým se výtok způsobuje. Pro kruhové otvory v tenké stěně udává se (Weisbach)

$$\mu = 0{\cdot}64 \text{ až } 0{\cdot}73.$$

Krátkými nátrubkami cylindrickými a zejména konickými, lze koefficient μ zvýšiti až téměř na jedničku.

§ 369. **Methoda Bunsenova, kterak lze stanoviti hutnost plynů.**

Pro stejné objemy dvou plynů týmž otvorem proudících platí vztah

$$\mu v q\Theta = \mu v' q\Theta'$$

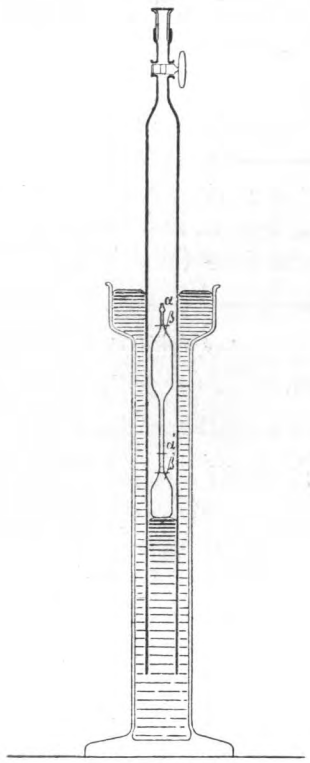
čili

$$\Theta : \Theta' = v' : v,$$

tudíž při stejných poměrech tlakových a tepelných

$$\Theta^2 : \Theta'^2 = \Delta : \Delta'.$$

Na tomto základě lze srovnávati hutnosti dvou plynů. K účelu tomu sestrojil (1857) Bunsen apparát v obr. 299. znázorněný. Hlavní jeho částí jest skleněný válec, zúžený v trubičku, v níž jest skleněný kohout; nad tímto lze do trubičky vkládati zabroušenou dutou zátku, do níž jest zataven platinový plíšek s velmi jemným otvorem, jímž má plyn prouditi. Plyn, suchý, filtrovaný vatou, aby byl úplně prost prachu, vede se nad rtutí do válce dolem anebo, když se ona zátka sejme, horem. Aby se zjednal přetlak, ponoří se válec do rtuti, vždy stejně hluboko. Poněvadž pak stav plynu skrze rtuť pozorovati nelze, vkládá se nade rtuť do válce plovač, tvaru v obrazci znázorněného, na němž jsou čtyři značky α, β, α', β'. Když jest tedy válec plynem naplněn, ponoří se na vhodném stojanu do rtuti tak hluboko, aby onen plovač přišel pod vnější hladinu rtuti. Pak se kohout otočí, plyn počíná prouditi otvorem ven, plovač ponenáhlu stoupá. Pozorovatel, maje chronometr při ruce, počítá sekundy a určí na desetinu sekundy okamžik, kdy jednou značka β, po druhé značka β' se právě nad rtuť vynoří. Ještě lépe jest pozorovati da-



Obr. 299.

lekohledem pevně postaveným a tak zařízeným, aby nitka horizontální nitkového kříže dalekohledu přišla něco málo nad povrch rtuti. Pozoruje se pak okamžik, kdy jednou značka β, po druhé značka β' právě prochází onou horizontální nitkou. Značky α a α' mají pozorovatele upozorniti, že již brzy značky β a β' přijdou do visury, aby tedy napjal pozornost na přesné stanovení časové, na němž celý zdar pokusu závisí. Za příklad budiž (dle Bunsena) uvedeno pozorování toto:

pro vzduch

$$\Theta' = 117{\cdot}6 \; sec,$$

pro třaskavý plyn

$$\Theta = 75{\cdot}6 \; sec.$$

Z toho:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{75{\cdot}6^2}{117{\cdot}6^2}$$

$$\Delta' = 1 \qquad \Delta = 0{\cdot}143.$$

Methoda jest výhodná, zejména je-li k disposici jen malý objem plynu.

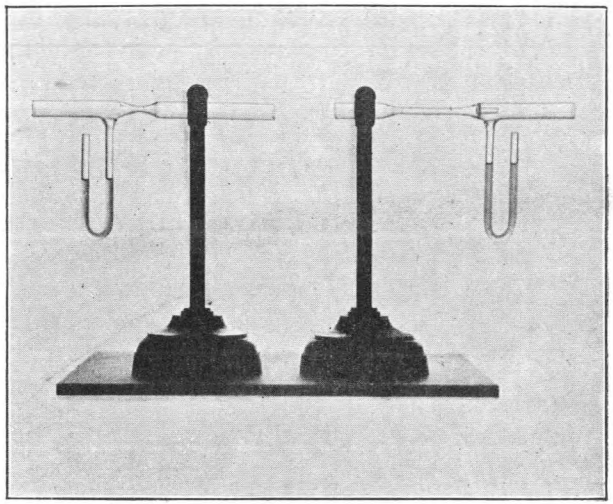
U novějšího tvaru apparátu jest odstraněn plovač a válec, v němž plyn se nachází, jest nahrazen baňkovitou nádobou, z níž se plyn vytlačuje rtutí přitékající z baňky s ní kaučukovou trubicí spojené, podobně jako u rtuťové vývěvy (obr. 283.).

Při tom vystačí se s daleko menším množstvím rtuti a manipulace jest jednodušší.

§ 370. **Další analogie proudění plynů a kapalin.**

Proudí-li plyn potrubím, vzniká třením odpor, kterým se rychlost výtoku zmenšuje značnou měrou. Odpor tento souvisí s rozměry trubice, se specifickou hmotou plynu a rychlostí proudění; béře se jako ztráta přetlaku do počtu na základě podobných empirických vzorců, jako u kapalin.

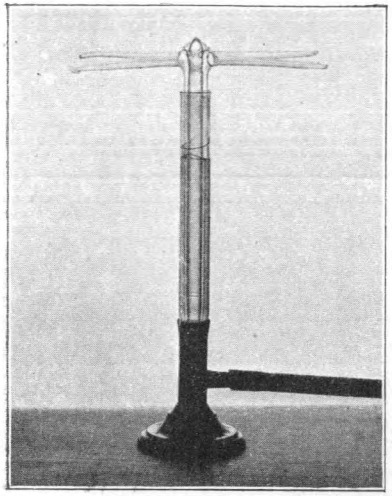
Úkazy ssání při proudění plynu lze demonstrovati (objektivně, v projekci) přístroji v obr. 300. znázorněnými. Manometrickou kapalinou jest voda, na př. indigokarmínem slabě zabarvená. Připojí-li se ke trubičce apparátu jednoho neb druhého dmuchadlo kaučukové, reaguje voda na proud vzduchu i velmi slabý; při sil-



Obr. 300.

nějším vystoupí do trubice a proudem vzduchu se rozpráší. Na tom základě spočívají známé přístroje rozprašovací, inhalační a j.

Sem náleží též úkaz, který ponejprv pozorovali Clement a Desormes. Měli ve válcovité nádobě stlačený vzduch, který mohli otvorem na dně nádoby pustiti ven; když k otvoru přiblížili desku dřevěnou neb kovovou, vhodného průměru, tu v jisté odlehlosti od otvoru se proudem vzduchovým neodpuzovala, nýbrž se jím jakoby chytla, zadržela, při čemž se dostala do pohybu oscillačního, jsouc brzy přitlačována, brzy odpuzována. Proudem vzduchu mezi dnem nádoby a deskou nastávalo periodicky zředění vzduchu, kdy pak vzduch vnější měl převahu, a opět zhuštění vzduchu, kdy převahu měl vzduch z nádoby se ženoucí; i bylo nesnadno, desku od otvoru náhle oddáliti. Pokus se dá napodobiti přístrojem jednodušším. Mosazná trubice ústí uprostřed mosazné desky, u níž v malé odlehlosti jest zavěšena neb na tyčinkách volně nastrčena deska z lepenky. Když se do trubice foukne, neoddálí se deska lepenková, nýbrž naopak přitlačí se k desce mosazné (aerodynamické paradoxon). Trvá-li proud vzduchový déle, lze docíliti též oscillačního pohybu.



Obr. 301.

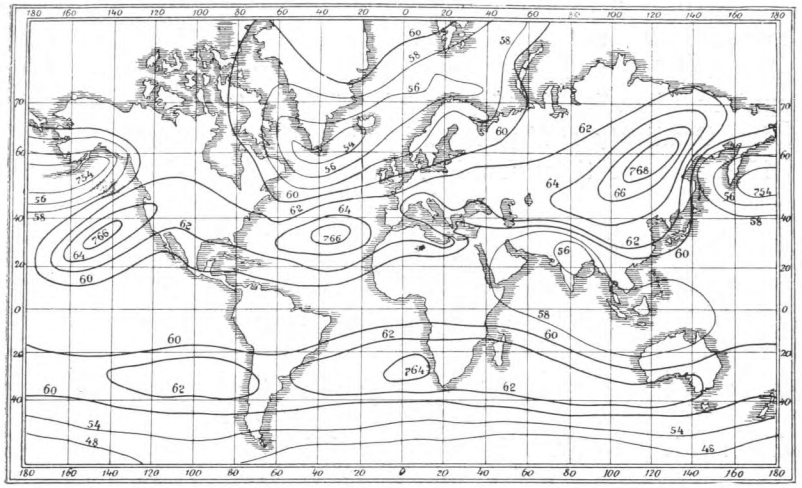
Reakci proudících plynů ukazuje velmi pěkně apparát dle analogie Segnerova kola ustrojený, v úpravě v obr. 301. znázorněné. Svítiplyn do apparátu z plynovodu puštěný proudí otvory, kdež se dá zapáliti, při čemž celý přístroj se dostane v pohyb otáčivý. Na témže základě spočívají rakety, zejména otáčivé (ohnivé slunce), přístroj aeolipil zvaný, kde se otáčení způsobuje vodní parou a pod.

§ 371. **Proudy vzduchové v atmosféře.**

Tlak barometrický byl již v prvních dobách, kdy se meteorologické stanice zařizovaly, předmětem pilného pozorování, jakožto meteorologický element nejdůležitější. Roční průměr tlakový jevil se pro jisté místo *) téměř konstantním, i zdálo se, že konstanta tato jest v souvislosti jenom s výškou stanice nad hladinou mořskou, tak že že by dle toho po redukci na hladinu moře průměrný roční tlak barometrický pro celou zemi byl konstantním. K rozhodnutí otázky této zpracoval meteorolog *Al. Buchan* výsledky pozorování na 335 meteorologických stanicích. Výsledek práce uveřejnil v pojednání »The mean pressure of the atmosphere . . .« Edinburgh, Roy. Soc. Trans. 25. 1869. Ukázalo se, že mínění o konstantnosti průměrného ročního tlaku při hladině mořské, kteréž dotud bylo rozšířeno, není správné. Rozdíly, jež se ukázaly, byly soustavné a větší, než že by se nahodilostí daly vysvětliti. Al. Buchan užil k důkazu toho zvláštní methody grafické. Spojil veškerá místa stejného tlaku čarami, jež nazval *isobary*. Tyto sestrojil dle aequidistantních rozdílů tlakových, od millimetru k millimetru postupujících. Obrazec 302. ukazuje takové isobary roční, pro celou zeměkouli (krajiny polární vyjímajíc), jež jsou rýsované k lepší přehlednosti po rozdílech dvoumillimetrových. Poznáváme tedy, že

*) Pro Prahu srovnej § 337.

jsou na povrchu země místa, kde po celý rok průměrně převládá buď vysoký neb nízký tlak. Isobary naznačují dle průběhu svého ihned, kde jest maximum a kde minimum průměrného ročního tlaku. Pro klima Evropy jest zvláště důležité minimum a maximum v oceanu Atlantickém, toto na jihu blíže ostrovů Azorských, ono na severu u Labradoru. Analogické minimum a maximum jest též v oceanu Tichém u Severní Ameriky. Význačné jest též maximum ve východní Sibiři.



Obr. 302.

Od té doby, kdy do služeb meteorologie vstoupil telegraf a kdy v jednotlivých státech kulturních zavedeny stanice ústřední, jež o stavu povětrnosti dostávají zprávy telegrafické pravidelné z četných stanic jiných, stalo se grafické znázorňování základem methody nové, synchronické, kteráž se pro studium úkazů meteorologických tak měnlivých osvědčuje co nejlépe. Stanice centrální vydávají denní synoptické mapy *), znázorňující, dle úmluv mezinárodních, stav atmosféry pro určitou hodinu; na mapách těchto vynikají isobary jakožto čáry důležitosti základní. Rýsují se po redukci jednotlivých dat pozorovacích na hladinu moře, zpravidla od tlaku 760 *mm* vycházejíc, od pěti k pěti millimetrům výše i níže. Jich průběh bývá často nepravidelný, někdy však ukazuje se pravi-

*) U nás vydává mapy synoptické centrální ústav Vídeňský; jimi se znázorňuje stav povětrnosti, jaký jest o 7. hodině ranní každého dne nad střední Evropou.

delnost překvapující. Jest to tehdáž, když vystupuje určitě nad jistým oborem země, na který se synoptické mapy vztahují, barometrické minimum nebo maximum. Isobary jsou v případech takových čáry uzavřené, naznačující, jak se všech stran směrem k minimu tlaku ubývá, jako by se šlo do hlubiny, anebo zase tlaku přibývá, jako by se postupovalo do výšiny. Při tom jsou isobary buď hustě k sobě přidruženy nebo od sebe vzdáleny, čímž se naznačuje, kde je změna tlaková náhlejší a kde nenáhlá.

Aby se rozdíly tyto určily kvantitativně, zavádí se pojem *gradientu*. Definuje se (podobně jako se stanoví *spád* jakékoli veličiny fysikální) jakožto rozdíl barometrického tlaku na odlehlost jednoho stupně rovníkového *) (15 geograf. mil čili 111 *km*) kolmo k isobarám. Gradienty značné mívají barometrická minima, 5, 10, ba až 15 *mm*, naproti tomu mírné barometrická maxima; nejsou tu vzácné případy, že rozdíly tlakové nad celou střední Evropou nedosahují 5 *mm*.

Rozdíly tlakovými řídí se pohyb vzduchu, směr i síla větru. Obsahují tudíž synoptické mapy vedle isobar též údaje anemometrické. Směr větru na určité stanici naznačuje se šipkou s větrem letící. Jedná se tedy ještě o to, jak sílu větru označiti. Empiricky děje se tak zvláštní stupnicí, jdoucí od 0 do 12 (Beaufort), anebo, jak se nyní dle soustavy dekadické zavádí, od 0 do 10 **). Extremní čísla značí bezvětří a orkán. Jinak se stanovení síly větru dle stupnice té děje odhadem. Stupeň 2. znamená vítr slabý, rychlosti asi 6 *m/sec*, stupeň 4. vítr ostrý, rychlosti 12 *m/sec*, stupeň 6. vítr prudký, rychlosti 19 *m/sec*, stupeň 8. vichřici rychlosti 27 *m/sec*. Orkán, jenž by stupněm 10. byl označen, a jehož v našich krajinách neznáme, mívá rychlosti 40, v jednotlivých nárazech větru až 50 *m/sec*. Rychlosti ve stupnici pokračují tedy urychleně, s počátku mírně, potom prudčeji. Gradient 1 *mm* způsobuje vítr mírný, 5 *mm* již vichřici, 10 až 15 *mm* orkán. K označení síly větru na mapách synoptických kreslí se tedy ony šipky jakožto opeřené čárkami, jichž počet souhlasí s onou stupnicí. Poněvadž by však plný počet čárek byl nepřehledným, kreslí se čárky delší, z nichž každá platí za dvě, a k nim po případě ještě jedna čárka kratší. Značí tedy na

*) Volba této odlehlosti jest odůvodněna tím, že na mapách napřed tištěných, do nichž se isobary vkreslují, geografická šířka na meridiánech pokračuje též po stupních. Odlehlost stupňová jest tedy na mapě přímo dána.

**) Na hvězdárně Pražské užívá se stupnice 0 . . . 10, rovněž tak na synoptických mapách Vídeňských.

př. šipka opeřená třemi čárkami dlouhými a jednou krátkou vichřici síly 7.

Když se však na mapách synoptických srovnává směr větru se směrem gradientu a isobar, ukazuje se, že proudění není k isobarám kolmo, jak by se očekávalo, nýbrž šikmo, v jistém úhlu, který se sklonem nazývá. V krajinách našich bývá sklon ten asi 40°, tak že proudění vzduchu více se blíží směru isobar než směru gradientu. Příčinou toho jest otáčení se země kolem osy, od západu k východu a setrvačnost. Vzduch, proudící na př. při jižním větru na sever, podržuje svou větší rychlost a předbíhá tudíž na východ; podobně v případech jiných. Lokálně může se vítr měniti horstvem a údolím; proto se směr i síla větru jeví nejpravidelněji na moři.

Poněvadž tedy vzduch neproudí kolmo k isobarám, nýbrž v jistém sklonu, vzniká v okolí barometrického minima kolem jeho středu pohyb vzduchu vířivý, cyklonální, u nás na polokouli severní opačně jako ručička hodin. Přichází tudíž na východní stranu minima vzduch hlavně aequatoreální, vlhký a teplý, tudíž lehčí, na stranu západní vzduch hlavně polární, studený a suchý, tudíž těžší, proto zde tlak stoupá, onde klesá, cyklona postupuje směrem hlavně východním. V cykloně samé jest pohyb vzduchu vzestupný. Dle toho jest v okolí cyklony ráz počasí dosti určitým. Proto záleží možnost počasí na jistou dobu předvídati vědecky v tom, aby se mohlo udati, jakým směrem přibližně cyklona bude postupovati a jak se při tom sama bude měniti. Jest tudíž studium drah, jimiž barom. minima v našich krajinách postupují, na jaře i v létě, na podzim i v zimě, jedním z hlavních úkolů meteorologie. Poměry obrácené vládnou v oboru barometrického maxima. Již pohyb vzduchu jest povšechně obrácený, anticyklonální, sestupný; jsou-li minima mnohdy hluboká, jsou maxima plochá; tam větry živé, bouřlivé, zde větry slabé, směru málo určitého; tam neklid, změna, zde klid a stálost; proto způsobují maxima počasí trvalé, v létě teplé, v zimě chladné.

Vzduch proudící má energii pohybu, kterouž pro hmotu jednotky objemové určuje výraz $\frac{1}{2}\sigma v^2$. Proudí-li proti dané ploše, působí tlakem, který jest v prvé approximaci úměrný jednak velikosti plochy, jednak oné energii pohybu. Faktor úměrnosti určuje se empiricky a jest poněkud závislý na rychlosti samé. Udávají se (d'Aubuisson) tyto k sobě náležející hodnoty rychlosti $\left(\frac{m}{sec}\right)$ a tlaku

p na plochu čtverečného metru, při čemž jest jednotkou tlaku váha kilogrammu, tedy — až na 2 procenta — megadyna.

$$v = \quad 1 \quad 6 \quad 12 \quad 20 \quad 36 \qquad \left(\frac{m}{sec}\right)$$

$$p = 0{\cdot}13 \quad 4{\cdot}87 \quad 19{\cdot}5 \quad 54{\cdot}2 \quad 177{\cdot}0 \qquad \left(\frac{váha\ kg}{m^2}\right).$$

Energie větrného proudu upotřebuje se při mlýnech větrných a při větrných kolech, jichž pohybem rotačním se pumpuje voda do reservoiru, obyčejně k zavlažování zahrad. Významu technického tato energie nemá, poněvadž jest velice nestálá.

XX.

Úkazy působením sil molekulových vznikající.

§ 372. Síly molekulové.

Úkazy gravitační vysvětlujeme po stránce kvalitativní i kvantitativní na základě Newtonovy formulace gravitační síly. Do jisté míry analogicky vedeme sobě při vysvětlování četných a důležitých úkazů, jež povšechně jakožto úkazy *soudržnosti* (kohese) a *přilnavosti* (adhese) označujeme. Přijímajíce theorii atomovou, dle níž nejmenšími částečkami hmoty, ve smyslu fysikálním, jsou molekuly, hledíme úkazy ty učiniti sobě pochopitelnějšími podobnou formulací v malém, jaká se tak dobře osvědčila ve velkém. Pozorujíce, že nejmenší částečky hmoty reagují proti odtržení, nebo zase, že k sobě lnou, představujeme sobě, že molekuly se přitahují podobně jako hmoty celkové. Analogie vede pak k tomu, předpokládati, že jako u sil gravitačních, tak i u sil molekulových rozhoduje o velikosti přitažlivé síly vzájemná odlehlost; kdežto však při gravitaci síly přitažlivé ubývá s druhou mocností vzdálenosti, soudíme z různých důvodů, že při silách molekulových rozhodují mocnosti vyšší, že sil molekulových s odlehlostí ubývá rychleji.

Obor působnosti molekulové jest vymezen poloměrem ϱ koule, který činí jen několik millimikronů; jakmile odlehlost se stává větší, přestává přitažlivost molekulární býti znatelnou. Ale nejen proti oddálení reagují nejmenší částečky hmoty, nýbrž též proti přiblížení. Vyjadřujíce tuto zkušenost, zavádíme vedle přitažlivých sil molekulových ještě síly odpudivé; a poněvadž nelze si mysliti, že by tytéž molekuly hmotné až do jistých odlehlostí se přitahovaly a v jiných odlehlostech odpuzovaly, přičítáme síly odpudivé působení molekul aetherových. O aetheru, jakožto postulátu optiky, nutno předpokládati, že proniká veškerá tělesa. Myslíme sobě tudíž molekuly hmotné v jistých od sebe vzdálenostech, jež jsou značné proti velikosti molekul, a tyto intermolekulární odlehlosti představujeme sobě vyplněné daleko jemnějšími molekulami aetherovými, jimiž reakce proti přiblížení molekul hmotných vzniká. Daný stav hmoty jest pak rovnovážným mezi silami přitažlivými a odpudivými, ač ovšem nikoli rovnovážným v obyčejném statickém smyslu určitých, neproměnných vzájemných poloh jednotlivých molekul. K vysvětlení úkazů tepelných musíme totiž dále předpokládati, že jednotlivé molekuly hmot skupenství

pevného a kapalného se nacházejí v neustálém kmitavém pohybu kolem jistých, více méně neproměnných poloh rovnovážných. U plynů nelze ani neproměnnost rovnovážných poloh předpokládati.

Při mathematickém zpracování těchto myšlenek, kterému se kladou v cestu obtíže téměř nepřekonatelné, jest tudíž nutno užíti method pravděpodobnostních, často podobných úvahám statistickým (Gibbsova mechanika statistická). Proto jest molekulová theorie hmoty zpracována do jisté míry uceleně pouze pro skupenství nejjednodušší v t. zv. kinetické theorii plynů. Jinak u těles tuhých a z části i kapalných jest při mathematickém zpracování zjevů sem spadajících tichým předpokladem (při každém tvoření differenciálních kvocientů dle délky nebo úvaze o elementárním objemu) hypothesa o nepřetržitém vyplnění prostoru hmotou.

Logicky nejoprávněnější jest ovšem zpracování takové, které vycházejíc od jistých jednoduchých supposic povahy mathematické, dedukcí vyvozuje z nich popis zjevů fysikálních, tak, jak je pozorujeme a měříme; souhlas se skutečností jest pak svědectvím oprávněnosti supposic, nesouhlas nutí k jich pozměnění, event. zavržení. Toto stanovisko nazýváme fenomenologickým.

Ostatně nesmíme ani tehdy, vycházíme-li od hrubých obrazů mechanických, jakým jest na př. theorie molekulová, a dojdeme-li dedukcemi k souhlasu se skutečností, považovati to za důkaz, že hypothesa naše jest něčím více než pouhým obrazem skutečnosti, jedním z mnoha možných, který má ovšem pro ekonomii našeho myšlení tím větší cenu, čím je jednodušší a názornější, čímž umožňuje nám snadné vyvozování správných dedukcí, eventuálně nových, jež pokusem zkoumány mohou nás vésti k objevu zjevů a vztahů nových, dříve pozornosti unikších (hypothesa pracovní, working hypothesis). Zároveň stoupá cena hypothesy, čím větší obor různých, často zdánlivě nesouvislých zjevů zahrnuje *).

V následujících statích budeme se zabývati zjevy podmíněnými (vykládanými) existencí sil molekulových, zjevy dříve často shrnovanými pod název »všeobecné vlastnosti hmot«, omezujíce se ovšem na úvahy rázu elementárního. Postup výkladu uspořádáme dle skupenství.

Pružnost těles tuhých.

§ 373. **Úkazy pružnosti.**

Tělesa tuhá mají určitý tvar i objem; silami vnějšími vznikají změny obou. Příkladem buď drát vertikálně zavěšený, který lze různým závažím zatěžovati. Při každém zatížení se drát prodlouží, při čemž se současně jeho průřez zmenší. Pokud nepřestoupí zatížení jistou mez, vrátí se drát, sejmeme-li závaží, v původní délku i průřez. Pravíme, že jest *pružným*, *elastickým*, vlastnost samu nazýváme *pružností*, *elasticitou* *). Onu mez, o níž zmínka se stala, zveme dle toho *mezí pružnosti*. Překročíme-li ji, nevrátí se drát do původního stavu, zůstává trvale delším, jeví *deformaci trvalou*.

*) Dosah kineticko-molekulové hypothesy nejlépe jest patrným v díle B. Weinsteinově: Thermodynamik und Kinetik der Körper (I. sv. r. 1901, str. 484; II. sv. 1903, str. 586; III. sv. 1905 a 1908, str. 1189).

Jest obyčejem zváti tělesa tím dokonaleji pružnými, čím meze pružnosti jsou širší, jako na př. u kaučuku; jsou-li meze úzké, jako na př. u hlíny nebo vosku, zoveme tělesa méně pružnými, po případě nepružnými. V abstrakci lze zavésti pojem těles dokonale pružných a úplně nepružných, čímž určeny jsou extrémy, mezi nimiž se nalézají tělesa skutečná.

Pokračujme však dále v onom myšlenkovém pokuse s napínaným drátem; víme, že při jistém zatížení se konečně přetrhne. Toto zatížení měří jeho *pevnost v tahu*.

Ve zjevech pružnosti hraje důležitou roli *čas*; zatížíme-li drát, nenabude okamžitě deformace konečné, rovněž při odejmutí závaží nenastane hned stav původní. Tyto zjevy shrnujeme pod název *dopružování*.

V následujících statích budeme nejprve pojednávati o deformacích velmi nepatrných, tak že meze pružnosti ještě ani z daleka není dosaženo, a i dopružování jest velice nepatrným. Rovněž budeme předpokládati, že materiál jest homogenní a isotropní, to jest, že má ve všech směrech vlastnosti tytéž **).

§ 374. **Některé věty o deformacích.**

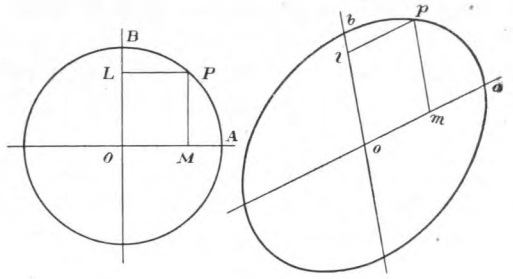
Působí-li vnější síly na těleso, snažíce se změniti jeho tvar, vzbuzují síly vnitřní, veskrze mezi jednotlivými částmi tělesa působící. Tyto síly vnitřní, vztažené na jednotku plošnou a pozůstávající z tahů a tlaků, chceme zváti *napětí*. Napětí způsobují vždy změny v tělese, jevící se prodloužením (ev. zkrácením) nebo otočením myšlených elementárních přímek v tělese, a z toho následující změnou objemu nebo tvaru objemových elementů. Tyto následky napětí chceme zváti obecně *deformacemi* ***).

*) Z řeckého *ἐλαύνω*, poháním, vzhledem k tomu, že tělesa zpružená mohou jiná v pohyb uváděti.

**) O theorii pružnosti máme v literatuře české spis souborný, jakožto prvou část III. dílu Theoretické fysiky *Seydlerovy*, již zpracoval a doplnil prof. *Koláček* (Praha 1895). Spisem z novějších nejobsáhlejším jest *A. E. Love:* Lehrbuch der Elastizität (přeložil A. Timpe, Lipsko 1907).

***) Ve spisech anglických užívá se pro tyto pojmy velmi pohodlných slov *stress* (příčina) a *strain* (následek), která nedají se úplně přiléhavě přeložiti. Němci užívají slov Spannung a Verzerrung. Český název místo v textu užitého názvu deformace mohl by snad býti rozšín.

Nejjednodušší jest *deformace homogenní*, to jest taková, při níž dvě před deformací rovnoběžné a stejně dlouhé přímky v tělese myšlené zůstanou rovnoběžnými a stejně dlouhými i po deformaci. Z toho plyne, že dvě rovnoběžné roviny zůstávají rovnoběžnými, že poměr délek dvou rovnoběžek zůstává nezměněn, že podobné obrazce zůstávají podobnými.



Obr. 303.

Mysleme si v tělese nedeformovaném kruh (obr. 303.) o středu O a poloměru $OA = OB$, na něm bod P o souřadnicích OM a OL. Po deformaci se změní v jiný obrazec; body dřívějším odpovídající označme malými písmenami. Dle povahy deformace nezmění se poměr rovnoběžných délek, to jest

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{pm}}{\overline{ob}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{PL}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{pl}}{\overline{oa}}.$$

Před deformací však platilo

$$\frac{\overline{PL^2}}{\overline{OA^2}} + \frac{\overline{PM^2}}{\overline{OB^2}} = 1 \quad \text{a tudíž i} \quad \frac{\overline{pl^2}}{\overline{oa^2}} + \frac{\overline{pm^2}}{\overline{ob^2}} = 1.$$

Vznikne tudíž z kruhu deformací tou ellipsa, při čemž dva navzájem kolmé průměry kruhu odpovídají dvěma konjugovaným průměrům ellipsy. Ježto však ellipsa má jeden a jen jeden pár konjugovaných průměrů navzájem kolmých, existuje v původním kruhu jen jediný pár na sobě kolmých směrů, které po deformaci zůstávají navzájem kolmými. Úvahu tuto mohli jsme úplně analogicky provésti s koulí; výsledkem by bylo, že se deformací promění v ellipsoid obecně trojosý, jenž by nás byl poučil o tom, že jediná trojice směrů navzájem kolmých před deformací zůstává i po ní trojicí této podmínce hovící a hlavním osám ellipsoidu odpovídající. Směry jich nazýváme *hlavními osami deformací*. Měla-li koule, od níž jsme vycházeli, poloměr jednotkový, nazýváme vzniklý z ní

ellipsoid *ellipsoidem deformací*. Zvláště jednoduchý případ nastává tehdy, jsou-li ellipsoidy deformací ve všech částech tělesa podobné a podobně položené, zachovávají-li tedy hlavní osy deformace svůj směr, jako tomu jest při napiatém drátu; deformace zve se pak *prostou*. Ohybem a torsí mění se poloha deformačních ellipsoidů v různých částech tělesa. Deformace celková sestává z deformace prosté a *rotace*. Jest patrno, že homogenní deformací se změní malá krychle v tělese myšlená v rovnoběžnostěn, a to jen tehdy pravoúhlý, spadají-li směry jeho hran v jedno s hlavními osami deformace.

Nejobecnější homogenní deformace se dá dle principu rozkládání vektorů rozložiti na extense, prodloužení (zkrácení jest negativním prodloužením) v hlavních směrech deformace; zveme je *hlavními komponentami deformace*, nebo kratšeji *hlavními deformacemi*. Označme si hlavní osy jak obvyklo písmenami X, Y, Z a dejme tomu, že se jednička délková ve směru X prodlouží na $1 + x_x$, ve směru Y na $1 + y_y$, a ve směru Z na $1 + z_z$; pak jsou x_x, y_y, z_z hlavními elongacemi *). Pak se změní objem jedničkové krychle osami proložené, deformací na $(1 + x_x)(1 + y_y)(1 + z_z)$, čili zanedbáme-li součiny $x_x . y_y, y_y . z_z, z_z . x_x, x_x . y_y . z_z$ jakožto veličiny nesmírně malé oproti velmi malým x_x, y_y, z_z, jest nový objem $1 + x_x + y_y + z_z$. Změna jedničkového objemu $\delta = x_x + y_y + z_z$ nazývá se *kubickou dilatací* **), zápornou dilataci zveme *kompressí*. Zvláště jednoduchým jest pak případ, kdy $x_x = y_y = z_z$. Pak nastává *dilatace* (kompresse) *stejnoměrná* a $\delta = 3x_x$. Tak jest tomu vždy u kapalin, kde žádný směr následkem všestranného šíření se tlaku nemá přednosti před jiným.

Dilatace stejnoměrná mění pouze objem, nikoli tvar tělesa.

§ 375. O střihu.

Homogenní deformaci můžeme nahraditi dvěma deformacemi, z nichž jedna mění pouze tvar, nikoli objem tělesa, druhá pak pouze objem nikoli tvar tělesa. Důkaz této věty lze snadno vésti:

*) Lépe vysvitne pravý význam označení x_x, y_y a z_z, řekneme-li, že x_x jest pošinutí malé plošky, na ose x ležící a k ní kolmé (proto index x) od pevného počátku koordinat o jedničku délkovou vzdálené a to pošinutí směrem X; dle toho by bylo y_x pošinutí téže plošky ve směru Y, tedy kolmo k x_x, a podobně $z_x \perp x_x$. Podotýkáme, že vedle v německých knihách nejčastějšího *Kirchhoffova* označování šesti komponent deformace x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y užívají hlavně Angličané označení *Kelvinova* e, f, g, a, b, c, *Love* pak e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}.

**) *Kirchhoffem* označena σ, *Lovem* Δ.

Představme si z tělesa dle hlavních os vyříznutou tyč, která směrem osy Z jde do nekonečna. Stopa, kterou kontura její zanechává v rovině os X a Y buď $OMPN$ (obr. 304.).

Jsou-li elongace ve směru X a Y dány jakožto x_x a y_y pak posunutí

$$\overline{MM'} = \xi = \overline{OM} \,.\, x_x \quad \text{a} \quad \overline{NN'} = \eta = \overline{ON} \,.\, y_y.$$

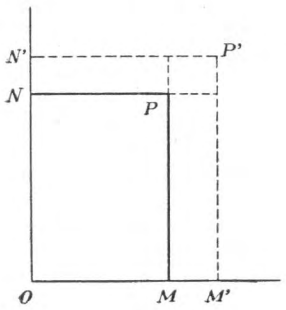
Můžeme však tyto výrazy přepsat ve tvar

$$\xi = \overline{OM} \,.\, x_x = \overline{OM} \,.\, [\tfrac{1}{2}(x_x + y_y) + \tfrac{1}{2}(x_x - y_y)]$$

a

$$\eta = \overline{ON} \,.\, y_y = \overline{ON} \,.\, [\tfrac{1}{2}(x_x + y_y) - \tfrac{1}{2}(x_x - y_y)].$$

Jinými slovy: Deformaci můžeme pokládati za složenou ze stejnoměrné dilatace $\frac{1}{2}(x_x + y_y)$ a z elongace $\frac{1}{2}(x_x - y_y)$ ve směru osy X-ové a stejně veliké kontrakce $\frac{1}{2}(x_x - y_y)$ ve směru osy Y-ové. Stejnoměrná dilatace však, jak víme, nemění tvar, nýbrž pouze objem, kdežto elongace a kontrakce stejná a navzájem kolmá nemění objemu, nýbrž pouze tvar. Druhá část tohoto tvrzení jest samozřejmá, prvou snadno dokážeme. Z objemu $\overline{OM} \,.\, \overline{ON}$ stane se $\overline{OM}(1+\frac{1}{2}(x_x-y_y)) \,.\, \overline{ON}(1-\frac{1}{2}(x_x-y_y)) = \overline{OM} \,.\, \overline{ON}(1-\frac{1}{4}(x_x-y_y)^2)$.



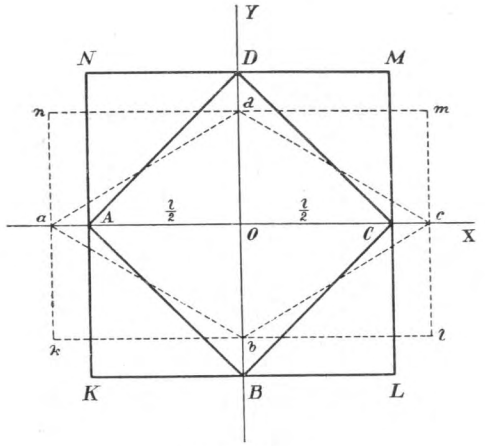
Obr. 304.

Ježto však, jako elongace vůbec, předpokládáme veličinu $\frac{1}{2}(x_x - y_y)$ nesmírně malou, můžeme čtverec její jakožto nesmírně malý druhého řádu zanedbat, tak že naše tvrzení o nezměnitelnosti objemu jest dokázáno.

Deformace, která nemění objem, nýbrž pouze tvar tělesa, sluje *střihem* (franc. glissement nebo nověji cisaillement, angl. shear, něm. Schiebung, Schub nebo Scherung). Výsledek naší úvahy můžeme tedy krátce vyjádřiti slovy: Libovolnou deformaci v rovině lze nahraditi stejnoměrnou dilatací a střihem. Měrou střihu může nám býti velikost elongace, resp. kontrakce, která jej způsobila. Ale často zavádíme míru jinou, která však stojí s touto ve vztahu velmi jednoduchém.

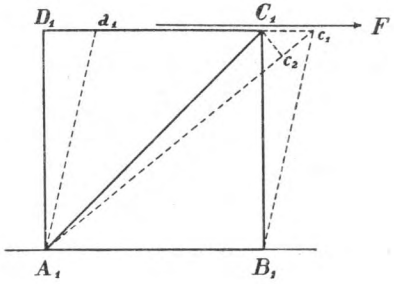
Představme si hranol čtvercového průřezu $KLMN$ se stranami kolmými na osy X a Y délky l (obr. 305. *a*). Střihem $x_x = -y_y = e$ přejde průřez čtvercový v obdélníkový $klmn$, při čemž dle definice elongace $\overline{Aa} = \overline{Bb} = \overline{Cc} = \overline{Dd} = e \,.\, \frac{l}{2}$.

Všimneme-li si hranolu, vyříznutého z něho spojením středních bodů jednotlivých stran, vidíme, že jeho původně rovněž čtvercový průřez $ABCD$ přešel v rovnoběžník $abcd$, při čemž však diagonály $\overline{AC}$ a $\overline{BD}$, z nichž prvá se prodloužila o el, druhá o touž délku



Obr. 305. *a*).

zkrátila, zůstaly na sobě kolmými. Můžeme pak střih měřiti změnou úhlu $\sphericalangle DAB$, původně pravého, který přešel v $\sphericalangle dab = \omega$. Tuto změnu $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \omega$ nazýváme *úhlem střižným*. Dle dřívějších vývodů o střihu víme, že se plocha nezměnila, že tedy $ABCD = abcd$.



Obr. 305. *b*).

Představme si nyní jiný hranol čtvercového průřezu $A_1B_1C_1D_1$, při čemž budiž $A_1B_1 = AB$ (obr. 305. *b*). Strana A_1B_1 budiž nepohnutelně spojena s rovinou, na níž spočívá. Dáme-li na hoření ploše C_1D_1 působiti nějaké plošné síle F, přejde průřez čtvercový

v rovnoběžník $A_1B_1c_1d_1$, tak že úhel $\sphericalangle D_1A_1d_1 = \vartheta$. *). Plocha se touto deformací nezmění, $A_1B_1C_1D_1 = A_1B_1c_1d_1$, jedná se tedy patrně o střih, a ϑ jest úhlem střižným. Je-li tento úhel velmi malým, a to jest naším stálým předpokladem, najdeme snadno vztah mezi ním a prodloužením, resp. zkrácením diagonál A_1C_1, resp. B_1D_1, které původně měly délku l.

Především jest patrno, že

$$\overline{D_1d_1} = \overline{A_1D_1} \,.\, tg\,\vartheta,$$

nebo, ježto ϑ je velmi malé, měříme-li je v obloukové míře (v radiantech)

$$\overline{D_1d_1} = \overline{A_1D_1} \,.\, \vartheta.$$

Dle věty Pythagorovy pak

$$\overline{A_1d_1} = (\overline{A_1D_1^2} + \overline{D_1d_1^2})^{\frac{1}{2}} = \overline{A_1D_1}\,(1 + \vartheta^2)^{\frac{1}{2}}$$

čili rozvineme-li dle binomické poučky a omezíme-li se na prvý člen

$$\overline{A_1d_1} = \overline{A_1D_1}\left(1 + \frac{1}{2}\,\vartheta^2 - \ldots\right).$$

Z toho jest patrno, že délka strany při deformaci zůstává až na veličiny nesmírně malé druhého řádu nezměněnou. Kdyby na př. $\vartheta = \frac{1}{1000}$ radiantu $= \frac{57{\cdot}3^0}{1000}$ čili asi $3{\cdot}4'$, jest změna její menší než $\frac{1}{2000000}$. Poněvadž však $\overline{A_1B_1} = \overline{A_1d_1}$, jest úhel obou nových diagonál A_1c_1 a B_1d_1 úhlem pravým, deformací se tedy nezměnil. Prodloužení diagonály A_1c_1 — A_1C_1 najdeme, spustíme-li z C_1 kolmici C_1c_2 na A_1c_1, jakožto

$$\overline{c_2c_1} = \overline{C_1c_1} \,.\, cos \sphericalangle C_1c_1c_2 = \overline{D_1d_1} \,.\, cos \sphericalangle C_1c_1c_2.$$

Úhel ten rovná se však velmi přibližně polovině úhlu pravého, a jeho cosinus tedy $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dosazením obdržíme tudíž

$$\overline{c_2c_1} = \overline{D_1d_1} \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\overline{A_1D_1}}{\sqrt{2}} \,.\, \vartheta = \frac{\vartheta}{2} \,.\, \overline{A_1D_1} \,.\, \sqrt{2} = \frac{\vartheta}{2} \,.\, l.$$

Zcela obdobně bychom našli, že druhá diagonála $\overline{B_1D_1} = l$ je o tutéž délku zmenšena. Z toho je patrno, že došli jsme k témuž typu deformace, jako v případě prvém, znázorněném obrazcem

*) Kdyby osy X a Y koincidovaly s $\overline{A_1B_1}$ a $\overline{A_1D_1}$, mohli bychom ve smyslu dříve uvedené symboliky označiti $\overline{D_1d_1} = \overline{A_1D_1} \,.\, x_y$.

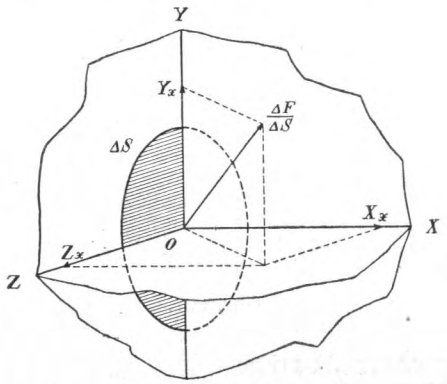
305. *a.*, ježto stejně jako tam, diagonály zůstaly na sobě kolmými a jedna z nich se prodloužila, druhá zkrátila o tutéž délku; jinými slovy — obrazec 305. *b.* vznikne z obr. 305. *a.* prostě tak, že pootočíme rovnoběžník *abcd*, až splyne strana *ab* s *AB*. Srovnáním obou výrazů pro změnu diagonál plyne pak

$$el = \frac{\vartheta}{2} \,.\, l \quad \text{čili} \quad \vartheta = 2e.$$

Tento důležitý vztah mezi střižným úhlem a střihem jej způsobivším, dá se ostatně také snadnou geometrickou úvahou přímo z obr. 305. *a.* dokázati. Stejně jako pro obyčejnou deformaci elongací platí jistá mez pružnosti také pro střih. Poznamenejme, že při pokusech k určení střihu nemá ϑ přesahovati asi $\frac{1}{1000}$ radiantu. Přesahuje-li mez pružnosti, dosáhne-li na příklad hodnoty asi $\frac{1}{200}$ radiantu (přibližně $^1/_3{}^0$), tu buď nastane deformace trvalá, to jest těleso se buď zlomí (ocel) nebo látka teče (olovo). Vidíme také, jak střih podává nám nové kriterion aggregátního stavu látky; kapaliny nesnesou střihu, látky pevné jej snášejí. Ovšem přechod jest dán látkami huspeninovými, gelatinou, gallertami.

§ 376. **O napětí.**

Představme si v tělese, podrobeném vnějším silám, malou plošku ΔS. Části tělesa na obou její stranách působí navzájem



Obr. 306.

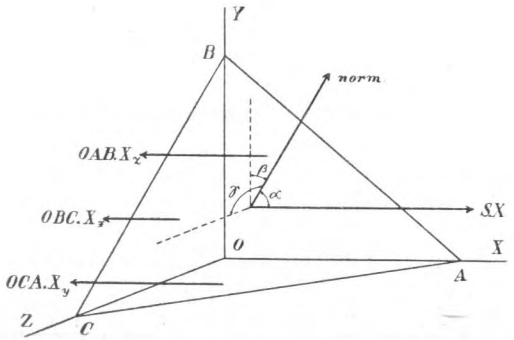
jistou silou ΔF určitého směru, jejíž původ jest nutno hledati v reakcích molekul na sílu vnější. Síla ΔF vztažená na jednotku

plochy, to jest, podíl $\frac{\Delta F}{\Delta S}$, nazývá se *napětím*. Směr jeho vzhledem k rovině ΔS může býti jakýkoli; leč vždy lze je rozložiti na tři složky, jednu kolmou na rovinu tu, druhé dvě navzájem kolmé a v rovině ležící. (Viz obr. 306.)

Jeli rovina plošky ΔS kolmou na ose X, tak že osy Y a Z leží v rovině, a rozložíme-li napětí $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ dle těchto os, pak označujeme složky napětí s Kirchhoffem (a Lovem) X_x, Y_x, Z_x, kde písmena veliká označuje směr síly, index osu, na níž kolmou jest rovina, k níž napětí patří. Složku X_x nazýváme *napětím normálním*, Y_x a Z_x *napětími tangenciálními* *).

Rozměrem napětí jest, jak patrno z definice, $\frac{\text{síla}}{\text{plocha}} = \frac{M}{LT^2}$ a absolutní jedničkou $\frac{dyna}{cm^2}$. Leč právě v technických pracích, mnoho s naukou o pružnosti souvisících, ještě stále se udržuje stará jednička $\frac{váha\ kg}{mm^2}$.

Lze snadno ukázati, že známe-li zmíněné složky napětí působící na tři k osám souřadnicovým kolmé plošky, totiž X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z, můžeme napsati hodnotu složek napětí působících na libovolnou rovinu, jejíž normála svírá se směrem os



Obr. 307.

X, Y, Z úhly α, β, γ. Užijme k tomu t. zv. *Cauchyho* čtyřstěnu $OABC$, jejž uzavírá rovina daná ABC, s rovinami souřadnicovými (obr. 307.). Plocha ABC buď rovna S. Pak víme, že průměty této

*) Místo označení X_x, Y_y, Z_z pro napětí normální a Y_z, Z_x, X_y pro tangenciální užívá *Lord Kelvin* písmen PQR, resp. STU, *Lamé* $N_1N_2N_3$, resp. $T_1T_2T_3$.

plochy na jednotlivé roviny souřadnicové jsou dány součiny z plochy S a kosinusu příslušného úhlu sklonu roviny S, či krátce že

$$OBC = S \,.\, cos\ \alpha, \quad OCA = S \,.\, cos\ \beta, \quad OAB = S \,.\, cos\ \gamma.$$

Jsou-li složky výsledné síly působící na plochu S ve směrech os $S\,.\,X$, $S\,.\,Y$ a $S\,.\,Z$, musí, aby pod vlivem sil pružnosti zůstal čtyřstěn v rovnováze, rovnati se tyto složky výslednicím silových složek, působících na strany OBC, OCA a OAB. Můžeme tudíž dle prostého principu aequivalence sil psáti pro složku x-ovou rovnici

$$S \,.\, X = OBC \,.\, X_x + OCA \,.\, X_y + OAB \,.\, X_z.$$

Dosadíme-li za průměty plochy S dříve napsané výrazy, plyne pro x-ovou složku napětí působícího na plochu S — a zcela obdobně i pro složku y-ovou a z-ovou

$$\begin{aligned} X &= X_x \,.\, cos\ \alpha + X_y \,.\, cos\ \beta + X_z \,.\, cos\ \gamma, \\ Y &= Y_x \,.\, cos\ \alpha + Y_y \,.\, cos\ \beta + Y_z \,.\, cos\ \gamma, \\ Z &= Z_x \,.\, cos\ \alpha + Z_y \,.\, cos\ \beta + Z_z \,.\, cos\ \gamma. \end{aligned}$$

Když místo rovnováhy elementárního čtyřstěnu obdobně zkoumáme rovnováhu elementárního rovnoběžnostěnu, hledajíce podmínku, aby síly na jeho strany působící nezpůsobovaly momentu otáčivého, dojdeme podobnou elementární úvahou k rovnicím

$$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z \quad \text{a} \quad X_y = Y_x.$$

Jest tudíž systémem šesti složek $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$ napětí působící na libovolnou plochu úplně dáno.

Ale lze ještě dále věc zjednodušiti tím, že se dá dokázati *), že v každém bodě tělesa pružného vnějším silám podrobeného existují tři roviny, na které působí pouze napětí normální, kde tedy tangenciálních složek není, tak že, zavedeme-li tyto roviny jakožto roviny souřadnicové, $Y_z = Z_x = X_y = 0$. Tyto důležité roviny nazýváme *hlavními rovinami*, napětí k nim kolmá *hlavními napětími* a směry těchto napětí *hlavními osami*. Napětí normální nazýváme často *tahem*, resp. *tlakem*.

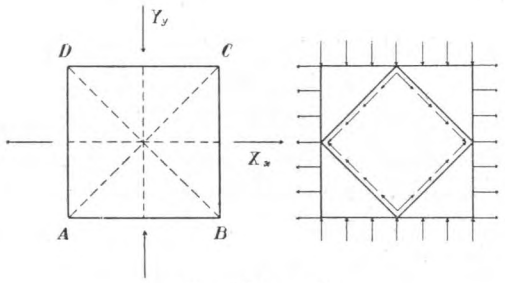
Nejjednodušším typem napětí jest napětí nebo, chceme-li, tlak *hydrostatický*, kde dle principu všestranného šíření se tlaku v kapalině, jest $X_x = Y_y = Z_z = C$ a $Y_z = Z_x = X_y = 0$. V tom případě vidíme, že tlak na libovolně skloněnou plochu S (α, β, γ libovolné) působí kolmo, neboť $X = C \,.\, cos\ \alpha$, $Y = C \,.\, cos\ \beta$,

*) Srv. Seydler-Koláček, str. 64.

$Z = C \,.\, cos\ \gamma$ a jest na libovolnou jedničku plošnou stejné. Jest totiž jeho čtverec dle Pythagorovy věty roven

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = C^2\,(cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma) = C^2.$$

Druhý základní typ jest *napětí střižné*, takové, že jeho dvě hlavní složky jsou stejně veliké, opačného směru, a třetí rovna nulle, to jest $X_x = -\,Y_y = F$, $Z_z = 0$. Představme si jednotkovou krychli, jejíž strany mají směr hlavních os, *ABCD* (obr. 308. *a*).



Obr. 303. *a*), *b*).

Úvahu, kterou bychom mohli přímo vésti na základě rovnováhy hranolu *BCD*, povedeme analyticky, abychom na příkladě konkretním ukázali applikaci dříve uvedených vzorců. Ježto jsou osy hlavními, je $Y_z = Z_x = X_y = 0$; mimo to pak platí podmínka $X_x = -\,Y_y = F$, $Z_z = 0$. Napětí, jemuž podléhá plocha *BD*, má složky

$$X = X_x \,.\, cos\ 45^0 = F \,.\, cos\ 45^0,$$
$$Y = Y_y \,.\, cos\ 45^0 = -\,F \,.\, cos\ 45^0,$$

tak že výsledné napětí, jemuž plocha podléhá, jest

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \pm\ F \,.\, \sqrt{2} \,.\, cos\ 45^0 = \pm\ F.$$

Směr jeho plyne přímo ze složení napětí X_x a Y_y; jest tangenciální k diagonální rovině *DB*. Podobný výsledek plyne z úvahy o diagonální rovině *AC*. Výsledek můžeme názorně vyznačit, jak v obr. 308. *b*. jest patrno.

Oba dosud uvedené typy napětí — hydrostatické a střižné — nazývají se často napětími *jednoduchými*, jsou základními typy, z nichž jiné dají se složiti. Mimo to mají tu vlastnost, že jsou navzájem *orthogonální* — pravoúhlá, což má ten význam, že hydrostatické napětí nekoná práce, dozná-li těleso střižné deformace,

aniž naopak napětí střižné koná práci při stejnoměrné dilataci (kompressi) *). Obojí je z pojmu práce evidentní.

Jakožto jednoduché napětí lze uvésti také napětí *longitudinální*, pozůstávající z tahu nebo tlaku v jednom směru, který se zve *osou* tohoto napětí.

§ 377. Hooke-ův zákon. Vztah mezi deformacemi a napětími.

Základní věta, na níž spočívá veškerá applikace mathematiky na zjevy pružnosti, byla vyjádřena *Robertem Hookem* (1635 až 1703) v roce 1676 výrokem: Ut tensio, sic vis **). Ovšem platí tato věta pouze potud, pokud nepřekročí se meze pružnosti. Nejvšeobecněji můžeme zákon Hookeův vyjádřiti slovy: Napětí jest úměrno deformaci. Faktor úměrnosti, nezávisící ani na napětí, ani na deformaci, pokud ovšem věta tato platí, nazývá se *modulem pružnosti*. Dle toho, o který typ napětí se jedná, rozeznáváme různé moduly. Sestává-li deformace ze změny objemu beze změny tvaru, jedná-li se tedy o *napětí hydrostatické* a příslušnou stejnoměrnou dilataci, nazýváme onen faktor *modulem pružnosti objemové, modulem objemovým* (angl. bulk modulus, něm. Kompressionsmodul), u kapalin obyčejně reciproká hodnota kompressibilitou, stlačitelností; označíme jej k.

Jedná-li se o *střih*, jímž mění se tvar beze změny objemu, tak že deformace měřena jest střižným úhlem, napětí tangenciální silou na jedničku plochy, přicházíme k *modulu pružnosti tvarové, modulu střižnému*, či *rigiditě* (angl. modulus of rigidity, něm. Steifigkeit, Scherungsmodul); budeme jej označovati n.

K charakterisaci isotropního tělesa homogenního stačí tyto dvě konstanty pružnosti úplně. Methody, jimiž se pružnost stanoví, vedou však k tomu, že se zavádějí ještě jiné veličiny, ovšem s uvedenými spojené jednoduchými vztahy mathematickými, k nimž se v dalším vrátíme.

Na tomto místě uvedeme jednu z nich, totiž *modul Youngův*, či *modul pružnosti podélné* (Seydler), zvaný též *modulem pružnosti v tahu* nebo často praegnantně prostě *modulem pružnosti*

*) Viz bližší *W. Thomson* (Lord Kelvin) v článku Elasticity Encyklopaedie britické.

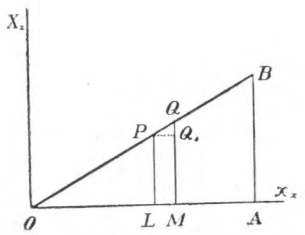
**) Ve zmíněném roce uveřejnil Hooke v knize obsahující popis helioskopů anagramm *ceiiinosssttuu*, jehož smysl objasnil r. 1678 v knize »De potentia restitutiva«. Dnes jest nám jasno, že jest to pouhé prvé přiblížení, vznikající rozvinutím funkčního vztahu mezi napětím a deformací v Mac-Laurinovu řadu, v níž se omezíme na prvý platný člen.

(angl. Young's modulus, něm. Youngscher Modul, Dehnungsmodul, Elastizitätsmodul). Jest faktorem úměrnosti v rovnici spojující napětí longitudinální s prodloužením (zkrácením) jednotky délkové v ose napětí. Označíme jej E.

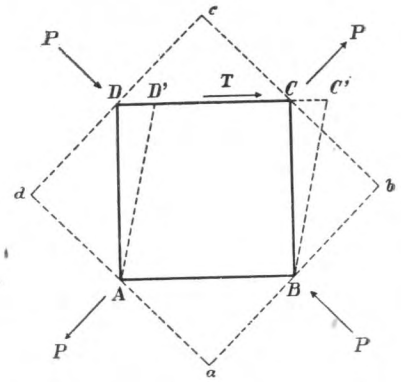
§ 378. Energie tělesa deformovaného.

Má-li nastati deformace tělesa, je nutno, aby vnější síly, které ovšem jsou stále v rovnováze s napětími v tělese, konaly práci podél určitých drah. Tato práce jest měrou potenciální energie, která se v deformovaném tělese nahromadí, a kterou pro jednoduchost vztahujeme k objemové jedničce.

Řešme nejprve jednoduchý příklad deformace longitudinální. Na jednotkovou krychli působí jediná vnější síla X_x, stejně veliká jako odpovídající jí napětí, kolmo na jednu stranu. Nastane tudíž posunutí této strany x_x, takové, že $X_x = E \,.\, x_x$. Znázorněme si diagrammem rovnoměrné stoupání napětí X_x s rostoucí elongací x_x (obr. 309.). Dostoupí-li



Obr. 309.



Obr. 310.

při pozvolném zatěžování napětí hodnoty LP, má elongace velikost $\overline{OL}$. Dalším zatížením $\Delta X_x = \overline{Q_1Q}$ zvětší se elongace o $\Delta x_x = \overline{LM}$. Při tom vykoná se práce rovná $(X_x + \frac{1}{2}\Delta X_x) \,.\, \Delta x_x$, čili velmi přibližně rovná $X_x \,.\, \Delta x_x$ znázorněná plochou LMQ_1P. Dostoupí-li se tedy při pozvolném zatěžování po malých ΔX_x a Δx_x od stavu nedeformovaného až k zatížení $\overline{AB}$ za deformace $\overline{OA}$, jest práce celková W rovna součtu takovýchto elementárných proužků, čili jinými slovy rovna ploše trojúhelníka

$$OAB = \tfrac{1}{2} X_x \,.\, x_x = W.$$

Kratčeji plyne výraz týž následovně: $X_x = E \,.\, x_x$. Práce elementární jest

$$dW = X_x \,.\, dx_x = E x_x dx_x,$$

práce celková

$$W = \int_0^{x_x} E x_x dx_x = \tfrac{1}{2} E x_x^2 = \tfrac{1}{2} X_x x_x.$$

Vidíme tedy, že práce deformační na objemové jedničce a tedy také *potenciální energie objemové jedničky deformovaného tělesa* při deformaci longitudinální *jest rovna polovičnímu součinu z napětí a deformace.* Týž výsledek platí také u jiných typů deformace, jest obecným.

Jednej se podruhé o napětí a deformaci stejnoměrnou (hydrostatickou). Je-li na každé straně jedničkové krychle stejný tlak (napětí) $X_x = Y_y = Z_z = P$ a zkrátí-li se každá hrana o $x_x = y_y = z_z = e$, tedy stejně jako při longitudinální deformaci dokážeme, že práce vykonaná na každém páru protilehlých stran se rovná $\frac{1}{2} P \,.\, e$, čili práce celková $\frac{3}{2} Pe$. Víme však, že $3e = \delta$, takže i zde $W = \frac{1}{2} P \,.\, \delta$.

Střih uvažovali jsme dvěma způsoby: Dle prvého jest způsoben tangenciálním napětím T, působícím na jedné straně CD jedničkové krychle, jejíž strana AB jest fixována (obr. 310.). Deformační práci snadno vypočítáme, vzpomeneme-li, že $T = n \,.\, \vartheta$; jest totiž patrně při malém zvětšení střižného úhlu $d\vartheta$, ovšem měřeného mírou obloukovou, ježto $\overline{AD} = 1$

$$dW = T \,.\, d\vartheta = n\vartheta \,.\, d\vartheta,$$

tedy

$$W = \int_0^{\vartheta} n\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2} n\vartheta^2 = \tfrac{1}{2} T \,.\, \vartheta.$$

Jinak uvažujeme-li střih vzniklý kontrakcí $e \,.\, \overline{ab}$ se strany cd a ab, a stejně velikou elongací se strany ad a bc, kteréž jsou způsobeny normálními napětími P ve smyslu v obrazci naznačeném působícími, je tlak na jednotlivé straně krychle $abcd$ působící roven $\overline{ab}^2 \,.\, P$ a práce jeho podobně jako dříve u stran ab a cd rovna $\frac{1}{2}\overline{ab}^2 \,.\, P \,.\, \overline{ab} \,.\, e = \frac{1}{2}\overline{ab}^3 \,.\, P \,.\, e$ a podobně se stran ad a bc, $\frac{1}{2}\overline{ab}^3 \,.\, P \,.\, e$, čili celkem práce napětí rovná energii v krychli $abcd$ rovna $\overline{ab}^3 \,.\, P \,.\, e$ neboli v krychli jedničkové Pe. Ježto jsou oba způsoby vzniku střihu stejně oprávněny, musí

$$Pe = \tfrac{1}{2} T\vartheta.$$

Ježto pak z kapitoly o střihu víme, že

$$\vartheta = 2e, \quad \text{plyne} \quad P = T,$$

výsledek nám z kapitoly o napětí známý.

Z relace

$$T = n \,.\, \vartheta \quad \text{plyne též} \quad P = 2ne \text{ a } e = \frac{P}{2n}.$$

§ 379. Pružnost v tahu (tlaku).

Budiž dána tyč (drát) z materiálu homogenního, délky l a průřezu q po celé délce stejného. Upevníme-li ji na jednom konci

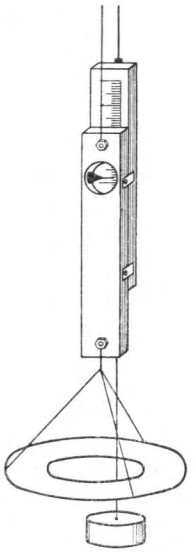
ve směru na př. svislém, a napneme-li ji na druhém silou P rovněž svisle působící, na př. závažím, nastane prodloužení délkové o obnos Δl. Mysleme si kdekoli v tyči vytknutý jedničkový objem, a to tak, aby jeho strany byly rovnoběžné jednak s koncovými (horizontálními), jednak s postranními (vertikálními) plochami tyče. Rovnováha vnější síly P a vnitřních napětí vyžaduje, aby napětí horizontální rovnala se nulle, napětí ve směru vertikálním pak bylo ve všech horizontálních rovinách tyče — zanedbáváme-li její vlastní váhu — stejné a rovné $\frac{P}{q}$. Prodloužení jednotky délkové bude patrně $\frac{\Delta l}{l}$ a dle zákona Hookeova můžeme psáti

$$\frac{P}{q} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}.$$

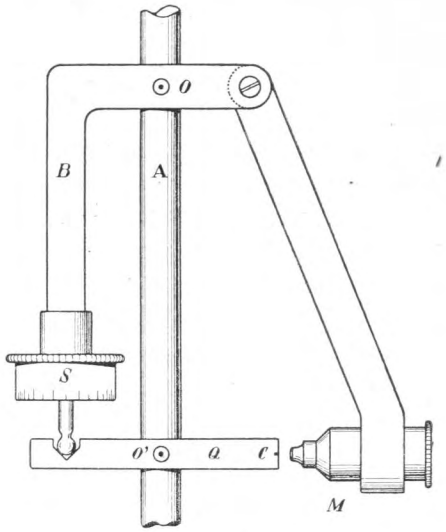
E, jak víme, nazývá se modulem pružnosti podélné, nebo pružnosti v tahu, jinak též modulem Youngovým, a může býti jednou z obou konstant, jimiž pružnost isotropního materiálu charakterisujeme. Je-li P negativní, jedná-li se tedy o tlak, zůstávají rovnice v platnosti, jen že ovšem jest též Δl negativním, nastává zkrácení tyče. Určíme-li experimentálně P, q, l a Δl, lze z výsledků měření E počítati.

Methoda podává se sama sebou: Měříme vzdálenost dvou značek na tyči (drátu) kathetometrem nebo upevníce drát horizontálně a zatěžujíce přes kladku, komparatorem. Jinak lze užíti methody zrcadla a škály, působí-li spodní konec drátu na malou páku, otáčející malé zrcátko kolem horizontální osy, nebo také, zvláště pro tyče tlusté, velmi citlivých optických method interferenčních (Abbe, Michelson). Pracujeme-li s dráty, jest výhodno užíti dvou stejných drátů blízko sebe visících, z nichž jeden zatěžujeme, a měříme pak prodloužení vzájemným posunutím značek na obou drátech upevněných. Tato methoda, při níž lze snadno užíti drátů velmi dlouhých, má také tu výhodu, že, jak patrno, se eliminují prodloužení vznikající změnami temperaturními, kteráž jsou u obou drátů stejná (*Kohlrausch* a *J. Osgood Thompson* 1891, ve věži Strassburského ústavu fysikálního). Zvláště pohodlné apparáty pro tato měření udal *Searle*. Jednodušší z nich znázorněn jest obr. 311., k němuž není potřebí dalšího vysvětlení. Dal by se také snadno upraviti na projekci. Pro tyče tlustší výhodným jest *Ewingův* extensometr, schematicky znázorněný obr. 312. Také zde stačí uvésti, že A jest tyč, jež se napíná, tyče B a Q jsou kolem os

O a O' pohyblivy, a mikroskopem M, jenž je opatřen okulárním mikrometrem, se pozoruje pošinutí (patrně směrem dolů při napí-



Obr. 311.



Obr. 312.

nání tyče) značky C na tyči Q. Jinak lze též mikrometrickým šroubem S uvésti značku v polohu původní. Tak se dá prodloužení o $\frac{1}{2000}$ *mm* snadno změřiti *).

§ 380. **Příčná kontrakce.**

Kdybychom při provádění pokusů o pružnosti v tahu současně velmi přesně měřili průměr tyče či drátu, seznali bychom, že se stoupajícím zatížením se postupně zmenšuje, tak že zmenšení jest úměrno napínající síle. Vztahujeme-li zase vše na jednotkovou krychli, jest zkrácení jednotky délkové ve směru příčném, neboli krátce příčná kontrakce — nazveme-li d průměr (tloušťku) — rovno $\frac{\Delta d}{d}$ a jest úměrno napětí $\frac{P}{q}$, tak že

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \cdot \frac{P}{q}.$$

*) Pěkný návod k laboratorním měřením v nauce o pružnosti podává knížka *G. F. C. Searle*: Experimental Elasticity (Cambridge 1908, stran 187).

Faktor μ nazývá se často *koefficientem příčné kontrakce**). Jako napětí, jest i příčná kontrakce $\frac{\Delta d}{d}$ úměrná podélné extensi $\frac{\Delta l}{l}$. Souměrně s koefficientem μ zavádí se často také *koefficient podélné extense* λ rovnicí

$$\frac{\Delta l}{l} = \lambda \cdot \frac{P}{q} = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{q},$$

z níž jest patrno, že není než reciprokou hodnotou modulu Youngova.

Velmi často zavádí se v theorii pružnosti jakožto zvláštní veličina poměr mezi koefficientem příčné kontrakce a koefficientem podélné extense, a nazývá se *poměrem Poissonovým* (franc. coefficient de Poisson, angl. Poisson's ratio, něm. P. Kostante nebo také Elastizitätszahl). Budeme jej označovati σ; jest tudíž

$$\sigma = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Příčná kontrakce, nejedná-li se o tyče velmi tlusté, jest veličinou velmi malou a proto jest přímé určení Poissonova poměru spojeno s velikými experimentálními obtížemi. Lze je překonati jednak užitím systému jemňoučkých pák, spolu s methodou zrcadla a škály (*Bauschinger* 1879), tak že jest ještě $\frac{1}{5000}$ *mm* měřitelnou, jednak interferenčními methodami optickými (*Stromeyer* a *Kennedy* 1894, *Benton* 1900 a 1901). Ovšem že pro velmi snadno prodlužitelné látky, jako jsou kaučuk nebo gelatina, neskytá přímé měření velikých obtíží; *Röntgen* (1876) užil toho vtipného obratu, že na prodlouženou tyč kaučukovou čtvercového průřezu vtiskl krajem trubice kruh o známém průměru, kterýž po odtížení přijal tvar ellipsy o měřitelných osách.

Vedle method nepřímých k určení poměru Poissonova, kteréž se zakládají na dalších zjevech pružnosti o nichž pojednáme, totiž na torsi a ohybu, lze i ze zjevu podélné extense určiti zmíněnou konstantu materiálu, a to tak, že buď stanovíme objem napiatého drátu, anebo užijeme tyčí dutých a stanovíme objem dutiny. Změna objemu napiatého drátu nebo dutiny v napiaté trubici jest totiž

*) V terminologii nauky o pružnosti není ustálenosti, názvy týchž pojmů jsou u různých autorů různé. Po příkladu *Chwolsonově* a j. chceme jednotně užívati názvu »modul« pro faktor c_1 v rovnici »napětí $= c_1 \times$ deformace« a »koefficient« pro jeho reciprokou hodnotu $c_2 = \frac{1}{c_1}$, intervenující ve vztahu »deformace $= c_2 \times$ napětí«.

v jednoduchém vztahu s poměrem Poissonovým, jejž podává následující úvaha, provedená pro tyč průřezu kruhového:

Budiž l délka a $q = \frac{1}{4}\pi d^2$ průřez, tedy d průměr tyče; její objem jest $V = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot l$. Napneme-li ji podélně silou P, změní se objem o ΔV, poněvadž vzroste délka na $l + \Delta l$, a průměr klesne na $d - \Delta d$. Jest tudíž nový objem

$$V + \Delta V = \tfrac{1}{4}\pi (d - \Delta d)^2 \cdot (l + \Delta l) = \tfrac{1}{4}\pi d^2 l \left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta l}{l}\right).$$

Za $\frac{\Delta d}{d}$ a $\frac{\Delta l}{l}$ můžeme dosaditi z předchozího součiny $\mu \cdot \frac{P}{q}$ resp. $\lambda \cdot \frac{P}{q}$. Roznásobíme-li, zanedbávajíce vzájemné součiny těchto malých veličin, obdržíme

$$V + \Delta V = \tfrac{1}{4}\pi l d^2 \left(1 + \lambda \frac{P}{q} - 2\mu \frac{P}{q}\right)$$

čili

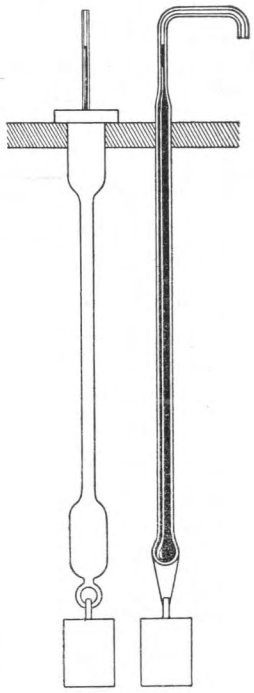
$$\frac{\Delta V}{V} = (\lambda - 2\mu) \frac{P}{q} = \lambda (1 - 2\sigma) \frac{P}{q}.$$

Analogicky s dosavadním názvoslovím mohli bychom faktor

$$\eta = \lambda - 2\mu = \lambda (1 - 2\sigma)$$

zváti *koefficientem objemovým při tahu*. Vidíme především, že, má-li prodloužení positivním tahem (P kladné) odpovídati zvětšení objemu (ΔV kladné), musí $1 - 2\sigma > 0$, t. j. $\sigma < \frac{1}{2}$. Kdyby $\sigma = \frac{1}{2}$, tedy by deformací objem zůstal nezměněn, kdyby pak $\sigma > \frac{1}{2}$. klesal by při prodlužování, což jest nejen nepravděpodobné, ale, jak uvidíme, dosud u žádné látky nebylo nalezeno. Jinak je stoupnutí objemu větší, čím je σ menší.

Změříme-li V, ΔV, λ, q a P, můžeme patrně σ počítati. *Cagniard-Latour* již r. 1827 uspořádal příslušná měření tím způsobem, že shora (pákou) napínaný drát veden byl osou úzké vertikální trubice, na jejímž spodním konci byl upevněn a kteráž byla naplněna vodou. Byl-li drát napiat, dala se jeho změna objemu určiti ze změny postavení menisku vodního v trubici



Obr. 313.

a kalibru jejího. Již zmíněný badatel našel, že $\eta > 0$, že tedy napětím objem roste.

Přesnější pokusy konal *Wertheim*, kterýž v letech 40tých minulého století vůbec zkoumáním pružnosti materiálů velmi obšírně se zanášel, užívaje dle rady *Regnaultovy* tyčí dutých. Myslíme-li si totiž stěny trubice rozděleny rovinnými řezy s osou a také navzájem rovnoběžnými, plyne ze snadné úvahy, že objemová změna dutiny jest táž, jako by byla vyplněna látkou, z níž stěny sestávají. Přiblížiť se totiž rovnoběžné řezy k sobě stejně v obou případech. Trubice (kovové), jichž užil Wertheim, znázorněny jsou obr. 313. *a.*; nahoře byly opatřeny graduovanou kapillárou skleněnou. Užijeme-li silnostěnné trubice skleněné, tvaru v obr. 313. *b.* znázorněného, hodí se pokus za laboratorní i demonstrační; vytažená kapillára jest dvakrát v pravém úhlu ohnuta pro snazší plnění.

§ 381. **Číselné hodnoty** E **a** σ.

Dle základních vzorců má modul pružnosti v tahu E rozměr síly dělené plochou, poměr Poissonův σ jest pouhým číslem. Ve smyslu absolutní soustavy měr nutno tedy E udávati v jednotce $\frac{dyna}{cm^2}$ $\left(\text{nebo } \frac{megadyna}{cm^2}\right)$. Ale právě v oboru nauky o pružnosti udržela se velmi všeobecně účelům technické praxe lépe odpovídající stará míra $\frac{váha\ kg}{mm^2}$. Převodní koefficient této staré míry v novou obnáší 981 . 1000 . 100, jinými slovy, násobíme-li údaje pro E v míře staré 10^8, obdržíme údaj v nové míře asi o 2% příliš vysoký. Při tom často není třeba na ona 2% vůbec bráti ohledu, neboť jednotlivé údaje pro tutéž látku liší se o obnosy daleko větší. Mají tudíž veškerá čísla udaná význam pouze přibližný, což však nelze přičítati snad příliš malé přesnosti při měřeních docílitelné, nýbrž v míře daleko větší velikým obtížím, jak jednotlivé látky resp. jich stav (kov tažený, litý, napouštěný a p.) exaktně definovati.

Abychom zůstali v souhlasu s většinou knih, uvedeme hodnoty pro E v míře $\frac{váha\ kg}{mm^2}$, a to krajní dle sestavení *Auerbachova* ve Winkelmannově Handbuch der Physik, sv. I. (Lipsko 1908). Sloupec druhý obsahuje čísla *Voigtova* (Wied. Ann. *48*, 1893, str. 674), platící pro kovy co nejčistší a lité; další sloupec obsahuje *Voigtovy* údaje pro σ, poslední pak střed z údajů jiných pozorovatelů.

Látky	E $\frac{váha\ kg}{mm^2}$	E (Voigt)	σ (Voigt)	σ (střední)
Kovy:				
Iridium	52500	—	—	—
Rhodium	28000	—	—	—
Ocel litá	18500 až 20560	20400	0·26	
» Bessemerova	21140	—	—	0·29
» napouštěná	17300	—	—	
Nikl	21700 až 23950	20300	0·30	0·33
Železo lité	11700	12800	0·23	
» tažené	19000 až 21450	—	—	0·28
Platina	15500 až 17200	—	—	0·21
Měď	10520 až 12550	10850	0·13	0·34
Bronz (88 : 12)	—	10600	0·30	0·36
Zinek	8734 až 10480	10300	0·33	0·27
Mosaz (6 : 4)	—	9220	0·25	0·37
Stříbro	7010 až 7597	7790	0·31	0·38
Zlato	5585 až 9800	7580	0·33	—
Kadmium	—	7070	0·44	—
Aluminium	6716 až 7540	6570	0·27	0·36
Cín	1700 až 4768	5410	0·56?	—
Magnesium	—	4260	0·25	—
Vismut	—	3190	0·29	—
Jiné látky:				
Korund	52000	—	—	—
Křišťál	10300	—	—	—
Skla	5477 až 8170	—	—	0·197 až 0·319
Křemenová vlákna	5180 až 6238	—	—	—
Mramor	5000	—	—	—
Dřeva axiálně	517 až 1262	—	—	—
» radiálně	73 až 270	—	—	—
Led	276 až 670	—	—	—
Paraffin	170	—	—	0·50
Vosk	51	—	—	—
Kaučuk	0·02 až 0·8	—	—	0·47
Gelatina	0·02	—	—	0·50
Kork	—	—	—	0·00

Jak je patrno, pohybují se hodnoty E v mezích velmi širokých a závisí, jak zvláště u oceli a železa uvedeno, velmi značně na stavu látky; u kovů taţených téměř vždy jsou větší než u napouštěných nebo litých. U látek elasticky abnormních, jako je kaučuk, jest modul pro prvá prodloužení velmi malý a celkem stálý, když dosáhne prodloužení hodnoty $\frac{\Delta l}{l} = 1$ (délka je dvojnásobná), počne stoupat od 0·1 až asi k 300, kteroužto hodnotu pak od čtyřnásobné původní délky nadále zachovává (*Villari* 1871). Se stoupající teplotou u kovů modul klesá, nejméně u platiny, kde mezi 0° a 100° klesne asi o 0·89%, nejvíce u aluminia, kde v témž intervallu klesne asi o 19·5% (*Katzenelsohn* 1887). U abnormních látek, na př. paraffinu, je klesání ještě prudší: E klesne z 223 za 5·7° C na 127·4 za 23° (*Segel* 1899). U kaučuku dle složení někdy s teplotou klesá, jindy, a to častěji, stoupá.

O Poissonově poměru sluší poznamenati následující: Poisson sám dovodil analyticky z jistých molekulárně-theoretických představ, že má býti pro všechny normální látky, jako jsou na př. kovy, stejný a rovný $^1/_4$. Tento důsledek jeho není ovšem ani z daleka splněn: i u kovů vidíme, jak kolísá mezi 0 a $^1/_2$, ač střední hodnota pro deset kovů jest asi 0·31, pro 11 slitin ca. 0·39, pro 17 jenenských skel pak 0·243, tedy není alespoň příliš od $^1/_4$ vzdálena. Za to u jiných látek vidíme odchylky veliké, na př. pro opál nalezli *Drude* a *Voigt* (1891) číslo 0·06. Velmi zajímavým jest také abnormní, takořka limitní chování se paraffinu, gelatiny a kaučuku, jichž objem, ježto σ jest velmi přibližně rovno $^1/_2$, se tahem nebo tlakem longitudinálním nemění, a u korku, kde nenastává žádná kontrakce příčná. Se stoupající teplotou σ poněkud stoupá.

§ 382. **Tepelné změny deformacemi vznikající.**

Na tomto místě chceme se zmíniti ještě o jednom zjevu, který vzniká při deformaci tělesa, a to nejen napětím longitudinálním, nýbrž zcela všeobecně. Změní-li se napětí v tělese, které si představme úplně obklopeno nějakou látkou tepelně isolující, otepluje se nebo ochlazuje, vyvíjí nebo spotřebuje se teplo, a to dle toho, zdali napětí p potřebné k udržení stálé deformace e v tělese se stoupající teplotou stoupá nebo klesá, zdali tedy $\left(\frac{\Delta p}{\Delta T}\right)_e$ jest kladné či záporné. *Lord Kelvin* *) odvodil pomocí jednoduchého zvratného cyklu pro zvýšení teploty ΔT vznikající prodloužením

*) Viz c. článek »Elasticity« v Brit. Encyklopaedii nebo v Coll. Papers. Vol. III.

Δe v drátě o spec. hmotě ϱ, specifickém teple C a koefficientu lineárné roztažnosti α výraz

$$\Delta T = \frac{T_0 \cdot \left(\frac{\Delta p}{\Delta T}\right)_e}{A \,.\, C \,.\, \varrho} \cdot \Delta e,$$

kde A jest mechanický ekvivalent tepla, T_0 absolutní teplota, za níž prodloužení nastává; výraz jiný, s prvým rovnocenný, jest

$$\Delta T = - \frac{T_0 \,.\, \alpha \,.\, \Delta p}{A \,.\, C \,.\, \varrho}.$$

Jak z prvého tvaru je patrno, vzniká u kovů, kde se stoupající teplotou modul Youngův klesá, zvýšením napětí ochlazení, u kaučuku, kde modul obyčejně stoupá, oteplení.

Výraz *Kelvinův* byl *Joulem* (1859) a nověji *Haga-ou* (1887) nalezen v úplném souhlase se skutečností, ba byl z tohoto výrazu počítán mech. ekvivalent tepla (*Edlund*, 1866).

V důsledcích toho měli bychom zavésti vedle modulu Youngova (a také ostatních) obyčejného modul »adiabatický«, který by všude tam intervenoval, kde dějí se změny napětí takovým způsobem, že teplo z drátu nemůže unikati nebo do něj z venčí vnikati, zvláště tedy při všech změnách velmi rychlých, jako tomu je u hmotných útvarů, následkem vibrací vydávajících tón. Pro »adiabatický« modul Youngův E' plyne, je-li E modul »isothermický« — obyčejný

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} - \frac{\alpha^2 T_0}{A \,.\, C \,.\, \varrho}.$$

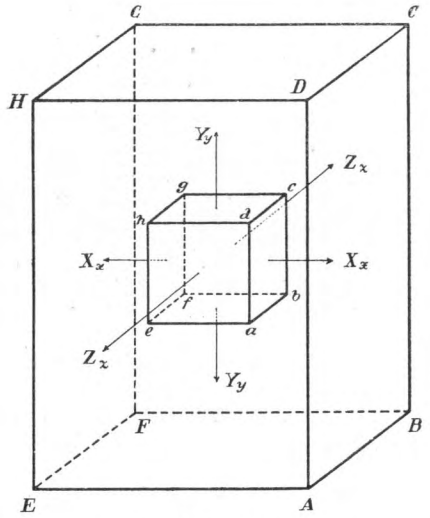
Propočítáním výrazu tohoto u kovů plyne však, že se E' liší od E jenom o několik málo promille (asi o 3‰), takže věc uvedená praktického významu nemá. Nedají se tím také vyložiti některé pokusy Wertheimovy, který v některých případech našel z akustických method u téhož materiálu Youngův modul až o 20% větší než ze statických.

§ 383. **Všeobecný případ hranolu podrobeného silám normálním. Vztahy mezi moduly a koefficienty.**

Buď $ABCDEFGH$ (obr. 314.) pravoúhlý hranol, podléhající na všech stranách silám normálním, které si navzájem drží rovnováhu, t. j. jsou na protilehlých stranách stejně veliké a opačného směru. Abychom nemuseli přepočítávat síly dělením plochami na napětí a deformace násobením délkami hran na celkové elongace, můžeme připojiti svou úvahu na jednotkovou krychli, kdekoli uvnitř hranolu rovnoběžně se stranami jeho vyříznutou *abcdefgh*. Směr os X, Y, Z budiž identický s FB, FG a FE. Směrem těchto os působí na jedničkovou krychli napětí X_x, Y_y a Z_z. Dle dosavadních

našich poznatků víme, že nastane následkem každého jednotlivého napětí podélná elongace a příčná kontrakce, tak že celkem nastanou směrem os elongace

$$x_x = +\lambda \,.\, X_x - \mu \,.\, Y_y - \mu \,.\, Z_z,$$
$$y_y = -\mu \,.\, X_x + \lambda \,.\, Y_y - \mu \,.\, Z_z,$$
$$z_z = -\mu \,.\, X_x - \mu \,.\, Y_y + \lambda \,.\, Z_z.$$



Obr. 314.

Tyto obecně platné rovnice lze applikovati na různé případy zvláštní.

1. Již v předchozích paragrafech jednali jsme o případě: X_x dáno, $Y_y = Z_z = 0$. Došli jsme konsekventně k důsledku

$$x_x = \lambda \,.\, X_x = \frac{1}{E} \,.\, X_x, \qquad y_y = z_z = -\mu X_x.$$

2. Důležitým jest případ, že $X_x = Y_y = Z_z = P$, že tedy těleso jest podrobeno »hydrostatickému« (zde ovšem negativnímu) tlaku, že se jedná o napětí stejnoměrné. Tu patrně

$$x_x = y_y = z_z = (\lambda - 2\mu)\, P = \frac{1}{E}\,(1 - 2\sigma)\, P.$$

Zvětšení jednotky objemové, ježto nový objem jest

$$(1 + x_x)\,(1 + y_y)\,(1 + z_z)$$

rovná se

$$\frac{\Delta V}{V} = x_x + y_y + z_z = 3x_x = 3\,(\lambda - 2\mu) \,.\, P,$$

z čehož plyne pro objemový modul k, daný definicí

$$P = k \,.\, \frac{\Delta V}{V}$$

$$k = \frac{1}{3\,(\lambda - 2\mu)} = \frac{E}{3\,(1 - 2\sigma)} \quad \text{čili} \quad \lambda - 2\mu = \frac{1}{3k}.$$

3. Abychom si zjednali vztahy pro modul pružnosti tvarové (rigiditu) n, daný vztahem $T = n \,.\, \vartheta$, kde T je napětí tangenciální, ϑ úhel střižný, položme

$$Z_z = 0 \quad X_x = -\,Y_y = P = T.$$

Tu

$$x_x = -\,y_y = (\lambda + \mu)\, T.$$

Víme však, že v tomto případě $\vartheta = 2x_x$, tedy

$$T = \frac{1}{2\,(\lambda + \mu)} \,.\, \vartheta \text{ a z toho } \frac{1}{2n} = \lambda + \mu = \frac{1}{E}\,(1 + \sigma).$$

Spojíme-li tento vzorec s dříve odvozeným pro k, plyne

$$\mu = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3k}\right) = \frac{3k - 2n}{18kn},$$

$$\lambda = \frac{1}{E} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3k}\right) = \frac{3k + n}{9nk}$$

a

$$\sigma = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{3k - 2n}{2\,(3k + n)}.$$

Vidíme, jak můžeme zvolíce dvě konstanty za základní, všechny ostatní jimi vyjádřit; ve spisech německých volívají se za základní E a σ, podobně i ve francouzských, kde zavádí se ještě t. zv. *Lamé-ho* koefficient $\dfrac{\sigma E}{(1 + \sigma)\,(1 - 2\sigma)}$, v anglických pak po vzoru Kelvinově obyčejně k a n.

4. Zajímavou jest otázka, jak se změní longitudinální deformace hranolu, nejsou-li strany jeho volné, nýbrž jsou-li pevny, brání-li jejich deformaci na př. to, že vrstva látky jde ve směrech postranních do nekonečna. Základní rovnice naše lze přepsat ve tvar

$$x_x = \frac{1}{E}\,(X_x - \sigma\,(Y_y + Z_z)),$$

$$y_y = \frac{1}{E}\,(Y_y - \sigma\,(Z_z + X_x)),$$

$$z_z = \frac{1}{E}\,(Z_z - \sigma\,(X_x + Y_y)).$$

Ve smyslu toho, že hranol náš nemůže ve směrech os Y a Z ani se rozpínat, ani stahovat, musí

$$y_y = z_z = 0,$$

tedy

$$Y_y = \sigma (Z_z + X_x) \quad \text{a} \quad Z_z = \sigma (X_x + Y_y).$$

Z toho plyne

$$Y_y - Z_z = \sigma (Z_z - Y_y)$$

a dále

$$Y_y = Z_z = \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot X_x, \quad \text{tak že} \quad x_x = \frac{X_x}{E}\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right).$$

Jest tudíž faktor u X_x, který bychom mohli zváti *koefficientem jednostranné extense*, menší (poněvadž $0 < \sigma < \frac{1}{2}$) než $\frac{1}{E} = \lambda$ koefficient podélné extense. Označíme-li jej λ' a jeho převratnou hodnotu (modul jednostranné extense) E', platí

$$\lambda' = \frac{1}{E'} = \lambda \cdot \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma} = \frac{1}{E} \cdot \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma}.$$

Kdyby platila pro poměr Poissonův střední hodnota $^1/_4$, bylo by $\lambda' = \frac{5}{6}\lambda$, to jest hranol jakožto součást nekonečně ve dvou směrech rozlehlé vrstvy, by doznal extensi (kompressi) asi o $^1/_6$ menší, než kdyby postranní jeho plochy byly volné.

§ 384. **Kubická dilatace.**

Z předchozího víme, že, působí-li na isotropní homogenní těleso stejnoměrné napětí P, zvětší se jeho objem V dle vzorce

$$P = k \frac{\Delta V}{V},$$

kde objemový modul k souvisí s ostatními konstantami vztahy

$$k = \frac{1}{3(\lambda - 2\mu)} = \frac{E}{3(1-2\sigma)}.$$

Z úvahy obdobné oné, o níž jsme se zmínili při pokusech Wertheimových o příčné kontrakci, plyne, že objemová změna tělesa dutého, jsou-li jeho vnější a vnitřní stěny podrobeny stejnému tlaku, jest táž, jako by bylo těleso ono plné. Jinak je tomu ovšem, působí-li na stěny dutiny tlak jiný než vně. Problém tento dá se poměrně jednoduše řešiti pouze pro případ duté koule a dutého válce,

kteréž však jsou pro své mnohostranné applikace (na př. vliv proměnlivého tlaku na kuličku thermometru rtuťového i vzduchového a p. v.) nejdůležitějšími *). Právě proto uvedeme alespoň výsledky řešení, byť i bez důkazů. Nejprve pro *kouli* o vnitřním radiu R_1, vnějším R_2.

Působí-li hydrostatický tlak P pouze *vně*, jest

$$\frac{\Delta_1 V}{V} = -\frac{9(1-\sigma)}{2E} \cdot \frac{R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot P,$$

působí-li týž tlak pouze *uvnitř* dutiny, jest

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3(1-2\sigma) R_1^3 + {}^3/_2 (1+\sigma) R_2^3}{E(R_2^3 - R_1^3)} \cdot P.$$

působí-li týž tlak i vně i uvnitř, jest, jak z hořeního patrno,

$$\frac{\Delta_3 V}{V} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E} \cdot P = -\frac{1}{k} \cdot P.$$

Následkem superposice účinků musí patrně

$$\Delta_3 V = \Delta_1 V + \Delta_2 V,$$

což napsanými výrazy jest splněno.

Výsledky, které platí pro dutý válec o vnitřním radiu R_1 a vnějším R_2, jsou podobně

pro tlak pouze vně $\quad \frac{\Delta_1 V}{V} = -\frac{5-4\sigma}{E} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot P,$

pro tlak pouze uvnitř $\quad \frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3(1-2\sigma) R_1^2 + 2(1+\sigma) R_2^2}{E(R_2^2 - R_1^2)} \cdot P,$

pro tlak uvnitř i vně $\quad \frac{\Delta_3 V}{V} = -\frac{3(1-2\sigma)}{E} \cdot P = -\frac{1}{k} P,$

při čemž, jak nutno, zase $\Delta_3 V = \Delta_1 V + \Delta_2 V.$

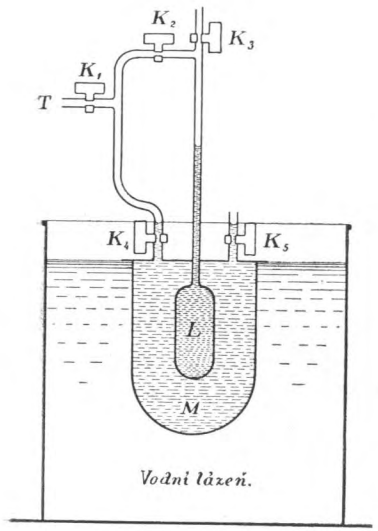
Pro veličinu $\frac{1}{k} = \gamma$, kterou bychom důsledně zvali koefficientem pružnosti objemové (při všestranném tlaku), zaveden jest hlavně u kapalin název koefficient stlačitelnosti, kompressibilita. Srovnáním s dřívějším § o pružnosti v tahu, jest koefficient tento třikráte větší, než koefficient objemový při (jednostranném) tahu,

$$\gamma = 3\eta.$$

---

*) Viz Koláček v knize citované str. 104 a násl., *Love* kap. V. a XI. Výsledky uvedené udal prvý *Lamé* v Leçons sur la théorie de l'élasticité, Paříž 1852.

K přímému určení k, resp. γ, užil *Regnault* (1847) (později *Grassi*, *Amagat*, *Röntgen* se *Schneiderem*, *Cantone*, *Voigt*) apparátu udaného *Oerstedem* (1822) na měření stlačitelnosti kapalin — »piezometru« ve tvaru schematicky znázorněném obr. 315. Nádoba L buď kulovitá (měděná a mosazná) nebo tvaru zkombinovaného z válce a polokoulí (sklo) končí v kapilláru a jest naplněna kapalinou, která stojí v kapiláře do určité výše. Trubicemi s kohouty lze ji spojit s nádobou M, tutéž kapalinu obsahující. Trubicí T lze ji spojiti s reservoirem, obsahujícím stlačený vzduch, a jak je z výkresu patrno, pomocí různého postavení kohoutů K_1 až K_5 vystaviti ji tlaku buď jen vnějšímu, neb jen vnitřnímu nebo oběma. Změny objemové měří se posunutím menisku kapaliny v kapiláře. Při měření nutno míti na zřeteli, že také kapalina v nádobě uzavřená mění tlakem svůj objem dle podobného zákona



Obr. 315.

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{k_1} P = -\gamma_1 P,$$

kde γ_1 se zve kompressibilitou její. Máme tudíž tři neznámé, E, σ a γ_1 a pouze dvě podmínky pro $\Delta_1 V$ a $\Delta_2 V$ neboť $\Delta_3 V = \Delta_1 V + \Delta_2 V$ kontroluje pouze do jisté míry správnost theoretických předpokladů. *Regnault* interpretoval svoje měření předpokládaje pro σ Poissonovu hodnotu $\sigma = \frac{1}{4}$, což, jak víme, je nepřípustné. Podobně je patrno, že také *Oerstedův* předpoklad, že dá se změřiti kompressibilita kapaliny, působí-li týž tlak vnitř i vně nádobky dostatečně tenké, jejíž objem by se tím neměnil, není správný. Změna objemu ($\Delta_3 V$) nezávisí na tloušťce stěn a pokus podává pouze kompressibilitu relativní, rovnou rozdílu kompressibility kapaliny a materiálu stěn (*Colladon* a *Sturm* 1827).

Nutno tedy pokusy s piezometrem spojiti s neodvislým měřením σ, E nebo k materiálu, z něhož stěny nádobky jsou zhotoveny, k čemuž hodí se na př. *Wertheimova* methoda měření koeffi-

cientu objemového při (jednostranném) tlaku. Nejpřesnější měření kompressibility pevné látky provedl *Amagat* (1889) tím způsobem, že na skleněnou trubici, uzavřenou v silnostěnném válci ocelovém, dal působiti vysokému tlaku hydrostatickému a měřil změnu její délky. Při tom jest

$$\frac{\Delta L}{L} = x_x = \frac{P}{3k}.$$

Z výsledku různých měření uvádíme pouze následující údaje kompressibility γ, a to, jak je obyčejem, pro atmosféru jakožto jedničku tlakovou, kteráž rovná se

$$0{\cdot}01033 \frac{\text{váha } kg}{mm^2} = 1{\cdot}013 \,.\, 10^6 \frac{dyna}{cm^2}.$$

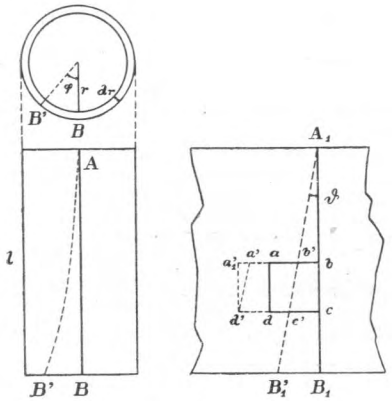
Látky	$\gamma \,.\, 10^6$	Pozorovatel
Olovo	2·761	Amagat
Sklo	1·67	Regnault
»	2·197	Amagat
»	2·92	Buchanan
Mosaz	1·07	Regnault
»	0·953	Amagat
Ocel	0·68	»

§ 385. **Torse.**

Mějme vertikální válec (tyč, drát) délky l, průřezu kruhového o poloměru R a budiž válec ten horním koncem pevně sevřen, na druhém, spodním konci pak budiž stáčen (kroucen, tordován) dvojicí o momentu H. Při stáčení válec, jsa pružným, reaguje momentem opačným, tak že při jistém úhlu otočení φ spodního konce jest rovnováha. Tento úhel φ jest 1. úměrný délce válce l, 2. úměrný momentu H tordující dvojice a 3. obráceně úměrný čtvrté mocnině poloměru R^4. Zákony tyto našel již *Coulomb* (1784), jenž se vzhledem k svým točivým vážkám torsí drátů podrobněji zanášel; později byly *Savartem* (1829), *Wertheimem* (1857) a mnohými jinými potvrzeny také pro tyče. Prvé dva zákony platí pro tyče libovolného průřezu.

Coulombovy zákony pro tyč kruhového průřezu můžeme snadno dovoditi na základě dřívějších úvah o střihu. Uvažujme předem torsi kru-

hové trubice na jednom konci upevněné, na druhém tordované dvojicí, jejíž osa spadá v jedno s osou trubice. Především můžeme jednoduchou úvahou dokázati, že rovinné řezy k ose kolmé, zůstanou i po torsi rovinnými a doznají pouze otočení, nikoli však radiálního nebo podélného posunutí. Kdyby na př. posunutí při torsi v pravo bylo takové, že by trubice se prodlužovala, musila by torsí v levo se zkracovati, poněvadž dle Hookeova zákona obrácením napětí obrací se též deformace; to však z důvodů symmetrie není možno. Z téhož důvodu symmetrie u kruhového průřezu plyne nemožnost radiálního posunutí nebo zborcení roviny řezu.



Obr. 316.

Budiž r vnitřní poloměr trubice, dr její tloušťka, l její délka (obr. 316.). Přímka AB na povrchu trubice rovnoběžně s osou vedená přejde torsí spodního konce o úhel φ v šroubovici AB', nebo myslíme-li si trubici rozvinutou v rovinu, přejde jí odpovídající přímka A_1B_1 v přímku $A_1B'_1$, při čemž patrně $BB' = B_1B'_1 = r \,.\, \varphi$. Že v rozvinutém obrazci jest $A_1B'_1$ vskutku přímkou, plyne z úvahy o rovnováze. Velmi tenký, malý pravoúhlý rovnoběžnostěn $abcd$ přejde tangenciálním napětím od tordující dvojice pochodícím v rovnoběžnostěn šikmoúhlý $a'b'c'd'$, jest tedy střih dán úhlem $a'_1d'a'$. Aby byla rovnováha mezi napětími, musí býti po celé délce l stejná, tedy úhel střižný musí býti všude týž a rovný úhlu $B'_1A_1B_1 = \vartheta$.

Jak je z výkresu patrno, jest

$$\frac{B'_1B_1}{A_1B_1} = \frac{r \,.\, \varphi}{l} = tg\ \vartheta.$$

U malých úhlů lze však $tg\ \vartheta$ klásti velmi přibližně rovným úhlu ϑ měřenému v obloukové míře, jak tomu svědčí následující tabulka:

Úhel ve stupních	Úhel v obl. míře	Tang.
10′	0·0029089	0·0029089
30′	0·0087266	0·0087269
1°	0·01745	0·01746
2°	0·03491	0·03492
3°	0·05236	0·05241
4°	0·06981	0·06993
5°	0·08727	0·08749

U tordovaných drátů však nedostupuje při měřeních ϑ ani z daleka hodnoty 1°; na př. tordujeme-li drát průměru 1 *mm* a délky 31·4 *cm* o celou otočku, jest ϑ teprve rovno 34′22″. Proto můžeme psáti prakticky bez chyby

$$\vartheta = \frac{r \,.\, \varphi}{l}.$$

K docílení střižného úhlu ϑ musí působiti (na jedničku plošnou) tangenciální napětí

$$p = n \,.\, \vartheta,$$

tedy na plochu celého průřezu trubice síla tangenciální

$$P = 2\pi r \,.\, dr \,.\, n \,.\, \vartheta = n \,.\, \frac{2\pi r^2\, dr}{l} \,.\, \varphi.$$

Poněvadž síla tato působí na rameni rovném r, jest její moment

$$dH = n \,.\, \frac{2\pi r^3\, dr}{l} \,.\, \varphi.$$

Přechod od trubice k plnému válci poloměru R provedeme summací podobných výrazů od $r = 0$ až $r = R$, takže moment tordující dvojice

$$H = \Sigma dH = n \,.\, \frac{2\pi}{l} \,.\, \varphi \int_0^R r^3 dr = n \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{R^4}{l} \,.\, \varphi.$$

Dosadíme-li ještě z dřívějšího za rigiditu

$$n = \frac{E}{2\,(1 + \sigma)},$$

máme konečný výraz, jenž spojuje tordující moment H a úhel torse φ

$$H = n \,.\, \frac{\pi R^4}{2l} \,.\, \varphi = \frac{E}{2\,(1 + \sigma)} \,.\, \frac{\pi R^4}{2l} \,.\, \varphi.$$

Snadnou diskussí plynou z něho svrchu uvedené Coulombovy zákony. Sluší připomenouti, že někdy nazývá se celý faktor u φ modulem torse; lépe jest nové toto pojmenování nezaváděti, ježto patrně není faktor ten pouhou konstantou materiálu, nýbrž závisí na geometrických vlastnostech tělesa. Zaveďme na okamžik pro zmíněný faktor označení f, a ptejme se po potenciální energii drátu ztordovaného o úhel φ, t. j. práci, které k tomu bylo potřebí. Moment tordující jest $H = f \,.\, \varphi$; má-li drát býti dále o malý úhel $d\vartheta$ ztordován, nutno vynaložiti práci

$$dW = H \,.\, d\varphi = f \,.\, \varphi \,.\, d\varphi.$$

K torsi od rovnovážné polohy ($\varphi = 0$) až k úhlu φ jest tedy potřebí práce

$$W = f \int_0^{\varphi} \varphi \,.\, d\varphi = \tfrac{1}{2} f \varphi^2 = \tfrac{1}{2} H \,.\, \varphi.$$

Poněvadž pak dovedeme vhodnou volbou (R velmi malé, l veliké) učiniti H velmi malým a poněvadž dovedeme (na př. methodou zrcadla a škály) měřiti velmi malé úhly φ, můžeme pomocí torse měřiti velmi nepatrné obnosy energie, jak tomu je u velmi citlivých galvanometrů, torsních vážek a p.

Není-li průřez tyče kruhovým, stává se problém torse velice obtížným. Nezůstává totiž před torsí rovinný průřez také při torsi rovinným, nýbrž jeví se následkem longitudinálních posunutí v některých místech vydutým, v jiných vypouklým. Snadno lze to demonstrovati na tyčích kaučukových, na př. elliptického průřezu, na nichž nakreslíme kontury průseků s příčnými rovinami. Všeobecný problém torse byl pro některé tvary průřezu poprvé řešen Barré de Saint-Venantem (1855). Z výsledků uvádíme moment H_1 nutný k otočení tyče průřezu elliptického o poloosách a a b a délky l o úhel φ. Jest pak

$$H_1 = n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot \varphi.$$

Theorie ukazuje, že tento výraz jest všeobecněji k užití, zavedeme-li za π obecnější faktor K, který má ovšem různé hodnoty pro různé tvary průřezu. Zde uvedeme hodnoty K pro nejčastěji užívané tvary pravoúhelníkové. Jsou-li $2a$ a $2b$ strany pravoúhelníka,

jest při	$a = b$	$a = 2b$	$a = 4b$	$a = 8b$
K rovno	4·493	4·570	4·781	4·992.

Uvedený vzorec má zvláštní důležitost při měření malých obnosů energie. Má-li průřezová ellipsa jednu poloosu b velmi malou u srovnání s a, přejde vzorec pro H_1 v

$$H_1 = n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \frac{a \cdot b^3}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \varphi = n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot a \cdot b^3 \cdot \varphi$$

pro kruh o poloměru r bylo

$$H = n \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \frac{r^4}{2} \cdot \varphi.$$

Jsou-li oba průřezy téže plochy, t. j. unesou-li oba dráty totéž zatížení, pak

$$\pi r^2 = \pi a b$$

a poměr obou momentů, nutných k docílení téhož otočení φ, je-li délka l stejná, jest

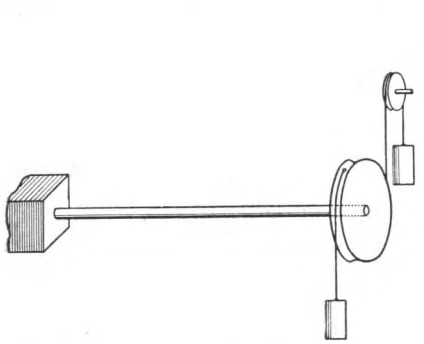
$$\frac{H_1}{H} = \frac{2ab^3}{r^4} = \frac{2b}{a}.$$

Učiníme-li b velmi malým oproti a, jest H_1 malé oproti H, a tudíž máme-li měřiti velmi malé momenty, jest závěs na plochém pásku daleko citlivější než závěs na kruhovém drátku téže nosnosti. Této okolnosti užívá se nyní vesměs u galvanometrů typu D'Arsonvallova, kde pohyblivá cívka jest zavěšena na kovovém pásku.

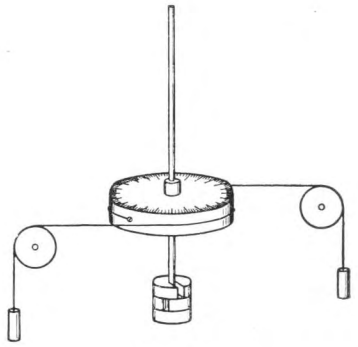
§ 386. Měření modulu střižného a Poissonova poměru torsí.

Ze vzorce pro torsi kruhové tyče (drátu) je patrno, že z určení momentu H, délky l, poloměru R a úhlu φ lze stanoviti modul střižný (rigiditu) n. Změříme-li pro týž materiál také modul Youngův E, lze dle $n = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ počítati Poissonův poměr σ.

Při měření užívá se dvou method, statické a dynamické. Methoda *statická* měří přímo H a φ pomocí zařízení, které schematicky znázorňují obr. 317. a 318. Užívajíce methody dynamické,



Obr. 317.



Obr. 318.

zatížíme drát hmotou M jednoduchého tvaru geometrického tak, abychom z dimensí mohli stanoviti její moment setrvačnosti K, a pozorujeme kyvy, které tato hmota vykonává, když se otočením drát zkroutí. Direkční moment torse určen jest výrazem

$$D = \frac{H}{\varphi} = n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{l}$$

a doba kyvu jest dána výrazem

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}.$$

Ježto platí úměrnost momentu otáčející dvojice s výchylkou až do vysokých hodnot φ, jest také doba kyvu v širokých mezích na »amplitudě«, t. j. úhlu výchylky maximální nezávislá. Není-li možno moment setrvačnosti K počtem dosti přesně stanoviti, zvětšíme jej o známý obnos K_1, na př. umístěním dvou válcovitých závaží v přesně měřitelných vzdálenostech od osy drátu, a pozorujeme novou dobu kyvu t_1. Potom plyne z t a t_1 počtem jak n,

tak K. Ovšem, že tento způsob měření jest pouze tím umožněn, že, jak již *Coulomb* stanovil, je modul n na zatížení drátu v širokých mezích nezávislý. Podobně můžeme, známe-li pro určitý drát n, z pozorování doby kyvu určiti moment setrvačnosti libovolného tělesa kolem osy procházející těžištěm.

Chceme-li však stanoviti konstanty materiálu, na př. kovu nějakého, není radno užíti drátu, ať už methodou statickou nebo dynamickou. Jednak již malá chyba v měření poloměru R, který vstupuje v počet ve čtvrté mocnině, vede k veliké chybě ve výsledku (z 1% na 4%), a po druhé jsou dráty tělesa, jichž povrchová vrstva tažením změnila svou povahu, a právě v této vrstvě je deformace maximální. Užitím hmoty o velmi velikém momentu setrvačnosti učinil methodu dynamickou užitelnou i na krátké a tlusté tyče *Voigt* (1893).

Měření methodou dynamickou vede obyčejně k poněkud (asi o 1 až 2%) větším hodnotám n, než dává methoda statická. Dimense střižného modulu jest, jak je již ze vztahu $n = \frac{E}{2(1+\sigma)}$ patrno, táž jako dimense modulu Youngova, t. j. $\frac{síla}{plocha}$ a jedničkou absolutní jest tudíž $\frac{dyna}{cm^2}$; i zde užívá se však dosud nejčastěji jedničky $\frac{váha\ kg}{mm^2}$.

Ježto leží σ mezi 0 a $^1/_2$, jest $\frac{E}{3} < n < \frac{E}{2}$; obě krajní hodnoty $\frac{E}{3}$ a $\frac{E}{2}$ nacházíme u kaučuku, kde $\sigma = \frac{1}{2}$ a korku, kde σ přibližně se rovná nulle. Dle theorie Poissonovy $\left(\sigma = \frac{1}{4}\right)$ mělo by platiti všeobecně $n = \frac{2}{5} E$.

Za stoupající temperatury klesá střižný modul, a to tím rychleji, čím bližší je látka bodu tání nebo čím větší je její koefficient roztažnosti tepelné. Výjimku činí kaučuk, jehož střižný modul za 20° je 0·163 $\frac{váha\ kg}{mm^2}$ a se stoupající teplotou stoupá. V následující tabulce uvedeme dle pozorování *Schäferových* (1900) moduly střižné n v jednotkách $\frac{váha\ kg}{mm^2}$ pro různé kovy, uspořádané dle stoupajících koefficientů roztažnosti a příslušné $-\Delta n$,

klesnutí modulu střižného pro zvýšení teploty o 100° v procentech. K vůli úplnosti uvedeme též u týchž materiálů pozorované moduly Youngovy E v $\frac{váha\ kg}{mm^2}$ a příslušná klesnutí $-\Delta E$ pro zvýšení teploty o 100° v procentech, jakož i Poissonovy poměry σ z obou počítané.

Kov	Koeff. tepelné roztažnosti	E v $\frac{kg}{mm^2}$ za 20°	$-\Delta E$ pro 100° procent	n v $\frac{kg}{mm^2}$ za 20° C	$-\Delta n$ pro 100° procent	σ
Platina	$9{\cdot}07 . 10^{-6}$	16029	0·732	6593	1·78	0·215
Palladium	$11{\cdot}04 . 10^{-6}$	11284	1·979	4613	2·696	0·223
Železo	$11{\cdot}13 . 10^{-6}$	18347	2·250	7337	3·035	0·247
Nikl	$12{\cdot}79 . 10^{-6}$	23544	2·463	9518	3·280	0·239
Měď	$16{\cdot}98 . 10^{-6}$	9897	3·627	3967	4·489	0·245
Stříbro	$19{\cdot}00 . 10^{-6}$	5897	7·65	2467	8·209	0·195
Aluminium	$23{\cdot}36 . 10^{-6}$	6330	21·32	2329	24·72	0·359
Zinek	$29{\cdot}05 . 10^{-6}$	4296	—	1614	48·37	0·331
Olovo	$29{\cdot}48 . 10^{-6}$	1493	—	550	78·67	0·431

§ 387. **Ohýbání.**

Vedle úkolů prodloužení neb stlačení a torse se týkajících, jest zejména technicky velmi důležitým úkol, týkající se prohnutí útvarů podélných, tyčí, trámů a pod., jichž rozměry příčné jsou oproti délce malé. Útvary takové bývají na jednom neb i na dvou koncích upevněny, nejčastěji v poloze horizontální. Zatížením se tyč ohne; v části konkávní se vlákna tyče zkrátí, naopak v části konvexní se prodlouží. Mezi vlákny napiatými a stlačenými nachází se zajisté vlákno, nebo vrstva vláken, jejichž délka se ohnutím nezměnila. Zoveme je *vláknem*, resp. *pásmem neutrálním*. Vycházejíc od tohoto pásma, roste s odlehlostí v jednom směru prodloužení (napětí), v druhém zkrácení (stlačení) vláken až k hodnotě největší na povrchu tyče.

Poměrně jednoduchou úvahou můžeme dovoditi přibližné vzorce, které udávají prohnutí s, způsobené silou P; prohnutí to jest, pokud platí Hookeův zákon, přímo úměrno síle P a obráceně úměrno modulu Youngovu E. Mimo to jest úměrno třetí mocnině délky tyče a^3 a souvisí určitým způsobem s rozměry průřez urču-

jícími. Dle způsobu upevnění tyče řídí se jistý číselný koefficient k, prohnutí spolu určující. Jest totiž $k = 4$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ dle toho, zdali tyč jest upevněna na jednom konci, podepřena na obou koncích nebo upevněna na obou koncích. Síla P, kolmá na délku tyče, působí (a prohnutí se měří) v prvém případě na volném konci tyče, v druhém a třetím uprostřed. Prohnutí jsou tedy za jinak stejných okolností v poměru 64 : 4 : 1.

Vzorce pro prohnutí s jsou následující: Je-li dána tyč rovnoběžnostěnná, délky a, šířky b a výšky c, jest

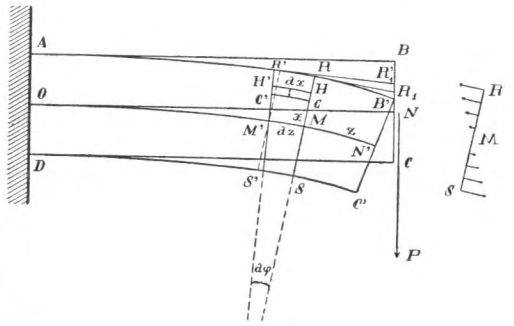
$$s = k \cdot \frac{a^3}{bc^3} \frac{P}{E}.$$

Je-li průřez tyče kruhový, poloměru R, pak

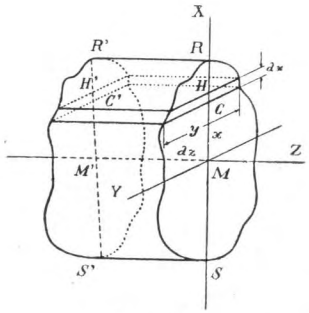
$$s = k \cdot \frac{a^3}{3\pi R^4} \frac{P}{E}.$$

Theorie ohnutí tyčí náleží k velmi obtížným partiím z nauky o pružnosti. Zde můžeme pouze nastíniti theorii elementární, jejíž supposice sice nejsou ve skutečnosti dokonale splněny, ale která přece v prvém přiblížení vyhovuje.

Budiž $ABCD$ tyč na ploše AD upevněná (obr. 319.). Po prohnutí silou P na jejím konci působící nabude tvaru $AB'C'D$. Značí-li ON, resp. ON' neutrální pásmo, tedy se podélná vlákna nad ON' roztáhnou, pod ON'



Obr. 319.



Obr. 320.

stlačí, a to tím více, čím dále se od vrstvy ON' nacházejí. Mysleme si tyčí vedeny dva na ON' kolmé rovinné řezy RS a $R'S'$ ve vzdálenosti z a $z + dz$ od konečné plochy BC, které před ohnutím patrně byly spolu rovnoběžny a vytkněme v $GHH'G'$ vlákno (vrstvu) od neutrálního o x vzdálené a tloušťky dx. Pak patrně $MN' = z$, $M'M = dz$, $GM = G'M' = x$, $GH = G'H' = dx$. Pro další vývody vedeme ke kontuře tyče v bodech R a R' tangenty RR_1 a $R'R'_1$, které svírají úhel $d\varphi$, patrně týž jako roviny RS a $R'S'$ a vytínají na BC délku $R_1R'_1 = ds = z \cdot d\varphi$.

Spadne-li bod R v jedno s B' a R' s A, tedy obdobnou délku $BB' = s$ nazýváme prohnutím (Biegungspfeil, flèche, depression); jest patrně měrou ohnutí. Vlákno $GHH'G'$ a všechna nad MM' hledí se zkrátit, obdobná pod MM' hledí se prodloužit, a vzniká tudíž systém dvojic, který hledí otočiti průřez RS kolem bodu M neutrálního vlákna. Vypočítáme moment těchto dvojic pro průřez RS, znázorněný obr. 320.

Proložme osu Z směrem $M'M$, osu X směrem MR a osu Y na obě kolmo. Vrstva $GHH'G'$ měla původně délku $MM' = dz$; po ohnutí jest (obr. 319.) její délka o $x \cdot d\varphi$ větší. Nastane-li však prodloužení vlákna z délky $l = dz$ na $l + \varphi l = dz + x \cdot d\varphi$, reaguje napětím na jedničce plošné $p = E \cdot \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \frac{x d\varphi}{dz}$, tedy na celém průřezu $y \cdot dx$ (obr. 320.) silou $f = E \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot x \cdot y \cdot dx$. Tato síla otáčí průřez kolem osy Y-ové momentem

$$f \cdot x = E \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot y \cdot x^2 \cdot dx.$$

Moment celkem na průřez účinkující najdeme summací; jest tudíž roven

$$M = E \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \int_{-x_1 = -\overline{MS}}^{x_2 = \overline{MR}} yx^2 dx.$$

Ale integrál v M se vyskytující, v němž y dle tvaru průřezu jest jistou funkcí x, není ničím jiným, než momentem setrvačnosti K kolem osy Y průřezu, jejž si myslíme stejnoměrně pokryt hmotou tak, aby na jedničce plošné byla hmota = 1; to je na prvý pohled patrno, že srovnání s výrazem známým $K = \Sigma mr^2$. Obdrželi jsme tudíž

$$M = E \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot K.$$

Ale momentu M musí držeti rovnováhu moment pocházející od síly P ohnutí působící, který se rovná $P \cdot z$, takže

$$E \cdot K \cdot d\varphi = P \cdot z \cdot dz.$$

Zavedeme-li do výrazu toho element prohnutí $ds = z \cdot d\varphi$, plyne dále

$$E \cdot K \cdot ds = P \cdot z^2 \cdot dz.$$

Je-li tyč všude téhož průřezu, nezávisí-li tedy K na z, obdržíme integrací přes celou tyč délky a, tedy od $z = 0$ až $z = a$

$$E \cdot K \cdot s = \int_{z=0}^{z=a} Pz^2 dz = \frac{Pa^3}{3}$$

a tedy

$$s = \frac{Pa^3}{3EK}.$$

Je-li průřezem čtyřúhelník pravoúhlý o šířce b (t. j. $y = b$) a výšce c

$$\left(\text{t. j. } x_1 = \frac{c}{2} \text{ a } x_2 = \frac{c}{2}\right),$$

je

$$K = \int_{-x_1}^{x_2} yx^2\,dx = b\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} x^2\,dx = \frac{bc^3}{12}$$

a

$$s = 4\,\frac{a^3}{bc^3}\,\frac{P}{E}.$$

Je-li průřez kruhový o poloměru R, je moment setrvačnosti *)

$$K = \frac{\pi R^4}{4} \quad \text{a} \quad s = 4\,\frac{a^3}{3\pi R^4}\,\frac{P}{E}.$$

Specielní případy jsou průřez čtverečný $b = c$ a

$$s = 4\,\frac{a^3}{b^4}\,\frac{P}{E}$$

a u trubice průřez mezikruží mezi r a R

$$s = 4\,\frac{a^3}{3\pi\,(R^4 - r^4)}\,\frac{P}{E}.$$

Je-li tyč podepřena na obou koncích a uprostřed zatížena, tedy je prohnutí právě takové, jakoby délka tyče byla poloviční $\left(a_1 = \frac{a}{2}\right)$ a na konec by působila poloviční síla $\left(\frac{P}{2}\right)$; pak patrně

$$s = \frac{1}{16}\,\frac{Pa^3}{3EK}.$$

Je-li upevněna na koncích obou a působí-li síla uprostřed, dá se snadno ukázati, že je s ještě čtyřikráte menší, než kdyby byly konce volné, tedy

$$s = \frac{1}{64}\,\frac{Pa^3}{3EK}.$$

*) Nejjednodušší důkaz: Moment setrvačnosti kruhu je pro každý průměr týž. Okolo osy Y rovná se $K = \Sigma\,dS \,.\, x^2$, okolo osy X podobně $K = \Sigma\,dS \,.\, y^2$ kde dS je element plochy. Sečtením $2K = \Sigma\,dS \,.\, (x^2 + y^2) = \Sigma\,dS \,.\, r^2$. Za element plochy zvolme mezikruží mezi poloměry r a $r + dr$, jehož plocha $= 2\pi r\,dr$ a tedy integrací od $r = 0$ až $r = R$ plyne

$$2K = \int_0^R 2\pi r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Místo prohnutí tyče měří se velmi často úhel odklonu konce od rovnovážné polohy, t. j. úhel $C'B'C$ (obr. 319.). Početně můžeme jej snadno stanoviti. Měli jsme pro úhel $d\varphi$ mezi místy z a $z + dz$ tyče vztah

$$EK\,d\varphi = Pz\,dz.$$

Celý úhel φ mezi AD a $B'C'$, t. j. mezi $z = a$ a $z = 0$, zjednáme si integrací, kteráž dává

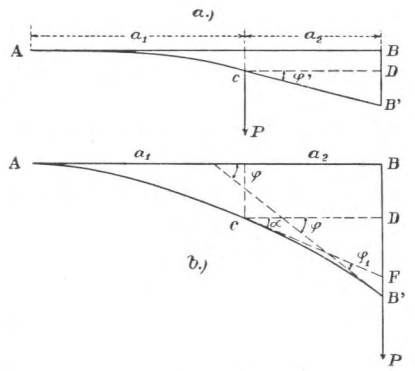
$$\varphi = \frac{P}{EK}\int_0^a z\,dz = \frac{P}{EK}\,\frac{a^2}{2}.$$

Snadno zjednáme si také vztah tohoto úhlu s prohnutím, srovnáme-li tento vzorec s oním pro s; pak plyne

$$s = \frac{2}{3}\,a \,.\, \varphi.$$

Přesněji má místo φ (v obl. míře!) státi v tomto vzorci $tg\varphi$, jež ale u malých úhlů je téměř identické s φ.

Pomocí vzorce pro úhel φ dokážeme ještě zajímavou větu, velmi důležitou při měřeních. Mějme tyč délky $a = a_1 + a_2$, kterou jednou zatížíme v bodě a_1 silou P a změříme prohnutí na konci jejím; po druhé zatížíme ji touž silou P na konci a změříme prohnutí v bodě a_1 (obr. 321.). Uvidíme, že prohnutí v obou případech jest *stejné*.



Obr. 321.

Důkaz naznačíme vztahujíce se ke skizzám tvaru neutrálního vlákna (nebo vnějšího vlákna), které ovšem v prvém případě od bodu a_1 zůstane neprohnuto — přímkou. Ovšem jsou v nich prohnutí přehnaně kreslena, úhly φ ve skutečnosti zůstávají neustále velmi malé.

Případ prvý.

$$\overline{BD} = s_{a_1} = \frac{Pa_1^3}{3EK}, \quad \overline{DB'} = a_2 \,.\, \varphi' = a_2\,\frac{P}{EK}\,\frac{a_1^2}{2}$$

$$\overline{BB'} = \overline{BD} + \overline{DB'} = \frac{Pa_1^2}{EK}\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{2}\right).$$

Případ druhý.

$$\overline{BD} = \overline{BB'} - \overline{B'F} - \overline{FD}$$

$$\overline{BB'} = s = \frac{P(a_1 + a_1)^3}{3EK}; \text{ podobně } \overline{B'F} = \frac{Pa_2^3}{3EK},$$

$$\overline{FD} = a_2 \,.\, \alpha = a_2\,(\varphi - \varphi_1)$$

$$\varphi = \frac{P}{EK}\int_0^{a_1+a_2} z\,dz = \frac{P}{EK}\,\frac{(a_1 + a_2)^2}{2}, \quad \varphi_1 = \frac{P}{EK}\int_0^{a_2} z\,dz = \frac{P}{EK}\,\frac{a_2^2}{2},$$

takže

$$\overline{FD} = \frac{P}{EK} \cdot \frac{a_2}{2}\,[(a_1 + a_2)^2 - a_2^2]$$

a dosazením po vymýcení členů, jež vypadnou

$$\overline{BD} = \frac{Pa_1^2}{EK}\left(\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{2}\right).$$

Jest tudíž, jak bylo dokázati, $\overline{BB'}$ v případě prvém rovno $\overline{BD}$ v případě druhém.

Výchylka tyčí z polohy rovnovážné (prohnutí) jest úměrna (v mezích platnosti Hookeova zákona) síle vychylující, a tedy také reakci tyče s touto silou stejné. Proto kmitá tyč vychýlená a sobě samé ponechaná pohybem harmonickým.

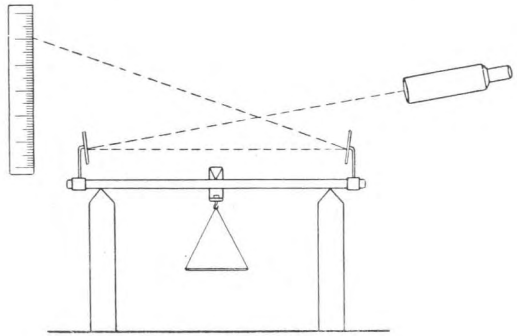
§ 388. **Měření Youngova modulu ohýbáním.**

Ze vzorců pro prohnutí tyče plyne, že, stanovíme-li dimense její, prohýbající sílu a prohnutí, můžeme počítati Youngův modul E. Methoda tato má význam velmi důležitý, zvláště pro látky anisotropní — krystally, kde vyřezávajíce tyčinky v různé orientaci ke krystallografickým osám můžeme sledovati pružnost v různých směrech *).

Provádění měření řídí se účelem, resp. žádanou citlivostí. Při měřeních laboratorních obyčejně tyč o jednoduchém tvaru průřezovém (kruh, pravoúhlý rovnoběžník) podpíráme na obou koncích a zatěžujeme pomoci misky na břitu uprostřed visící, měříce prohnutí buď přímo ukazovatelem na měřítku nebo mikroskopem s okulárním mikrometrem a p.

Daleko citlivější jest methoda *Königova* (1886) pomocí dvou zrcátek na koncích tyče upevněných, dalekohledu a škály; jest znázorněna obr. 322. Příslušné vzorce pro vztah mezi prohnutím a posunutím obrazu škály lze snadno z dosud uvedených odvoditi. *Winkelmann* a *Schott* užili místo zrcátek dvou pravoúhlých hranolů, aby mohli celý apparát uzavříti v komoře, v níž měnili

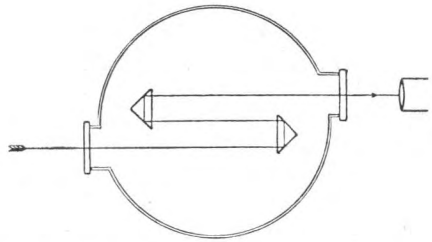
*) O výsledcích viz přehlednou knížku *W. Voigtovu*: Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung, Lipsko 1898 (stran 243) nebo jeho referát v Rapports pařížského kongressu fysikálního v r. 1900 (str. 277—347).



Obr. 322.

teplotu; schematický obrazec 323. znázorňuje dráhu světelného paprsku od škály k dalekohledu.

Cornu navrhl, *Straubel* exaktně provedl methodu zakládající se na zjevu, prohnutí tyče doprovázejícím, že totiž pravoúhlý průřez po prohnutí — následkem příčné kontrakce, resp. dilatace,

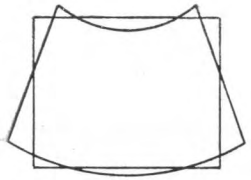


Obr. 323.

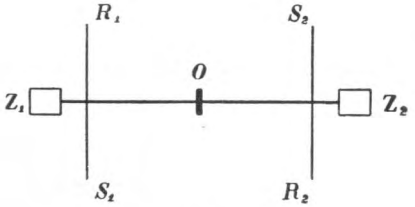
nezůstane pravoúhlým, nýbrž mění se v tvar naznačený obr. 324., tak že horní a dolní rovina tyče po prohnutí se stane plochou sedlovitou — antiklastickou. Poměr radia křivosti, měřené po délce tyče k radiu křivosti horní (a dolní) plochy, je, jak theorie učí, dán Poissonovým poměrem σ.

Když na (hlazeném) rovinném, horním povrchu tyče umístíme rovinnou destičku skleněnou, tu již při slabém prohnutí objeví se systém interferenčních čar hyperbolických, z jehož rozměrů

lze sedlovitost, ovšem zákonitým způsobem s prohnutím souvisící, a tedy i toto, a elastické konstanty vypočísti. Konečně zasluhuje zmínky, že *Voigt* (hlavně u krystallů, 1893) užitím velikých zatěžujících hmot učinil elastické kyvy tak pomalými (až minutovými a více), že měřením doby kyvu dosáhl velmi přesných hodnot Youngova modulu.



Obr. 324.



Obr. 325.

Kirchhoff (1859) udal methodu k současnému měření jak modulu Youngova, tak modulu střižného pomocí současného ohybu i torse tyče uprostřed v O upevněné. Nesla (obr. 325.) dvě příčná ramena R_1S_1 a R_2S_2, na koncích pak horizontální zrcátka Z_1 a Z_2. Byla současně stejným závažím zatížena jednou v R_1 a R_2, pak v S_1 a S_2. Pomocí dvou dalekohledů bylo pozorováno posunutí středu nitkového kříže na škále, sestávající ze sítě čtverečkované.

§ 389. **Spirály.**

Theorie torse a ohybu dochází velmi důležitého užití u spirálovitých per. Ovšem jest theorie v tomto případě velmi komplikovaná. Proto zde elementárně pojednáme pouze o nejjednodušším případě spirály »husté«, takové, u níž drát průřezu kruhového o malém poloměru R jest hustě navinut na kruhovém válci velikého poloměru a, tak že jednotlivé závity spirály jsou velmi přibližně kolmé na rovinách osou válce položených. Předpokládejme, že jest taková spirála zavěšena vertikálně a na jejím spodním konci působí síla P, daná na př. závažím (obr. 326. a). Veďme kdesi u místa A na osu drátu kolmý průřez a uvažujme o rovnováze části AB. Průřez u A jest znázorněn ve větším měřítku na obr. 326. b. Ve středu drátu O můžeme si mysliti působící dvě síly $P_1 = P_2 = P$ a vidíme tudíž, že účinek síly P v ose spirály BB' působící lze nahraditi účinkem síly $P_1 = P$ v bodě O a dvojice ze sil P a $P_2 = P_1$, o momentu Pa. Tuto dvojici můžeme nahraditi jinou na drát působící, o stejném momentu $2RT = Pa$.

Síla P_1 jest tangenciální síla na průřez drátu působící a lze ji vyjádřiti tangenciálním napětím p, jakožto $P_1 = \pi r^2 . p$ nebo je-li $d\omega$ malá ploška průřezu, jakožto $\Sigma d\omega\, p = P_1$. Podobně jest dvojice $2RT$ součtem momentů jiných tangenciálních sil, t. j. součtem výrazů $d\omega\, tr_1$, při čemž, dle dosud uvedeného, platí

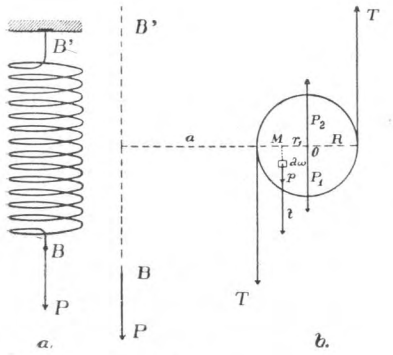
$$2R\,T = \Sigma\, d\omega\, tr_1 = Pa = \Sigma\, d\omega\, pa.$$

Z rovnice této jest patrno, že *řádově* musí býti tang. síly p a t ve vztahu

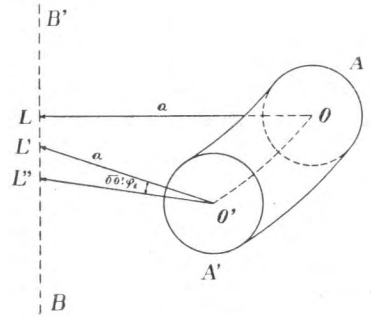
$$tr_1 = pa \qquad p = t \cdot \frac{r_1}{a}.$$

Poněvadž pak předpokládáme, že i maximální r_1, totiž R, jest velmi malé oproti a, jest patrno, že můžeme vliv tang. napětí p oproti t zanedbat, a uvažovati pouze o dvojici momentu $2R\,T = Pa$, který jest po celé délce drátu stejný. Účinkem jejím bude tedy stejnoměrná torse po celé délce drátu, o úhlu torse φ_1 na jedničku délkovou drátu, daném dříve již odvozeným výrazem

$$Pa = n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R^4 \cdot \varphi_1.$$



Obr. 326.



Obr. 327.

Představme si nyní vytnut z drátu spirály malý kousek AA', a k oběma průřezům připojeny ukazatele OL a $O'L'$ (obr. 327.) délky a, jichž konce leží na ose spirály BB', v bodech L a L'. Účinkem dvojice Pa nastane vzájemná torse obou průřezů AA' o úhel $\overline{OO'} \cdot \varphi_1 = \frac{2Pa}{n \cdot \pi \cdot R^4} \cdot \overline{OO'}$, čímž se konce ukazovatelů oddálí o délku $\overline{L'L''} = a \cdot \overline{OO'} \cdot \varphi_1$. Veličiny a a φ_1 jsou po celé délce drátu

konstantní. Je-li tudíž A upevněným, A' volným koncem spirály, tak že $\overline{OO'} = l$ celé délce drátu spirály, značí odpovídající $L'L''$ vertikální posunutí konce B, v němž síla P působí, neboli prodloužení v ose spirály, které označme s. Plyne tedy

$$s = a \,.\, l \,.\, \varphi_1 = \frac{2Pa^2 \,.\, l}{n\pi R^4}.$$

Z tohoto výrazu jest patrno: V mezích našich předpokladů jest prodloužení úměrno síle P, úměrno ploše průřezu válce, na němž spirála jest vinuta, obráceně úměrno čtverci plochy průřezu drátu.

Z úměrnosti síly a prodloužení plyne, že spirála zatížená vykonává kmity harmonické.

Energie potenciální napiaté spirály, t. j. práce k prodloužení nutná, jest

$$\int_0^s P \,.\, ds = \frac{n\pi R^4}{2a^2 l} \int_0^s s\, ds = \frac{1}{2} \frac{n\pi R^4}{2a^2 l} \,.\, s^2 = \frac{1}{2} P \,.\, s.$$

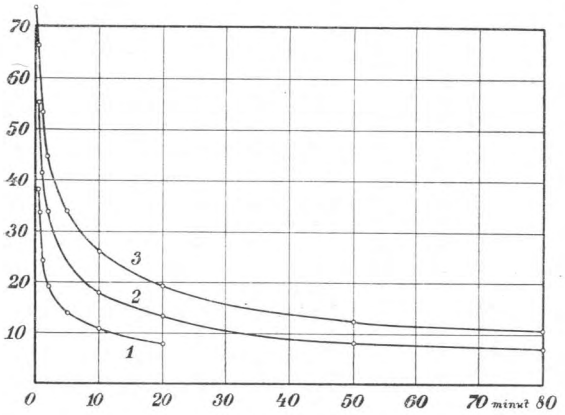
U spirál »řídkých«, kde drát tvoří šroubovici o rychlém stoupání, vedle torse intervenuje také ohyb. Počet obdobný, ovšem komplikovanější, vede zase k úměrnosti prodloužení se zatížením, ale ukazuje, že vedle prodloužení nastává ještě i otočení konce B kolem osy spirály.

U spirál plochých (hodinové péro) podobně platí úměrnost mezi dvojicí otáčecí a úhlem otočky.

§ 390. **Dopružování.**

Elastické deformace nastávají v hlavní své části zároveň s působením deformujících sil, ale v části zbývající ještě dodatečně průběhem delší doby. Také naopak, když síly deformující přestanou působiti, nevrací se těleso pružné do původního stavu ihned, nýbrž teprve během delší doby, ač ovšem větší část deformace mizí téměř okamžitě. Tento zjev pozoroval *W. Weber* již r. 1835 (Pogg. Ann., sv. 34.) u kokonových vláken, jež napínal různými závažími; podobně když závaží odstranil, pozoroval po dobu mnoha dnů znenáhlé vracení se v původní délku. Nazval zjev tento dopružováním (elastische Nachwirkung). Jak nyní víme, jest to zjev obecnější, nejen v oboru sil pružnosti, ale i jinde se vyskytující, na př. při magnetisaci železa, nabíjení kondensátorů, krátce jest jen jedním z různých t. zv. zjevů hysteretických. Dopru-

žování jest tedy jedním ze zjevů doprovázejících elastickou hysteresi. Po *Weberovi* studoval zjevy dopružování velmi podrobně prvý *F. Kohlrausch*, počínaje r. 1863, a to u snadno měřitelných zjevů torse, později pak mnozí jiní. *Kohlrausch* ukázal, že torsní moment, potřebný k docílení jisté torse, je tím menší, čím déle torse trvá. Přestaneme-li tordovati drát, nevrací se v původní polohu hned, nýbrž nejprve téměř okamžitě zaujme polohu jinou, ve směru torse ležící, odkud zprvu rychleji, pak čím dále tím pomaleji se k původní poloze vrací. Ona v prvém okamžiku zbývající torse jest tím větší, čím déle trvala torse původní, a tím pomaleji mizí. To ukazuje velmi pěkně diagramm obr. 328., znázorňující Kohlrau-



Obr. 328.

schova měření na stříbrném drátě, délky 125 *mm*, který byl ztordován o 180° a po 2 (1. křivka), 5 (2. křivka), resp. 10 minutách (3. křivka) vypuštěn. Abscissy znázorňují čas v minutách, ordináty zbývající torsi v libovolných jedničkách (škálových dílcích). Abychom mohli posouditi velikost zbývající torse, uvádíme, že za trvání torse 10 minut po prvých desíti vteřinách zbývala torse asi 1°, u drátu po 9 hodin o 585° ztordovaného pak v prvém okamžiku po vypuštění 30°, tedy téměř 5% torse původní. Podobný chod jeví také dopružování v tahu a ohybu. Své pokusy o dopružování při torsi interpretoval *Kohlrausch* tím způsobem, že klade rychlost, se kterou zbývající deformace x mizí (jinými slovy — rychlost, se kterou molekuly se vrací v rovnovážnou polohu původní), tím větší, čím větší deformace ještě zbývá a tím menší, čím delší jest čas, který již za blížení se k rovnovážné poloze uběhl, event. při

větších deformacích jakási potence m-tá tohoto času t. Klade tedy

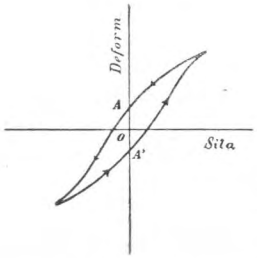
$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot \frac{x}{t}, \quad \text{event.} \quad -\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot \frac{x}{t^m},$$

tak že deformace x, v určitém čase t zbývající, jest

$$x = \frac{Const}{t^\alpha}, \quad \text{event.} \quad x = Const \cdot e^{-\frac{\alpha}{1-m}} \cdot t^{1-m},$$

kde x a m jsou konstanty na povaze materiálu závislé.

Zajímavé jest pozorování *Kohlrauschovo*, že můžeme různá dopružování klásti přes sebe. Tordoval drát silně, na př. v pravo, tak že jevil zbývající torsi o úhel α_1 od polohy rovnovážné. Potom, dříve než se vrátil v rovnovážnou polohu, na kratinký čas jej ztordoval v opačném směru (v levo) o více než α_1 přes polohu rovnovážnou. Drát vypuštěný nevrátil se v malou úchylku v levo, jak bychom snad čekali, nýbrž vliv původní torse manifestoval se tím, že drát přešel v posici $\alpha_2 < \alpha_1$ na pravo, a odtud se pomalu vracel v polohu rovnovážnou. Velmi nápadně vystupuje dopružování u kaučuku, skla, olova, gutaperči a jiných, zvláště organických látek (kokon). Se stoupající teplotou stoupá (u kovů asi 3% na 1° C), vyjma u kaučuku, kde tomu je právě naopak. Theorií k vysvětlení dopružování jest několik (O. E. Meyer, Boltzmann, Warburg, Neesen, Maxwell, Wiechert, Pearson, Duhem a j.), žádná však plně neuspokojuje.



Obr. 329.

Elastická hysterese ve vlastním slova smyslu jest zjev pozorovaný poprvé *G. Wiedemannem* (1879 a 1886), později zkoumaný *Cantonem* (1893—7), *Weinholdem* (1899), *Berlinerem* (1906) a j. Spočívá v tom, že, mění-li se deformující síla cyklicky, tedy za stoupající síly jest deformace, jisté síle odpovídající, menší než za síly klesající, jak znázorňuje to obr. 329.

Plocha hysteretické »kličky«, jak se dá snadno dokázati, jest úměrna »zmařené« práci deformujících sil, t. j. práci, která se nezměnila v potenciální energii elastických sil, nýbrž se proměnila v teplo. Tato zmařená práce dá se uvésti v souvislost s vnitřním třením tuhých hmot, to jest se ztrátou mechanické energie při vzájemných posunutích jednotlivých partikulí hmoty.

Obšírněji se budeme zabývati vnitřním třením u kapalin, kde se s tímto pojmem a jeho podstatou blíže seznámíme. S vnitřním

třením úzce souvisí zjev tlumení elastických kmitů. Amplitudy, na př. torsních kmitů koule, na drátě zavěšené, ubývá totiž tak, že tvoří řadu geometrickou, čili že logarithmus poměru dvou za sebou následujících amplitud, t. zv. logarithmický dekrement, jest veličinou stálou, jak již *Gauss* a *Weber* věděli. Tlumení kmitů jest způsobeno jednak třením v okolním mediu, jednak také vnitřním třením tordovaných vrstev v drátu samém. Logarithmický dekrement nezávisí za obyčejných teplotových poměrů mnoho na zatížení, ale za vyšších teplot s ním silně roste (*G. Wiedemann*). I za téhož zatížení roste s teplotou (*Streintz*). Zahřejeme-li železný drát několikráte na 100° a opět pomalu jej ochladíme, klesne dekrement až na $^1/_8$ původní hodnoty (*Tomlinson*, 1887). Pružné těleso, častěji stejnými silami deformované, jeví s počátku zjevy proměnlivé, později však přijme stav »normální«, v němž stejné síle stejná deformace se přiřaďuje (*G. Wiedemann*, 1858—62). Používáme-li na př. k torsním kyvům velmi dlouho téhož drátu, klesá logarithmický dekrement (*Streintz*, 1874), ale po delším odpočinku nabývá znovu původní hodnoty. Zmíněné klesání jest způsobeno jednak dlouho trvajícím zatížením (*P. M. Schmidt*, 1877), jednak *akkomodací* drátu na deformace (*Streintz*, 1880, *Negbauer*, 1891). Význam akkomodace jest tedy ten, že se hysteretická klička zúžuje, tedy plocha její zmenšuje. V důsledcích toho musí remantní deformace, daná ordinátou OA, resp. OA' v obr. 329. akkomodací klesati, což zmíněnými pracemi bylo potvrzeno.

Boltzmann (1876) postavil pro tlumení zvláštní theorii, dle níž jest útlum způsobován dopružováním (tedy velikostí OA, resp. OA'), které má za následek, že síla, která uvádí drát do původní polohy, není prostě úměrna odlehlosti od nullové polohy. Musí tudíž logarithmický dekrement záviseti na amplitudě; vskutku se ukázalo (*Schmidt*, 1877), že se vzrůstající amplitudou roste, ačkoli následkem akkomodace jest velmi těžko tuto otázku definitivně rozřešiti (*Braun* a *Kurz*, 1881).

Zajímavým zjevem jest *elastická únava*, totiž zjev ten, že za cyklů s rostoucí amplitudou ubývá střední hodnota modulu, a to jak při napínání, tak při torsi, jak u kovů, tak u kaučuku (*J. O. Thompson*, 1894). *Kelvin* pozoroval, že drát, zvláště drát tvrdý, často tordovaný a detordovaný, jeví větší logar. dekrement, že tedy jen jaksi s větší námahou udržuje se kývání, odkudž název únava. Klidem a mírným zahřátím (*Muir* něco nad 100°) únava mizí.

Vysvětlení těchto komplikovaných zjevů jest velmi obtížné. U kovů povede snad k němu mikroskopické studium průřezových

ploch, které zřetelně jeví vedle nepravidelné struktury krystallinické jakési větší aggregáty (o dimensích několika desítin *mm*), které silnými deformacemi se navzájem posunují (*Ewing* a *Rosenhain*).

Dopružování má v měrné fysice veliký význam, právě proto, že se kokonů, drátů a pásků užívá mnoho při závěsech k měření velmi malých otáčecích momentů. Vidíme na př. jasně, že, chceme-li se zbýti velmi nepříjemného a dlouho trvajícího »posouvání nullového bodu« u galvanometrů, musíme se pečlivě vystříhati příliš velikých výchylek. Proto se nyní k závěsům, kde to jen je možno, užívá vláken z amorfního křemene, který jeví dopružování nesmírně nepatrné. Krystally křemenové, ač ovšem jsou aeolotropní, ale za to v nejvyšší míře homogenní, nejeví dopružování vůbec (*Joffé*), podobně jako i jiné krystally (*Voigt*), vyjma kamennou sůl a led. Údaje strojů, jako jsou aneroid, barograf nebo thermograf, jsou spolehlivé jedině při malých a pomalých změnách tlaku nebo teploty. Také při jejich kalibraci musíme na dopružování míti stálý zřetel. Ba i u obyčejných thermometrů jeví se dosti značné dopružování thermické, dle pokusů *Weidmannových* (1877) nejmenší u čistého skla draselnatého nebo čistého skla sodnatého. Nejpodrobněji se thematem tímto zanášel *Marchis* (1898 a 1901) *).

Ráz tuhých těles.

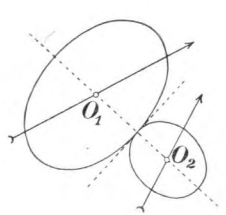
§ 391. **Vymezení úkolu.**

Tělesa tuhá, jsouce v pohybu, mohou se za jistých poměrů setkati; nastane úkaz, jejž povšechně *rázem zoveme*. Vzniká pak otázka, jak se rázem mění stav pohybu obou těles. Řešení všeobecné, velice nesnadné, vyžaduje, bychom znali způsob pohybu postupného i otáčivého obou těles, jich tvar, polohu středů hmotných a mnohé jiné poměry, hledící ke zvláštnostem povrchu i látky. Jest tudíž úkol všeobecný nad míru složitým. Avšak na tomto místě jedná se o to, na určitých případech zvláštních objasniti jisté všeobecně platné věty, jichž odvození nečiní obtíží. Vzhledem k účelu tomuto zjednodušíme úkol co nejvíce.

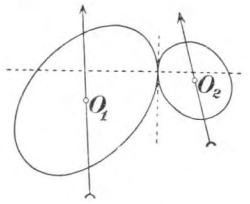
Především vyloučíme jakýkoli pohyb otáčivý, předpokládajíce toliko pohyb postupný. Tělesa, jichž povrchem jest všeobecně

*) O dopružování, zvláště thermickém, srv. referát *Ch. Éd. Guillaumeův*, Les déformations passagères des solides, z »Rapports« pařížského fys. kongressu 1900, sv. I., str. 432—448.

plocha křivá, srazí se v jistém bodu. Normála v tomto bodu k oběma plochám sestrojená určuje *směr rázu*. Nazýváme pak ráz *centrálním* (dostředným), když normála tato prochází středem hmotným jednoho i druhého tělesa, jinak zoveme ráz *excentrickým* (výstředným). Srovnávajíce pak *směr rázu* se *směrem pohybu*, jenž jest určen směrem, v jakém postupují středy hmotné, pravíme, že ráz jest *přímý* neb *šikmý* dle toho, zdali směr pohybu jest zároveň směrem rázu anebo zdali jest od něho odchylným. V obr. 330. jest znázorněn ráz centrální, šikmý, v obr. 331. ráz excentrický, šikmý.



Obr. 330.



Obr. 331.

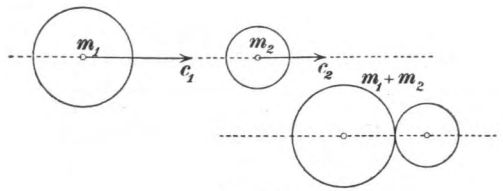
Značné zjednodušení úkolu nastává v tom případě, když tělesa v pohybu postupném se nalézající jsou kulová a stejnorodá. Střed hmotný jest identický se středem geometrickým, a poněvadž normála koule vždy prochází tímto středem, jest ráz za všech poměrů centrálním. Jinak může býti přímým neb šikmým.

Důležitý rozdíl vzniká dle toho, zdali ony koule jsou z materiálu pružného nebo nepružného. Projednáme nejprvé případy krajní, předpokládajíce abstraktně materiál jednou dokonale pružný, po druhé zcela nepružný; případy skutečné blíží se těmto krajním buď v jednom neb druhém směru.

§ 392. **Přímý ráz koulí nepružných.**

Budiž m_1 a m_2 hmota koule prvé a druhé, c_1 a c_2 rychlost, s jakou postupuje těžiště koule prvé i druhé, a to ve směru přímky spojující středy obou koulí (obr. 332.). Ráz jest pak centrální, přímý. Předpokládejme, že se obě koule pohybují ve směru souhlasném, na př. positivním (od levé k pravé), a při tom koule prvá větší rychlostí než druhá. Jest tedy c_1 a c_2 positivní a $c_1 > c_2$. Koule prvá dostihne koule druhé; od okamžiku doteku pohání se zadní strana — ve směru pohybu řečeno — koule druhé a zadržuje přední strana koule prvé; proto se koule stlačují, nastává

deformování se obou koulí, jež trvá až do okamžiku, kdy koule nabudou rychlosti společné u. U koulí nepružných jest tím účinek rázu dokonán; deformace rázem vzniklá zůstává.



Obr. 332.

Zbývá určiti onu společnou rychlost u po rázu. Úhrnná hybnost koulí před rázem a po rázu jest dána výrazy

$$m_1 c_1 + m_2 c_2, \qquad (m_1 + m_2)\, u.$$

Hybnost tato jest časovým účinkem okamžitých sil, jimiž, jak sobě můžeme mysliti, koule byly v pohyb uvedeny. Při rázu nevystupují síly nové, akce a reakce se v úhrnném účinku vyrovnává. Zůstává tedy úhrnná hybnost rázem nezměněnou. Položíce tudíž ony výrazy hořejší sobě rovnými, nalezneme

$$u = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Týž výraz plyne všeobecněji z principu o zachování pohybu těžiště u systému, na nějž nepůsobí vnější síly. Buď směr pohybu koulí v obr. 332. směrem osy X-ové, jejíž počátek leží kdesi za m_1, a místa hmotných středů koulí buďtež dána souřadnicemi x_1 a x_2. Souřadnice těžiště ξ jest pak

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

a jeho rychlost

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt}}{m_1 + m_2}.$$

Rychlost u nesmí se rázem změniti. Byly-li rychlosti koulí před rázem c_1 a c_2 a po rázu v_1 a v_2, musí všeobecně

$$u = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

ať se jedná o koule jakékoli. U koulí nepružných jest ovšem $v_1 = v_2 = u$ a plyne vzorec dříve přímou úvahou dovozený.

Rychlost po rázu jeví se tedy býti rychlostí průměrnou, v širším významu tohoto slova; koefficienty, dle nichž ji z rychlostí původních počítáme, jsou hmoty koulí.

Pohybují-li se koule proti sobě, na př. koule druhá ve směru negativním od pravé k levé, má c_2 znamení záporné. Je-li zde ve zvláštním případu $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, vychází $u = 0$, hybnost po rázu jest tedy nullovou; avšak nestala se nullovou teprve rázem, neboť byla již před rázem mc — mc, tudíž nullovou.

§ 393. Přímý ráz koulí pružných.

Význačný rozdíl mezi koulemi zcela nepružnými a dokonale pružnými vystupuje od okamžiku, kdy rázem se rychlosti c_1 a c_2 vyrovnaly ve společnou průměrnou u a deformace se dovršila. U koulí zcela nepružných tato deformace zůstává; naproti tomu u koulí dokonale pružných se ihned vyrovnává. Deformace vznikla rychlostními rozdíly $c_1 - u$ a $u - c_2$, jež udávají ztrátu na rychlosti koule prvé a zisk koule druhé. Reformací obou koulí vystupují ony rozdíly znova; koule prvá ztrácí vzpružením koule druhé ještě jednou na rychlosti $c_1 - u$, a koule druhá vzpružením koule prvé získává ještě jednou $u - c_2$. Značí-li tedy v_1 a v_2 rychlosti po rázu, jest

$$v_1 = c_1 - 2\,(c_1 - u),$$
$$v_2 = c_2 + 2\,(u - c_2),$$

anebo

$$v_1 = 2u - c_1,$$
$$v_2 = 2u - c_2,$$

kdež znamená

$$u = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Rovnicemi těmito jest úkol řešen; dosazovati hodnotu za u do rovnic pro v_1 a v_2 není výhodné, poněvadž by se tím rušil přehled.

Síly pružnosti vystupují při rázu podvojně, positivně a negativně; proto úhrnná hybnost se rázem nemění. Počtem obdržíme

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 2u\,(m_1 + m_2) - (m_1 c_1 + m_2 c_2),$$

tudíž dosazením hodnoty za u

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 c_1 + m_2 c_2.$$

Zároveň vychází z rovnic hořejších

$$v_1 + c_1 = v_2 + c_2.$$

Je-li tedy $c_1 > c_2$ před rázem, jest $v_1 < v_2$ po rázu; koule prvá, dostihnouc druhou, popožene ji a zůstává sama zpět; ráz se nemůže opakovati.

§ 394. Zákon o živých silách.

Rozdíl mezi rázem těles dokonale pružných a zcela nepružných vynikne zvláště zákonem o živých silách. Součet živých sil nemění se při rázu těles pružných, naproti tomu se umenšuje při rázu těles nepružných.

Píšeme-li totiž poslední dvě rovnice předešlého odstavce ve způsobu

$$m_1 (c_1 - v_1) = m_2 (v_2 - c_2),$$
$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2,$$

obdržíme násobením, připojíce činitel $^1/_2$ a jinak upravíce,

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

kteroužto rovnicí jest zákon o zachování živých sil formulován.

Jinak má se však věc u hmot nepružných. Úhrnná živá síla před rázem a po rázu jest

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2, \qquad \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2.$$

Rozdíl obou činí, dosadíme-li za u příslušný výraz,

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (c_1 - c_2)^2.$$

Jinak lze rozdíl ten vyjádřiti (Carnot) formou

$$\tfrac{1}{2} m_1 (c_1 - u)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (u - c_2)^2.$$

Rázem těles nepružných nastává tedy ztráta živých sil. S principem o zachování energie není výsledek tento v odporu; energie pohybu ničí se u hmoty jako celku, vystupuje však v pohybu jich nejmenších částic, v pohybu molekulovém, způsobujíc oteplení; část pak oné ztráty energie spotřebuje se na deformaci, jež jest u hmot nepružných trvalou.

Zákon o rázu koulí pružných byl v předchozím dovozen na základě úvahy, spočívající ve svém jádru na principu akce a reakce. Nezdá-li se užitý postup myšlenkový dosti průhledným, lze jej obrátiti následovně: Na základě principu o zachování pohybu těžiště platí, jak jsme viděli,

$$\frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Vedle toho nesmí dle samotné definice těles dokonale pružných nastávati žádná ztráta energie, t. j. musí

$$\tfrac{1}{2} m_1 c_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 c_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Z těchto dvou rovnic lze vypočísti obě neznámé v_1 a v_2; ovšem dojdeme k výsledku témuž jako nahoře.

Za příklad dosavadních výsledků uveďme zarážení kolů neb jehel beranem. Velká hmota M zvedá se do výšky h, což vyžaduje práce Mgh. Na to se nechá padnouti; narazí rychlostí $v = \sqrt{2gh}$ na kůl hmoty m, který jest v klidu. Ztráta živé síly jest dána výrazem

$$\frac{Mm}{M+m} gh.$$

Odečte-li se tato ztráta od vykonané před tím práce, zbývá

$$Mgh - \frac{Mm}{M+m} gh = Mgh \cdot \frac{M}{M+m}$$

a tohoto zbytku používá se k vlastnímu účelu, totiž zarážení, při kterém třeba veliké překážky pohybu překonati. Koefficient udávající, jaká část (kolik procent) práce vykonané se k účelu tomu zužitkuje, jest

$$\frac{M}{M+m} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}},$$

jest tedy tím bližší jedničce (100 procent), čím jest hmota M berana větší proti hmotě m kůlu.

Budiž dána celá řada koulí stejné velikosti, těsně jedna vedle druhé do řady srovnaných; uvažujme, jaký účinek vznikne, když na ně narazí stejně velká koule, pohybující se rychlostí v a živou silou $\frac{1}{2} mv^2 = e$ ve směru, v jakém koule do řady jsou srovnány.

Jsou-li koule pružné, pak každá sdílí rychlost a živou sílu kouli následující, tak že až poslední koule se uvede v týž pohyb, jaký měla koule narážející.

Jinak, jsou-li koule nepružné.

Koule 1. narazí na 2. rychlostí v a živou silou e;

po rázu mají obě rychlost $\frac{v}{2}$ a živou sílu $\frac{1}{2}(m+m)\frac{v^2}{4} = \frac{e}{2}$.

Koule (1 + 2) narazí na 3. rychlostí $\frac{v}{2}$ a živou silou $\frac{e}{2}$;

po rázu mají všechny tři rychlost $\frac{v}{3}$ a živou sílu $\frac{1}{2}(m+m+m)\frac{v^2}{9} = \frac{e}{3}$.

A tak, když náraz postoupí až k n-té kouli, jest společná rychlost $\frac{v}{n}$ a živá síla $\frac{e}{n}$. Z toho jest patrno, jak se rychlost původní postupem k dalším a dalším koulím zmenšuje a jak se původní energie seslabuje. Tím se vysvětluje, proč písek tlumí i náraz nejprudší na př. projektilu, proč při trhání kamenů střelným prachem nebo skal dynamitem se kanál, do něhož se vkládá patrona, ucpává pískem; při výstřelu roztrhne se balvan, ale písek se z vyvrtaného kanálu nevyráží.

§ 395. **Ráz koule na pevnou stěnu.**

Stěna jest jako hmota velmi (nekonečně) veliká. Píšíce vzorec pro rychlost u ve tvaru

$$u\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)=\frac{m_1}{m_2}\,c_1+c_2$$

a kladouce zde $m_2=\infty$, obdržíme

$$u=c_2$$

a poněvadž jest stěna před rázem v klidu, t. j. $c_2=0$, vychází

$$u=0.$$

Z toho plyne však za všech okolností

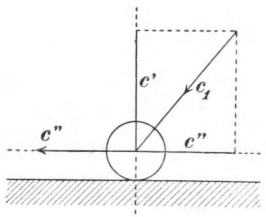
$$v_2=0.$$

Stěna se tedy rázem nepohne, v klidu zůstávajíc. Co se koule týče, je-li nepružnou, zastaví se, kolmo na stěnu dopadnouc, ve svém pohybu a deformuje se trvale; je-li pružnou, a je-li také stěna pružnou, odskočí koule, kolmo narazíc, původní rychlostí zpět, jak vychází z rovnice

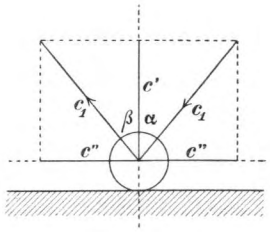
$$v_1+c_1=0;$$

rychlost koule se tedy jen obrátí, a koule pohybuje se touže energií ve směru opačném.

Výsledek zde odvozený platí přibližně i pro takové hmoty m_2, kteréž jsou proti hmotě kolmo dopadající m_1 aspoň velmi veliké; také v tom případu se ona velká hmota, byla-li před rázem v klidu, rázem téměř ani nepohne. Když tedy někdo položí na ruku velký kámen, může do něho bušiti kladivem; ruka cítí váhu kamene, ale účinků rázu téměř necítí.



Obr. 333.



Obr. 334.

Je-li náraz koule na pevnou stěnu šikmým, rozložíme rychlost c_1 na složky c' a c'' kolmo ke stěně a podél stěny. V případě,

že koule i stěna jest nepružnou, ničí se složka c' a koule pohybuje se dále podél stěny rychlostí c'' (obr. 333.). V případě, že koule i stěna jsou dokonale pružnými, obrátí složka c' odrazem svůj směr a přistupujíc pak ke složce c'' doplňuje tuto na rychlost výslednou, jež co do velikosti se rovná původní, co do směru pak jest s ní souměrnou; koule odskočí tak, že úhel odrazu β se rovná úhlu dopadu α (obr. 334.).

§ 396. **Přímý ráz koulí nedokonale pružných.**

Od rázu koulí dokonale pružných můžeme přejíti k rázu koulí nedokonale pružných Newtonovým obratem. Řekli jsme, že při kollisi ztrácí následkem deformace koule prvá na rychlosti c_1-u a při reformaci znovu ještě c_1-u; podobně pro kouli druhou byl zisk na rychlosti $u-c_2$ a $u-c_2$. Nedokonalou pružnost můžeme uvést v počet, píšíce, že koule prvá při reformaci neztrácí c_1-u, nýbrž něco méně $k(c_1-u)$, kde k jest pravým zlomkem; podobně je zisk na rychlosti druhé koule při reformaci pouze $k(u-c_2)$. Budou tedy konečné rychlosti v_1 a v_2

$$v_1=c_1-c_1+u-k(c_1-u)=u-k(c_1-u)$$
$$v_2=c_2+u-c_2+k(u-c_2)=u+k(u-c_2).$$

Veličinu $k<1$ nazval Newton *koefficientem restituce*, a experimentálně našel, že závisí pouze na materiálu koulí, nikoli na jejich velikosti nebo rychlosti. Přesnějšími pokusy ukázal *Vincent* (1901), že lépe vyhovuje závislost

$$k=A-B(c_1-c_2),$$

kde A a B jsou konstanty.

Počítáme-li relativní rychlost koulí po rázu, poznáváme vzhledem k rovnici

$$v_2-v_1=k(c_1-c_2)$$

že je menší, než před rázem; pro ráz pružných koulí bylo

$$v_2-v_1=c_1-c_2,$$

relat. rychlost zůstávala táž (ač ovšem směru opačného), koule se po rázu stejně rychle od sebe oddalovaly, jako se před rázem k sobě blížily.

U koulí naprosto nepružných je $v_2-v_1=0$. Počítáme-li ztrátu energie kinetické při rázu, míru to vznikajícího oteplení, plyne pro koule nedokonale pružné výraz

$$(1-k^2)\cdot\tfrac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(c_1-c_2)^2.$$

Jsou tudíž, jak nutno, oba dříve projednané případy absolutní nepružnosti a absolutní pružnosti specialisacemi tohoto případu obecnějšího, kde $k = 0$ pro látky prvého, a $k = 1$ pro látky druhého druhu.

Hodgkinson změřil pro různé látky koefficienty restituce (Report to the British Association, 1834); některé z nich uvádíme:

Sklo - sklo	0·94,
litina - sklo	0·91,
slonovina - slonovina	0·81,
litina - litina	0·66,
korek - korek	0·65,
jilmové dřevo - jilmové dřevo	0·60,
olovo - slonovina	0·44,
olovo - jilmové dřevo	0·41,
olovo - sklo	0·25,
olovo - olovo	0·20,
hlína - hlína	0·17.

§ 397. Poznámky historické a methodické.

Zákony o rázu těles objevil *Jan Marcus Marci* (* 1595 v Landškrouně, † 1667 v Praze), lékař a professor university Pražské, a uveřejnil ve spise »De proportione motus« (1639 v Praze) *). Spis jeho zůstal však nepovšimnut, a zákony rázu znovu byly objeveny následkem vypsání ceny londýnskou akademií téměř současně r. 1668 *Huygensem* (De motu corporum ex percussione), *Wallisem* (De percussione) a *Wrenem* a uveřejněny v Transactions of the Royal Society v Londýně ve svazku 1. Brzo na to také *Newton* v Principiích je dovodil. Od dob těch mnoho učenců se rázem zabývalo. Ale přes to otázka tato na základě obecné theorie pružnosti do dnes není řešena definitivně; výsledky theorie mechanické a elastické se liší a pokusem ani jedna, ani druhá se úplně nedotvrzuje. Speciálně byla theorie applikována na koule a válce. Pro zajímavost uvedeme zde *Hertzův* vzorec pro *dobu trvání rázu* dvou stejně velikých koulí o radiu R a spec. hmotě s. Doba ta jest

$$2{\cdot}9432\, R \sqrt[5]{\frac{25\,\pi^2 s^2 (1-\sigma^2)^2}{8\,(c_1 - c_2)\,E^2}}.$$

T obdržíme v sekundách, dosazujíce R v *mm*, Youngův modul E v jednotce $\frac{\text{váha kg}}{mm^2}$ a $(c_1 - c_2)$ v $\frac{mm}{sec}$. Rovněž musí s býti vyjádřeno v systému *váha kg, mm, sec.*, tedy

$$s = \frac{S}{10^6 \,.\, 9810},$$

kde S jest spec. hmota systému *cm-g-sec.*

Hamburgerovy (1886) výsledky, pro dobu rázu dvou koulí mosazných o $R = 13$ *mm*, měřenou výchylkou galvanometru, když proudový kruh dotekem obou koulí byl spojen, obsahuje následující tabulka:

$(c_1 - c_2)$ v $\frac{cm}{sec}$	7·37	12·29	19·21	29·5
doba trvání rázu počítaná	0·000185	0·000167	0·000153	0·000140
» » » pozorovaná	0·000196	0·000173	0·000157	0·000148

Za příklad veličin, které při rázu intervenují, uvádíme ještě: Dvě ocelové koule poloměru 2·5 *cm* narazí na sebe s relativní rychlostí $1\,\frac{cm}{sec}$: doba trvání rázu je 0·00038 *sec.*, poloměr plochy, v níž se setkají 0·013 *cm*, maximální celkový tlak je 2·47 *kg*, a maximální napětí $73\frac{kg}{mm^2}$. Kdyby se s touž vzájemnou rychlostí $1\,\frac{cm}{sec}$ setkaly dvě ocelové koule velikosti zeměkoule, obnášela by doba trvání rázu neméně než skoro 27 hodin.

Experimentálně lze zákony o rázu studovati tak zvanými srazostroji, udanými v podstatě již *Mariottem* (Traité de la percussion ou choc de corps, 1677), jichž hlavní částí jsou koule různé velikosti, buď z hlíny v sáčkách, pro případ těles nepružných, nebo ze slonoviny, pro případ těles pružných. Koule jsou zavěšeny na dvojitých nitkách; pouští se za sebou nebo proti sobě rychlostí, jež se reguluje výškou, se které se nechávají padati. Dlužno totiž pamatovati, že zákony odvozené neplatí pro případ, kdy se koule valí (na př. na billiardu), kde pak záleží na tom, jakým nárazem se uvedou v pohyb. Tím trpí také srazostroje, u nichž koule rozbíhá se v žlábku, ač bývají zařízeny i na pozorování kvantitativní (na př. *Sedlaczekův*, 1875).

Deformace koule, vznikající rázem na pevnou stěnu, lze velmi dobře i objektivně demonstrovati způsobem následujícím: Koule slonová, na př. průměru 4 *cm*, nechá se padati s výše asi 1 až $1^1/_2$ *m* na desku skleněnou, tloušťky aspoň 2 *cm*. Deska se před tím začadí sazemi (plamene terpentinového) a položí vodorovně na stůl, olovničkou pak vyhledá se nad středem desky místo, kde se (na lati) uváže nitkou ona koule slonová. Když se nitka přepálí, padne koule na desku a odskočí, padne opět a odskočí atd., při čemž se na místech, kam dopadne, tvoří na černi kroužky, první větší, následující menší. Kroužky tyto, dokazující deformaci koule,

*) Význam jeho vědeckých prací uvedl v platnost v kruzích odborných četnými pojednáními F. J. Studnička. Viz na př. souborný článek v Živě, 1896, pag. 161.

lze optickou projekcí demonstrovati. Ukazují především ostrý kraj, přímým dotykem koule a desky vzniklý, a kolem ještě jako obal kroužek méně význačný a neurčitě ohraničený, vzniklý stlačeným vzduchem. Jinak udává se týž pokus s deskou železnou neb mramorovou; zde však projekce optické v průsvitu, při kteréž právě mnohé podrobnosti pokusu na jevo přicházejí, nelze ovšem užívati.

§ 398. **Kyvadlo ballistické.**

Kyvadlo, jež se zove ballistickým *), slouží k určení rychlosti projektilu na základě zákonů o kývání a o vrhu. Jest to massivní těleso, na tyči po způsobu kyvadla zavěšené, jehož vnitřek bývá vyplněn hlínou neb pískem, aby projektil v něm uvázl.

Budiž M hmota, K moment setrvačnosti kyvadla, x odlehlost jeho těžiště od osy. Proti kyvadlu vystřelí se ve směru vodorovném koule hmoty m, kteráž do hmoty kyvadlové vrazí rychlostí v; odlehlost střelné čáry od osy budiž z. Nárazem koule nabývá hmota kyvadlová úhlové rychlosti ω a živé síly $\frac{1}{2}K\omega^2$, kterou se zvedne až do úhlové výšky Θ. Záměnu práce tím vykonané za onu živou sílu formuluje rovnice

$$\tfrac{1}{2}K\omega^2 = Mgx\,(1 - \cos\Theta)$$

čili

$$K\omega^2 = 4\,Mgx\,\sin^2\frac{\Theta}{2}.$$

Úhlovou rychlost ω určíme úvahou následující: Hybností mv projektilu způsobuje se (§ 111.) týž účinek jako součinem $f\tau$ síly f po dobu velmi krátkou τ působící. Momentem fz síly té vznikne (§ 236.) úhlové urychlení $\frac{fz}{K}$; toto násobeno dobou τ velmi krátkou dává úhlovou rychlost ω. Jest tedy

$$\omega = \frac{mvz}{K}.$$

Dosadíce hodnotu tuto do hořejší rovnice, obdržíme

$$\frac{m^2v^2z^2}{K} = 4\,Mgx\,\sin^2\frac{\Theta}{2}.$$

Doba kyvu kyvadla jest (§ 266.)

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Mgx}}.$$

Vyloučíce z obou rovnic K, přímému měření méně přístupné, obdržíme

$$v = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{M}{m}\cdot\frac{x}{z}\cdot gT\cdot\sin\frac{\Theta}{2}.$$

*) Z řeckého $\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$ házeti (oštěpem), tudíž analogicky naše střílet.

Doba kyvu T určí se dodatečně; tím se vyhoví té okolnosti, že hmota projektilu jest v úhrnné hmotě M celého kyvadla obsažena a že spolu působí na dobu kyvu.

Kyvadlo ballistické zavedl *Robins* *) (1742); dříve se ho užívalo dosti mnoho k určení rychlostí projektilů; za dob našich děje se tak methodami jinými (elektrickými), jež jsou přesnější.

Úkazy soudržnosti těles tuhých.

§ 399. **Deformace permanentní. Elastické diagrammy.**

Deformující síly způsobují změny, které jsou jim úměrny, pokud napětí nepřevýší t. zv. *mez úměrnosti* (angl. »limits of linear elasticity«); změny ty jsou pomíjející. Stoupá-li napětí dále, roste deformace obyčejně poněkud urychleně, ale může ještě zůstávati pomíjející. Když však napětí přestoupí *mez pružnosti*, nastávají deformace trvalé (angl. permanent set). Stanoviti tuto mez znamená tedy určiti, až jak daleko napětí smí postoupiti, abychom nevykročili z *oboru pružnosti*. Když se překročí, nastávají úkazy, jež zařaďujeme do oboru nového, *oboru soudržnosti*, čili *kohese*. Změny způsobené jsou trvalé; přece však souvislost částic daného tělesa zůstává. Když však napětí stoupá ještě dále, dojdeme opět jisté meze, kde přestává i obor soudržnosti, t. j. kdy souvislost částic přestává; označujeme toto mezní napětí jakožto *mez pevnosti* materiálu **).

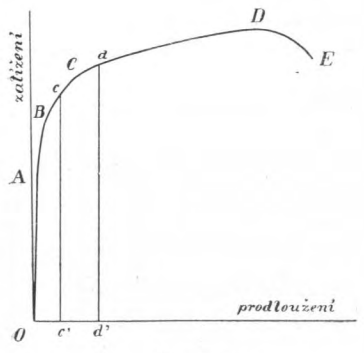
Tyto pojmy můžeme si velmi dobře osvětliti na diagrammech, znázorňujících závislost deformace na deformující síle, tedy na př. prodloužení drátu na zatížení.

Na obr. 335. znázorňovala by přímka OA (ovšem v přehnaném sklonu kreslená) obor platnosti Hookeova zákona, bod A mez úměrnosti. Jestliže až do bodu B nenastává deformace trvalá, jest B mezí pružnosti (a to v tahu). Od bodu B počínaje zůstává deformace trvalá, při čemž od C počínaje velmi malému zvýšení

*) Robins Benjamin, (1707—1751), generální inženýr anglické východoindické společnosti. Příslušné pojednání má název: New principles of gunnery 1742.

**) Názvosloví o pružnosti není ustáleno. *Mez pružnosti* a *mez pevnosti*, nebo jak můžeme říkati praegnantně, *pružnost* a *pevnost* materiálu jsou dány jistým číslem, na př. jak obvyklo v jednotce $\frac{váha\ kg}{mm^2}$ vyjádřeným. Často užívá se zvláště u techniků označení koefficient pružnosti a koefficient pevnosti. (Šolín: Nauka o pružnosti a pevnosti 1897). Ježto název koefficient jest zadán pro reciprokou hodnotu modulu, podržíme jednodušší název mez pružnosti nebo pevnosti nebo prostě praegnantně pružnost, pevnost.

zatížení odpovídá veliký vzrůst prodloužení. Bod *C* označuje tedy zatížení, od něhož počíná drát *téci* (angl. yield-point, něm. Fliessgrenze). Bod *D* vyznačuje pevnost v tahu (angl. breaking stress, tenacity, franc. ténacité, něm. Zugfestigkeit); čára *DE* ukazuje, že, když jednou bylo mezného zatížení *D* dosaženo, nastává další děj, končící přetržením i za nižšího zatížení.



Obr. 335.

U kovů měkkých, na př. u vyžíhaného drátu, je část *AO*, ba i *OB* velmi krátká. Ale, jak znázorňuje přímka *cc'*, když odtížíme, a *c'c*, když znovu zatěžujeme, nastalo sice trvalé prodloužení drátu (o *Oc'*), avšak byl značně zvýšen obor úměrnosti takto prodlouženého drátu, drát zatížením *ztvrdl* (franc. écrouissage, écrouir, něm. kalt härten). Někdy nastává tento effekt i za bodem toku, jak schematicky naznačuje přímka *dd'*. Dráty, jak jich obyčejně užíváme (nevyžíhané), jsou již tažením při fabrikaci ztvrdlé.

Diagramm náš je schematický: u oceli jeví obdobná křivka bod obratu u *C*, u litiny jest *OA* velice krátké a body *ABCD* nejsou význačny, část *DE* pak schází vůbec.

§ 400. **Pevnost.**

Do oboru, kterýž jest omezen jednak mezí pružnosti jakožto dolní, jednak mezí pevnosti, jakožto horní, náležejí veškeré otázky, technicky zvláště důležité, týkající se pevnosti materiálu. Studium otázek těch béře se cestou empirickou; výsledek studia jest veliký číselný materiál, kterýž dovoluje orientaci v případech pro praxis důležitých *). Povšechně platných výsledků jest zde málo.

Rozsáhlý úkol roztřiďuje se v úkoly zvláštní dle povahy působících sil. Rozeznává se pevnost v tahu (proti roztržení), zvaná absolutní, a pevnost v tlaku (proti rozdrcení), zvaná zpětnou; dále pevnost v ohnutí (proti přelomení), zvaná relativní; pevnost v kroucení (proti překroucení) a j.

*) V přehledném sestavení obsahuje velmi četná data číselná Technický průvodce, Červený-Řehořovský, oddíl V., z něhož zde některé příklady jsou vzaty.

Pevnost v tahu čili *absolutní* stanoví se číslem, udávajícím napětí tyče, drátu a pod., na jednotku průřezu vztahované, při kterém nastane přetržení. Jednotkou průřezu jest pro účely technické mm^2, pro fysikální cm^2. Jako již nahoře, tak volíme i zde mm^2. Jednotkou síly jest váha kilogrammu; zmenšením čísel o 2% lze ji převésti na megadynu. V příkladech zde volených uvádíme zároveň meze i pružnosti i pevnosti v tahu, aby tím vymezení oboru bylo vyznačeno.

Materiál	Mez $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$	
	pružnosti v tahu	pevnosti v tahu
litina	7	13
kujné železo, svářkové, drát	22	60
» » plávkové, pruty	22	42
ocel kelímková, pruty	42	80
ocel kelímková, drát	—	120
měď kutá, drát	12	42
mosaz, drát tvrdý	13	50
zinek litý	2·3	5·3
olovo lité	1	1·3
olovo, drát	0·5	2·2
stříbro, drát	11	30
platina	27	34

O pevnosti v tahu rozhoduje velice způsob zpracování, zejména kovů, tedy válcování, vykování; u železa má veliký význam struktura. Rozdíl jest také v tom, zdali síla materiál napínající působí náhle, krátce, anebo trvale, po delší dobu; všeobecně reaguje materiál větší měrou proti krátce trvajícím silám než proti jejich působení trvalému. Značným zahřátím se pevnost v tahu zmenšuje.

Zajímavo jest vedle čísel v příkladech uvedených položiti čísla, vztahující se na některá vlákna organická. Udávají se následující meze pevnosti v téže jednotce $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$:

žíně	0·26	*mm*	průměru	9·6
vlas	0·10	»	»	11·6
nit vlněná	0·5	»	»	14·0
vlákno pavučinové	0·0025	»	»	18·8
nit konopná	0·26	»	»	25·9
vlákno kokonové	0·0013	»	»	27·5

Dle toho nese na př. vlákno kokonové skoro tolik, jako by nesl drátek stříbrný při stejném průměru. U dřev záleží na tom, zdali daná tyč dřevěná je v hlavním svém rozměru řezána ve směru stromu podélném nebo radiálním nebo tangenciálním.

Meze pevnosti a pružnosti závisí ovšem ve značné míře na teplotě, klesajíce se stoupající teplotou. Při snížení teploty na — 182° vzrůstá mez pevnosti u všech kovů (nejvíce u železa o více než 100%, nejméně u stříbra o 26%), vyjma u zinku, vismutu a antimonu, kde až o 50% klesá, patrně následkem vystupování různých napětí v těchto krystallinických kovech.

Pevnost v tlaku proti rozdrcení jest předmětem technicky důležitým vzhledem k materialiím, jichž se užívá ke stavbám. Za příklad uvádíme tyto koefficienty v jednotce $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$ podotýkajíce, že dle původu materialií jsou ovšem velmi různé.

Žula	10 . . . 20	vápenec	9 . . . 14
pískovec	3 . . . 12	cihly	1 . . . 2
	litina	60 . . . 100.	

Dlužno poznamenati, že pevnost proti rozdrcení ve vlastním smyslu nastává u sloupů neb tyčí krátkých; jsou-li dlouhé, vznikne stoupajícím tlakem postranní prohnutí, po případě přelomení. Celkově jest pevnost v tlaku větší než v tahu, dřevo vyjímajíc.

Pevnost proti zlomení, často zvaná *relativní*, určuje se podobně číslem, jehož hodnota jest ohraničena mezí pevnosti v tahu a tlaku, což jest pochopitelno, poněvadž se při ohnutí vlákna na straně konvexní napínají, na straně konkavní stlačují. Síla, na zlomení pracující, působí tu momentem. Pevnost tyčí, trámů a pod. jest nejmenší na místech, kde jsou upevněny; tam zlomení nejspíše nastane. Přihlížíme-li ke tvaru průřezu, jest výhodno, aby rozměr toho směru, ve kterém působí síla, byl větším; v příslušných vzorcích přichází rozměr tento v mocnosti druhé, kdežto rozměr k němu kolmý přichází v mocnosti prvé. Zpravidla jest u trámů, travers a pod. poloha horizontální, tlak vertikální; záleží tudíž na rozměru vertikálním. Výhodné jsou tudíž jisté formy průřezu (⊥ a ⌶). Při stejné hmotě mají duté útvary větší pevnost relativní.

Užijeme-li analogických označení, jako v § 387., obdržíme tyto empirické vzorce, udávající sílu, kterou při stejném působení se útvar přelomí.

Pro průřez pravoúhlý

$$P = k \,.\, N \,.\, \frac{bc^2}{a}.$$

Pro průřez čtvercový

$$P = k \,.\, N \,\frac{b^3}{a}.$$

Pro průřez kruhový

$$P = k \,.\, N \,\frac{\pi}{4}\,\frac{R^3}{a}.$$

Při tom jest

$$k = 1,\ 4,\ 8$$

dle toho, je-li tyč na jednom jen konci upevněna, nebo na obou podepřena nebo na obou upevněna. Koefficient N, charakterisující pevnost relativní, jest v intervallu meze pevnosti v tahu a v tlaku.

Pevnost proti překroucení jest u drátů poloměru r určena vzorcem

$$H = T \,.\, \frac{\pi}{2}\, r^3.$$

Zde značí T mez pevnosti v kroucení, v téže jednotce jako ostatní. H jest moment, při němž překroucení (na povrchu) nastane.

Pro litinu jest **na př.**

$$T = 17{\cdot}3 \text{ až } 25{\cdot}7.$$

§ 401. **Tvrdost.**

Pevnost látky oproti vnikání tělesa jiného stanoví její *tvrdost.* Mineralogové posuzují tvrdost dle rýpání, užívajíce při tom empirické stupnice, kterou sestavil *Mohs* (1822) a která obsahuje tyto minerály: 1. mastek, 2. kamenná sůl, 3. vápenec, 4. kazivec, 5. apatit, 6. živec, 7. křemen, 8. topas, 9. korund, 10. diamant. Každá látka této stupnice rýpe předcházející a jest rýpána následujícími. Jinak lze relativně určovati tvrdost dle tlaku, při němž ocelový kuželový hrot vnikne na určitou hloubku do dané látky. Dle toho lze na př. obyčejné kovy seřaditi do této řady: olovo, cín, hliník, zlato, stříbro, zinek, měď, platina, železo, ocel. Sestrojeny též sklerometry na základě rýpání diamantem, kde se tvrdost posuzuje dle tlaku, při němž toto rýpání právě přestává. V tomto smyslu jest u krystallů tvrdost různá dle ploch, a i při téže ploše dle směru rýpání. U kovů mají pro tvrdost důležitý význam slitiny. Mince zlaté a stříbrné mají přísadu mědi (u nás korunové mince zlaté 90% Au, 10% Cu, stříbrné $83\frac{1}{2}$% Ag, $16\frac{1}{2}$% Cu), aby byly tvrdšími. Velký význam pro vnikání jistého tělesa do látky jiné má jeho rychlost; papírová deska, na stroji centrifugálním prudce roztočená, přeřezává dřevo; podobně deska z měkkého železa řeže kalenou ocel, i achat a křemen (Colladon).

Všechny jmenované methody trpí však různými nedostatky, tak že na př. pro vzájemnou tvrdost dvou látek různé methody dávají poměr i opačný. Prvý, kdo postavil vědeckou definici tvrdosti, byl ženiální *Hertz* (1882). Propočítal totiž napětí vznikající vzájemným tlakem dvou těles v místech stykových. Místo dosavadního nedefinovaného »hrotu« nastupuje dobře definovaná plocha kulová známé křivosti, která tlačí na rovinu. Tvrdostí rozumí pak *Hertz* pevnost, která účinkuje v tělese proti napětím, vznikajícím v něm v okolí kruhovité plochy tlaku. U těles křehkých vzniká při tom kruhovitá trhlina, u vláčnějších trvalé prohloubení s vypuklým krajem. Známe-li celkový tlak P, kterým kulová plocha působí a průměr D plochy styčné jest dle vývodů Hertzových tvrdost H

$$H = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{P}{D^2} = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{PE^2}{\varrho^2\,(1-\sigma^2)^2}},$$

kde ϱ jest radius křivosti tlačící kulové plochy, E Youngův modul, σ Poissonův poměr.

Hertzovu theorii zkoumal experimentálně *Auerbach* (1891—1900), sestrojiv apparát, jímž mohl jak P, tak D přesně stanoviti. Výsledek měření neodpovídal v tom smyslu předpokladům *Hertzovým*, že H nebylo nezávislo na křivosti čočky, jak ukazuje následující tabulka pro jistý druh skla.

$\varrho =$	3	5	10	15	*cm*
$H =$	156·0	127·9	108·1	95·0	$\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$
$H_1 = H \,.\, \sqrt[3]{\varrho} =$	228	222	227	223	„

Za to, jak ukazuje poslední řádek, jeví dostatečnou stálost součin $H_1 = H \,.\, \sqrt[3]{\varrho}$, který Auerbachem byl nazván absolutní tvrdost a jehož význam jest pevnost roviny oproti vnikání čočky o radiu křivosti = 1.

Týž výsledek potvrzen byl *Föpplem* a *Schwerdem* (1897) pro dva navzájem kolmé válce. Uvedeme zde čísla *Auerbachova* pro srovnání *Mohsovy* škály s absolutní tvrdostí.

Mohsovy škály stupeň . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
odpovídá abs. tvr. $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$	5	14	96	106	237	253	308	525	1150	2500.

Vidíme, že stupně tvrdosti nejsou aequidistantní, nýbrž stoupají urychleně.

Brinell (1900) a *Benedicks* (1904) modifikovali Hertz-Auerbachovu methodu užitím ocelové koule místo čočky, a ukázali, že u ocele stoupá tvrdost skoro na trojnásobnou hodnotu, stoupá-li procentuální množství uhlíku asi z 0·2 na 0·8 až 1·0; dále se téměř nemění. Tvrdost oceli napouštěné jest menší než kujné, tato sama pak dva a víckráte menší než oceli kalené, kde dostupuje asi hodnoty 700 $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$.

Dávno hledán byl vztah mezi tvrdostí prvků a jejich atomovou vahou. Naneseme-li tvrdost jakožto funkci atomové váhy, a vedle toho atomové váhy prvků dělené jejich specifickou hmotou, čili tak zv. atomové koncentrace (*Bottone* 1873, *Benedicks* 1901), podobně jakožto funkce atomové váhy, vzniknou křivky, které velmi zřejmě jeví souběžný chod s maximy u *C*, *Al*, *Fe* a *Co* a *Ni*, *Pd* a *Pt*.

§ 402. **Plastičnost.**

Plastickými zveme látky, které doznávají vlivem vnějších sil brzo trvalých deformací, aniž by nastalo přetržení nebo lom. Opakem jich jsou látky křehké. Za jakousi míru plastičnosti můžeme tedy s *Auerbachem* pokládati rozdíl mezi mezemi pevnosti a pružnosti; dělíme-li jej mezí pevnosti, dostaneme číslo vyjadřující relativní plasticitu. O různých projevech plastičnosti existuje nepřehledná řada prací, jichž různými, hlavně kvalitativními výsledky se zde zanášeti nemůžeme. Jen o některých stránkách předmětu se zmíníme.

Plastičnost má velmi důležitý význam technický. Plasticitou v tahu, neboli t. zv. duktilitou, jest podmíněno vytahování drátů; jest veliká u *Pt*, *Ag*, *Cu*, *Fe*, *Au*, malá u *Pb*, *Sn*, *Zn*. Látky, které za obyčejné teploty nejsou duktilními, zvýšením teploty se jimi stávají (zinek, šelak, pečetní vosk, sklo, křemen). Podobně důležitou jest plasticita pro válcování plechů a kování.

Vysoce zajímavými jsou pokusy, které konal prvý *Tresca* (1868 a 1872), pak *Obermayer*, *Tammann* a j., které ukazují zvláštní projev plasticity, na př. kovů za obyčejných teplot, ledu a p., zvaný fluiditou. Chovají se totiž za velmi vysokých tlaků podobně, jako kapaliny o velmi vysokém vnitřním tření, jeví výtok z otvorů, ba dokonce i známky počátku tvoření se kapek.

Velmi zajímavé jsou také výsledky *Springových* (1878 až 1903) *) pokusů, kterými ukázal, že krystallisovaná tělesa mají objemovou elasticitu jako plyny a tekutiny, že totiž působíme-li na ně velmi vysokým všestranným tlakem (až do 20.000 atmosfér), sice objem svůj zmenší, ale ustane-li tlak, zase dokonale původního objemu nabudou. Velmi překvapující bylo však, že u některých látek se vysokým tlakem objem o něco zvětšil, což také *Kahlbaum* (1901) potvrdil. *Spring* vysvětluje to tím, že vysoký tlak učiní tuhou látku tak plastickou, že místy přejde až v jakýsi stav tekutině podobný (quasiliquidní), při čemž je její spec. objem větší.

Víme, že plasticitu mnohých látek můžeme snížit, křehkost zvýšit kalením, t. j. zahřátím na vysokou teplotu a velmi prudkým ochlazením. Příkladem vedle kovů jsou známé skleněné (batavské) slzičky a boloňské lahvičky.

Faktorem velmi důležitým pro zjevy plastičnosti látek jest vedle teploty čas. Malou silou dlouho působící snadno na př. tyčinku z ševcovské smůly ohneme, při prudkém prohnutí se zlomí jako sklo, jevíc hladké, lesklé plochy lomu. Těžké předměty (olověná kulička) pozvolna do tohoto zdánlivě křehkého materiálu zapadají, ba naplníme-li kusy smůly té trychtýř, jeví — ovšem po letech — velmi znenáhlý výtok, zcela obdobný jako kapalina.

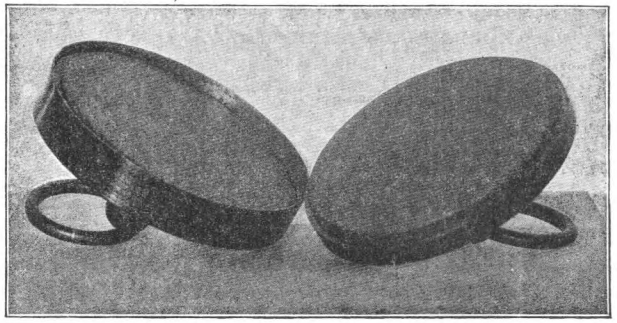
Zjevy tyto, zvláště vzpomeneme-li také na *Lehmannovy* tekuté krystally, které mají s kapalinami velikou fluiditu, s krystally pak aeolotropičnost společnou, téměř úplně znemožňují striktní definici

*) Srv. referát *W. Springův* v Rapports pařížského fys. kongressu 1900, sv. I., str. 402.

tuhých látek, tak že na konec musíme asi přisvědčiti *Tammannovi*, který na základě dlouholetých studií, ovšem hlavně se stanoviska thermodynamiky a nauky o fasích, dochází k závěru, že pouze krystally jsou vlastními tuhými tělesy, kdežto tuhá tělesa amorfní nejsou než přechlazenými roztoky.

§ 403. **Přilnavost.**

Úkaz, který zoveme přilnavostí (adhesí), objasňuje se deskami skleněnými, rovinně broušenými, jež jsou přitmelené ke kotoučům mosazným, kroužky opatřeným (obr. 336.). Když se skleněné desky dobře (líhem) očistí a pak k sobě přitlačí, lnou k sobě tak, že jest třeba jisté síly, aby se odtrhly. Drží-li se desky nad sebou, nese deska hořejší desku dolejší, ba může se na dolejší přidati ještě závaží. Aby se desky nesmýkaly, jest připojena mosazná volná obruč, oba kotouče obepínající. Jemnější způsob experimentování záleží v tom, že se deska hořejší zavěsí na rameno vah, vyváží a



Obr. 336.

pak v poloze vodorovné přitlačí na dolejší, rovněž vodorovně upevněnou desku; adhesi lze pak měřiti vahou závaží, jichž je třeba k odtržení. Poněvadž pak adhese roste s velikostí plochy, zavádí se síla na jednotku plochy vztahovaná jakožto koefficient adhese. Místo desk skleněných lze použíti též kovových, ebonitových a j.

Aby bylo patrno, jak malou je adhese oproti pevnosti, uvádíme, že u kovů (*Cu*, *Zn*, *Bi*, *Sb*, *Pb*, *Sn*) jest koefficient adhese v jednotce $\frac{váha\ kg}{mm^2}$, v níž jsme udávali pevnost, řádu 0·000001.

Adhese vystupuje též mezi látkami pevnými a kapalinami, a obnáší pak koefficient adhese v jednotce $\frac{váha\ kg}{mm^2}$ mezi sklem a vodou 0·000006, mezi sklem a rtutí 0·000018.

Musíme však adhesi dobře rozeznávati od zjevů jí velmi podobných, které však nikterak se nezakládají na přímém vzájemném působení mezi částicemi hmot. Právě u pokusu s adhesními destičkami tomu tak jest, nejsou-li nesmírně pečlivě hlazeny, očištěny a k sobě přitlačeny. I pak jeví zdánlivou adhesi, která však je, jak ukázal *Stefan* (1874) původu čistě aerodynamického, způsobena vnějším tlakem vzduchu, který následkem vnitřního tření jen velmi pomalu vniká mezi destičky. Ba dá se i vnitřní tření vzduchu (eventuálně i kapaliny, na př. vody, jsou-li destičky pod ni ponořeny) ze zjevu toho počítati. Pokus je čistý, těmito vlivy nezkalený, jen tehdy, děje-li se ve vakuu. *Voigt* (1883) ukázal pomocí interferenčních zjevů, že i u dobře umytých desk skleněných byla jich vzdálenost po přitlačení několik tisícin *mm*, tak že o nějakém vzájemném působení částic nemohlo býti řeči. Teprve po odstranění nejjemnějších stop prášků, zbylých po hlazení, klesla na 0·00007 *mm* a nastala skutečná adhese, neměnící se i byl-li okolní vzduch vyčerpán. *Voigt* vyslovuje domněnku, že se mezi deskami nachází vrstva vzduchová pevně lpící na plochách ve stavu podobném tekutému, ba snad i pevnému.

V obor adhese spadají zjevy psaní křídou, tužkou, lepení, klížení, spájení, sváření, zlacení, stříbření, niklování, spojování cihel maltou (k. a. až 0·000025), gypsem (k. a. až 0·00004) a p. Adhese může přejíti v kohesi, když se čerstvě sříznuté plochy, na př. olova, zejména kaučuku, k sobě přitisknou. Jinak lze téhož docíliti vysokými tlaky, jak již citované (l. c.) pokusy *Springovy* dokazují. Olověné piliny přejdou za obyčejné teploty tlakem 2000, zinkové tlakem 5000 atmosfér v pevnou kompaktní a homogenní, ba i krystallinickou hmotu. Směsi pilin různých kovů mění se ve slitiny (Woodův kov, i mosaz). Ba i chemické sloučeniny kovů s arsenem a sírou obdržel. Z prismatické stala se oktaedrická síra, z amorfního kovový fosfor.

Podobně mění se adhese v kohesi za působení sice malého tlaku, ale po dlouhou dobu a za mírně zvýšené teploty (ovšem hluboko pod bodem tání). Tak spojily se dva válce kovové, velmi pečlivě hlazenými plochami na sebe postavené, a to u *Zn* za 395° za 3 hodiny, u *Au* a *Pt* za 400° za 4 hodiny, u *Cu* a *Al* za 403°, resp. 418° za 8 hodin, u *Sb* za 395° za 12 hodin. Postaven-li válec *Cu*

na *Zn*, vytvořila se mezi nimi za 400° během 8 hodin téměř 2 *cm* tlustá vrstva slitiny, tak jako by mezi nimi byl nastal zjev *diffuse*, u kapalin a plynů známý. Podobné pokusy konal *Roberts-Austen* (1882 až 1896), a mohl mezi *Au* a *Pb* (toto taje za 325°) za 250° během měsíce analysí horizontálních vrstev zjistiti diffusi. Během 4 let nastal týž zjev i za teploty obyčejné.

Tyto zjevy znovu potvrzují naši poznámku na konci předešlého paragrafu.

Vnější tření tuhých těles.

§ 404. **Tření vlečné.**

Stýkají-li se dvě hmoty při vzájemném tlaku N a mají-li se jedna po druhé smýkati, vláčeti, jest třeba překonati odpor F, jehož základem jest tření. Tělesa tuhá, i nejlépe vyleštěná, mají totiž na povrchu svém malinké vyvýšeniny a prohlubeniny. Položí-li se těleso jedno na druhé, zapadají vyvýšeniny jednoho do prohlubenin druhého, i jest třeba, aby při pohybu ony vyvýšeniny byly překonány, po případě vylámány, což právě způsobuje odpor, který při pošinování nutno překonávati (*Warburg* a *Babo*, 1877).

Zákony o tření odvodil z četných pokusů *Coulomb* (1781), jež později potvrdil *Morin* (1831). Jsou následující:

1. Tření není závislé na velikosti stykové plochy.
2. Tření není závislé na rychlosti pošinování.
3. Tření jest úměrno síle, kterou tělesa na ploše stykové ve směru k této ploše kolmém k sobě jsou tlačena.

Značí-li tedy N tento kolmý tlak, F sílu tření právě překonávající, jest

$$F = f \,.\, N.$$

Faktor úměrnosti f charakterisuje látky, jež se vzájemně o sebe trou; zove se koefficient vlečného tření (frikce).

Jednoduchý způsob, jakým lze koefficient f měřením určiti, znázorňuje obr. 337. Tlak N jest zde dán vahou tělesa na dané vodorovné půdě spočívajícího. Zkouší se přidáváním závaží na misku, při jakém napětí provazce malý náraz hmotě udělený právě stačí, aby jím vznikl pohyb rovnoměrný. Překládá-li se těleso na plochy větší neb menší, lze nezávislost tření na velikosti plochy zkoušeti. Je-li plocha větší, jest ovšem počet stýkajících se a do sebe zasahajících částeček povrchových větší, ale za to rozdělí se

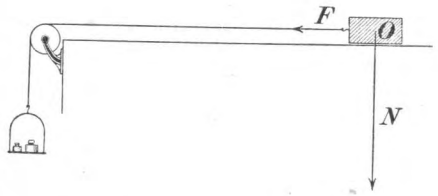
tlak na větší plochu, tak že na jednotlivé tyto částečky při větším jich počtu připadá tlak menší.

Jiným způsobem, který oproti prvému má mnohé výhody, určuje se koefficient f tak, že se těleso klade na rovinu, kterou lze od směru vodorovného odkláněti (obr. 338.). Na rovině o úhel ϑ odkloněné působí složka $P \sin \vartheta$ vlastní váhy tělesa P ve smyslu pohybu, kdežto složka druhá $P \cos \vartheta$ určuje tlak. Když při malém nárazu těleso po rovině přijde v pohyb rovnoměrný, jest právě tření onou prvou složkou překonáno, tudíž

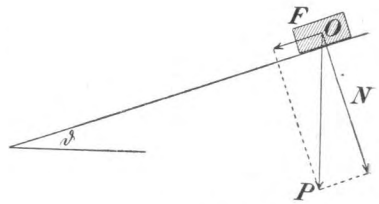
$$F = P \sin \vartheta, \qquad N = P \cos \vartheta,$$

$$f = tg\, \vartheta.$$

Tím nabývá koefficient tření velké názornosti; jest stanoven tangentou úhlu ϑ, který se zove úhlem tření vlečného.



Obr. 337.



Obr. 338.

Zákony nahoře uvedené byly později mnohými pozorovateli zkoušeny; nelze však říci, že by práce tyto byly již zakončeny a že by výsledek jich byl nepochybným. Jednalo se hlavně o zákon druhý, zdali tření jest nezávislé na rychlosti. Různí pozorovatelé došli zde výsledků sobě odporujících. Pravděpodobno jest však, že tření není docela nezávislým na rychlosti pohybu, nýbrž že poněkud roste, když rychlost se umenšuje; následkem toho bylo by větší při rychlostech zcela nepatrných, zejména když pohyb právě začíná. Vskutku se ukazuje, že jest větší síly $f_0 N$ potřebí, aby se těleso právě v pohyb uvedlo, než jest síla fN stačící pro překonávání odporu, když již těleso v pohybu jest. Mnozí označují dle toho koefficienty f_0 a f prvý jakožto statický, druhý jakožto kinetický.

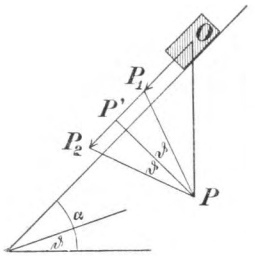
Četná data číselná o koefficientech f_0 a f obsahuje Řehořovského Technický průvodce, zde často citovaný. Za příklad uvádíme:

	f_0	f
Litina na litině neb bronzu málo mazaném	0·16	0·15
Litina na dubu při povrchu suchém	0·62	0·49
Dub na dubu suchém	0·62	0·48
» » » mokrém	0·71	0·25
Dřevo na dřevě suchém průměrně	0·50	0·38.

§ 405. Rovnováha na šikmé rovině vzhledem ke tření vlečnému.

Spočívá-li těleso hmoty M na rovině o úhel α odkloněné, přejímá rovina složku $Mg \cos \alpha$ úhrnné váhy, tak že zbývá složka $Mg \sin \alpha$ jakožto síla působivá. K této přistupuje síla $Mg \cos \alpha \,.\, tg\, \vartheta$ vznikající třením, a to additivně nebo subtraktivně dle toho, v jakém smyslu pohyb se děje. Algebraický součet obou sil dává výraz

$$Mg \sin \alpha \pm Mg \cos \alpha \,.\, tg\, \vartheta = Mg \frac{\sin (\alpha \pm \vartheta)}{\cos \vartheta}.$$



Obr. 339.

Výraz na pravo obdržíme po krátké redukci dle známých vzorců goniometrických, a objasníme grafickým znázorněním. Vedouce (obr. 339.) $OP = Mg$, $OP' = Mg \sin \alpha$ připojíme, od směru PP' vycházejíce, úhel ϑ na jednu i druhou stranu; i jest pak, jak přímo z obrazce dle věty sinusové lze odvoditi,

$$OP_1 = Mg \frac{\sin (\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta},$$

$$OP_2 = Mg \frac{\sin (\alpha + \vartheta)}{\cos \vartheta}.$$

Aby se těleso udrželo v rovnováze na nakloněné rovině, stačí tudíž síla OP_1, směrem opačným v bodě O působící. Zvyšujeme-li však tuto sílu, nenastane pohyb, dokud síla nedostoupí velikosti OP_2. V mezích OP_1 a OP_2 rovnováha trvá. Tření pomáhá totiž k udržení rovnováhy, vystupujíc subtraktivně k složce OP', ale brání vznikání pohybu, vystupujíc additivně k složce OP'. Teprve, když síla podél roviny působící se zvětší nad OP_2, nastane pohyb tělesa po rovině vzhůru, tak jako nastane po rovině dolů, když síla podél roviny vzhůru působící je menší než OP_1. Tedy schematicky:

při síle	0	. . .	P_1	. . .	P_2	. . . ∞
nastane	pohyb dolů,		rovnováha,		pohyb vzhůru.	

§ 406. Pád tělesa po šikmé rovině vzhledem ke tření vlečnému.

Padání tělesa po rovině vzhledem ke tření vlečnému děje se urychlením

$$a'' = g \frac{\sin (\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta}.$$

Dle toho modifikují se zákony Galileovy o rychlostech (§ 203.) a o tětivách (§ 204.), avšak modifikace tato vede k výsledkům právě tak jednoduchým a přehledným jako když by tření nebylo žádného.

1. Majíce odvoditi zákon analogický zákonu o rychlostech, srovnáváme pro pád volný a pád po šikmé rovině s třením rovnice

$$\tfrac{1}{2} v^2 = gs \qquad \tfrac{1}{2} v''^2 = g \frac{\sin (\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta} \,.\, s'',$$

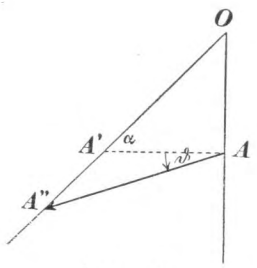
Náleží pak k sobě rovnice:

$$v = v'', \qquad s = s'' \frac{\sin (\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta}.$$

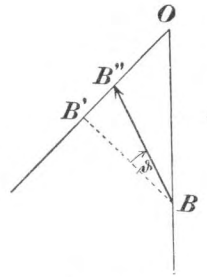
Tyto lze geometricky jednoduše vyložiti. Těleso, dopadší volně do bodu A, má jistou rychlost v. Chceme-li nalézti místo, ve kterém těleso, po rovině padajíc, téže rychlosti nabude, nejdeme od A k A' směrem vodorovným, ve smyslu Galileova zákona o rychlostech, nýbrž směrem o úhel ϑ níže odkloněným; v tomto směru stihneme místa A'', kdež jest teprve $v'' = v$ (obr. 340.); neboť jest

$$OA : OA'' = \sin (\alpha - \vartheta) : \sin (90 + \vartheta),$$

jak hořejší rovnice žádá.



Obr. 340.



Obr. 341.

2. Majíce odvoditi zákon analogický zákonu o tětivách, srovnáváme pro pád volný a po šikmé rovině s třením rovnice

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad s'' = \tfrac{1}{2} g \frac{\sin (\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta} t''^2.$$

Náleží pak k sobě rovnice

$$t = t'', \qquad s'' = s \frac{\sin (\alpha - \vartheta)}{\cos \vartheta}.$$

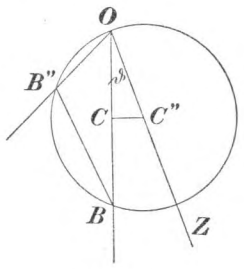
Také tyto lze jednoduše geometricky vyložiti. Těleso, volně padajíc, dopadne za jistou dobu do bodu B. Chceme-li určiti, kde se těleso, po rovině padající, v témže okamžiku nalézá, nejdeme od

B k B' směrem kolmým, jak Galileův zákon o tětivách určuje, nýbrž podobně jako dříve, směrem o úhel ϑ vzhůru odkloněným; je-li $\alpha > \vartheta$, dojdeme tak místa B'' (obr. 341.); neboť jest

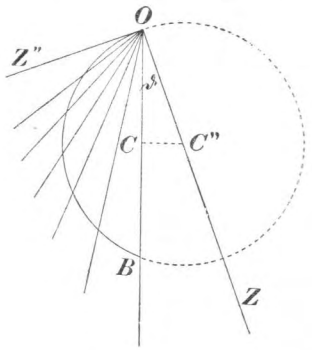
$$OB'' : OB = \sin(\alpha - \vartheta) : \sin(90 + \vartheta).$$

Jako v obr. 141. lze též zde užíti konstrukce kruhové, dle obr. 342. Vedeme OZ pod úhlem $BOZ = \vartheta$, rozpůlíme danou dráhu svislou OB bodem C a vedeme CC'' vodorovně; i zde jest C'' středem kruhu, jenž opsán poloměrem $C''O$ odtíná dráhu $OB'' = s''$, jež jest isochronní s drahou $OB = s$.

Úhel $BB''O = 90 + \vartheta$ jest konstantní, nezávislý na odklonu α roviny. Vycházejí-li tudíž v rovině nákresné od bodu O přímky na jednu i druhou stranu svislé dráhy a začnou-li po těchto přímkách současně od bodu O padati tělesa, mající týž koefficient tření vlečného, jest jich geometrické místo v každém okamžiku též kruh (anebo vlastně kruhový oblouk), obdobný kruhu Galileově. Střed toho kruhu padá na přímce OZ s urychlením $\frac{g}{\cos\vartheta}$, tak že poloměr OC'' se opět úměrně se čtvercem času zveličuje (obr. 343.).



Obr. 342.



Obr. 343.

Věta o isochronismu tětiv platí i zde, jenom že tětivy nejsou isochronní s vertikálním průměrem kruhu, nýbrž s vertikální tětivou, napínající oblouk o úhlu obvodovém $90 + \vartheta$. Konstrukce ukazuje též, že existuje určitá rovina OZ'' odklonu ϑ, od které pád teprve začíná.

§ 407. Tření valné.

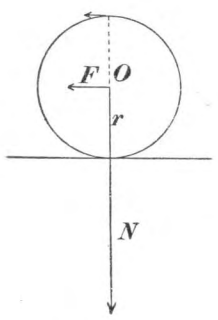
Uvádíme-li v pohyb tělesa válcovitá neb kulovitá spočívající na rovinné půdě, tak aby se po ní valila, pozorujeme též odpor,

který dlužno jistou silou F překonávati. Mluvíme též zde o tření, a to valném, ač základ jeho jest zcela jiný než u tření vlečného. Síla F, směřující na př. k ose válce poloměru r (obr. 344.), působí momentem $F \cdot r$. V souhlasu s tím zavádíme jistou, velmi malou délku ξ, jež by násobená silou N, kterou těleso se tlačí na rovinu, se onomu momentu rovnala, dle rovnice

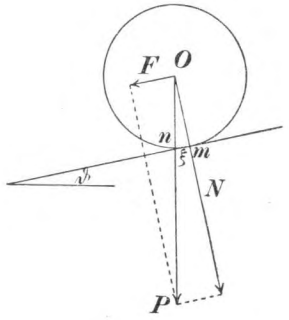
$$Fr = N\xi.$$

Délka ξ zove se koefficientem tření valného.

Význam této délky ξ se objasní podobně jako u koefficientu tření vlečného, když těleso na nakloněné rovině samo, částí své



Obr. 344.



Obr. 345.

váhy, překonává tření. Také zde nastává a udržuje se rovnoměrný pohyb po rovině, když se rovina naklonila až do jistého úhlu ϑ. Jest pak (obr. 345.)

$$F = Mg\sin\vartheta, \qquad N = Mg\cos\vartheta,$$

$$\frac{\xi}{r} = tg\,\vartheta, \qquad \xi = r\,tg\,\vartheta.$$

Obdržíme tedy délku ξ jakožto odlehlost mn bodů, v nichž se rovina protíná jednak přímkou svislou OP od bodu O vedenou, jednak přímkou ON k rovině kolmou. Výsledek tento vede k porozumění základu celého úkazu. Pokládáme-li tlak N za daný, a připojíme-li k němu sílu F, pak obě mají výslednici, která neprochází bodem (m), v němž těleso na půdě rovinné spočívá, nýbrž bodem postranním (n), kde těleso, kdyby mělo přísně geometrický ráz, by již na rovinné půdě nespočívalo. Jestliže přece pozorujeme, že pohyb nezačíná, pokud síla velikosti F nedosáhne, pak se výslednice sil (F, N) ruší, t. j. až k bodu n spočívá ještě těleso na půdě. Následkem toho jest těleso na stykové ploše deformováno a v této deformaci jest příčina tření valného.

Za příklad uvádíme data následující:

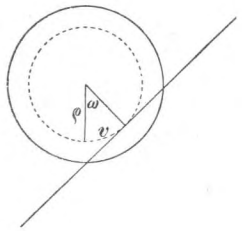
Železniční kola (r asi $= \frac{1}{2}$ m) na kolejích	$\xi =$	0·5 mm.
Kola vozů na dobré silnici	$\xi =$	15 mm
Kola vozů na obyčejné silnici	$\xi =$	41 mm
Kola vozů na nově štěrkované silnici . .	$\xi =$	63 mm

§ 408. Pád těles po šikmé rovině se valících.

Jednajíce o padání těles po šikmé rovině, předpokládali jsme dosud, že těleso, padajíc, se po rovině šine, buď bez tření nebo se třením. Vyloučili jsme však případ, že by těleso, padajíc, zároveň se roztáčelo, že by se po šikmé rovině valilo, jako se valí na př. koule, válec aneb rotační těleso jakékoliv. Položíme-li takové rotační těleso na šikmou rovinu a necháme-li je z klidu se valiti, nabude, s výšky s dopadnouc, jisté konečné rychlosti jednak postupné v, jednak úhlové ω. Má pak energii pohybu jednak postupného $\frac{1}{2} Mv^2$, jednak točivého $\frac{1}{2} K\omega^2$, kdež znamená M hmotu tělesa a K jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose, kolem které se otáčí. Energie tato vzešla z práce Mgs, kterouž hmota M spotřebovala, aby s překonáním její váhy Mg na výši s byla uvedena.

Obdržíme tudíž rovnici základní

$$Mgs = \tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} K\omega^2.$$



Obr. 346.

Zaveďme zde poloměr setrvačnosti k a poloměr rotace ϱ, t. j. kolmou odlehlost osy rotační a šikmé roviny (obr. 346.). Pak jest

$$K = Mk^2, \qquad v = \varrho\omega.$$

Základní rovnice hořejší nabude pak tvaru

$$2gs = v^2 + \frac{k^2}{\varrho^2} v^2$$

čili

$$\frac{2gs}{v^2} = 1 + \frac{k^2}{\varrho^2}.$$

Značí-li s' délku šikmé roviny, jako s její výšku, a je-li a urychlení pohybu postupného, platí vztah

$$v^2 = 2as'.$$

Dosadíce do rovnice poslední, obdržíme

$$\frac{g}{a} \cdot \frac{s}{s'} = 1 + \frac{k^2}{\varrho^2}$$

anebo konečně

$$\frac{g \sin \alpha}{a} = 1 + \frac{k^2}{\varrho^2},$$

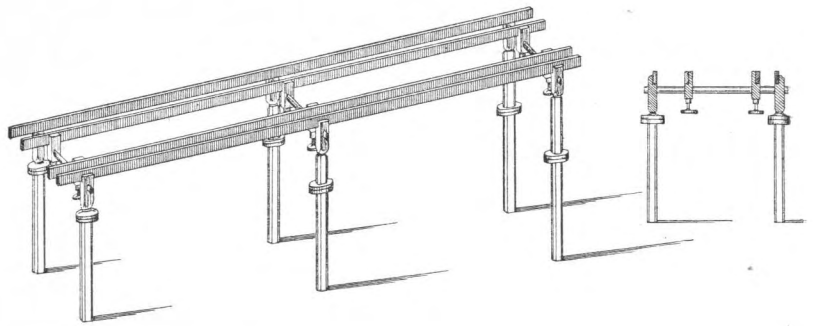
kdež znamená α elevační úhel šikmé roviny. Ze všeobecné rovnice této soudíme, že jest vždy

$$a < g \sin \alpha,$$

že tudíž současným valením se tělesa urychlení pádu se zmenšuje. O urychlení tomto rozhoduje jenom poměr $\frac{k}{\varrho}$ obou poloměrů setrvačnosti a otáčení, nikoli hmota tělesa. Při stejném poměru $\frac{k}{\varrho}$ jest tedy jednostejno, zdali valící se těleso jest dřevěné neb mosazné neb olověné.

Užijme ještě oné všeobecné rovnice pro tři jednoduché případy zvláštní, kdy totiž valícím se tělesem jest buď dvojkužel, nebo koule, neb válec. Pro tato tři tělesa jest poloměr setrvačnosti k vzhledem k ose podélné určen vzorci

$$k^2 = \tfrac{3}{10} r^2, \qquad k^2 = \tfrac{4}{10} r^2, \qquad k^2 = \tfrac{5}{10} r^2.$$



Obr. 347.

V případě nejjednodušším jest

$$\varrho = r,$$

tudíž

$$\frac{g \sin \alpha}{a} = 1{\cdot}3, \qquad \frac{g \sin \alpha}{a} = 1{\cdot}4, \qquad \frac{g \sin \alpha}{a} = 1{\cdot}5.$$

Výsledek je zajímavý, poněvadž výraz $\frac{g \sin \alpha}{a}$ pro ona tři tělesa dává řadu arithmetickou.

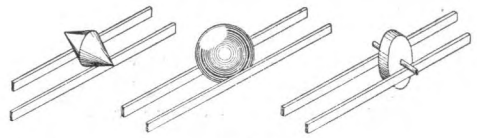
V případě všeobecném máme

pro dvojkužel $$\frac{g \sin \alpha}{a} = 1 + \frac{3}{10} \frac{r^2}{\varrho^2}$$

pro kouli $$\frac{g \sin \alpha}{a} = 1 + \frac{4}{10} \frac{r^2}{\varrho^2}$$

pro válec $$\frac{g \sin \alpha}{a} = 1 + \frac{5}{10} \frac{r^2}{\varrho^2}.$$

Případ $\varrho < r$ realisujeme jednoduše tak, že v zastoupení šikmé roviny upravíme dvě rovnoběžné tyče jako by za koleje (obr. 347.), tak aby jich odklon α a vzájemná odlehlost se dala v jistých mezích měniti. Pro pokusy srovnávací opatříme dva takové přístroje, jichž odklon α jest týž, ale při nichž odlehlost kolejí jest různá. Dvojkužel a kouli klademe pak přímo na tyto koleje; čím je větší jich odlehlost, tím jest menší ϱ proti r. U válcové desky prostrčíme podél osy drát, silnější neb slabší, jehož hmota proti hmotě desky téměř mizí. Deska položí se pak mezi koleje a drát na koleje; poloměr takového drátu jest pak poloměrem rotačním ϱ. Čím jest ϱ proti r menší, tím více jest padání zmírněno, tím více však se deska, s jisté výšky s dopadnouc, roztočí (obr. 348.).



Obr. 348.

Také případ $\varrho > r$ dal by se realisovati obručemi téměř nehmotnými. Při velmi velikém ϱ proti r blížilo by se urychlení a pádu složce $g \sin \alpha$ urychlení tíže.

Obecné vlastnosti kapalin.

§ 409. **Pružnost kapalin.**

U kapalin lze mluviti o stlačitelnosti a o pružnosti pouze objemové, jež jest úplně téhož způsobu jako stlačitelnost a pružnost objemová u těles pevných. Tato jest číselně určena modulem C pružnosti objemové, dle rovnice

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{C}.$$

V souhlasu s tím počítá se i u kapalin modul C pružnosti objemové, vyjádřený absolutně v jednotce

$$\frac{dyna}{cm^2}, \text{ nebo } \frac{megadyna}{cm^2}, \text{ po případě } \frac{váha\ kg}{cm^2}.$$

Místo těchto jednotek užívá se u kapalin podobně jako u plynů za jednotku velmi často tlak jedné atmosféry. Bylo již uvedeno, že všechny tyto jednotky se od sebe liší jen o málo procent.

Jinak určuje se stlačitelnost kapalin též koefficientem k, který často zve se stlačitelností (kompressibilitou) ve smyslu praegnantním, dle rovnice

$$\frac{\Delta V}{V} = kp.$$

Modul a koefficient kompressibility jsou veličinami reciprokými, t. j.

$$kC = 1,$$

v souhlase s moduly a koefficienty v nauce o pružnosti.

Koefficient stlačitelnosti k zavádí se zde zcela tak, jako koefficient stlačitelnosti a rozpínavosti u plynů anebo jako koefficient tepelné roztažnosti u těles vůbec.

Za příklad buďtež uvedeny následující hodnoty číselné $\left(\text{v jednotce } \frac{váha\ kg}{cm^2}\right)$, a to pro repraesentanty jak kapalin, tak kovů, ke srovnání.

Voda	$C = 20500$,	stříbro	$C = 708000$,
alkohol	12400,	měď	495000,
rtuť	350300,	hliník	280000.

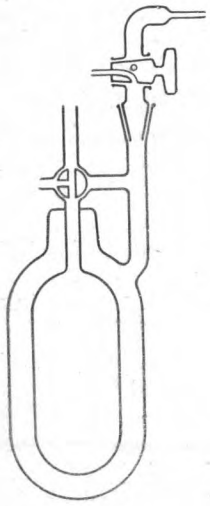
Stlačitelnost rtuti jest tedy téhož řádu jako stlačitelnost kovů; naproti tomu stlačitelnost vody a alkoholu jest značně větší. Kompressibilita největší (modul nejmenší) jeví se u aetheru, který jest tři- a vícekráte stlačitelnějším než voda. Se stoupající teplotou stlačitelnost rychle stoupá; na př. u aetheru mezi tlaky 200 a 300 atmosfér za 200° jest asi 5·5krát větší než za 0°. Výjimku činí voda, vodné roztoky a (v daleko menší míře) také glycerin, kde se stoupající teplotou kompressibilita poněkud klesá. Ale i u těchto látek za vyšších teplot bodu varu a ovšem i tlaků, varu bránících, počne chování normální, stlačitelnost se stoupající teplotou pak stoupá.

Se stoupajícím tlakem stlačitelnosti ubývá. Střední stlačitelnost vody za 0° C mezi 2500 až 3000 atmosfér jest blízce poloviční stlačitelnosti mezi 1 až 25 atmosférami; u aetheru jest ono

klesání nejrychlejší: stlačitelnost v mezích 0 až 50 a 900 až 1000 atmosfér jest za 0° v poměru 147 : 65, za 40° dokonce 208 : 77.

Z obyčejných kapalin (vyjma rtuť) nejmenší stlačitelnost, asi dvakráte menší než voda, jeví glycerin.

Otázka stlačitelnosti kapalin vůbec a vody zvlášť ukazuje ve svém rozvoji historickém mnohé zajímavosti. Pokus prvý o stlačitelnosti vody učinil Francis *Baco* (1561—1626). Dal zhotoviti olověnou dutou kouli, kterou naplnil vodou. Na to byla koule tlakem deformována; objem její se tím umenšil, voda však pronikla póry kovu a koule pokryla se jako by rosou. (Novum organum 1620.) Pokus tento později opakovali, užívajíce duté koule stříbrné, členové akademie del cimento ve Florencii (1667) s výsledkem stejným. Pokusy, jež nejen kvalitativně, ale též kvantitativně stlačitelnost vody dokázaly, provedli ve století 18. *John Canton* (1761) a počátkem 19. století *Jacob Perkins* (1820). Přesnější práce o tomto předmětu zahájil *Jan Ch. Oerstedt* (1777—1851), jenž k účelu tomu sestrojil (1822) svůj piezometr (*πιέζω* tlačím), jehož se dosud mnoho k demonstrování stlačitelnosti vody při výkladech fysikálních užívá. O piezometru, a zvláště také o úloze, kterou při něm hrají objemové změny nádoby, které *Oerstedt* zanedbával, zmínili jsme se již v pojednání o objemové pružnosti pevných látek. Tamže popsali jsme princip methody *Regnaultem* (1848) užitý. Z novějších badatelů nutno uvésti hlavně *Amagata* (1887), který vykonal veliké serie pozorování pro různé kapaliny, studuje stlačitelnost za vysokých tlaků (do 3000 atm.) a různých teplot. *Röntgen* a *Schneider* (1886—8) měřili stlačitelnost vodních roztoků. Nejnověji srovnávali stlačitelnost kapalin se stlačitelností rtuti velmi přesnou methodou *Richards* a *Stull* (1903 a 4). Na tomto místě chceme ještě upozorniti na velmi jednoduchý a k demostraci obzvláště vhodný apparát *Guglielmův* (1892), v obr. 349. naskizzovaný, při němž užívá se tlaků malých (řádu 1 atm.), jichž snadno docílíme zvedáním reservoiru se rtutí, kaučukem s apparátem spojeného. Lze jím také demonstrovati rozdíl kompressibility isothermické a adiabatické (isentropické). Kapalina se totiž zvýšením tlaku zahřívá, tak že nechceme-li toto zahřátí a s ním spojené změny objemu a stlačitelnosti uváděti v počet, jinými slovy, chceme-li pracovati isothermicky, musíme dosti dlouho vyčkávati, než se teplota kapaliny s okolím vyrovná.



Obr. 349.

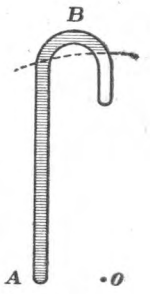
§ 410. Soudržnost a přilnavost u kapalin.

Nejmenší částečky kapalin jsou velice snadno pohyblivými a pošinovatelnými; přes to jeví soudržnost, jakož dokazuje vznikání kapek, na př. dešťových. Přilnavost pak k tělesům tuhým jeví se u největšího počtu kapalin a dokazuje se zkušenostmi denními, všeobecně známými.

V té příčině jest poučno studovati (v projekci optické) tvoření se kapek na konci (vytaženém, tenkostěnném) pipetty, jež má kohout k regulaci výtoku vody. Kapka vody pomalu roste, přilnavostí se zachycujíc na stěnách trubičky, tíží nabývá tvaru hruškovitého, visí na skle, vzrůstáním své váhy prodlužuje se až se odtrhne, ale nikoli od skla, nýbrž v části zúžené u skla od vody ostatní. Jest z toho patrno, že adhese vody ke sklu je větší než její kohese. Kapka padajíc prodlužuje a stlačuje se periodicky, vykonává oscillace, kteréž lze fotograficky zjistiti. Podobně jeví tvar koule malé kapky rtuti, kladené na čisté sklo, anebo kapky vody, kladené na sklo plavuní posypané. Pošine-li se jedna kapka opatrně ke druhé, splynou náhle přitažlivostí molekulovou v kapku jedinou.

Jinak lze experimentovati (*Gay-Lussac* v přídavku k 10. knize Laplaceovy Mécanique céleste) způsobem tímto: Na jedno rameno vah zavěsí se na třech nitkách (neb jemných drátkách) vodorovně (pomocí tří šroubků) deska na př. skleněná, pečlivě očištěná, a vyváží se, aby byla rovnováha. Na to se na stolek, který lze šroubem zvedati (jako v obr. 226.), položí plochá nádoba se rtutí. Když se šroubem ze spoda přiblíží povrch rtuti až k oné desce, pozorujeme, jak se deska rtutí chytí a zadrží. I můžeme pak přidávati na druhé straně závaží, a deska se neodtrhne. Pozorujeme však, jak se účinkem tohoto závaží rtuť zvedá, až konečně se deska odtrhne; tím změřena jest *adhese* rtuti ke sklu. Podobně lze experimentovati s jinými skupinami látek, jež se vzájemně neomáčí. Adhesí zůstane často v úzkých barometrických trubičkách, když se vyplní vakuum Torricelliho, rtuť na skle jako by viseti. Podobně vznikají v manometrech rtuťových, jichž trubičky jsou úzké, nejistoty při odečtení, poněvadž rtuť na skle adhesí jako by vázne. Proto jest i z tohoto důvodu žádoucno, aby kalibr manometrické trubice byl větším.

Provádíme-li Gay-Lussacův pokus s čistou deskou skleněnou a vodou (nebo s amalgamovanou deskou zinkovou a rtutí), probíhá podobně, jen že po odtržení od kapaliny zůstanou na desce viseti kapky vody (rtuti), zůstane mokrou. Říkává se, že odtrhla se voda od vody, že adhese jest větší kohese, a že se tímto způsobem změřila kohese vody. Uvidíme však ve výkladech o zjevech kapillárních, že zjev jest podmíněn vlastně povrchovým napětím, ba že dá se užíti k jeho měření. Proto také jest zvláště v Německu obvyklý název pokusu váhy kohesní (Kohäsionswage) úplně neodůvodněný, falešný.



Obr. 350.

Skutečné zjevy kohese kapalin lze studovati podobně jako u látek tuhých pevností oproti přetržení kapalinového válce. Jednoduchou methodu k tomu udal *Berthelot*. Kapalinou dobře zbavenou bublin vzduchových (vyvařením) naplníme tlustostěnnou trubici skleněnou, kterou za dalšího vyvařování zatavíme tak, že jest za obyčejné teploty naplněna kapalinou, nad níž se nachází bublina vzduchoprázdného prostoru, vyplněná ovšem nasycenými parami

kapaliny. Opatrným zahříváním docílíme následkem tepelné roztažnosti, že kapalina vyplní trubici úplně. Ochlazujeme-li potom opatrně, vyplňuje kapalina s počátku celý objem trubice, ač dané teplotě odpovídá objem menší, a teprve později se s hlasitým metallickým prasknutím sloupec kapaliny přetrhne. *Berthelot* (1850) obdržel tímto způsobem detence o $^1/_{120}$ původního objemu u vody, o $^1/_{93}$ u alkoholu, o $^1/_{59}$ u aetheru. *Osborne Reynolds* (1877) experimentoval tím způsobem, že otáčel trubice takové, ohnuté jak obr. 350. ukazuje, kolem osy *O* na papír kolmé, na centrifugálním stroji. Napětí roste od *B* ku *A* způsobem, který se snadno z rotační rychlosti vypočítá. Našel, že sloupec vodní snese tah 72·5 angl. liber na čtverečný palec ($= 5{\cdot}3\ \frac{váha\ kg}{cm^2}$ t. j. ca. 5 atmosfér), aniž by se přetrhl, a *Worthington* (1886) našel dokonce 116 liber (7·9 atmosfér) u alkoholu a 173 (11·8 atmosfér) u koncentrované kyseliny sírové. *Worthington* (1892) docela podobným způsobem měřil opak stlačitelnosti, to jest zvětšení objemu kapaliny tahem, a našel, že koefficient objemové pružnosti alkoholu je týž pro kompressi, jako pro extensi, a v mezích tlaku od + 12 do — 17 atmosfér velmi blízce stálý: Za vhodných podmínek zdá se možným dosíci tahů ještě vyšších. Literaturu předmětu obsahuje nejnovější práce *Hulettova* (ZS. f. phys. Chem., sv. *42*, 353, 1903). Sluší připomenouti, že *Dixon* a *Joly* (1895) ukázali, že vzduch nebo jiné plyny v kapalinách rozpuštěné (absorbované) tyto pokusy neruší; vařením patrně mají se odstraniti pouze bublinky volných plynů.

Kapillarita.

§ 411. **Úvod a črta historická.**

V hydromechanice se předpokládá, že kapalina jest úplně dokonale tekutou a že její tvar lze libovolně, bez nákladu práce změniti, čili že potenciální energie kapaliny jest nezávislou na jejím tvaru. Že prvý předpoklad neodpovídá skutečnosti, poučí nás později zjev vnitřního tření. Kdyby pak druhý předpoklad byl splněn, nemohly by existovati zjevy, které shrnujeme pod široký název zjevů kapillárních *), dle nejnápadnějšího a nejdříve pozorovaného: výstupu kapaliny v úzkých (vláskových) trubičkách, jež často zveme krátce kapillárami.

Při vysvětlování těchto zjevů setkáváme se s novým druhem síly a novým druhem energie — s napětím a energií povrchovou. K objasnění pojmu povrchového napětí mysleme si vertikálně visící a tedy vlastní vahou napiatou záclonu a prořízněme ji dle nějaké čáry. Abychom udrželi kraje řezu pohromadě v původní po-

*) Z latinského: capillus, -i, vlas.

sici, musíme na ně dáti působiti silám ležícím v rovině záclony a kolmým k čáře řezu. Musíme si tedy představiti, že před řezem byla záclona napínána podél každé libovolné čáry silami na čáře této v každém místě kolmými, stejné velikosti a opačného směru. Ovšem že v našem případě byly síly tyto v různých místech různé, na př. pro horizontální řezy nahoře veliké, dole u konce záclony malé. Uvidíme, že dojdeme k uspokojivému vysvětlení veškerých kapillárních zjevů, když předpokládáme, že také po celém povrchu kapaliny působí podobné síly povrchové, které vztahujíce je na řez délky 1 *cm*, nazýváme *napětím povrchovým*, a že z této představy plyne, že každé zvětšení povrchu vyžaduje nákladu mechanické práce, kterou si pak můžeme představiti jako by nahromaděnou v onom povrchu, jakožto *energii povrchovou*. Dimensí povrchového napětí jest patrně $\frac{síla}{délka}$ čili $M\,.\,T^{-2}$ a absolutní jeho jedničkou $\frac{dyna}{cm}$; často se užívá starší jedničky $\frac{váha\ mg}{mm}$ která jest velmi přibližně 10kráte, přesně 9·81kráte menší.

Nejstarší v nauku o kapillaritě spadající zjev, výstup kapaliny v kapiláře, pozoroval *G. A. Borelli* (1608—1679, v knize De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus, Reggio 1670); blíže zkoumal jej však teprve londýnský lékař *James Jurin* (1684 až 1750, ve Philosophical Transactions Londýnské akademie roku 1718), po němž se také často zákon o obrácené úměrnosti výstupu a poloměru kapiláry nazývá. Vysvětlován byl zjev ten přitažlivostí stěn na kapalinu. *Clairault* (1743) poznal však, že nutno vzíti v úvahu také síly působící mezi částicemi kapaliny samými a *Laplace* (Mécanique céleste, Supplement au Livre X.: Théorie de l'action capillaire, str. 1—65, Paříž 1806 a k tomu Supplement à la theorie ... Paříž 1807) vyvinul z představy o těchto »silách kohesních« vzorec pro »kohesní tlak« v kapalině, který obnáší v místě bezprostředně pod povrchem $K + H\,.\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, kde R_1 a R_2 jsou hlavní radie křivosti povrchu, K a H konstanty. Uvidíme, že druhý člen, který jedině při zjevech kapillárních intervenuje, jest právě takový, jako tlak, kterým by působila povrchová membrána všude téhož napětí $H/2$. Na představě o takovémto povrchovém napětí vybudoval vysvětlení kapillárních zjevů již před *Laplacem* anglický fysik, ženiální *Thomas Young* (Essay on the cohesion of fluids, 1805), ale bez mathematického provedení. Exaktně propracoval theorii *Gauss* (Principia generalia theoriae figurae flui-

dorum in statu aequilibrii, Commentarii Göttingské učené společnosti, 1830), vycházeje z principu virtuálních pošinutí, z něhož dovozuje, že podmínkou rovnováhy jest především minimum potenciální energie všech účinkujících sil; potenc. energie pak obsahuje člen úměrný povrchu. *Gauss* obdržel vedle Laplaceových výsledků důkaz věty o konstantním úhlu krajním, kterou *Laplace* byl bez důkazu vyslovil. *F. Neumann* (1859) uvážil případ, kdy se stýkají různé kapaliny. Další různé práce vedeny jsou ohledem na změnu hustoty a tlaku v přechodné, velmi tenké vrstvě povrchové (*Poisson*, *Maxwell*, *Rayleigh*, *Van der Waals* a jeho škola (*Bakker*) *). Thermodynamické zásady applikoval na zjevy kapillární prvý *W. Thomson* (Lord Kelvin, 1858), později všeobecně *Gibbs* (1876 a 1878), při čemž se ukázalo, že vedle povrchové energie musí existovati povrchová entropie, tak že při změně povrchu není nutna jen mechanická práce, ale nastává i effekt tepelný.

V následujících statích uvidíme, že jak Laplaceův vzorec, tak Youngova představa i Gaussův princip vedou k souhlasným výsledkům u zjevů kapillárních. Laplaceův vzorec nebudeme odvozovati mathematicky; ukážeme pouze v následujících paragrafech způsob úvahy, který nám učiní tvar jeho plausibilním.

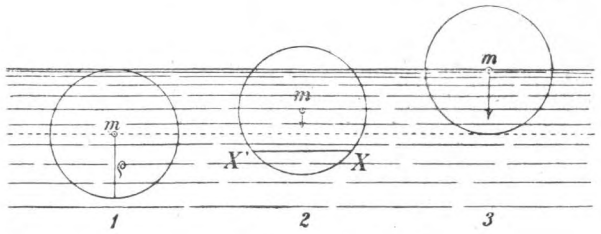
§ 412. Tlak povrchový při vodorovném povrchu kapaliny.

Obor působnosti molekulové (§ 372.) jest vymezen koulí jistého velmi malého poloměru ϱ.

Na základě této představy o sféře molekulového působení můžeme dle způsobu, kterého užil *Laplace* (1845), odvoditi ihned významné důsledky. Každá molekula m podléhá působení všech ostatních m', kteréž jsou ve sféře působnosti. Sílu, od každé jednotlivé molekuly m' pocházející a dle přímky mm' působící, můžeme rozložiti na složku horizontální a vertikální a pak tyto složky algebraicky sečítati.

Pozorujme především složky vertikální. Pokud je molekula m od vodorovného povrchu kapaliny vzdálena o více než ϱ neb nanejvýše o ϱ (obr. 351. 1.), jest patrno, že se složky tyto ruší. Důvodem toho jest souměrnost vzhledem k rovině molekulou m vodorovně položené. Avšak tato souměrnost přestává, když ona odlehlost jest menší než ϱ (obr. 351. 2.). Jest patrno, že zde převládají vertikální složky směrem dolů, poněvadž proti segmentu kulovému pod vodorovnou rovinou $X'X$ není nahoře než týž segment vyplněný molekulami vzduchovými, jichž přitažlivost molekulová jest menší. Tato převaha dolejších vrstev dosáhne maxima pro ty molekuly, jež se nalézají ve vodorovném povrchu kapaliny samém (obr. 351. 3.). Z toho tedy vychází, že na povrchu

*) Nejpěknější přehled této theorie viz Van der Waals-Kohnstamm: Lehrb. der Thermodynamik. Amsterdam a Lipsko 1908. Str. 207 až 287.

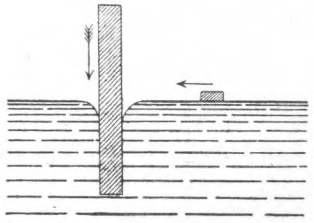


Obr. 351.

kapaliny silami molekulovými vzniká resultující tlak K, k povrchu kolmý, který zoveme tlakem kohese, vztahujíce jej na jednotku povrchu. Rozměr této veličiny jest určen výrazem $\frac{síla}{plocha}$.

Tlakem kohese vzniká na povrchu kapaliny nesmírně tenká blanka velké konsistence. Na tuto lze klásti na př. zrnka písku anebo drátky z materiálu specificky značně těžšího, z mědi, železa, ocelové jehly, a tyto zůstanou na blance té ležeti. Jakmile se blanka prorazí, ihned v kapalině klesají. Pokus lze velmi pěkně předvésti v projekci vertikálním projekčním apparátem.

Jiný pokus (Pasteur, 1864), kterýž lze též v projekci ukázati, jest tento: Do nádoby skleněné o rovnoběžných stěnách naleje se rtuti, na níž se položí na př. kousek skla. Když se v blízkosti jeho vtlačí do rtuti skleněná destička (obr. 352.), pozoruje se, jak onen kousek skla se pohybuje k této destičce, jako by spočíval na blance, která se ponořením oné destičky protáhla. Též s vodou, na kterou se nasype lykopodia, lze pokus provésti, když se destička skleněná natře tukem.



Obr. 352.

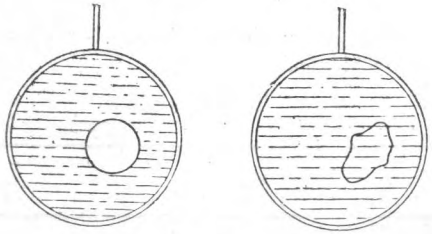
Podobný základ má úkaz, že lze na husté a suché (ještě lépe paraffinované) síto železné naliti vody a neproteče. Mnohý hmyz (vodní pavouci) leze po vodě a nožičky, jež jsou přirozeně poněkud mastné, nepronikají vodní blanou, leč když se (omytím aetherem) mastnota odstraní.

Povrchový tlak K vymyká se přímému měření; při zjevech kapillárních, jak uvidíme, vždy vypadne z počtu. Přece však lze na jeho ve-

likost alespoň přibližně souditi ze zjevů thermických. Tak *Stefan* (1886) usuzuje: K tomu, aby se molekula kapaliny dostala z vnitřku na povrch, jest potřebí polovičního obnosu práce k tomu potřebné, aby se dostala z vnitřka kapaliny nad ní, do prostoru vyplněného nasycenými parami. Práce prvá závisí na velikosti tlaku K, druhá je dána vypařovacím teplem. Takto dostává pak pro tlak K u aetheru hodnotu 1284 atmosféry. Z jiné strany *van der Waals* (Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes), v jehož stavojevné rovnici (viz Strouhal: Thermika str. 150.) má člen $\frac{a}{v^2}$ význam změny tlakové, způsobené kohesí molekul plynových, dochází za supposice, že rovnice jeho platí až do přechodu v stav kapalný, k závěrku, že tu $K = \frac{a}{v^2}$; z toho plynou pak číselné hodnoty pro aether 1300 až 1430 atmosfér, pro alkohol 2100 až 2400 atm., největší pak pro vodu 10500 atm., tedy čísla velmi veliká, ale téhož řádu, jako z úvahy *Stefanovy*.

§ 413. Napětí povrchové při vodorovném povrchu kapaliny.

Úvahu podobnou, jako o vertikálních složkách molekulových sil, můžeme učiniti o horizontálních. Pokud vzhledem k jakékoli rovině vertikální jest symmetrie, ruší se složky tyto, ale způsobují přece napětí, jež by se jevilo, kdybychom v myšlenkách povrch kapaliny přímkou prořízli; účinkem napětí povrchového by přímka ta s každé strany byla tažena jistou silou, kteráž proto přichází k platnosti, že se stala jednostrannou. Tuto sílu, na jednotku délky vztahovanou, zoveme povrchovým napětím F. Rozměr veličiny této jest stanoven výrazem $\frac{síla}{délka}$.



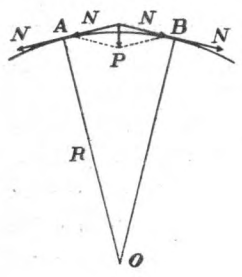
Obr. 353.

Dlužno však pamatovati, že na povrchové napětí, jakož také na povrchový tlak, působí též prostředí nad kapalinou (tedy na př. vzduch). Proto nutno při údajích číselných udávati prostředí obě.

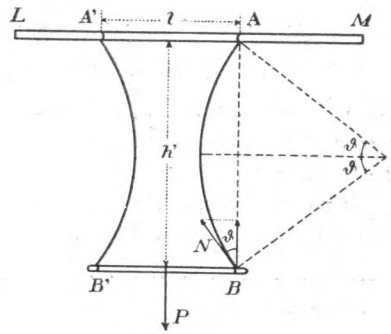
Velmi poučný pokus k demonstraci povrchového napětí udal *van der Mensbrugghe* (1866). Ponořme kruhový drát do roztoku mydlinového; utvoří se blána. Do této vpravme opatrně očko (napřed v jiném roztoku mydlinovém omočené) z kokonu (několikanásobného). Jakmile propíchneme (stočeným pijavým papírem nebo nahřátým hrotem skelným) blánu uvnitř oka, napne se jednostranným ve všech směrech stejně působícím napětím povrchovým do kruhu (obr. 353.).

Snadno získáme si vztah mezi napětím nitě N a povrchovým napětím F. Značí-li (obr. 354.) AB část niti o radiu křivosti R, působí v bodech koncových napětí niti N, která složíme ve výslednici P. Má-li býti rovnováha, musí výslednice P býti stejně veliká a opačného směru než síla od povrchového napětí. Na každém povrchu působí na jednotce délkové napětí F, proto, poněvadž zde jsou povrchy dva (obě strany blány), a délka AB, musí $P = 2F \,.\, AB$. Ale pro velmi krátký obloučeк $\frac{P}{N} = \frac{AB}{R}$ čili dosazením

$$N = 2F \,.\, R.$$



Obr. 354.



Obr. 355.

Ježto při pokuse Mensbruggheově musí býti napětí niti N všude stejné, a F je též konstantní, je též R stálé, vzniká kruh.

Jiný pěkný pokus, i kvantitativní, jest následující: Na drát LM (obr. 355.) zavěsíme ve vzdálenosti $AA' = l$ dvě nitky stejné délky h, které nesou jiný drátek $\overline{BB'} = l$, eventuelně zatížený závažíčkem, tak že celá váha jest P. Vytvoříme-li mezi nitkami kapalinovou blanku, přejdou nitky následkem povrchového napětí v křivky AB a $A'B'$, tak že nová vzdálenost AB jest h'. Napětí vláken N jest všude stejné, proto, poněvadž zase $N = 2F \,.\, R$, jest radius křivosti vláken R konstantní a oblouky AB a $A'B'$ jsou kruhové. Čím jest nesena váha P? Jednak silou od povrchového napětí, rovnou $2F \,.\, l$, jednak silou od napětí vláken v B a B', jejíž vertikální složka jest $N \,.\, \cos\vartheta = 2FR \,.\, \cos\vartheta$. Celkem tedy

$$P = 2F\,(l + 2R\cos\vartheta.)$$

Ale délka vlákna (oblouk AB) jest $h = 2R \,.\, \vartheta$ a $h' = 2R \,.\, \sin\vartheta$, tak že $\frac{h}{h'} = \frac{\vartheta}{\sin\vartheta}$. Změříme-li tedy h a h', můžeme počítat ϑ

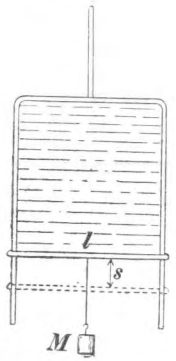
a $R = \frac{h'}{2 \sin \vartheta}$, a tudíž změříme-li l a zatížení P, můžeme počítati povrchové napětí F.

Při konání těchto i některých z dalších pokusů o bublinkách koná lepší služby než roztok obyčejného mýdla, roztok z mýdla Marseillského nebo směsi takovýchto roztoků s glycerinem. Nejlépe osvědčuje se kapalina Terquemova, kterou připravíme následujícím způsobem: Marseillské mýdlo se jemně nastrouhá a nechá (na př. přes noc na vlažných kamnech) vysušit. Pak se smíchá s 80% alkoholem (sp. hm. 0·865, na 1 *g* mýdla asi 7 cm^3 alk.) a nechá v uzavřené baňce ve studenu alespoň 24 hodiny stát (temperatura vhodná je mezi — 2° až 10° C), načež se v téže teplotě sfiltruje, čímž nabude sp. hmoty ca. 0·88. Na to se smíchá vždy 25 cm^3 tohoto roztoku se 100 cm^3 směsi glycerinu s vodou, jejíž sp. hmota je ca. 1·135, a vše se vyváří, aby se odpařil alkohol. Přestoupí-li teplota varu 100°, vyvářeni je skončeno. Vychladlá kapalina se pak několikráte filtruje za nižší a nižší teploty, až je čirá. Zůstává čirou, dokud není vystavena nižší teplotě, než jaká byla za filtrace; jinak tvoří se v ní sraženina, tím hustší, čím níže klesne teplota. Proto je dobře, děje-li se poslední filtrace za teploty ca. + 5° až 6°, eventuelně, je-li kapalina velmi hustá, pomocí vaty a vodní vývěvy. Ze zbytku nerozpuštěného mýdla a stejného množství mýdla nového lze znovu připraviti alkoholický roztok, jako by všechno mýdlo bylo čerstvé, a znovu pokračovati v další přípravě. Tato druhá kapalina ani ve chladu mnoho se nezkalí a za + 5° nezhoustne. Čtvrtá filtrace papírem dává již kapalinu jasnou, čirou, bledší než výsledek prvé přípravy, ale velmi dobré jakosti. Kapalina hotová dá se chrániti před zkažením krystallkem kyseliny karbolové.

Velmi rychlou přípravou doporučuje se také kapalina, dávající výsledky velmi uspokojující, jež sestává ze 100 dílů (dle váhy) vody, 1 mýdla a 40 cukru.

§ 414. **Povrchová energie.**

Pokus, který lze provésti též kvantitativně a kterým se povrchové napětí jeví ve významu novém, znázorňuje obr. 356. Na malé vidlici z drátu zhotovené pohybuje se volně jiný drát. Pomocí štětečku můžeme v rámečku vytvořiti blánu kapalinovou, z vody, glycerinu, nebo mydlinové kapaliny, na př. Terquemovy a p. Postavíme-li vidlici vertikálně, drží se pohyblivý drátek povrchovým napětím na obou stranách blanky působícím, ba můžeme ještě i závažíčko přidati, jež se ještě tím napětím udrží. Napětí toto jest po každé straně $= F \,.\, l$, tudíž celkem $2F \,.\, l$. Pošineme-li drátek o délku s, vykonáme práci $2F \,.\, l \,.\, s$. Povrch blány vzrostl při tom na každé straně



Obr. 356.

o $l \,.\, s$, celkem o $2 l \,.\, s$. Na jednotku povrchu připadá tudíž práce $= F$. Tolik činí vzrůst energie povrchové. Znamená tudíž povrchové napětí přímo povrchovou energii jednotky plošné.

Volíme-li různé kapaliny a zvětšujeme-li opatrně váhu až blána praskne, můžeme veličinu F stanoviti.

Vůbec vždy, má-li volný povrch kapaliny vzrůsti o dS, musíme vykonati práci $dW = F \,.\, dS$, kteráž právě se jeví jakožto zvětšení potenciální energie povrchové. Již v historickém úvodu jsme se zmínili, že veškeré zjevy rovnováhy v nauce o kapillaritě můžeme dovoditi s *Gaussem* ze supposice, že má veškerá potenciální energie kapaliny býti minimální. Kde tedy neintervenují síly jiné, na př. tíže, musí povrch býti minimálním, čemuž při daném objemu hoví tvar koule. Proto přijímají tento tvar malé kapičky rtuti na skle nebo vody na skle poprášeném lykopodiem nebo nejlépe kapaliny suspendované v jiné, téže hmoty specifické (olej ve směsi vody a alkoholu, pokusy *Plateauovy*, 1843 až 1863).

I jinak v případě obecnějším není těžko formulovati podmínku rovnováhy. Z elementů vyšší analyse jest známo, že funkce nějaká může míti vzhledem k nějaké proměnné maximum nebo minimum jen tehdy, když její differenciální kvocient vzhledem k této proměnné je nullou. Zvláště jednoduše vytváří se počet při jediné proměnné, třeba x. Tu stanovíme změnu potenciální energie dW, když se proměnná změní o dx a položíme $\frac{dW}{dx} = 0$. Ovšem je nutno dále vyšetřiti, odpovídá-li řešení minimu nebo maximu atd. Ale, jak na některých příkladech v dalším ukážeme, staví se počet při prostých fysikálních applikacích obyčejně dosti jednoduše.

Dlužno ještě podotknouti, že i se stanoviska dimense může se povrchové napětí jakožto povrchová energie interpretovati. Násobíme-li totiž jeho dimensi $\frac{síla}{délka}$ v čitateli i jmenovateli délkou, obdržíme $\frac{práce}{plocha}$, tedy energii jedničky plošné.

§ 415. **Tlak povrchový při zakřiveném povrchu kapaliny.**

Je-li povrch kapaliny zakřiveným, přistupuje k tlaku K, jak jest pro povrch vodorovný, jistý additivní nebo subtraktivní doplněk, úměrný zakřivení plochy. V případu nejjednodušším, kde povrch jest kulový (sférický), určí se zakřivení převratnou hodnotou $\frac{1}{R}$ poloměru křivosti. V případu všeobecném, kde povrch jest křivým tvaru libovolného, dlužno zavésti zakřivení střední. Vedeme-li totiž normálou plochy, v pozorovaném bodě na plochu

vztyčenou, rovinné řezy, obdržíme křivky, pro kteréž poloměr křivosti R dle polohy onoho řezu se mění od hodnoty maximální R_{max} k hodnotě minimální R_{min}. Zakřivení střední celé plochy jest pak určeno výrazem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{max}}+\frac{1}{R_{min}}\right).$$

Dle toho jest povrchový tlak při libovolně křivém povrchu kapaliny stanoven výrazem

$$K \pm H \,.\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{max}}+\frac{1}{R_{min}}\right),$$

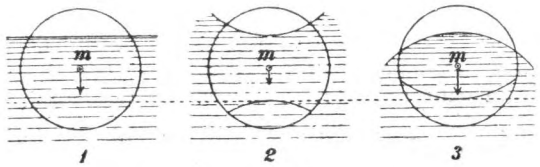
kdež jest H konstantou úměrnosti. *Laplace* odvodil tento výraz mathematickou analysí představy o molekulovém působení. Lze dokázati, že jest

$$H = 2F,$$

kdež značí F napětí povrchové. Jest tedy povrchový tlak ploch zakřivených stanoven též výrazem

$$K \pm F\left(\frac{1}{R_{max}}+\frac{1}{R_{min}}\right).$$

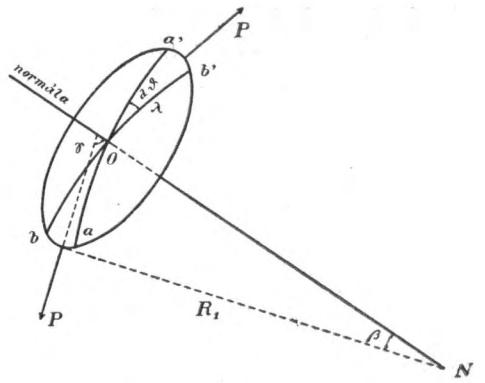
Doplněk jest additivní (+) při povrchu konvexním, subtraktivní (—) při povrchu konkavním.



Obr. 357.

Že tlak povrchový zakřivením povrchu se pozmění, lze snadno objasniti úvahou té podobnou, kteráž vedla k pochopení tlaku povrchového vůbec. Z obr. 357. jest ihned patrno, že tlak povrchový při povrchu konvexním jest větší, při konkavním menší, poněvadž počet molekul jednostranně působících jest zde menší, onde větší. Že pak toto zvětšení neb zmenšení tlaku souvisí s napětím povrchovým, lze rovněž snadno pochopiti, když se uváží, že při povrchu na př. konvexním napětí povrchové kolem pozorovaného bodu působí tangenciálně směrem nikoli vodorovným, nýbrž pod vodorovný dolů směřujícím. Jest zde tedy něco podobného, jako bychom přes konvexní povrch táhli dolů napiatou kaučukovou blánu, a tím ke zvýšení tlaku přispívali. Opačně jest tomu při povrchu konkavním, kde napětím povrchovým vzniká jako by nadlehčování.

Důkaz, že $H = 2F$ lze vésti tak, že vypočítáme tlak, vznikající v zakřivené ploše povrchovým napětím F. Veďme na ploše (obr. 358.) kolem bodu O malou kružnici o poloměru λ. Učiníme-li podél této křivky plochou řez, musíme, aby vše zůstalo ve stavu nezměněném, jak víme, dáti působiti v tangenciálních rovinách silám pocházejícím od povrchového napětí F. Veďme bodem O normálu k ploše a proložme normálou dvě roviny svírající úhel $d\vartheta = \sphericalangle aOb = \sphericalangle a'Ob'$. Střed křivosti nekonečně blízkých řezů aa' a bb' buď N a $Na = Nb = R_1$, tedy poloměr křivosti. Nazveme-li úhel $ONa = \beta$, jest patrno, že $\lambda = R_1 \,.\, \beta$. Dále z téhož důvodu $ab = a'b' = \lambda \,.\, d\vartheta$.



Obr. 358.

Síla, od povrch. napětí na $\overline{ab}$ působící, je $P = P' = F \,.\, \overline{ab} = F \,.\, \lambda \,.\, d\vartheta$, a její komponenta v normále ON je $F \,.\, \lambda \,.\, d\vartheta \,.\, \cos\gamma$ nebo, poněvadž u $\overline{ab}$ je úhel pravý $\gamma = 90 - \beta$, a normální komponenta $F \,.\, \lambda \,.\, d\vartheta \,.\, \sin\beta$, nebo, poněvadž jest β velmi malé, $F \,.\, \lambda \,.\, \beta \,.\, d\vartheta$. Dosadíme-li z hořejšího $\beta = \frac{\lambda}{R_1}$, a sečteme-li obě stejné normální komponenty od ab a $a'b'$, máme výraz $2F \,.\, \lambda^2 \,.\, d\vartheta \,.\, \frac{1}{R_1}$.

Nyní veďme dva nové řezy naší plochou, proložené normálou a kolmé k řezům aa' a bb'. Budou míti jiný radius křivosti R_2 a normální výslednice sil od povrchového napětí bude podobně jako dříve $2F \,.\, \lambda^2 \,.\, d\vartheta \,.\, \frac{1}{R_2}$ čili od dosavadních čtyř elementů obvodových $2F \,.\, \lambda^2 \,.\, d\vartheta \,.\, \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$. Dle elementární věty theorie ploch jest však součet křivostí dvou navzájem kolmých řezů roven součtu křivosti maximální a minimální, t. j. $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{max}}+\frac{1}{R_{min}}$, tak že v našem výraze zůstává proměnným pouze $d\vartheta$. Celou normální sílu na plošku kruhovou kolem O

o ploše $\pi\lambda^2$ dostaneme, když součtem vyčerpáme celý obvod kruhový, t. j. když provedeme součet od $\vartheta = 0$ až $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, čímž plyne

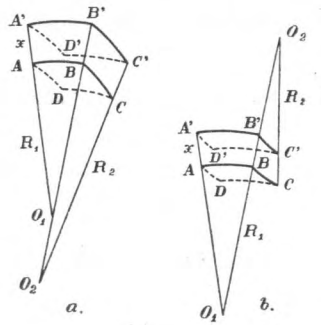
$$2F\lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}}\right) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dělením plochou $\pi\lambda^2$ obdržíme sílu na jednotku plošnou, tlak normální jakožto

$$F \cdot \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}}\right).$$

Výraz tento se stane totožným s druhým členem výrazu Laplaceova, položíme-li $H = 2F$.

Ještě jednodušší odvození plyne použitím věty o energii: Práce vykonaná rovná se zvětšení povrchové energie.



Obr. 359.

Vytkněme navzájem kolmými řezy z daného povrchu plošku $ABCD$ (obr. 359. *a*) a naznačme si radie křivosti R_1 řezu AB, R_2 řezu BC a středy křivosti O_1 a O_2. Myslíme-li si plošku $ABCD$ ve směru normály o délku $\overline{AA'} = x$ posunutou, t. j. povrch zvětšený, tak že se z ní stane $A'B'C'D'$, platí patrně

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{R_1 + x}{R_1} \quad \text{tak, že} \quad A'B' = AB\left(1 + \frac{x}{R_1}\right)$$

a

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{R_2 + x}{R_2} \quad \text{„} \quad B'C' = BC\left(1 + \frac{x}{R_2}\right).$$

Nová plocha $A'B'C'D'$ se rovná $\overline{A'B'} \times \overline{C'D'}$, tedy až na člen s nesmírně malým a zanedbatelným x^2

$$A'B'C'D' = ABCD\left(1 + \frac{x}{R_1} + \frac{x}{R_2}\right).$$

Původní plocha byla $ABCD$, tedy zvětšení jest $ABCD \cdot x \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

Práce vykonaná při posunutí o x, silou rovnou normálnímu tlaku p, násobenému plochou $ABCD$, jest $p \cdot ABCD \cdot x$, a rovná se $F \times$ zvětšení povrchu, čili $F \cdot ABCD \cdot x \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Z toho zase plyne pro normální tlak $p = F\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

Obr. 359. *b)* znázorňuje plochu sedlovitou, antiklastickou, u níž oba středy křivosti leží na opačných stranách. U té patrně

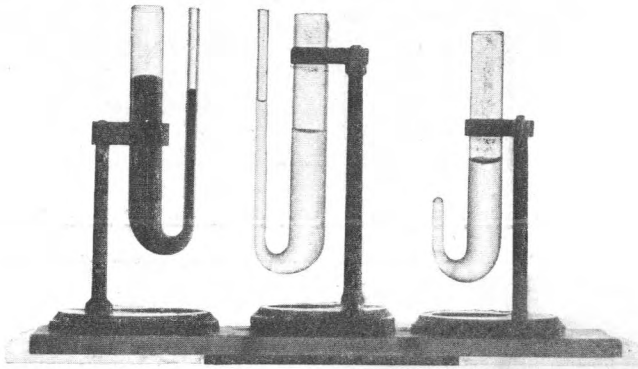
$$B'C' = BC \cdot \left(1 - \frac{x}{R_2}\right) \text{ a } p = F \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Z toho jest patrno, že musíme přiřknouti poloměru křivosti R znamení kladné, či záporné, dle toho, leží-li příslušný střed křivosti vnitř či vně kapaliny, a pak můžeme psát Laplaceův vzorec jednoznačně $K + F \cdot \left(\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}}\right)$. U koule nabývá tvaru zvláště jednoduchého $K + \frac{2F}{R}$.

Dlužno ještě upozorniti na homogenitu členů, jež jsou v tomto výrazu obsaženy. K jest $\frac{síla}{plocha}$, F pak $\frac{síla}{délka}$. Tím však, že se F dělí délkou, docílí se též rozměru $\frac{síla}{plocha}$.

§ 416. Některé pokusy.

Vzorec udávající změnu tlaku povrchového při povrchu zakřiveném, jest základním pro celou theorii kapillarity. Tuto změnu tlakovou lze též



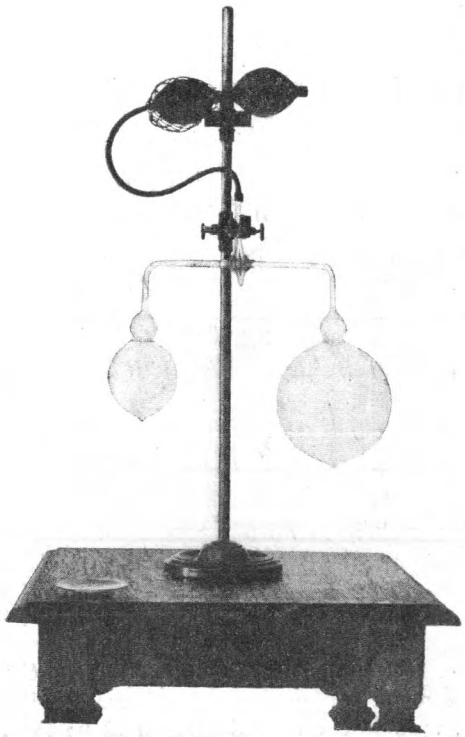
Obr. 360.

objasniti pokusem velmi poučným. Jest k němu potřebí ohnuté trubičky skleněné, na jedné straně kratší a rovně seříznuté, na druhé značně širší a delší. Když se zde nalévá vody, vystupuje v rameni kratším až na kraj, kde tvoří povrch konkavní, při čemž stojí voda v širším rameni níže;

při dalším dolévání vody stává se povrch rovinným a voda stojí v obou ramenech stejně vysoko, a pak konečně konvexním. Situaci v tomto případě znázorňuje dle skutečnosti obr. 360. (na třetím místě). Jest viděti, jak zvětšení tlaku povrchového se jeví přímo tlakem sloupce kapaliny, ježto v rameni delším stojí kapalina značně výše. Toto rameno volí se raději širším, aby zde povrch kapaliny byl vodorovným, málo zakřiveným, a také proto, aby při dolévání vody, jež se musí díti opatrně po kapkách, výška jen mírně stoupala; neboť, jakmile se konvexní meniskus protrhne, ihned kapalina větším tlakem vytéká. Pokus lze ukázati velmi pěkně v projekci.

Význam vzorců povrchový tlak stanovících objasní se velice, když se jich použije na případ mydlinové koule. Vyfouknutí takové koule až do poloměru R vyžaduje práce, neboť bublina reaguje proti zvětšení povrchu.

Jest totiž povrchový tlak na povrchu vnějším $K + \frac{2F}{R}$, na povrchu vnitřním $K - \frac{2F}{R}$, nehledíc k nepatrné tloušťce mydlinové vrstvy; tudíž vnější přetlak $\frac{4F}{R}$ na každou jednotku plochy. Z výrazu toho odvodíme ihned důsledek, který lze pokusem dotvrditi. Přístrojem v obr. 361., dle skutečnosti znázorněným, vytvoříme dvě takové bublinky různé velikosti, t. j. různého zakřivení $\frac{1}{R}$, na koncích trubičky skleněné, která uprostřed má kohout vrtaný dle schematu $\perp$. Tímto kohoutem lze tedy při foukání učiniti spojení od dmuchadla na levo nebo na pravo, ale také lze obě bublinky uvésti ve spojení vzájemné. Když se tak stane, pozorujeme, jak se bublinka menší, t. j. zakřivení $\frac{1}{R}$ většího, ztahuje až na nullovou velikost, čímž se vzduch vhání do bubliny druhé, větší, t. j. menšího zakřivení. Pokus jest analogon pokusu v § 290. u spojitých nádob. Úkaz jest důsledkem toho, že přetlak jest úměrný zakřivení bubliny. Netřeba ani připomínati, že vnější přetlak učiníme snadno



Obr. 361.

patrným, vefouknouce v bublinu kouř, nebo spojíce ji s malým manometrem, velmi citlivým, o ramenech téměř horizontálních.

Uvedeme zde ještě úvahu energetickou: Když se při vyfukování bubliny má poloměr R zvětšiti ještě o ϱ, třeba vykonati práci, danou úhrnným tlakem a pošinutím ϱ. Považujme přetlak p na jednotku povrchu působící za neznámý. Onu práci stanoví pak výraz

$$4\pi R^2 \,.\, p \,.\, \varrho.$$

V náhradu zvětší se povrch vnitřní i vnější, oba dohromady o

$$2 \,.\, [4\pi\,(R + \varrho)^2 - 4\pi R^2] = 16\pi R\varrho + 8\pi\varrho^2$$

a tím i energie povrchová. Vzhledem k tomu, že ϱ jest velice malé, můžeme ve výrazu tomto člen $8\pi\varrho^2$ jakožto velice malý druhého řádu vynechati. Zvětšení povrchu činí tedy $16\pi R\varrho$. Poněvadž F značí energii tuto pro jednotku povrchu (§ 414.), činí zvýšení energie povrchové celkem

$$16\pi R\varrho \,.\, F.$$

Tím nabýváme rovnici

$$4\pi R^2 \,.\, p_\varrho = 16\pi R\varrho \,.\, F$$

a z této

$$p = \frac{4F}{R}$$

jako dříve.

§ 417. **Systémy laminární.**

Ponoříme-li do mydlinové kapaliny kostru drátěnou, uzavřenou libovolnými křivkami, utvoří se po vytáhnutí více méně složité blány, zvané obrazci *Plateauovými*. Blány připínají se buď ke kostře nebo k jiným blanám. Ale vždy platí věta: K téže hraně tekutinové připínají se vždy tři blány; k témuž bodu v tekutině (mimo kostru) připínají se vždy 4 hrany. Ze stejnosti povrchového napětí plyne, že blány připínající se k hraně tvoří tam úhly navzájem stejné; též hrany v bodě se sbíhající tvoří navzájem stejné úhly. Obr. 362. znázorňuje dva příklady obrazců Plateauových, kde kostrou je tetraëder a krychle.

Je-li tlak na obou stranách blány stejný (rovný atmosférickému), na př. je-li blána neuzavřená, musí dle předchozího přetlak býti roven nulle, čili

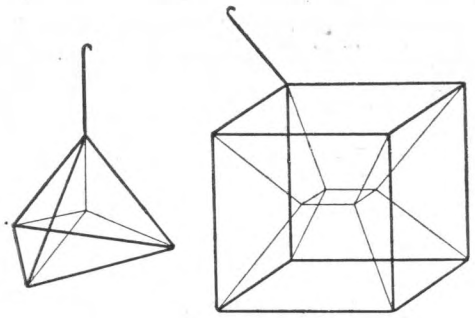
$$\frac{1}{R_{\max}} + \frac{1}{R_{\min}} = 0.$$

Touto rovnicí jest dána celá skupina ploch, nazývaných v differenciální geometrii plochami minimálními nebo elassoidy (Mini-

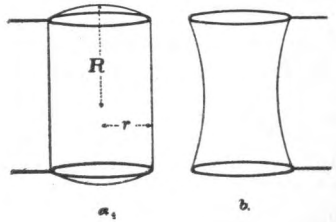
malflächen, surfaces à courbure moyenne nulle). Minimální plochy lze považovati za zvláštní případ ploch daných rovnicí

$$\frac{1}{R_{max}} + \frac{1}{R_{min}} = Const.,$$

která charakterisuje uzavřené rovnovážné systémy blan, v nichž existuje přetlak (event. negativní), který však patrně musí býti všude stejný. Zde si všimneme pouze obrazců rotačních, které lze pomocí drátěných kroužků snadno realisovati a které tvoří velmi vděčný objekt demonstrační. Obr. 363. *a.* znázorňuje válec polo-



Obr. 362.



Obr. 363.

měru r, který ovšem nutně musí býti uzavřen dvěma kulovými plochami o poloměru R. U válce jsou hlavní radie křivosti

$$R_1 = \infty, \; R_2 = r,$$

u koule pak

$$R_1 = R_2 = R.$$

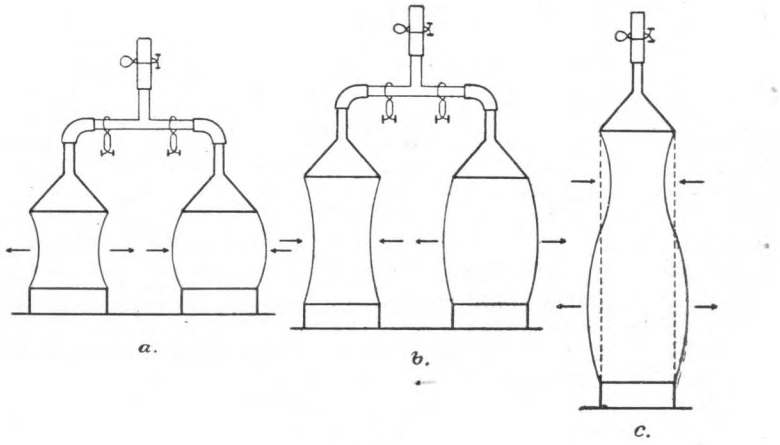
Přetlak musí býti stejný u obou, tedy

$$\frac{2F}{r} = \frac{4F}{R}, \text{ z čehož } R = 2r.$$

Když vnořenou skleněnou trubičkou necháme přetlak se vyrovnati, nebo, což je totéž, odssáváme vzduch až základny válce se stanou rovinnými ($R_1 = R_2 = \infty$), tu jest válec (obr. 363. *b*) omezen rotační plochou, jejíž meridiánová křivka hoví podmínce $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ čili jest t. zv. řetězovkou. Těleso samo sluje katenoid. Jinými rotačními plochami jsou unduloidy a nodoidy. Meridiánová křivka nodoidu jest stopa ohniska hyperboly valené po přímce, katenoidu stopa ohniska paraboly podobně valené a unduloidu stopa ohniska ellipsy. Jest patrno, že, stane-li se ellipsa kruhem, přejde unduloid ve válec, jakožto zvláštní případ.

Podobné pokusy jako s blanami lze konati i s olejem suspendovaným ve směsi vody a alkoholu a příslušnými drátěnými kostrami. Srv. *Plateau*: Statique des liquides soumis aux seules forces moleculaires, Gand 1873.

Jiná otázka jest však o stabilitě takových útvarů, jakým jest na př. válec. Pomocí dvou malých nálevek a dvou kroužků drátěných o témž průměru, skleněné *T*-trubice, kaučukové trubičky a tří tlaček, snadno lze opakovati velmi pěkné *Boysovy* pokusy, k této otázce se vztahující. Obr. 364. *a.* ukazuje, jak u válců, asi stejně dlouhých, jako širokých, se rovnováha restituuje; další obr. *b.*, kde délka válců překračuje poloviční obvod základny, rovnováha je nestálou. Výsledkem jak pokusů, tak theorie jest, že válec, jehož délka je větší než obvod základny, jest nestabilním tvarem; nejmenší poruchou přechází v unduloid (obr. 364. *c*), zúžené místo zúžuje



Obr. 364.

se dále, až se přetrhne. To jest důležito pro tvar cylindrického, hladkého paprsku vodního; také tento následkem nestabilnosti přechází v unduloid, až se přetrhne v sled koulí z vypuklých míst vznikajících. Mezi nimi nacházívají se obyčejně malé kuličky, vznikající z posledního stadia zúžujících se krčků. Týž pokus lze snadno v projekci ukázati, ponoříme-li tenkou, čerstvě vytaženou nitku skleněnou do vody; válec vody, jenž k ní přilne, brzy se změní v sled pravidelně rozložených, stejně velikých kuliček. Možnost vytáhnouti sklo nebo křemen v dlouhé, tenounké, válcovité nitky jest dána jen tím, že veliká viskosita přemáhá nestabilnost následkem povrchového napětí.

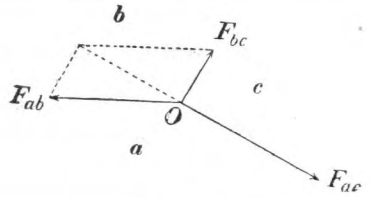
O podmínkách stability viz *Maxwell*: Capillary Action v Britické encyklopaedii, *Poincaré*: Capillarité a *Beer*: Theorie d. Elastizität und

Kapillarität. Velmi mnoho zajímavých pokusů demonstračních, hlavně o systémech laminárních, popsal *C. V. Boys* v populárních přednáškách »Soap-Bubbles and the Forces which mould them«, Londýn 1890, něm. překlad G. Meyerův, Lipsko 1893.

Trvanlivost blan kapalinových závisí, jak se domnívá *Plateau*, na jakési tuhosti povrchové, tak že povrch chová se skoro jako tuhé těleso; u blány pak stéká kapalina v úzkém prostoru mezi takovými dvěma skoro tuhými povrchy, následkem vnitřního tření, velice pomalu. Plateau dedukoval svůj názor z pokusů, při nichž měřil dobu, za kterou se vrátila o 90° vychýlená magnetka do rovnovážné polohy, jednou, byla-li úplně ponořena pod kapalinou a po druhé, dotýkala-li se právě povrchu svou spodní plochou. V druhém případě u některých kapalin (voda, glycerin, roztok saponinový a p.) byla doba značně, až dvakráte větší. Posypání lykopodiem ukázalo, že s magnetkou otáčel se téměř celý povrch jako tuhá destička. Další pokusy o tomto thematu konal *Marangoni* (1871—8), *Raygleigh* (1890) a j.

§ 418. **Šíření se kapaliny na povrchu kapaliny jiné.**

Povrchové napětí závisí, jak již při výkladu tohoto pojmu upozorněno, na dvojím prostředí ve vzájemném styku se nacházejícím. Udává-li se (na př. v tabulkách) povrchové napětí pouze pro jisté prostředí samotné, jest to míněno tak, že prostředím druhým jest vzduch. Je-li však tímto druhým prostředím na př. nějaká kapalina, jako jest tomu, když se kapaliny stýkají vzájemně, pak na rozhraní obou jest povrchové napětí ovšem zcela jiné; nazývá se někdy napětím hraničním (Grenzflächenspannung).



Obr. 365.

Obr. 366.

Může se státi, že se v přímce O, kterou si představíme kolmo k rovině nákresné, stýkají tři prostředí a, b, c. Na tuto stykovou přímku působí pak kolmo troje povrchové napětí, z nichž každé padne do stykové (tangenciální) roviny dvou prostředí. Poněvadž tato napětí F_{ab}, F_{bc}, F_{ac} jsou síly, jichž velikost jest dána, závisí rovnováha jen na směrech, a jest možná jenom, když se ze sil daných dá utvořiti trojúhelník sil (obr. 365.), v tomto případě

zvaný trojúhelníkem Neumannovým. Podmínky toho jsou známé. Při dané velikosti sil určí se příslušné směry větou sinusovou. Když jedna síla jest větší než součet dvou druhých, jest rovnováha při styku oněch tří prostředí nemožnou.

Tento případ může nastati, když kapku kapaliny nějaké pustíme na povrch na př. vody. Povšechně kapka taková má tvar čočkovitý (obr. 366.). Při velikém povrchovém napětí vody vzhledem ke vzduchu stává se však velmi často, že rovnováha jest nemožnou, t. j. že se kapka neudrží, poněvadž součet obou zbývajících napětí jest menší; kapka se pak ihned rozšíří po povrchu celém.

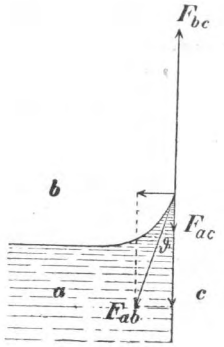
Tak na př., když kápneme olej na vodu. Zde jest povrchové napětí $\left(\frac{dyna}{cm}\right)$ olej — vzduch 34·3, olej — voda 20·6, součet obou 54·9, naproti tomu voda — vzduch 73·5. Proto se kapka oleje neudrží na vodě, nýbrž velikou rychlostí se rozestře po celém povrchu vody. Teprve potom, na takto znečištěném povrchu, nabude olej tvaru čočkovitého. Vůbec ukázaly pokusy *Quinckeho, Marangoniho, van Mensbruggheovy* a j., že pro všechny dosud známé kombinace $F_{ab} > F_{ac} + F_{bc}$, tak že Neumannův trojúhelník nemůže býti sestrojen, předpokládaje ovšem povrchy úplně čisté. Proto je velmi nesnadno, obdržeti zcela čistý povrch vody, jakého jest pro pokusy kapillární, zejména kvantitativní, třeba.

Přítomnost takové velmi teninké vrstvy cizí kapaliny na vodě zmenšuje velice povrchové napětí. Tak na př. kapkou alkoholu klesne povrchové napětí vody téměř na třetinu. Když se tedy na dno nádobky skleněné naleje velmi tence vody a pak kápne alkoholu na kraj, pozoruje se, jak se voda od té strany odhání, jako by se větrem voda odehnala na mělčině. Když se ke kraji vody přiblíží lahvička s aetherem, vzniká již padajícími parami aetherovými úkaz podobný. Skvrna mastná na šatech rozežene se do látky, když se doprostřed kápne benzinu; naopak, když se krajem dokola natírá benzin, shání se mastnota doprostřed, kde ji lze pijavým papírem odstraniti. Toluol a benzin na skle málo se roztéká; když se k němu blížíme tyčinkou skleněnou, jež byla do aetheru ponořena, odhání se. Jako tam u vody, tak i zde u benzinu nebo toluolu zmenší se povrchové napětí na straně aetheru a tím nabude převahy povrchové napětí na straně druhé a ve smyslu toho nastane pohyb. Kousky kafru víří na vodě z důvodu podobného, že totiž na různých stranách se různě rychle rozpouští a tím mění povrchové napětí. Různé rychlé rozpouštění lze demonstrovati (*Kučera*) v projekci, když vhodíme malé kousky kafru na vodní povrch nesmírně tenkou blankou olejovou pokrytý. Rozpouštěním vznikají obrazce motýlovité, podobné 8 s malým kroužkem ve směru na osu kolmým. Také každou nečistotou, prachem a pod. zmenšuje se povrchové napětí, povrch stává se, jak říkáme, anomálním. Pojednáme o tom ještě později. Nejcitlivěji se to ukazuje u rtuti. Kapka vody na povrchu rtuti naprosto čisté by se neudržela; ale při čistotě obyčejné se udrží. Povrchové napětí rtuti udává se (v míře absolutní) přes 500, ale to platí jen pro rtuť ideálně čistou; rtuť obyčejná mívá povrchové napětí značně menší. Něco podobného platí o skle. Na

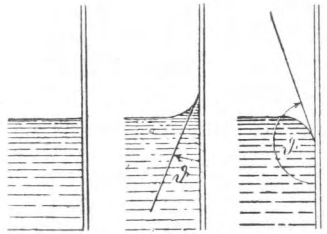
čerstvých plochách skleněných, jak vznikají, když se na př. tlusté desky zrcadlové přerazí, se kapka vody neudrží; ale za krátký čas pozmění se povrch skla tak, že se kapka udrží. Naproti tomu kapka aetheru neb oleje terpentinového se na skle neudrží.

§ 419. Úhel krajní.

Případ, že se tři prostředí stýkají v přímce, nastává u rovinné stěny nádoby, v níž se kapalina nalézá; zde se tedy stýkají kapalina, vzduch a stěna. Avšak případ tento jest přece rozdílný od toho, o němž v odstavci předešlém jednáno, poněvadž stěna jest prostředím nepohyblivým, kdežto kapalina na kapalině má volnost pohybu. Je-li tedy prostředí a kapalina, b vzduch, c stěna, jsou síly ke stěně se vztahující, t. j. F_{ac} a F_{bc} dány nejen svou velikostí,



Obr. 367.



Obr. 368.

nýbrž i svým směrem, poněvadž působí v rovině stěny. Pak zbývá jen síla F_{ab}, která jest dána jen svou velikostí, při níž tedy změna směru jest možnou. Tato působí v rovině, v níž se stýkají kapalina a vzduch; přizpůsobení jejího směru jest tedy možno tím, že kapalina svůj povrch v blízkosti stěny změní, jak rovnováha vyžaduje. Poněvadž stěna jest pevnou, vyžaduje rovnováha podmínku (obr. 367.)

$$F_{ab} \cdot \cos\vartheta + F_{ac} = F_{bc}.$$

Kapalina stýká se tedy se stěnou v tangenciální rovině, jež přiléhá ke stěně v úhlu ϑ. Tento se zove *úhlem krajním*. Jest buď ostrým neb tupým (obr. 368.), dle rovnice

$$\cos\vartheta = \frac{F_{bc} - F_{ac}}{F_{ab}}.$$

U kapalin, jež ke stěně lnou, jest ostrým, kapalina se zvedá ke stěně. Jinak se kapalina stěnou stlačuje, úhel krajní jest tupým. Rozhoduje podmínka

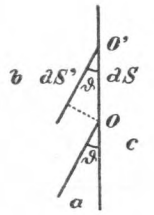
$$F_{bc} \gtrless F_{ac}.$$

Předpoklad, že existuje F_{bc}, povrchové napětí pevného tělesa, nemá v sobě nic, co bychom si nemohli představiti, zvláště díváme-li se na věc energeticky, že totiž také u potenciální energie tuhého tělesa jest člen, úměrný povrchu.

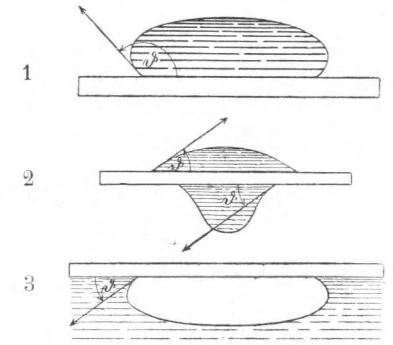
Stejně snadno dovodí se výraz pro ϑ z úvahy, že potenciální energie má býti minimem: Dejme tomu, že by se hraniční čára (kolmá na papír) posunula z bodu O do O' o dS (obr. 369.). Uvažujeme-li šířku stěny rovnou jedničce, změní se volný povrch stěny o dS. Potenciální energie se změní, a sice se zmenší o $F_{bc} \cdot dS$, zvětší o $F_{ac} \cdot dS$ a zvětší o $F_{ab} \cdot dS' = F_{ab} \cdot \cos\vartheta \cdot dS$. Je-li dW změna pot. energie, jest patrně

$$\frac{dW}{dS} = F_{ab} \cdot \cos\vartheta + F_{ac} - F_{bc}$$

a položíme-li dle podmínky minima $\frac{dW}{dS} = 0$, plyne dříve napsaný výraz pro $\cos\vartheta$. To je v elementárním tvaru tresť Gaussova důkazu o stálosti úhlu krajního. Dle toho má býti úhel ten, na př. při vodě, sklu a vzduchu týž, ať se jedná o úhel u stěny, nebo u kapek vodních na skle spočívajících nebo visících, nebo u bubliny vzduchové ve vodě pod sklem se tvořící (obr. 370. 2. a 3.). V daném případě našel *Quincke* různými methodami



Obr. 369.

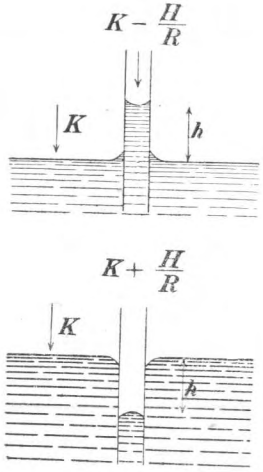


Obr. 370.

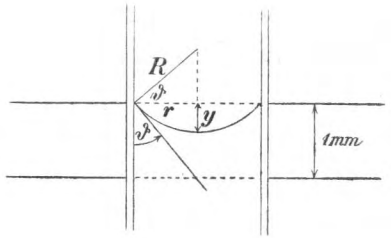
hodnoty mezi 3° až 5°; ale během doby se úhel krajní zvětšoval. Jak se zdá, kdyby bylo možno užíti skla absolutně čistého hned po očištění, byl by nullou. U kapky rtuti, na skle ležící (obr. 370. 1.), našel týž badatel hodnotu 148° 55′, která po dvou dnech klesla na 137° 14′, ale při mírném poklepu na desku vzrostla na 141° 19′, načež po dalších dvou dnech znovu klesla na 140°. Ovšem při nečisté rtuti a nečistém skle může úhel ϑ býti až i ostrý. Pro kombinaci aether-vzduch-ocel udává se $\vartheta = 90°$.

§ 420. Elevace a depresse v trubičkách kapillárních.

Vnoří-li se do kapaliny trubice na př. skleněná, průřezu kruhového o průměru $2r$, přizpůsobí se kapalina blíže stěn účinku povrchových napětí tak, že se zde povrch, jinak uprostřed trubice horizontální, stává zakřiveným. Je-li však trubička velmi úzká, tak že stěny její obepínají kapalinu velmi těsně, přestává povrch kapaliny i ve střední části trubice býti vodorovným a stává se kulovitým, buď konvexním nebo konkavním, o poloměru R. Následkem toho změní se (obr. 371.) tlak povrchový K, stávaje se větším neb menším, což zase jest příčinou, že nastane kompensace hydrostatická; kapalina v trubičce se sníží nebo zvýší, nastává depresse nebo elevace. Takovéto úzké trubičky zoveme vláskové, čili kapillární a mluvíme o kapillární depressi nebo elevaci. Kulovitý povrch kapaliny v trubičce nazývá se meniskus.



Obr. 371.



Obr. 372.

Snadno dovodíme vztah pro výstup h kapaliny v trubičce na základě vzorce Laplaceova. Vezměme v úvahu horizontální rovinu v hloubce z pod hladinou. Pak působí v místech pod vodorovným povrchem jednak tlak barometrický b, jednak tlak K, jednak hydrostatický tlak sloupce kapalinového výšky z, daný, je-li specif. hmota kapaliny s, součinem szg. Pod trubičkou působí v téže horizontální rovině podobně

$$b, \quad K - \frac{2F}{R} \quad \text{a} \quad s\,(z + h)\,g.$$

Ježto nutně musí tlak v horizontální rovině býti všude týž, plyne

$$b + K + szg = b + K - \frac{2F}{R} + s\,(z + h)\,g$$

čili

$$hsg = \frac{2F}{R}.$$

To jest základní rovnice pro výstup v kapiláře.

Jde ještě o výpočet poloměru R. Je-li ϑ úhel krajní, jest patrně (obr. 372.)

$$R = \frac{r}{\cos \vartheta},$$

čímž vyjde pro elevaci kapillární

$$h = \frac{2F \,.\, \cos \vartheta}{rsg}.$$

Elevace kapillární jest tudíž obráceně úměrná poloměru trubičky. Zákon tento, tak zvaný Jurinův (1718), lze na různých kapillárních trubičkách demonstrovati v projekci. Elevace kapillární souvisí též s úhlem krajním, se specifickou hmotou kapaliny, ale též s urychlením tíže, což jest pochopitelno, poněvadž kompensace povrchového tlaku se děje vahou.

Úhel krajní ϑ lze přibližně určiti z prohloubení menisku y (obr. 372.) dle jednoduchého vztahu

$$r - y = r\,tg\,\vartheta.$$

Dá-li se tedy millimetrové měřítko za trubičku kapillární tak, aby jedna dělící čárka souhlasila s okrajem menisku, lze y dle polohy druhé dělící čárky odhadnouti.

Hořejší vzorec můžeme přímo napsati, vyjdeme-li z Youngovy představy o povrchovém napětí. Sloupeček kapaliny, váhy $qhsg$, drží se povrchovým napětím F, působícím podél obvodu $2\pi r$ silou $F \,.\, 2\pi r$, o úhel ϑ od svislé odchýlenou; do směru tíže připadá tedy složka $F \,.\, 2\pi r \,.\, \cos \vartheta$. Odtud rovnice

$$F \,.\, 2\pi r \,.\, \cos \vartheta = \pi r^2 \,.\, hsg$$

čili

$$h = \frac{2F \,.\, \cos \vartheta}{rsg}$$

jako dříve, opět bez ohledu na meniskus. Pro kapillární depressi platí tytéž vzorce na základě úvahy zcela analogické. Elevaci i depressi lze v projekci ukázati způsobem v obr. 360. znázorněným.

Korrekce následkem vlastního objemu v menisku snadno se připojí; musí totiž pak

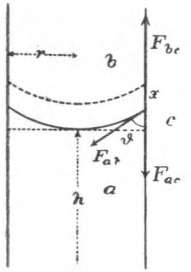
$$F \,.\, 2\pi r \,.\, \cos\vartheta = \pi r^2 hsg + vsg$$

čili

$$h + \frac{v}{\pi r^2} = \frac{2F \,.\, \cos\vartheta}{rsg}.$$

Stává se velmi jednoduchou, omáčí-li kapalina dokonale trubici, tak že $\vartheta = 0$ a je-li poloměr kapilláry tak malý, že lze meniskus považovati za polokouli. Pak

$$v = \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^3}{3} \quad \text{a} \quad h + \frac{1}{3}r = \frac{2F}{rsg}.$$



Obr. 373.

Nebude snad nemístným, když u tohoto základního vzorce poukážeme i na třetí způsob odvození methodou Gaussovou. Nechť se zvětší výstup kapaliny h o malý obnos x (obr. 373.), tak že pokryje plochu $2\pi rx$. Tím zvětší se potenciální energie o $2\pi rx \times (F_{ac} - F_{bc})$. Vedle toho vzroste potenciální energie gravitační 1.) zvednutím hmoty $\pi r^2 xs$ na výšku h, tedy o $\pi r^2 xhsg$, 2.) zvednutím menisku objemu v na výšku x, tedy o $xvsg$. Položíme-li vzrůst energie dělený x, rovným nulle, plyne

$$2\pi r \,.\, (F_{ac} - F_{bc}) + \pi r^2 hsg + vsg = 0$$

čili

$$h + \frac{v}{\pi r^2} = \frac{-2\,(F_{ac} - F_{bc})}{rsg}.$$

Víme však z definice krajního úhlu (§ 419.), že

$$F_{bc} - F_{ac} = F_{ab} \,.\, \cos\vartheta = F\cos\vartheta,$$

poněvadž píšeme za F_{ab} v této stati krátce F. Vzorec výsledný jest patrně úplně týž jako dříve napsané.

Dlužno upozorniti, že r značí poloměr trubičky ne snad průměrný, nýbrž jen toho místa, kde se meniskus tvoří. Výška h by byla stejnou, kdyby pod tím místem trubička se libovolně šířila. Toho dlužno dbáti, když se základního vzorce pro trubičky kapillární užívá k ustanovení povrchového napětí F.

Zajímavým dotvrzením vzorců zde platných jest, že se do trubičky kapillární kapalina vssaje a tam volně udrží ve výšce $2h$. Dolejší konvexní meniskus totiž současně tlačí vzhůru o tolik, o mnoho-li hořejší jako by nadlehčuje, předpokládajíc poloměr menisku nahoře i dole za stejný; tomu jest vyhověno, je-li trubička ze skla velmi tenkého proti průměru trubičky.

Ještě jednu poznámku dlužno přičiniti k výrazu pro výstup kapaliny, vzhledem k jeho časté applikaci pro určování povrchového napětí F. Při odvozování methodou Laplaceovou psali jsme na obou stranách rovnice b

za tlak (barometrický), jak v hladině kapaliny, tak ve výši h na menisku. Měří-li se však methodou kapillární trubičky povrchové napětí za teplot vyšších, na př. jako *Ramsay* a *Shields* (1893), u různých kapalin zatavených v širokých trubicích, tu může specifická hmota σ par nad povrchem kapaliny dostoupiti hodnot, kterých nelze proti s zanedbávati. Pak b musí znamenati tlak ve výši h, a na volný povrch kapaliny působí vedle něho i hydrostatický tlak sloupce par vyšky h, tak že úplnější rovnice pak zní

$$b + \sigma hg + K + szg = b + K - \frac{2F}{R} + s\,(z + h)\,g,$$

z níž plyne

$$h = \frac{2F}{R\,(s - \sigma)\,.\,g}.$$

§ 421. **Elevace a depresse u rovnoběžných desk.**

Mezi dvěma rovnoběžnými deskami v malé odlehlosti d do kapaliny svisle vloženými není meniskus úsekem koule, nýbrž válce, jehož minimální poloměr křivosti jest R, maximální ∞. Ze všeobecného výrazu

$$K \pm F\left(\frac{1}{R_{\max}} + \frac{1}{R_{\min}}\right)$$

stanovíme povrchový tlak pro tento případ vzorcem

$$K \pm \frac{F}{R}.$$

Na vývodech odstavce předešlého se jinak nemění ničeho, než že dlužno psáti $\frac{F}{R}$, kde tam bylo $\frac{2F}{R}$. Vzhledem k tomu jest patrno, že elevace i depresse h při deskách rovnoběžných v odlehlosti d do kapaliny zapuštěných jest poloviční té elevace a depresse, kteráž vzniká u trubiček průměru d.

Týž výsledek odvodíme na základě povrchového napětí F. Vertikální jeho složka po obou stranách menisku jest $2F\cos\vartheta$ na každou jednotku délky; touto silou se nese váha sloupce kapaliny šířky d, délky 1 a výšky h, vyjádřena výrazem $dhsg$. Jest tudíž

$$2F\cos\vartheta = dhsg,$$

odkudž plyne

$$h = \frac{2F\cos\vartheta}{dsg}.$$

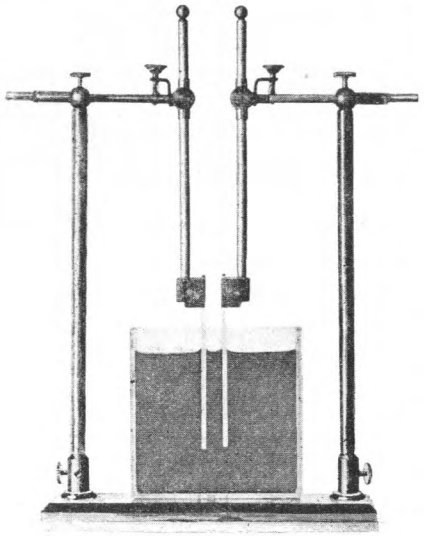
Vzorec tento jest souhlasný s tím, který jsme odvodili pro trubičky, až na to, že zde jest d, kde tam jest r. Jsou-li desky k sobě nakloněny, jest d proměnlivé. Dle vzorce posledního jest

$$hd = \frac{2F \cos \vartheta}{sg}.$$

Výraz na pravo jest konstantou. Píšeme-li za svislou elevaci h na okamžik y, a uvážíme-li, že odlehlost x ve smyslu vodorovném jest úměrna tloušťce d od společné vertikální hrany počítajíc, obdržíme

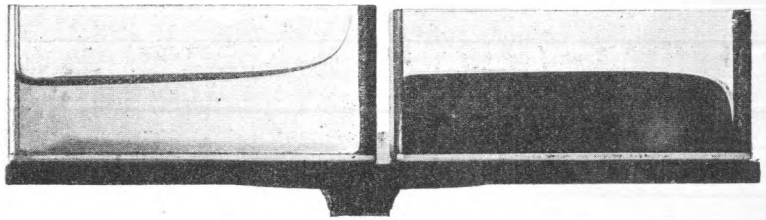
$$xy = Const.$$

jakožto rovnici čáry, podél které se elevace neb depresse utváří; čarou touto jest rovnoosá hyperbola.



Obr. 374.

Obr. 374. znázorňuje způsob, jak lze ukázati (v projekci) elevace (a podobně i depresse) kapillární mezi dvěma skleněnými deskami, jež jsou svisle rovnoběžně do kapaliny zapuštěné. Kapalina jest v nádobě parallelepipedické ze skla zrcadlového; destičky skleněné mají touž šířku jako nádoba, tak že těsně přiléhají krajem svým ke stěnám podélným. Tím vynikne tvar menisku velice pěkně, a ukáží se jeho změny, když se odlehlost destiček zmenšuje. Regulace desk na rovnoběžnost provádí se šroubky stativu velmi pohodlně a jemně. Stativu lze užívati též k pokusům elektrolytickým v projekci mezi elektrodami, na př. platinovými.



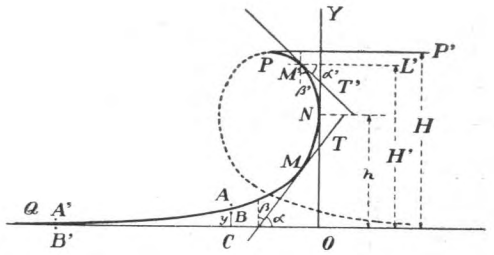
Obr. 375.

Rovnoosá hyperbola u desk svislých, k sobě nakloněných, ukazuje se v projekci velmi pohodlně v klínovitých skleněných nádobkách, a to

jak pro elevaci, na př. u vody mírně zbarvené, event. k vůli dobrému omáčení u roztoku dvojchromanu draselnatého v kyselině sírové, tak pro depressi u rtuti (obr. 375.).

§ 422. Výstup kapaliny podél nekonečné stěny, tvar kapek a bublin.

Ukázkou, jakou pomůcku skýtá experimentální fysice vzorec Laplaceův, podáme řešení případu velmi důležitého pro methodu určování povrchového napětí z kapek a bublin. Kapalina vystupuje podél stěny, kterou omáčí ($\vartheta < 90$), tvoříc plochu určitého tvaru. Vypočteme rovnici křivky v rovinném řezu vedeném plochou kolmo k stěně a povrchu kapaliny. Při tom předpokládáme stěnu rovinnou nekonečně dlouhou, nebo lépe řečeno stěnu zakřivení tak malého, aby křivost plochy v řezech s čarou styčnou rovnoběžných mohla býti zanedbávána oproti křivosti v řezu na stěně a kapalině kolmém.



Obr. 376.

Buď Q volný povrch kapaliny (obr. 376.) a $QAM\ldots$ křivka, kterou hledáme; osa X proložena jest horizontálně rovinou volného povrchu, Y na ní kolmá. V bodě A' právě nad volným povrchem panuje tlak barometrický b, v bodě B' právě pod volným povrchem na ose X tlak $b + K$. V bodě C na ose X-ové pod bodem B, v němž jest křivost dána poloměry hlavními $R_1 = \infty$ (kolmo k papíru) a $R_2 = R$, podobně tlak $b + K - \frac{F}{R} + ygs$, je-li y vzdálenost CB od povrchu, s specifická hmota kapaliny a g urychlení tíže. Ovšem musí dle zásady hydrostatiky býti tlak v téže horizontální rovině osy X všude týž, tedy

$$b + K = b + K - \frac{F}{R} + ygs \quad \text{čili} \quad y = \frac{F}{gs} \cdot \frac{1}{R}.$$

Tím jest fysikální podstata úlohy řešena, zbývá provésti řešení mathematické. Označíme-li $\frac{dy}{dx} = y'$ a $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$, můžeme dosazením známého vzorce pro radius křivosti rovinné křivky psáti

$$y = \frac{F}{g\sigma} \cdot \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Násobme v levo $\frac{dy}{dx}$, v pravo y'; plyne

$$y\,dy = \frac{F}{gs} \cdot \frac{y' \,.\, dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dosadíme-li za $1 + y'^2$ novou proměnnou z, můžeme snadno provésti integraci, z níž plyne

$$\frac{y^2}{2} + Const = -\frac{F}{gs} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Pro volný povrch horizontální $y = 0$ jest $y' = 0$, a tedy integrační konstanta $Const = -\frac{F}{gs}$, tak že výsledkem

$$\frac{y^2}{2} = \frac{F}{gs}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\right].$$

Vedeme-li k nějakému bodu křivky, na př. M tečnou T, jest patrně, je-li α úhlem sklonu jejího, β jeho doplňkem na 90°

$$y' = tg\,\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\,\alpha}} = \pm\, cos\,\alpha = \pm\, sin\,\beta,$$

tak že vzorec konečný jest

$$y^2 = \frac{2F}{gs}(1 \mp sin\,\beta).$$

Znamení — odpovídá větvi QMN, znamení + větvi NP, dosazujeme-li úhly β bez znamení dle numerické hodnoty. Jinak lze psáti ve vzorci pouze znamení — a bráti pro větev QMN

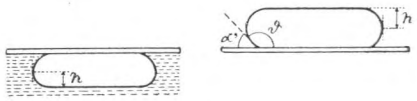
$$\frac{\pi}{2} > \beta > 0, \quad \text{pro } NP \quad 0 > \beta > -\frac{\pi}{2}.$$

Na tomto místě můžeme připomenouti, že differenciální rovnice, od níž jsme vyšli, a tedy také výsledek, jest totožný jako pro nesmírně tenkou, pružnou a původně rovnou tyč, ohýbanou silami v ose X působícími, tedy pro kličku z pružného drátu, myslíme-li obrazec otočen o 90° a průběh křivky (čárkované) doplněn.

Je-li stěna vertikální a $\vartheta = 0$, t. j. stěna dokonale omáčena, vyzvedne se kapalina do výše $ON = h = \sqrt{\frac{2F}{gs}}$. Již tento vzorec dává methodu k měření povrchového napětí F; užil jí *E. Desains* a našel pro vodu a sklo $h = 3{\cdot}849\ mm$, čili $F = 72{\cdot}7\ \frac{dyna}{cm}$. *Wertheim* modifikoval tuto methodu tak, že pomocí kathetometrických měření přesně stanovil plošný obsah QON, o němž se snadno dokáže, že se rovná $\frac{h^2}{2} = \frac{F}{gs}$.

U horizontální stěny — desky PP', zvedne se kapalina nejvýše o $H = 2\sqrt{\frac{F}{gs}}$.

Řešení naše platí stejným způsobem pro bublinu vzduchovou v kapalině (obr. 377. *a*) nebo pro kapku rtuťovou na skle spočívající (obr. 377. *b*). V tomto druhém případě musíme si představiti obr. 376. o 180° otočený.



a) Obr. 377. *b*)

Z měření h obdržíme vždy dle udaného vzorce povrchové napětí F. Ba můžeme nad to pomocí kapky nebo bubliny stanoviti i krajní úhel ϑ na př. u bubliny v terpentinu (kde je asi 17°) nebo v kyselině octové (ϑ ca. 20°) (*Magie* 1888). Představme si v obr. 376. tečnou T' k větvi NP tak vedenou, že tvoří s osou X-ovou úhel $\alpha' = \vartheta$ a příslušným styčným bodem M' rovnoběžku $M'L'$ s osou X-ovou. Pak nám tato znamená hořejší ohraničení bubliny. Pro výšku bubliny H' platí pak

$$H'^2 = \frac{2F}{gs}(1 + sin\,\beta') = \frac{2F}{gs}(1 + cos\,\vartheta).$$

Změříme-li tedy $h = \sqrt{\frac{2F}{gs}}$ a H', obdržíme jak F, tak ϑ. Pro kapky rtuťové platí týž vývod, jen že tu je určení

$$\beta' = \vartheta - 90^0, \quad \alpha' = 180 - \vartheta.$$

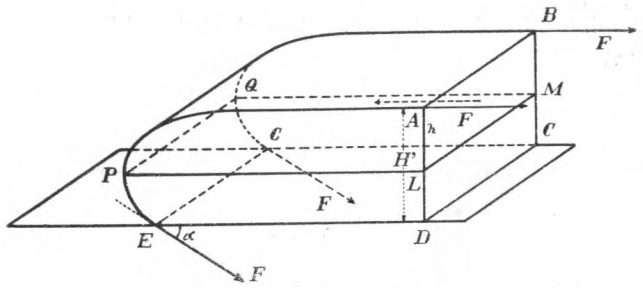
Řešení naše platí ovšem, jak je z mathematické dedukce patrno, pouze za supposice, že je poloměr bubliny nebo kapky velmi veliký, tak že lze křivost v obr. 376. kolmo k papíru zanedbávati oproti R. Pro kapky menší není úloha řešitelnou, leč mechanickými kvadraturami. Vzorce naše platí tím lépe, čím kapka je větší, tak že v praxi stačí užívati kapek o průměru ca. 10 *cm*. Pro kapky (a bubliny) menší nutno užíti jistých korrekcí, jež sestavil tabellárně *Bashford* (An attempt to test the theory of capillary action. Cambridge, 1883); srovnej o tom novější práce *Lohnsteinovy* (1894), *Siedentopfovy* (1897) a *Heydweillerovy* (1898).

§ 423. Elementární odvození vzorců pro kapky a bubliny.

Vzorce právě přímo z Laplaceova výrazu pro tlak dovozené můžeme odvoditi elementárně pomocí úvahy o povrchovém napětí.

Mysleme si z kapky vyříznutý pás $ABCDEG$ (obr. 378.), šířky $AB = 1$ a uvažujme rovnováhu vnějších sil působících na hoření

jeho část nad maximálním řezem horizontálním $LMPQ$, při čemž patrně dle dřívějšího označení $AL = h$. Je-li kapka veliká, je hoření její povrch horizontální a jeho křivost nullová. Pak působí



Obr. 378.

na stěnu $ABML$ pouze hydrostatický tlak od ostatních částí kapky, jehož výslednice horizontální, v levo směřující, jest

$$\tfrac{1}{2}\, sg \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{AL}^2 = \tfrac{1}{2}\, sg \,.\, h^2,$$

jediná vnější síla, působící horizontálně v pravo, je napětí povrchové

$$F \,.\, \overline{AB} = F.$$

Aby byla rovnováha, musí

$$F = \tfrac{1}{2}\, sgh^2 \quad \text{čili} \quad h^2 = \frac{2F}{sg}.$$

Uvažujeme-li podobně rovnováhu horizontálních složek vnějších sil na celé části kapky, jejíž výška $AD = H'$, vidíme, že směrem v levo působí hydrostatický tlak

$$\tfrac{1}{2}\, sg \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{AD}^2 = \tfrac{1}{2}\, sg \,.\, H'^2,$$

směrem v pravo pak povrchové napětí

$$F \,.\, \overline{AB} = F \quad \text{a} \quad F \,.\, \cos\alpha' \,.\, \overline{EG} = F \,.\, \cos\alpha',$$

tak že podmínkou rovnováhy jest

$$F\,(1 + \cos\alpha') = \tfrac{1}{2}\, sg \,.\, H'^2, \text{ tak že } H'^2 = \frac{2F}{sg}\,(1 + \cos\alpha'),$$

jako dříve. Maximální výška kapky H jest patrně, je-li $\alpha' = 0$, dána vzorcem

$$H^2 = \frac{4F}{sg}.$$

§ 424. Některé další methody k určování povrchového napětí.

1. *Methoda Wilhelmyho* (1863).

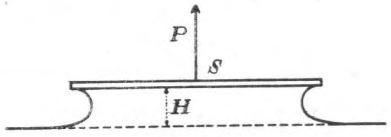
Vahami lze snadno stanoviti tah, který způsobuje povrchové napětí na ostrém horizontálním kraji desky, která se právě dotýká povrchu kapaliny. Je-li délka hrany a, tedy jest tento tah z každé strany roven Fa, celkem tedy $2Fa$. Methody této, kde však místo rovné hrany užívá se ostrého prsténce poloměru r, užívalo se v poslední době velmi často k stanovení povrchového napětí povrchů anomálních (*Weinberg*, 1892, *Gallenkamp*, 1902, *Agnes Pockels*, 1902). K přibližné hodnotě $F_1 = \dfrac{P}{2 \,.\, 2\pi r}$, kde P jest kapillární tah, nutno však přičinit korrekci vzhledem ke konečné tloušťce b ostří prsténce. Vzorec přesný jest

$$F = F_1 - b\sqrt{\frac{F_1 gs}{2}} + \frac{3}{16}\, b^2\, g\, s.$$

Výhodou jest, že zde nevystupuje krajní úhel. Název methody »adhesního prsténce« je ovšem naprosto nesprávný.

2. *Methoda odtrhování desky.*

Jest úplně obdobná methodě k stanovení adhese u kapalin nepřilnavých. Deska plochy S (obr. 379.) na jednom rameni vah upevněná, zvedne kapalinu do výše $H = \sqrt{\dfrac{4F}{gs}}$ (viz §§ 422. a 423.); pak působí v hladině volné barometrický tlak, v téže horizontální výši pod deskou barometrický tlak $+ Hsg$. Musí tudíž



Obr. 379.

býti hydrostatický tlak Hsg vyvážen tahem vertikálním na desku, kterýž se rovná P, kde $P = S \,.\, Hgs = 2S\sqrt{Fsg}$. Stane-li se tah větším, snaží se zvětšiti H, deska se odtrhne. Z toho je patrno, že závaží neměří »kohesi« kapaliny, nýbrž její povrchové napětí. Lze také zatěžovati jen potud, až kapalina bezprostředně pod deskou je vertikální; pak je zdvihnutí h a vzorec je obdobný.

3. *Methoda vážením kapek.*

Budiž m hmota kapky visící na obvodě $2\pi r$ úzké, tenkostěnné trubičky. Je-li F povrchové napětí, nese síla $2\pi r \,.\, F$ váhu kapky mg. V okamžiku, kdy se kapka odtrhne, jest

$$2\pi r \,.\, F = mg.$$

Tato theorie jest ovšem taková, jaká by příslušela zjevu čistě statickému. Vskutku však odtrhuje se kapka od obvodu menšího, $r' < r$, a mimo to závisí, jak pokus ukazuje, váha kapky na rychlosti odkapávání. Nedosti známa jest také funkce zbytku z kapky, který zůstává viseti na trubici. Viz o těchto otázkách obšírné práce experimentální *Guye* a *Perrotovy* (1901) a theoretické *Lorda Rayleighe* (1899) a *Lohnsteinovy* (1906 a 7). Z českých pracovníků dotkl se otázky té *B. Kučera* (Drude Ann. 1903 a Rozpravy čes. ak. 1903). Zdá se, že pro měření čistě relativní methoda tato, velmi pohodlná a rychlá, dává výsledky velmi dobré.

4. *Oscillace kulové kapky.*

Když kapka kapaliny padá, jest jejím rovnovážným tvarem koule. Ale při odpadávání má tvar podlouhlý a proto padajíc oscilluje kolem tvaru rovnovážného, nabývajíc periodicky tvaru ellipsoidu s osou vertikální, tvaru koule, pak ellipsoidu s osou horizontální, znovu tvaru koule atd. Perioda těchto oscillací dovoluje vypočísti povrchové napětí, neboť toto jest jejich příčinou. Vskutku určil *Lenard* (1887) povrchové napětí tímto způsobem. Odvození vztahu pro periodu jest velice obtížné, ale tvar tohoto vztahu určíme snadno, zároveň jakožto ukázku užívání dimensionálních rovnic ve fysice.

Perioda může záviseti pouze na poloměru R kapky, na spec. hmotě s její a na povrchovém napětí F. Vzorec pro dobu kmitu t musí tedy míti tvar $t = C \,.\, R^x s^y F^z$, kde C je jakási numerická konstanta. Dimense zde intervenujících veličin jsou

$$t \ldots T^1L^0M^0,\quad R \ldots T^0L^1M^0,\quad s \ldots T^0L^{-3}M^1,\quad F \ldots T^{-2}L^0M^1.$$

Dosadíme-li do dimensionální rovnice, plyne

$$T^1L^0M^0 = (T^0L^1M^0)^x \,.\, (T^0L^{-3}M^1)^y \,.\, (T^{-2}L^0M^1)^z.$$

Z toho plynou rovnice pro jednotlivé veličiny T, L a M

$$-2z = 1, \qquad x - 3y = 0, \qquad y + z = 0,$$

z nichž dále

$$x = {}^3/_2, \qquad y = {}^1/_2, \qquad z = -{}^1/_2,$$

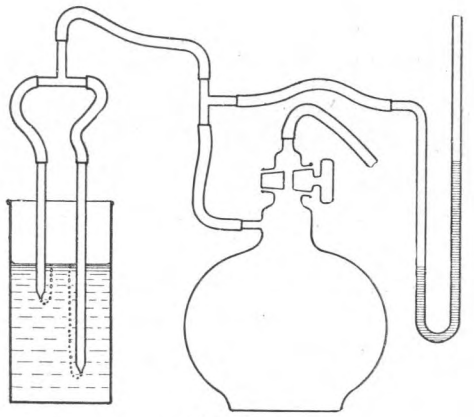
tak že závislost doby kmitové má tvar

$$t = C \,.\, \sqrt{\frac{R^3 s}{F}}.$$

Ve vzorci skutečném má konstanta hodnotu $C = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. K objasnění řádu veličin, které zde přicházejí, připomínáme, že kapka vodní průměru 5 *cm* by měla kmitovou dobu 1 vteřiny. Snadno se takovéto oscillace demonstrují, suspendujeme-li velikou vodní kapku v roztoku petroleje v sirouhlíku. Podobné periodické oscillace (zúžení a zduření) nastávají v paprsku kapalinovém, vytékajícím z otvoru ne úplně přesně kruhového (*Lord Rayleigh*, 1872, 1892). Z nich dá se počítati povrchové napětí u povrchů úplně čerstvých, stále se obnovujících, jaksi »in statu nascendi«.

5. *Methoda měření tlaku v malých bublinkách.*

Chceme-li vyhnat z konce kapilláry, nacházejícího se pod povrchem kapaliny malé bubliny, musíme hnáti kapillárou plyn (vzduch) určitým tlakem, který sestává z tlaku hydrostatického u ústí kapilláry a dále z tlaku, odpovídajícího výstupu kapaliny



Obr. 380.

v kapiláře toho průměru, jaký je právě u ústí jejího. Ovšem jest při tom předpokladem, že odpovídá onen tlak takovému tvaru bublinky, jaký má meniskus v trubici. Toho si nepovšiml *Simon de Metz* (1851), který prvý methody této užil. *Jaeger* (1891) učinil z ní dobrou methodu relativní. Užil totiž dvou trubic o různých poloměrech r_1 a r_2 a posunoval je vzájemně ve výši tak dlouho, až

z obou vystupovaly bubliny současně (obr. 380.). Nazveme-li maximální tlak v bublině p, specifickou hmotu kapaliny s, hloubku pod hladinou, v níž se kapillární otvor nachází z, a výšku, kam by v kapiláře stejného otvoru kapalina vystoupila h, jest přibližně dle předchozího

$$p = hsg + zsg = \frac{2F}{r} + zsg.$$

Máme-li tedy dle Jägra kapilláry dvě o nestejném ponoru a stejném tlaku v téže kapalině, jest

$$p_1 = \frac{2F}{r_1} + z_1 s_1 g = \frac{2F}{r_2} + z_2 s_1 g$$

čili

$$2F_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (z_2 - z_1)\, s_1 g.$$

V jiné kapalině pro tytéž dvě kapilláry platí podobně

$$2F_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (z'_2 - z'_1)\, s_2 g,$$

tak že poměr povrchových napětí

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{z_2 - z_1}{z'_2 - z'_1} \cdot \frac{s_1}{s_2}.$$

Jak patrno, stanovením výškového rozdílu ústí trubic dá se změřiti poměr povrchových napětí.

Whatmough (1901) užil jediné kapilláry velice úzké, která se ponoří velice málo pod povrch (z velmi malé) a stanovil tlaky

$$p_1 = \frac{2F_1}{r_1} + z_1 s_1 g,$$

$$p_2 = \frac{2F_2}{r_1} + z_2 s_2 g.$$

Zanedbáme-li malé členy zsg, jsou povrchová napětí přibližně v témž poměru jako tlaky.

Sluší připomenouti, že jest výhodno vytáhnouti kapiláru velmi krátkou a ve skle velmi teninkou z širší trubice tenkostěnné. Všeobecně totiž intervenuje v přesnějších výrazech úhel krajní, jehož vliv mizí u hran velmi ostrých (*Cantor*, 1892). *Feustel* (1905) užil velmi tenkostěnných trubiček platinových a vytvořil z určení maximálního tlaku v bublinách methodu absolutní.

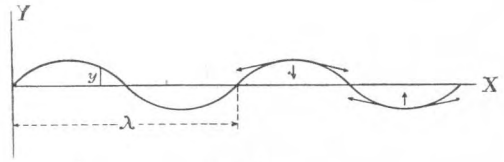
6. *Methoda vlnek kapillárních.*

Lord Kelvin (1871) a nezávisle na něm jinou methodou *Koláček* (Wied. Ann. 5 a 6, 1878 a 9) dovodili, že při velmi krátkých vlnkách na kapalinách jest činitelem pro postupnou rychlost vln rozhodujícím povrchové napětí. Nemůžeme zde dovoditi theorii tohoto zjevu; odkazujíce na Koláčkovu Hydrodynamiku (Praha 1899, Sborník J. Č. M., čís. 2, str. 251 a násl.), kde obsaženo jest odvození nejobecnější, pokusíme se pouze elementární úvahou poněkud ozřejmiti, oč běží *).

Rychlost V, kterou se šíří vlny délky λ, jež jest malá oproti hloubce kapaliny, jest $V = \sqrt{g \cdot \frac{\lambda}{2\pi}}$. Při tom jest silou pohyb vlny způsobující tlak hydrostatický, který ve vzdálenosti y pod povrchem jest roven $g \,.\, s \,.\, y$, kde g jest urychlení tíže; g vstupuje do výrazu pro rychlost V, jakožto faktor u $s \,.\, y$. Když vezmeme ohled na povrchové napětí, tu napomáhá hydrostatickému tlaku, působíc ve vydutých částech vlny směrem vzhůru, ve vypuklých směrech dolů. Budiž povrch vlny v prvém přiblížení dán výrazem

$$y = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$$

a zobrazen obr. 381., kde zároveň je tendence povrchového napětí znázorněna.



Obr. 381.

Křivost v každém místě jest dána, jako vždy, výrazem

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{R_1},$$

křivost kolmo na nákres

$$\frac{1}{R_2} = 0.$$

*) Viz též *Akustiku*, § 33. a 34. Vlny na povrchu kapalin, pag. 99 a 101, 1902.

Jsou-li vlnky velice ploché, tu $\frac{dy}{dx}$, t. j. sklon tečné k ose x-ové, je velmi malé, a oproti 1 ve jmenovateli může býti zanedbáno, tak že jest velmi přibližně

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d^2y}{dx^2} = -a \cdot \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot sin\, \frac{2\pi}{\lambda} x = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot y.$$

Tlak u povrchu od zakřivení pochodící, jest, jak víme,

$$F \cdot \frac{1}{R_1} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot Fy;$$

jde, jak je patrno, směrem dolů u $y > 0$, směrem nahoru u $y < 0$ stejně jako vliv tlaku hydrostatického. Má se tudíž věc tak, jako by hydrost. tlak byl zvětšen o $\frac{4\pi^2}{\lambda^2} Fy$, tak že místo gsy nutno psáti

$$gsy + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} Fy = g\left(1 + \frac{4\pi^2 F}{gs\lambda^2}\right) \cdot sy.$$

Dosadíme-li tedy do výrazu pro rychlost vln nový faktor u sy, obdržíme již s ohledem na vliv povrchového napětí

$$V = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g + \frac{4\pi^2 F}{\lambda^2 s}\right)}.$$

Vidíme, že pro $\lambda = \infty$ plyne $V = \infty$; pro $\lambda = 0$ též $V = \infty$. Musí tedy pro jisté λ nastávati rychlost V minimální. Tu snadno určíme, vzpomeneme-li na známou úlohu geometrickou.

Pišme

$$V = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} + \frac{2\pi F}{\lambda s}} = \sqrt{\xi + \eta};$$

při tom jest

$$\xi\eta = \frac{\lambda g}{2\pi} \cdot \frac{2\pi F}{\lambda s} = \frac{gF}{s}$$

stálé. Máme tedy určiti minimum součtu $\xi + \eta$, je-li součin $\xi\eta$ stálý nebo geometrickým obrazem, ptáme se, který pravoúhlý čtyrúhelník ze všech možných o stálé ploše má nejmenší obvod. Je to, jak známo, čtverec; podmínkou minima jest tedy $\xi = \eta$, t. j.

$$\frac{\lambda_1 g}{2\pi} = \frac{2\pi F}{\lambda_1 s} \quad \text{čili} \quad \lambda_1^2 = \frac{4\pi^2 F}{gs}.$$

Pro vlny této délky λ_1 jest tedy postupná rychlost V_1 nejmenší, rovnajíc se

$$V_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{Fg}{s}}.$$

U vody, kde jest přibližně $F = 75\ \frac{dyna}{cm}$, jest příslušné $\lambda_1 = 1{\cdot}7\ cm$ a $V_1 = 23\ cm/sec$.

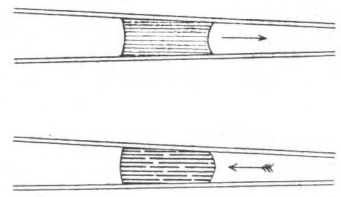
Po vodě nemohou se tedy pohybovati vlny pomalejší než rychlosti 23 *cm/sec*; pro každou větší rychlost postupnou lze nalézti dvě délky vlnité λ, které této rychlosti odpovídají, z nichž jedna jest větší druhá menší 1·7 *cm*.

Vlny o $\lambda > 1{\cdot}7\ cm$ jsou vlny v obyčejném slova smyslu (ondes, waves, Wellen), vlny o $\lambda < 1{\cdot}7\ cm$ zveme vlnkami kapillárními nebo čeřivými (fr. rides, angl. ripples, něm. Kapillarwellen). Čím menší jest délka vlnitá, tím menší jest vliv tíže, tím více převládá vliv povrch. napětí, před nímž vliv tíže u vlnek, jaké na př. ladičkou na kapalině lze vyvoditi, ustupuje úplně do pozadí.

Ze stanovení délky vlnité a postupné rychlosti nebo periody T vln, $(V \cdot T = \lambda)$, lze určiti povrchové napětí. Methody této užili prví *Matthiessen* (1889) a *Lord Rayleigh* (1890), později mnozí jiní, hlavně *Grunmach* (od r. 1899—1909 mnohé práce), také na roztavené kovy a ztužené plyny, kde jiné methody selhávají. *Dorsey* užil jí dokonce k stanovení hraničního napětí mezi dvěma kapalinami. Vlnky vzbuzují se hroty na ladičce upevněnými a povrchem kapaliny procházejícími. Při tom Němci užívali po výtce vlnění stojatého, pomocí hrotů na obou ramenech ladičky vzbuzeného, Angličané většinou vlnění postupného měřeného za intermittujícího osvětlení o stejné periodě. Stojaté vlnky na rtuti dají se snadno v projekci odrazem ukázati *).

§ 425. **Pohyby podmíněné kapillaritou.**

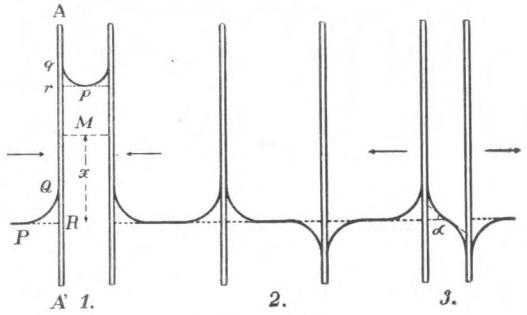
Zákony v předešlých odstavcích odvozenými vysvětlují se přečetné zjevy, jež pozorujeme v přírodě i v denním životě. Kapillaritou vystupují šťávy v rostlinách do výše právě tak, jako vlhne suchý písek na vlhkou půdu nasypaný aneb jako se vlhkost táhne ze základů do zdí, když není proti tomu učiněno zvláštní opatření (krytí látkami, jimiž voda neproniká na př. deskami olověnými). Sem náležejí známé úkazy u nádoby průlinčité, houby, knotu lamp, atd. V konických trubičkách pohybuje se kapka vody směrem k užšímu, kapka rtuti směrem k širšímu konci (obr. 382.),



Obr. 382.

*) K methodám měrným v kapillaritě a jich výsledkům srovnej článek *B. Kučery*: Přehled nejnovějších prací v oboru kapillarity, Živa, roč. 12, 1902, str. 1 a 36.

jak výraz pro tlak povrchový ihned vysvětluje. Když na povrchu kapaliny plují tělíska, která se buď omáčejí nebo ne, nastává v blízkosti též přitahování neb odpuzování. Úkazy tyto lze demonstrovati velmi dobře v projekci. Dvě jehly, položené na vodu, kterou se neomáčejí, přitahují se vespolek i z odlehlosti dosti značné, jako by byly magnetickými a hledí splynouti, ale odpuzují se tyčinkou skleněnou, která se v jich blízkosti do vody vnoří, poněvadž se tato omáčí. Dvě kuličky skleněné, duté, jež se obě omáčejí, přitahují se živě, také tíhnou ke kraji skleněné nádoby. Když se však na povrch vody opatrně položí na př. dva drátky z argentanu do úhlu spojené a když se taková kulička skleněná vloží do tohoto úhlu blízko k vrcholu, odpuzuje se živě od vrcholu dále ven. Podobně se přitahují neb odpuzují destičky skleněné, rovnoběžně na nitkách do kapaliny zapuštěné dle toho, zdali se buď obě anebo jen jedna z nich kapalinou omáčí neb neomáčí.



Obr. 383.

Důvod těchto pohybových zjevů nejlépe poznáme na posledním z uvedených příkladů. Představme si dvě blízké desky, které obě kapalina omáčí, tak že mezi nimi vystupuje vzhůru (obr. 383. 1). Uvažme, jakou silou ve směru horizontálním působí na desku AA' meniskus PQR. Kapalina menisku je v rovnováze. Směrem horizontálním v levo působí u P povrchové napětí, na jedničku délkovou rovné F. Na plochu PQ působí atmosférický tlak b silou, jejíž horizontální složka, směřující v pravo, jest táž, jako by působila na plochu QR, kdyby nebylo menisku PQR, tedy $b \,.\, \overline{QR}$. Vedle toho působí silou horizontální v levo deska AA' na meniskus; označme sílu na jedničku plošnou f. Celkem tedy, poněvadž jiných sil horizontálních není, jest podmínkou rovnováhy

$$b \,.\, \overline{QR} - F - f \,.\, \overline{QR} = 0$$

čili horizontální síla na desku AA', směrem v levo působící, jest

$$-f \,.\, \overline{QR} = F - b \,.\, \overline{QR}$$

nebo jinými slovy táž, jako by menisku nebylo a hladinou kapaliny bylo PR. Zcela podobně můžeme uvažovati u menisku pravého a u obou menisků hořeních. Celkem vidíme, že vzhledem k horizontálním silám můžeme předpokládati, jako by povrch kapaliny byl horizontální, daný tečkovanými čarami výkresu. Ze sil od menisků vzniká pouze dvojice sil. Ale uvnitř kapaliny mezi deskami v bodě M ve výši x nad horizontální hladinou jest tlak hydrostatický menší než tlak atmosférický, a to o obnos $x \,.\, s \,.\, g$, tedy také tlak na stěny ve výši x o tento obnos menší než z vnějška působící tlak atmosférický. Následkem toho budou tímto přetlakem z vnějška hnány desky dohromady, budou se zdánlivě přitahovati. Stejně dokážeme, že také dvě blízké desky, jež obě kapalina neomáčí, se přitahují. Máme-li dvě desky, z nichž jedna se omáčí, druhá ne, a jsou-li tyto desky od sebe vzdáleny tak, že mezi nimi jest část rovinného horizontálního povrchu (obr. 383. 2), tu opakováním našich vývodů o meniscích na prvý pohled jest patrno, že na sebe navzájem nepůsobí. Přiblíží-li se však desky tak, že tangenta v inflekčním bodě, kde tedy součet křivostí jest nullový, svírá s horizontální rovinou nějaký úhel (obr. 383. 3), tu pro horizontální tah mezi deskami působí pouze komponenta povrchového napětí, tah vnější má převahu, desky se navzájem vzdalují. Může se ovšem státi, že když přiblížíme takovéto dvě desky navzájem příliš blízko, potlačí se bod inflexe, kapalina mezi deskami stoupne a nastane přitahování.

§ 426. Kapillární konstanty.

Veškeré rovnice, v předešlých §§ odvozené, psány jsou tak, jak toho vyžaduje absolutní osnova měr. Proto také číselné hodnoty jednotlivých veličin vyjdou z rovnic těch v jednotkách absolutních. Veličiny, jež v rovnicích těch zjevy kapillární charakterisují, jsou

$$K,\ H,\ F,\ hr.$$

Povrchový tlak K na povrchu vodorovném při zjevech kapillárních nikde neintervenuje, všude z konečného výsledku vypadne, a proto se z těchto zjevů nedá číselně určiti. Konstanta H jest $2F$. Součin hr kapillární elevace neb depresse v trubičce kapillární poloměru r jest rovněž pro určité látky (určité teploty) konstantou, dle rovnice

$$hr = \frac{2F \cos \vartheta}{sg},$$

a poněvadž značí rozměrově čtverec délky, označuje se krátce

$$hr = a^2.$$

Dle toho máme pro kapillaritu charakteristické konstanty dvě:

$$F,\quad a^2,$$

tyto vstupují do rovnice

$$a^2 = \frac{2F \cos \vartheta}{sg},$$

ve kteréž přichází jakožto další, avšak jimi již určená charakteristická konstanta, krajní úhel ϑ. V mnohých případech, na př. u vody a skla, alkoholu a skla a j., lze ostatně přibližně klásti $\cos \vartheta = 1$.

Ony význačné konstanty F a a^2 mají zvláštní jména, kteráž však různí autorové různě volili. Konstanta F, jejíž (právem) nejužívanějším jménem jest »povrchové napětí«, která by se však stejně význačně mohla jmenovati »specifickou energií volného povrchu«, zove se »konstantou kapillární« (Violle), jinak »konstantou kohese« (Quincke), také »koefficient kapillární«; označuje se též písmenou α. Konstanta a^2 zove se též »konstantou kapillární« (Poisson), nebo nejčastěji »specifickou kohesí« (Quincke); jinak se udává jako výška h kapillární elevace v trubičce kapillární poloměru jednotkového. Číselné hodnoty těchto konstant závisí na volbě jednotek. V absolutní soustavě měr jest určena konstanta F jednotkou $\frac{dyna}{cm}$, a^2 jednotkou cm^2. Veliký číselný materiál jest však založen na jednotkách starších, a to pro F na jednotce $\frac{váha\ mg}{mm}$, pro a^2 pak mm^2.

Přepočítávání údajů starších na soustavu absolutní jest proto velmi jednoduché, poněvadž váha milligrammu jest jen o 2% menší než dyna, a poněvadž $mm = \frac{1}{10}\ cm$. Přesněji jest poměr mezi vahou milligrammu a dynou dán číslem 0·981 (souvisícím s urychlením tíže na př. v Praze); k tomu přijde ještě koefficient 10, tak že převodní koefficient pro F jest 9·81. Převodní koefficient pro a^2 jest ovšem $\frac{1}{100}$. Těmito koefficienty násobíme tudíž údaje starší, abychom je převedli na absolutní soustavu měr. Dlužno však upozorniti, že v rovnicích příslušných odpadává faktor g intensity tíže, když se milligrammu užívá ve smyslu váhy.

§ 427. Některé výsledky číselné.

Kapillární konstanty různých kapalin zkoumány v mnoha pracích velmi četnými badateli dle různých method. Bohatý číselný materiál obsažen jest ve známých fysikálních tabulkách Landolt-Börnstein-Meyerhofferových (3. vydání, Berlín 1905), jakož i v kapitole o kapillaritě Winkelmannova: Handbuch der Physik (2. vyd., Lipsko 1908, sv. I. 2, str. 1119 a násl.) zpracované Pockelsem. Ve výsledcích těchto málo jest souhlasu; čísla pro povrchové napětí téže kapaliny za téže teploty liší se o několik procent. Faktor, který zde největší obtíže působí, jest úhel krajní. Proto snažíme se, kde jen možno, docíliti, na př. u skleněných kapillár, úplného omáčení kapaliny na stěně, čímž se ϑ stane nullou, poněvadž pak sloupeček kapaliny se pohybuje jako by v trubičce z ní samé zhotovené. *Quincke*

(1870—94) dlouho hájil názor, že se omáčení vodou nejlépe docílí u kapillár právě vytažených, kdežto *Volkmann* v mnohých pracích (1882—98) dokazuje, že lépe jest kapilláry po dlouhou dobu (i léta!) vyplachovati vodou. Mimo to u vody a rtuti jeví se značná závislost povrchového napětí na stáří povrchu, s nímž klesá, patrně následkem povrchových změn prachem, absorpcí vzduchu, oxydací a p.

V násl. tabulce podána jsou pro vodu čísla Volkmannova a výběr údajů pro jiné kapaliny.

Látka	Teplota	a^2 mm^2	$\frac{F}{\frac{váha\ mg}{mm}}$	Látka	Teplota	a^2 mm^2	$\frac{F}{\frac{váha\ mg}{mm}}$
Voda	0°	15·387	7·693	Aether	0°	5·434	1·971
	5	15·266	7·633		20	4·916	1·737
	10	15·109	7·552		35	4·526	1·562
	15	14·969	7·478	Benzol	15	6·817	2·877
	20	14·833	7·403	Meth.-alk.	20	5·94	2·34
	25	14·694	7·325	Anilin	17·5	8·78	4·49
	30	14·552	7·245	Olivový olej	20	7·68	3·52
	40	14·29	7·09	Petrolej amer.	18	7·92	3·00
	60	13·71	6·84	Toluol	17·5	6·72	2·90
	100	12·58	6·04	Kyslík	−182·7	2·304	1·332
Alkohol	0	6·062	2·585	Dusík	−195·9	2·153	0·867
	20	5·776	2·409	Rtuť	18°	7·60	51·5
	40	5·490	2·233		17°	7·21	48·8
	60	5·204	2·057				
	78	4·948	1·898				

Jak je patrno z tabulky, ubývá povrchového napětí s rostoucí teplotou, a to v menších rozmezích lineárně. Za temperatury kritické stává se povrchové napětí nullou, což *Knipp* (1900) u vody přímo ukázal. Údaje pro rtuť, v tabulce uvedené, značně se liší; důvod je ten, že prvé číslo získal *G. Meyer* (1898) methodou oscillací na paprsku rtuťovém, tedy u povrchu neustále se obnovujícího, kdežto hodnotu druhou obdržel *Stöckle* (1898) měřením zakřivení na kapce rtuťové. V tomto případě má s počátku povrchové napětí hodnotu vyšší, jíž neustále ubývá následkem absorpce vzduchu. U vodních roztoků solí roste povrchové napětí přibližně úměrně s koncentrací (*Quincke*). Když se ve vodě rozpouští (absorbují) plyny (vzduch), zmenšuje se naopak povrchové napětí, nejvíce absorpcí kyslíku.

Eötvös (1886) zavedl pojem molekulární energie povrchové. Je-li v specifický objem, M molekulovou vahu, je Mv objem 1 gramm-molekuly, t. j. objem tolika grammů látky, kolik obnáší její molekulární

váha, nebo krátce objem molekulový. Výraz $(Mv)^{2/3}$ lze pak analogicky nazývati molekulovým povrchem, a součin $F.(Mv)^{2/3}$ molekulovou povrchovou energii. *Eötvös* empiricky nalezl, že klesání molekulové povrchové energie s temperaturou jest stálé a u mnoha látek se děje dle téhož zákona; mathematicky vyjádřeno

$$-\frac{d}{dt}\left(F M^{2/3} v^{2/3}\right) = k,$$

kde k nezávisí na teplotě a u velmi mnoha kapalin se rovná 0·227, je-li F vyjádřeno v jednotce $\frac{\text{váha } mg}{mm}$, nebo 2·22, je-li F dáno v $\frac{dyna}{cm}$, čili $\frac{erg}{cm^2}$. Poněvadž za teploty kritické t_k mizí povrchové napětí, musí

$$F.(Mv)^{2/3} = k\,(t_k - t).$$

Vskutku u mnohých kapalin platí tento vztah; ještě lépe vyhovuje (*Ramsay* a *Shields*, 1893)

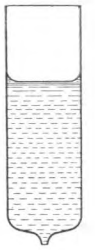
$$F\,(Mv)^{2/3} = k\,(t_k - t - 6).$$

Fysikální chemikové soudí u případů, kde k je menší nebo větší než ca. 2·1 až 2·2 na polymerisaci (associaci) či dissociaci dotyčných kapalin. Zákon *Eötvösův* platí také dosti dobře u ztužených plynů.

§ 428. Povrchy anomální. Tloušťka blan.

Jak se již stala zmínka, klesne povrchové napětí vody velmi citelně i minimálním znečištěním. Nad to není takovéto povrchové napětí stálým, nýbrž závisí na velikosti povrchu. Můžeme totiž na př. nějakou hranou shrnouti s části povrchu znečištěniny a tím na jedné straně povrchové napětí zvýšiti, na druhé snížiti. Měření jeho děje se v tomto případě nejpohodlněji methodou odtrhování prsténce. Povrchy takovéto nazýváme *anomálními*. *A. Pockelsová* (1892—1902) zjistila, že k tomu, aby se 1 cm^2 povrchu stal anomálním, stačí 0·000118 $\frac{mg}{cm^2}$ olivového oleje, 0·000104 $\frac{mg}{cm^2}$ loje, 0·000123 $\frac{mg}{cm^2}$ kalafuny, 0·000076 $\frac{mg}{cm^2}$ mastixu. Kdybychom mohli předpokládati, že zůstane na př. olivový olej při tom koherentní vrstvou, což vzhledem k obdobným účinkům pevných látek je velmi pochybno, byla by její tloušťka ca. 1·3 . 10^{-6} *mm*. Klesání povrchového napětí vody při styku se vzduchem lze vysvětliti znečišťováním povrchu padajícími prášky; vskutku, zabráníme-li tomu, nemění se povrchové napětí čisté vody (*F. Nansen*: Vědecké výsledky norvéžské polární výpravy, sv. 10., 1900, *Pockelsová*, 1902). Totéž platí i o čistých roztocích solných nebo cukernatých; u roztoků organických látek, tuků a p., i potom v uzavření povrchové napětí spontánně klesá, což svědčí o tom, že látky ty hromadí se samy sebou na povrchu. Podobně u roztoků mydlinových jest povrchové napětí na povrchu zprvu skoro totéž jako u vody, ale brzo klesne asi na $^1/_3$. To, že povrch se stává anomálním znečištěním z vnitřka kapaliny, jest dle *Lorda Rayleighe* (1890) podmínkou k vzniku trvalé pěny, která u zcela čistých kapalin nikdy se netvoří. O otázce pěny a p. poukazujeme na velmi obšírné práce *Quinckeovy* (1902, 350 stránek v Drud. Ann.).

K anomálním povrchům lze počítati v jistém smyslu i takové, které jsou znečištěny parami, na př. aetheru, alkoholu a p. Snížení napětí tím způsobené pěkně ukazuje demonstrační, i pro projekci vhodný pokus *Dvořákův* (1901). Široká trubička vytažena jest v kapiláru pokud možno úzkou a krátkou (obr. 384.). Povrchové napětí udrží pak několik *cm* vysoký sloupec vodní. Jakmile pod otvor přidržíme plochou nádobku s aetherem nebo alkoholem, začne voda odkapávati z otvoru ven, což však hned pomine, vzdálíme-li se s nádobkou. To lze několikrát opakovati.



Obr. 384.

Již bylo uvedeno, jak tenounká vrstva olivového oleje — je-li to konsistentní vrstva vůbec — mění povrchové napětí vody. Z tloušťky takovýchto blan na povrchu vody a lamell samostatných vedeny byly různé úsudky o velikosti radia ϱ sféry molekulového působení. Musilo by totiž povrchové napětí u blan s klesající tloušťkou, počínaje od 2ϱ se státi proměnlivým. *Drude* (1892) optickou cestou a *Reinold* a *Rücker* (1877—93) vedle toho i z měření elektrických stanovili tloušťku t. zv. »černé skvrny« u lamell mydlinových na 17 . 10^{-6} *mm*, resp. od 12 do 22 . 10^{-6} *mm*. Ale tyto černé skvrny hraničí s vrstvami, u nichž tloušťka bezprostředně skočí na 45 až 96 $\mu\mu$ a musí tudíž jejich povrchové napětí býti stejné jako toto. Když lamellou prochází elektrický proud, tu přechází tloušťka její spojitě od 12 do 45 $\mu\mu$ a dále, ale po přerušení proudu ihned tyto přechodné vrstvy mezi černou skvrnou a 45 až 96 $\mu\mu$ zmizí. Z toho usuzují oba angličtí badatelé, že povrchové napětí u těchto přechodních tlouštěk je menší než buď za 45 nebo za 12 až 22 $\mu\mu$, tak že by s klesající tloušťkou klesalo, ale pak zase stouplo. Ostatně se zdá, že se toto periodické stoupání a klesání opakuje i dále, neboť dle *Johonnota* (1899 a 1906) se mikroskopicky dá zjistit v černé skvrně až i 5 vrstev různé tloušťky, které mají vesměs totéž povrchové napětí. Dle toho by ležel radius ϱ molekulární působnosti mezi 23 až 48 $\mu\mu$, vůbec by byl řádu ca. 50 $\mu\mu$. K témuž číslu dochází *R. A. Weber* (1901), dle něhož se stává napětí na povrchu vodním pokrytém vrstvou oleje konstantním, překročí-li tloušťka vrstvy 115 $\mu\mu$. Ovšem jsou všechny podobné spekulace velmi vágními, neznáme-li mikrochemii takových vrstev. Zdá se na př. býti jisto (*Quincke*, 1894 a 1900), že se hydrolysou vylučuje z mydlinových blan kyselina olejová ve vrstvě neznámé tloušťky. *Quincke* (1869) snažil se změřiti ϱ tím, že na skle srazil klínovitou, nesmírně teninkou vrstvu stříbra, a hledal, od které její tloušťky počínaje se stává krajní úhel stálým. Našel ca. 50 $\mu\mu$; u podobného pokusu se sklem, kollodiovou vrstvou a rtutí došel čísla 80 $\mu\mu$. Toutéž methodou došel nejnověji *Chamberlain* (1906) k hodnotě poloviční.

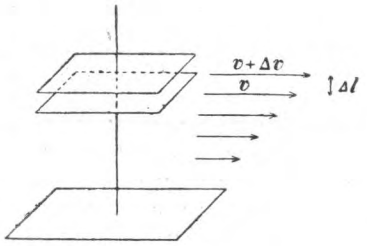
Vnitřní tření kapalin.

§ 429. **Pojem vnitřního tření.**

Jednajíce o proudění kapalin v trubicích, žlabech, v řečištích a pod. (§ 318.), upozornili jsme na úkaz, že rychlost proudění není v celém profilu stejnou, a že z toho důvodu jest nutno zaváděti pro výpočty rychlost průměrnou. Označili jsme též tření za příčinu tohoto úkazu. Kapalina lne ke stěnám; částečky kapaliny v té rovinné vrstvě, která přímo k rovinné stěně přiléhá, nepohybují se vůbec (obr. 385.); tím však zadržují také částečky ve vrstvách od stěny víc a více odlehlých, tak že zde rychlost proudění jen ponenáhlu od rychlosti nullové roste až k té rychlosti, jakáž jest určena daným tlakem. Příčinou toho jest vnitřní tření vrstev kapaliny. Mají-li dvě vrstvy plochy q v odlehlosti l a $l + \Delta l$ od stěny rychlost v a $v + \Delta v$, zadržuje vrstva dolejší vrstvu hořejší silou F, o níž můžeme předpokládati s Newtonem (Principia, kniha II., sekce 9.), že dána jest vzorcem

$$F = \eta q \frac{\Delta v}{\Delta l}.$$

Souvisí tudíž tato síla především s velikostí plochy stykové q; dále s rozdílem rychlostním Δv, avšak nikoli prostým, nýbrž vztahovaným na odlehlost Δl, ve které vzniká; poměrem $\Delta v : \Delta l$ určuje se tudíž rychlostní spád (gradient). Konečně souvisí ona síla F s povahou kapaliny samé; tato jest charakterisována konstantou η, která se zove *koefficientem vnitřního tření*, též *koefficientem viskosity* (vazkosti) nebo praegnantně *viskositou* kapaliny. Převratnou hodnotou $\frac{1}{\eta}$ vyznačuje se *fluidita* (tekutost) kapaliny *).



Obr. 385.

Z rovnice

$$\eta = \frac{F}{q} : \frac{\Delta v}{\Delta l}$$

vychází, že koefficient η udává sílu, kterou zadržuje jednotka plošná jisté vrstvy kapaliny jednotku plošnou sousední vrstvy při jednotkovém spádu rychlostním. Rozměr koefficientu jest tudíž

$$\frac{F}{L^2} : \frac{1}{T} = \frac{FT}{L^2} \text{ všeobecně}, \qquad \frac{dyna \,.\, sec}{cm^2} \text{ zvlášť.}$$

*) O vnitřním tření jedná přehledný spis: *M. Brillouin*: Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz (Paříž, 1907, dva svazky, stran 228 a 141).

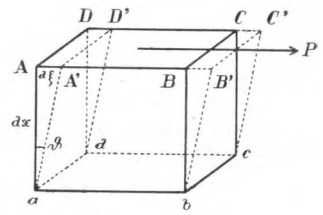
Starší data o koefficientu η zakládají se na jiné jednotce silové, za kterou se volila váha grammu; tato činí (pro Prahu) 981 dyn; proto je starší jednotka koefficientu η 981kráte větší, a tudíž čísla pro η na jednotce té založená 981kráte menší. Tak jest na př. pro vodu

$$\eta = 0{\cdot}0000106 \frac{\text{váha } g}{cm^2} \,.\, sec = 0{\cdot}0104 \frac{dyna}{cm^2} \,.\, sec.$$

V jednotce absolutní jsou tedy čísla přehlednějšími.

Koefficient η jakožto míra viskosity určité kapaliny zove se často *viskositou absolutní*. Vedle toho zavádí se (dle analogie tepelné vodivosti) *viskosita relativní* jakožto *poměr* mezi viskositou η kapaliny a viskositou η_0 vody nullstupňové; tato se pak klade $= 100$, t. j. viskosita libovolná udává se v procentech viskosity nullstupňové vody. Tím se obdrží čísla přehlednější. Místo relativní užívá se též názvu (ač méně vhodného) viskosita specifická (§ 62.).

Zákon nahoře uvedený jest hypothesou, kterouž dlužno zkoušeti. Tuto zkoušku lze provésti v těch případech, kdy vnitřní tření kapalin zvláště přichází k platnosti. Jsou to jednak výtok kapaliny trubicemi kapillárními, jednak kývání nebo otáčení těles pevných v kapalině kolem osy svislé. V obou těchto případech theorie, vycházejíc od onoho zákona základního, odvodí jeho důsledky, jež lze experimentálně zkoumati. Souhlasí-li pokus s theorií, jest to potvrzením onoho zákonu základního.



Obr. 386.

Podstata elementárního zákona o vnitřním tření znamenitě se objasní analogií mezi silou od viskosity a střižným napětím v tuhém tělese, analogií, na kterou prví poukázali *Poisson* a *Maxwell*.

Mysleme si z tělesa vyříznutý pravoúhlý rovnoběžnostěn (obr. 386.) o základně $abcd = ABCD$ rovné jedničce plošné a výšce $\overline{Aa} = dx$. Aby nastalo horizontální posunutí hoření vrstvy o $\overline{AA'} = d\xi$, odpovídající střižnému úhlu ϑ, musí působiti tangenciální síla (na jedničku plošnou) $P = n \,.\, \vartheta$, kde n je střižný modul. Ale, jak z obrazce patrno, poněvadž úhel ϑ je velmi malý, jest

$$\frac{d\xi}{dx} = tg\, \vartheta = \vartheta,$$

a tudíž síla na jednotku plošnou

$$P = n \frac{d\xi}{dx}.$$

Souvisí tedy střižná síla se střižným posunutím stejně jako síla od viskosity s rychlostí. Můžeme si mysliti, že viskosní kapalina je látka, která vydrží střih až do určité malé míry, a potom mu povolí, tak že vrstvy se dostávají do pohybu. Rychlost, se kterou střih mizí z látky, jest $-\frac{d\vartheta}{dt}$, kde t je čas; můžeme z analogie s jinými zjevy předpokládati, že tato rychlost jest úměrná ještě zbývajícímu střihu, tak že $-\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda\vartheta$, kde λ jest jistá konstanta. Má-li v proudící viskosní kapalině býti stav ustálený, stacionární, musí rychlost, se kterou střih mizí, býti táž jako rychlost, se kterou se střih znovu dodává. Poněvadž jest střih $\vartheta = \frac{d\xi}{dx}$, jest rychlost, s níž se dodává $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2\xi}{dx\,dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dt}\right) = \frac{dv}{dx}$, neboť $\frac{d\xi}{dt}$ není než relativní rychlost v pošinování hoření vrstvy oproti dolení. Dle toho, co bylo řečeno, jest tedy $\frac{dv}{dx} = \lambda\vartheta$ a tangenciální síla

$$P = n\vartheta = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

V obdobném výraze pro tangenciální sílu (na jednotku plošnou) od viskosity bylo $F = \eta \frac{dv}{dx}$, tak že přijmeme-li tento obraz zjevu, t. j. pokládáme-li za příčinu vnitřního tření rigiditu látky, je $\eta = \frac{n}{\lambda}$. Koefficient $1/\lambda$, jenž má dimensi času, zove se časem *relaxačním*; měří totiž dobu, které je potřebí, aby střih zmizel z media. To jest patrno z integrace vztahu

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\lambda\vartheta;$$

jest totiž

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -\lambda \,.\, dt \text{ a } log\,\vartheta - log\,C = -\lambda t, \quad \text{čili} \quad \vartheta = Ce^{-\lambda t}.$$

Integrační konstantu C určíme z podmínky, že v čase $t = 0$ byl počáteční střih $\vartheta = \vartheta_0$, tak že v každém okamžiku

$$\vartheta = \vartheta_0 \,.\, e^{-\lambda t}.$$

Měříme-li tedy časový průběh, jak mizí střih z látky tuhé nebo rosolovité, když střižné síly přestanou působiti, můžeme i u takovýchto látek zavésti a změřiti koefficient vnitřního tření dle relace $\eta = \frac{n}{\lambda}$. (Na př. *Reiger* (1901) u kalafuny a gelatiny.)

Dle tohoto názoru jeví se tekutina limitou tuhého tělesa; koefficient vnitřního tření u gelatinovitých až pevných látek jest ovšem 10^8 až 10^{18} kráte větší než u vody nebo jiných jí podobných kapalin.

§ 430. Proudění kapaliny kapillárou.

Proudí-li kapalina tlakem P (na jednotku plochy vztahovaným) v úzké trubičce délky L a konstantního poloměru R, a je-li proudění ustálené, můžeme si v myšlenkách představiti kapalinu rozloženou kolem osy trubice ve vrstvy válcové, jež se podél této osy pošinují. Vrstva na stěnu přiléhající, k níž kapalina lne, má rychlost nullovou; odtud rychlost vrstev stoupá, až jest v ose trubice samé největší. Jsou tedy mezi vrstvami sousedními rozdíly rychlostní, jest zde rychlostní spád, tudíž podmínka tření. Stationární stav pohybu jest právě tím podmíněn, že tření tou měrou pohyb zadržuje, jako jej tlak daný urychluje; odtud rychlost v každé vrstvě konstantní. Theorie vycházejíc od těchto představ a od základní rovnice (differenciální) odvozuje rovnici výslednou (integrální), určujíc objem kapaliny za jednotku časovou vyteklé. Tento objem V určil (1842) *Poiseuille* *) pokusně vzorcem

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{L} \frac{P}{\eta},$$

v němž místo $\frac{\pi}{8\eta}$ psal konstantu. Vzorec tento nelze srovnávati se vzorci, jež byly v § 318. pro výtok širšími trubicemi odvozeny; neboť tam bylo tření zcela jinak vzato v počet, totiž jakožto ztráta tlaková, kdežto zde jest P tlakem plným a tření jest vyznačeno koefficientem η. Tam se tlak P zjednal hydrostaticky, kdežto zde tlak P může býti zjednán způsobem jakýmkoli, na př. stlačeným vzduchem, pístem anebo (u srdce) tlakem svalovým. Povaha kapaliny jest ve vzorci Poiseuillově stanovena právě koefficientem η, nepřichází tudíž ve vzorci hmota specifická, jako v základním vzorci (§ 311.) pro pohyb kapalin.

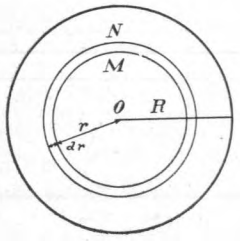
Je-li tlak P dán hydrostaticky, tlakem sloupce kapaliny o specifické hmotě s a výšce H, dlužno psáti

$$P = Hsg,$$

kdež jest g intensita tíže na místě pozorovacím.

*) Jean Poiseuille, proslulý fysiolog v Paříži, studoval pohyb kapalin velmi úzkými trubicemi vzhledem ke kapillárám cevním při oběhu krve; žil v letech 1799—1869.

Elementární odvození *) zákona Poiseuillova lze vésti následovně: Představme si kruhový průřez kapilláry o poloměru R. Dle svrchu zmíněné představy musíme předpokládati, že se částice kapaliny pohybují rovnoběžně s osou, tak že jejich rychlost v ve vzdálenosti r od osy (obr. 387.) jest funkcí pouze této vzdálenosti r. V jiné vzdálenosti $r + dr$ od osy jest rychlost jiná, menší, $v + dv$, tak že gradient rychlosti jest $\frac{dv}{dr}$. Tangenciální síla, účinkující na plošnou jednotku válcového pláště, jest $\eta \cdot \frac{dv}{dr}$. Mysleme si druhý kolmý řez kapillárou ve vzdálenosti dl před plochou nákresnou. Plášť válce M má plochu $2\pi r \cdot dl$, tak že celkem naň účinkuje tangenciální síla $\eta \cdot 2\pi \cdot dl\, r \frac{dv}{dr}$. Na plášť válce N o poloměru $r + dr$ působí podobně síla



Obr. 387.

$$\eta \cdot 2\pi \cdot dl\, r \frac{dv}{dr} + \eta \cdot 2\pi \cdot dl \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) dr.$$

Prvá síla pohyb podporuje, druhá jej zdržuje. Celkem jest tedy síla pohyb zdržující dána rozdílem

$$\eta \cdot 2\pi \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) \cdot dl \cdot dr.$$

Má-li se pohyb v ustáleném stavu udržovati, musí existovati síla směrem osy působící, která pohyb podporuje a drží síle od vnitřního tření rovnováhu. Tato síla je dána tlakem, zpravidla hydrostatickým. Budiž jeho velikost v rovině nákresu p, v rovině ležící o dl před papírem $p + \frac{dp}{dl} \cdot dl$; předpokládejme dále, že jest tlak na celý průřez stejný, tedy nezávislý na r, závislý pouze na místě kapilláry, v němž jej měříme, tedy na l. Gradient tlakový nazveme Π, tedy

$$\frac{dp}{dl} = \Pi.$$

Na základnu meziválcí r a $r + dr$ působí tedy v rovině nákresu od tlaku síla $2\pi r \cdot dr \cdot p$ a v místě o dl vzdálenějším $2\pi r \cdot dr \cdot (p + \Pi \cdot dl)$. Přetlak musí vyvažovati sílu od vnitřního tření

$$2\pi r \cdot \Pi\, dr \cdot dl = \eta \cdot 2\pi \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dv}{dr}\right) dr \cdot dl$$

čili

$$\eta \frac{d}{dr}\left(r \cdot \frac{dv}{dr}\right) = r \cdot \Pi.$$

*) Theoretické vývody k tomuto i dalšímu § viz Koláček: Hydrodynamika (Praha 1899, str. 259 a násl.).

Poněvadž Π podobně jako tlak nezávisí na r, plyne dále

$$\eta \cdot r \cdot \frac{dv}{dr} = \tfrac{1}{2} r^2 \cdot \Pi + A,$$

kde A jest integrační konstanta.

Kdyby v rovnici

$$\eta \cdot \frac{dv}{dr} = \tfrac{1}{2} r \cdot \Pi + \frac{A}{r}$$

byla konstanta A konečná, tu pro $r = 0$ by bylo $\frac{dv}{dr} = \infty$, čili rychlost v ose musila by býti nekonečně veliká, čemuž tak není. Abychom vymýtili tuto neshodu, musí $A = 0$. Další integrací zbývající rovnice plyne

$$\eta \cdot v = \tfrac{1}{4} r^2 \Pi + B,$$

kde B jest nová integr. konstanta. K jejímu určení užijeme poznatku, že na stěnách kapilláry ($r = R$) kapalina vůbec se nepohybuje, že po stěně se neklouzá ($v = 0$). Z toho plyne

$$B = -\tfrac{1}{4} R^2 \Pi$$

a konečně

$$\eta \cdot v = \tfrac{1}{4}(r^2 - R^2) \cdot \Pi.$$

K určení gradientu tlakového Π předpokládejme, že na začátku trubice je tlak p_1, na konci pak p_2; máme tedy pro $l = 0$ $p = p_1$, pro $l = L$ $p = p_2$ a tedy

$$\Pi = \frac{dp}{dl} = \frac{p_2 - p_1}{L}$$

čili, nazveme-li přetlak mezi začátkem a koncem trubice

$$P = p_1 - p_2,$$

plyne výsledek

$$\eta \cdot v = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{R^2 - r^2}{L} \cdot P.$$

Pro měření veličinou vhodnější než v jest objem kapaliny, který projde za jednotku časovou průřezem kapilláry. Tento objem snadno se stanoví: Meziválcím mezi r a $r + dr$, kde jest rychlost rovna v, projde objem $2\pi r \cdot dr \cdot v$ za vteřinu, tedy celým průřezem objem V

$$V = \int_0^R 2\pi r\, dr \cdot v = 2\pi \frac{P}{4\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr$$

čili

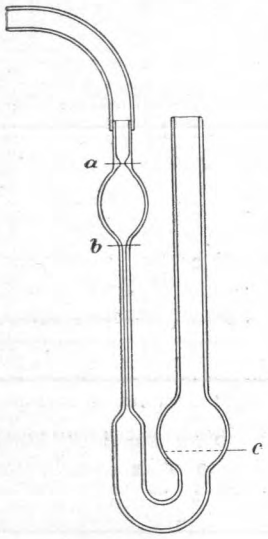
$$V = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{R^4 P}{L}.$$

To jest vzorec v textu uvedený. Zmenší-li se průměr kapilláry, neubývá vyteklého množství s plochou průřezu (R^2), nýbrž se čtvrtou mocninou radia.

Je-li přetlak P dán hydrostaticky výškou H kapaliny, jest $P = Hsg$; leč *Hagenbach* (1860) poukázal na to, že část práce tlakové spotřebuje se vedle práce proti viskovitě na zjednání kinetické energie kapillárou proudící kapaliny. Následkem toho, jak zcela elementární počet ukazuje, jest při přesných pracích zavésti místo H, korrigovanou tlakovou výšku

$$H^* = H - \frac{V}{\pi^2 R^4 g} = \frac{P}{sg}.$$

Vzhledem k platnosti vzorce, odvozeného pro výtokové množství, dlužno připomenouti, že předpokládá se pohyb vrstev rovnoběžný s osou trubice, což ovšem u místa vtoku a výtoku není splněno. Z tvaru proudových čar v těchto místech dala by se sice vypočítati příslušná korrekce, ale jest lépe užíti kapillár oproti průměru velice dlouhých, tak že lze korrekci tu zanedbati. Ovšem jest vliv tohoto zjevu velmi značný na př. u poměrně krátkých pórovitých otvorů při filtraci kapaliny papíry nebo porésními stěnami.



Obr. 388.

Při skutečném provádění absolutního měření vnitřního tření methodou kapillárních trubic nebo, jak se někdy též nazývá, methodou transpirační, nutno se postarati o přesné změření střední tlakové výšky. Užívalo se buď tlaku stálého (pomocí Mariotteovy láhve), nebo velmi málo proměnlivého tím, že reservoir, z něhož kapalina vytéká, jest velmi široký, tak že niveau její během pokusu klesne velmi málo. Nutno též se postarati o přesné měření teploty kapaliny, resp. o udržování teploty thermostatem na určité stálé výši, ježto viskosita závisí u vysoké míře na temperatuře. Také rychlost kapillárou proudící kapaliny nesmí býti příliš velikou, poněvadž jinak nastává t. zv. turbulentní pohyb (viz níže). Konečně nesmí průměr kapilláry jíti pod jistou mez; za příliš nepatrných průměrů (řádově $^1/_{1000}\,mm$) nesmí totiž se zanedbávati tloušťka vrstvy kapaliny na stěně adherující, tak že potom jest vytékající množství menší, než by danému průměru odpovídalo.

K relativnímu měření velmi vhodnými jsou kapilláry tvaru *Ostwaldova* (Lehrb. d. allg. Chem. II. vyd., I. sv., str. 550) znázorněné v průřezu obr. 388., jež lze snadno ve vertikální poloze v thermostatu umístiti. Plní se určitým, vždy týmž objemem různých kapalin, tak voleným, aby před začátkem pokusu kapalina vyplňovala prostor nad značkou a až ku c. Měří se čas, který uplyne mezi průchodem menisku kapaliny od značky a k značce b. Poněvadž jest jedinou silou hnací hydrostatický tlak sloupců kapalinových vždy téže výšky, dá se snadno ukázati, že koefficienty vnitřního tření η a η' dvou kapalin o specif. hmotách s a s' jsou v poměru

$$\eta : \eta' = sT : s'T',$$

kde T a T' jsou doby průchodové.

§ 431. Jiné methody k měření vnitřního tření.

1. *Methoda Coulombova* (1798). Zavěsíme-li horizontální desku kruhovou na drátě a vychýlíme ji z rovnovážné polohy, koná torsionální kyvy, jichž amplitudy ubývá řadou geometrickou. Přirozený logarithmus poměru dvou za sebou následujících amplitud nazýváme, jak známo, logarithmickým dekrementem. Kývá-li deska v kapalině, zvětší se logarithmický dekrement o veličinu

$$\frac{\pi R^4}{2K}\sqrt{\frac{\pi}{2}\,sT\eta},$$

kde R jest poloměr desky, K její moment setrvačnosti, s specifická hmota kapaliny a T doba kyvu. Z tohoto vzorce vypočítané hodnoty η jsou větší než jaké dává methoda kapillár. Důvod leží, jak ukázal *König* (1887), v tom, že spolu s deskou kmitá také část okolní kapaliny, tak že se tím moment setrvačnosti K zvětšuje. Když vezmeme to v úvahu (*O. E. Meyer* 1887), vycházejí hodnoty souhlasné. *König* sám užíval místo desky zavěšené koule, neboť u této se stává výpočet snadnějším (viz *Koláček*: Hydrodynamika l. c.).

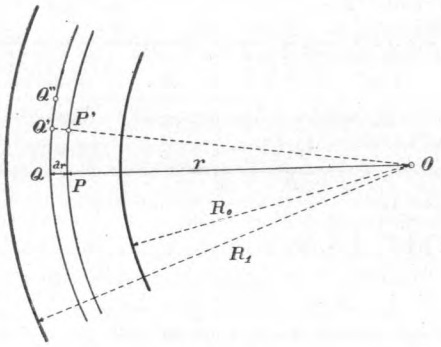
2. Jakýmsi obrácením methody Coulombovy, resp. Königovy, jest methoda, již užili *Helmholtz* a *Piotrowski* (1860), kteří měřili dekrement torsionálních kyvů duté, uvnitř zlacené koule, ve vzduchu kmitající a kapalinou naplněné; *Mützel* (1871) podobně užil dutého válce.

3. Další, v poslední době častěji užívaná methoda, jejíž myšlenka pochází od *Margulesa* (1881), spočívá v následujícím: Mysleme si dva koaxiální válce, mezi nimiž jest prostor naplněný kapalinou. Otáčí-li se vnější válec s jistou známou stálou rychlostí, působí následkem viskosity kapaliny na vnitřní momentem otáčivým určité velikosti, který lze — na př. bifilárním závěsem vnitřního válce — snadno stanoviti. Odvodíme zcela stručně výraz pro tento moment. Budiž (obr. 389.) R_0 poloměr vnitřního, R_1 poloměr vnějšího válce, který rotuje s konstantní úhlovou rychlostí Ω. Oba válce mějtež výšku h. V meziválcí, ve vzdálenosti r panuje určitá úhlová rychlost ω kapaliny, která jest funkcí tohoto r, jež pro $r = R_0$ dává $\omega = 0$, pro $r = R_1$ pak $\omega = \Omega$. Vezměme v úvahu kapalinu, která se nachází v meziválcí poloměru r a $r + dr$. Rychlost bodu P, t. j. $\frac{\overline{PP'}}{dt}$, jest $v_P = \omega r$. Kdyby ω nezáviselo na r, nýbrž bylo stálé, byla by rychlost bodu Q, t. j. $\frac{\overline{QQ'}}{dt} = v_Q = \omega\,(r + dr)$. Ale v bodě Q panuje úhlová rychlost $\omega + \frac{d\omega}{dr}\,.\,dr$, tak že skutečná rychlost bodu Q

jest

$$v'_Q = \frac{\overline{QQ''}}{dt} = (\omega + \frac{d\omega}{dr} \,.\, dr)\,(r + dr)$$
$$= \omega\,(r + dr) + \frac{d\omega}{dr} \,.\, dr\,(r + dr).$$

Prvý člen pravé strany odpovídá posunutí z Q do Q' v čase dt, čímž se vzájemná posice bodů P a Q nemění, jsouc táž jako P' a Q'. Vzájemné



Obr. 389.

posunutí bodů P a Q jest tudíž dáno délkou $Q'Q''$, a vzájemná jich rychlost v druhým členem pravé strany, a její gradient

$$\frac{dv}{dr} = r \,.\, \frac{d\omega}{dr},$$

neboť člen s $(dr)^2$, jakožto nekonečně malý druhého řádu, můžeme vynechati.

Působí tudíž na vnitřní stranu našeho meziválcí otáčecí moment od vnitřního tření, jenž se rovná: síla × poloměr = η × plocha × gradient rychlosti × poloměr, nebo nazveme-li jej C, mathematickými symboly

$$C = \eta \,.\, 2\pi r \,.\, h \,.\, r\,\frac{d\omega}{dr} \,.\, r = \eta \,.\, 2\pi r^3 \,.\, h \,.\, \frac{d\omega}{dr}.$$

Ale náš prsténec rotuje v ustáleném stavu s rychlostí stejnoměrnou, nesmí naň tedy *celkem* působiti moment *žádný*, jinak by byl pohyb urychleným. Musí tudíž moment na vnitřním plášti, pohyb zpozdující, rovnati se momentu na plášti vnějším, pohyb urychlujícímu. Tak můžeme pokračovati od vnitřní plochy R_0 až k vnější R_1, u všech vrstev musí býti moment otáčecí stejný, tedy nezávislý na r. Tento moment jest současně momentem vnější plochy, jejž jí prací dodáváme, i vnitřní plochy na př. torsí závěsného bifiláru nebo drátu způsobeným.

Jednoduchou integrací hořeního výrazu plyne

$$\omega = -\frac{C}{2\pi h \,.\, \eta} \cdot \frac{1}{2r^2} + A,$$

kde A je integrační konstantou. Ježto víme, že při $r = R_0$ jest $\omega = 0$, plyne

$$A = \frac{C}{4\pi h \eta} \cdot \frac{1}{R_0^2}.$$

Ježto dále při $r = R_1$ je úhlová rychlost $\omega = \Omega$, máme definitivně

$$\Omega = \frac{C}{4\pi h \,.\, \eta}\left(\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_1^2}\right)$$

a otáčecí moment C, který měřením stanovíme

$$C = 4\pi h \,.\, \eta \,.\, \Omega\,\frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}.$$

4. Pohybuje-li se tuhé těleso viskosní tekutinou, lpí na něm nejbližší vrstvy její a sousední zdržují následkem vnitřního tření jejich pohyb. Nejdůležitější a nejjednodušší případ jest pohyb koule viskosní tekutinou za velmi malé rychlosti v. Sir George *Stokes* (1851) ukázal, že při takovémto pohybu vzniká síla pohybu odporující, rovná $6\pi\eta \,.\, R \,.\, v$, kde R jest poloměr koule. Sledujme, jak pokračuje na př. pohyb koule specifické hmoty S v tekutině specifické hmoty s, je-li jedinou silou pohyb způsobující váha koule $\frac{4}{3}\pi R^3 \,.\, (S - s) \,.\, g$. S počátku padá koule pomalu, síla od viskosity pro malé v jest malá; pohyb se zrychluje. Konečně může síla od viskosity, která se vzrůstající rychlostí také vzrůstá, dosáhnouti takové hodnoty, že vyrovnává se síle tíže. Patrně musí, aby tomu tak bylo, rychlost dostoupiti jisté *mezní, kritické* hodnoty V, tak že

$$6\pi\eta \,.\, R \,.\, V = \tfrac{4}{3}\pi R^3\,(S - s)\,g,$$

čili

$$V = \frac{2}{9}\,\frac{R^2\,(S - s)}{\eta} \,.\, g.$$

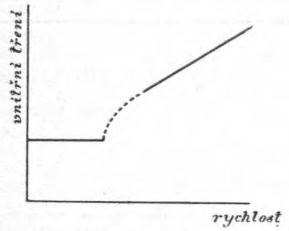
Dále ovšem zůstává pohyb stejnoměrným, neboť není již síly, jež by jej zrychlovala. Určíme-li kritickou rychlost a známe-li R, S a s, stanovili jsme tím i koefficient vnitřního tření η. Této methody bylo častěji užíváno k určení viskosity kapalin velmi vazkých, nejnověji *R. Ladenburgem* (1907) pro směsi kalafuny a terpentinového oleje, kde jest diskutován také vliv blízkých stěn nádoby.

Vzorec *Stokesův* platí ostatně také pro volný pohyb koulí ve vzduchu, který také, jako plyny vůbec, působí vnitřním třením. Pro případ vodní kapky poloměru $^1/_{100}$ *mm* najdeme ($\eta = 1{\cdot}8 \cdot 10^{-4}$) kritickou rychlost 1·2 *cm/sec*. V tom vidíme důvod, proč mračna, sestávající z velmi malých kapiček vodních, klesají velice pomalu. Nejdůležitější applikací Stokesova vzorce v novější době bylo opačně určení velikosti vodních kapek z rychlosti, kterou padaly vzduchem, v práci *Wilsonově*, v níž určoval elektrický náboj plynového iontu.

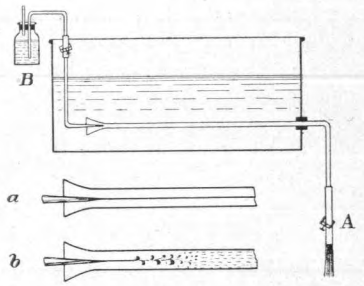
Kritická rychlost za daných S a s jest úměrna povrchu koule, tedy tím větší, čím větší koule jest. To lze velmi pěkně demonstrovati v projekci pozorováním stoupání bublinek vzduchových různé velikosti ve vodě nebo jiné kapalině, nebo padání kapiček olejových ve směsi alkoholu a vody.

§ 432. Užívání mazadel. Stav turbulentní.

Jak jsme se pojednávajíce o vlečném tření tuhých těles zmínili, užíváme k jeho zmenšení mazadel (olejů a p.). Tím mění se tření vlečné ve vnitřní tření kapaliny, která se mezi oběma tuhými plochami nalézá. Je-li jejich vzájemná rychlost V, vzdálenost d a velikost q, jest síla od viskosity η mazadla pohyb zdržující rovna $\eta \cdot \frac{V}{d} \cdot q$. Srovnejme zákony vlečného tření s tímto zákonem: Zde jest tření úměrno rychlosti, tam na ní nezávislo, zde jest úměrno ploše stykové, tam na ní nezávisí, zde závisí na tlaku, plochy k sobě pudícím, pouze potud, pokud se jím může měniti jejich vzájemná vzdálenost d, tam jest tlaku tomuto úměrno, zde závisí pouze na koefficientu vnitřního tření mazadla, tam jest úměrno koefficientu vlečného tření, jehož velikost jest podmíněna podstatou obou látek navzájem se troucích. Ovšem jest zákon náš pouhou prvou approximací; zvláště pak předpokládá, že neustále nachází se mezi plochami dostatek mazadla. Mimo to nesmí také vzájemná rychlost V překročiti jisté meze; stane-li se tak, roste tření rychleji než úměrně s rychlostí. Zcela podobný zjev nastává, když měříce koefficient vnitřního tření methodou Margu-



Obr. 390.



Obr. 391.

lesovou, zvyšujeme rotační rychlost vnějšího válce (*Couette* 1890). Počítáme-li z pokusu zmíněný koefficient, vychází nám s počátku hodnota stálá; překročí-li rychlost jistou mez, vzrůstá vypočítaná hodnota velmi rychle, jak jest naznačeno v diagrammatickém znázornění pokusů Couetteových v obr. 390. Zcela totéž platí i o pokusech s výtokem kapillárami (*Hagen* 1854, *Couette* 1890), kde výsledek pokusů jest podobnou křivkou dán. Příčina těchto zjevů jest, že za vyšších rychlostí nevyhovují proudové čáry kapaliny předpokladům v theorii učiněným, nezůstávají přímkami s osou rovnoběžnými v kapiláře, kruhy v pokuse Margulesově. Vznikají víry, nastává stav turbulentní. Toto tvrzení svoje dokázal *Osborne Reynolds* (1883 a 1895) pokusy znázorněnými obr. 391., jež lze velmi snadno demonstrovati. Do trubice, kterou vytéká voda, jejíž množství regulujeme tlačkou A, ústí v jemnou kapiláru vytažená trubička, jíž z reservoiru B přivádíme proud vody silně zbarvené. Pokud existuje stav normální (Francouzi zvou jej »Poiseuilleovým«), vidíme nitku zbarvenou táhnouti se vytékající kapalinou (a). Když rychlost překročí jistou mez, nastává stav turbulentní (»hydraulický«), nitka jeví pohyb vířivý a brzo zbarvuje vodu v celém průřezu trubice (b). Kritická střední rychlost (t. j. za vteřinu vyteklý objem dělen průřezem), za níž nastává stav turbulentní, jest dána v absolutních jednotkách asi číslem $1000 \cdot \frac{\eta}{s \cdot R}$, kde s jest specifická hmota a R radius trubice. Na délce trubice — předpokládaje trubice proti průměru dlouhé — nezávisí. Zcela podobné zjevy nastávají při výtoku plynů kapillárami (*W. Wien*, 1907).

Turbulentní stav může nastati a nastává také v okolí koule kapalinou padající. Pak ovšem přestává platnost vzorce Stokesova (*Lord Rayleigh* 1894). Pro kapky vodní ve vzduchu jest na př. hraničný poloměr, za něhož ještě vzorec lze applikovati, asi 0·1 *mm*. *Allen* (1900) ukazuje, že jest nutno rozeznávati tři případy: 1. rychlost V velmi malá, odpor dle theorie Stokesovy úměrný V; 2. za větších rychlostí odpor úměrný přibližně $V^{1\cdot5}$; 3. rychlost značně větší kritické, pohyb turbulentní, odpor úměrný V^2. V tomto případě nezávisí odpor vůbec na viskositě kapaliny, což lze snadno dokázati na základě principu dimensí. Předpokládejme, že závisí odpor, jenž musí míti dimensi síly, na poloměru R kapky, spec. hmotě s kapaliny, koefficientu vnitřního tření η a na n-té mocnině rychlosti V, tak že jest úměrný výrazu

$$R^x \cdot s^y \cdot \eta^z \cdot V^n,$$

kde x, y a z neznáme. Dosadíme-li dimense, musí

$$L^x \cdot \left(\frac{M}{L^3}\right)^y \cdot \left(\frac{M}{L \cdot T}\right)^z \cdot \left(\frac{L}{T}\right)^n = M \cdot \frac{L}{T^2}.$$

Z toho plynou rovnice

$$y + z = 1$$
$$x + n - 3y - z = 1$$
$$-z - n = -2,$$

čili řešením

$$x = n, \quad y = n - 1, \quad z = 2 - n.$$

Je-li tudíž síla úměrna druhé mocnině rychlosti, V^2, t. j. $n = 2$, jest $z = 0$ a odpor jest úměrný $R^2 \cdot s \cdot V^2$, kdež vnitřní tření η vůbec nepřichází. Úměrnost s R^2 značí úměrnost s průřezem koule, úměrnost pak s $s \cdot V^2$ značí úměrnost s kinetickou energií tekutiny. Vydává se tudíž energie koule na turbulentní pohyb kapaliny, nikoli na přemáhání viskosity.

§ 433. Vnější tření kapalin.

Při odvození výrazu pro vytékající množství kapaliny i pro otáčecí moment u methody Margulesovy jsme předpokládali, že vrstva kapaliny, přímo se stěnou hraničící, zůstává na stěně lpěti, že její relativní rychlost proti stěně jest nullou. Byla by však možnou také představa, již zavedl *Navier* (1822), že kapalina i ve vrstvě bezprostředně s tuhou stěnou hraničící má jistou relativní rychlost V. Pak ovšem konsekventně jako u těles tuhých museli bychom předpokládati, že na kapalinu působí tangenciální

síla, zdržující její pohyb a úměrná ploše stykové q a rychlosti V, tedy rovná

$$f = \lambda q V;$$

faktor λ nazýván pak koefficientem vnějšího tření kapaliny. Vedle toho zavádí se poměr $\frac{\eta}{\lambda} = \gamma$, mezi oběma koefficienty vnitřního a vnějšího tření a nazývá se *kluzkostí* (Gleitungskoefficient, c. de glissement, c. of slipping). Kdybychom při dovození vzorce pro objem V za jednotku časovou vyteklého množství vzali ohled na kluzkost, vyšlo by nám místo vzorce v § 430. udaného obecněji

$$V = \frac{\pi . P}{8\eta L}(R^4 + 4\gamma R^3).$$

Zdali však vůbec někdy nastává klouzání kapaliny po stěně, zdali tedy někdy není $\gamma = 0$, není dodnes definitivně rozhodnuto. Ale většina novějších prací dochází k úsudku, že $\gamma = 0$. Nejspíše ještě mohli bychom klouzání předpokládati u kapalin, které stěnu neomáčí, jak tomu jest u dvojice rtuť-sklo. Ale i tu ukázala měření *Warburgova*, že klouzání nenastává, nebo že γ jest tak malé, že vliv druhého člene ve vzorci pro vyteklý objem proti prvému experimentálně úplně mizí.

§ 434. **Některé výsledky číselné.**

Z velmi četných měření vnitřního tření různých kapalin, jež sebrány jsou v citovaných již fysikálně-chemických tabulkách Landolt-Börnstein-Meyerhofferových (3. vyd., Berlín 1905), uvedeme zde tabulku koefficientů vnitř. tření v jednotkách absolutních pro vodu, aethylalkohol a aethylaether (dle měření *Thorpe-Rodgerových*, 1894) a rtuť (dle *Kocha*, 1881).

t	voda $\eta_t \frac{dyna}{cm^2} . sec$	alkohol $\eta_t \frac{dyna}{cm^2} . sec$	aether $\eta_t \frac{dyna}{cm^2} . sec$	t	rtuť $\eta_t \frac{dyna}{cm^2} . sec$
0	0·01778	0·01770	0·00286	— 21·4	0·01868
10	1303	1449	2585	— 18·1	1836
20	1002	1192	2345	0	1688
30	0·00798	0·009895	0·00212	10·1	1620
40	654	8275	—	16·7	1575
50	548	6975	—	99	1227
60	468	5915	—	154	1092
70	406	0·005045	—	196·7	1018
80	356	—	—	262·5	0·009615
90	316	—	—	314·7	9183
100	0·00283	—	—	340·1	0·008975

Jak z tabulky jest patrno, klesá vnitřní tření velmi značně s teplotou, z čehož vyplývá při měřeních nutnost držeti teplotu velmi přesně stálou. Jakožto interpolačního užívá se vzorce

$$\eta_t = \frac{\eta_0}{1 + at + bt^2}.$$

Aether má viskositu velmi malou; nejmenší dosud známou pak má tekutá kyselina uhličitá: 0·000925 za 5° C, 0·000539 za 29° (*Warburg* a *Babo* 1882) a tekutý vzduch 0·0033 za ca. — 180° (*Forch* 1900). Velikou viskositou vyniká čistý glycerin, kde také klesání se stoupající teplotou jest velmi prudké: 42·2 (2·8°), 13·87 (14·3°), 8·30 (20·3°), 4·94 (29·5°) (*Schöttner* 1878). Látky smolnaté neb balsámovité mají ovšem viskositu ještě daleko větší. Tak nalezl *Obermayer* (1877) pro smůlu (7°) číslo $2{\cdot}21 . 10^9$ a pro storax (balsám, 15°) číslo $1{\cdot}344 . 10^{11}$.

U roztoků vodních jest viskosita někdy větší, někdy menší než u čisté vody, za teplot vyšších však obyčejně větší.

Aby zde účinek rozpuštěné látky v rozpustidle dané teploty více vynikl, počítá se relativní viskosita vzhledem k viskositě vody *téže teploty*, dle schematu

$$\frac{\eta_t \text{ roztoku}}{\eta_t \quad \text{vody}}.$$

U roztoku cukru máme na př. při teplotě 20° a při různé koncentraci (dle hmoty, %) čísla 1·0245 (1%), 1·5644 (15%), 3·0674 (30%). Různé vzorce, které vyjadřují vztah mezi vnitřním třením a koncentrací roztoku, jakož i při směsích roztoků vztah jeho k složení, neuvádíme, poněvadž obor jejich platnosti jest velmi omezený, a mají pouze charakter vzorců empirických, jak přirozeno, tím lépe vyhovujících, čím více neurčitých konstant obsahují. O vnitřním tření solných roztoků a jich směsí jedná česká práce, kterou ve fys. ústavě čes. university provedl *Viktor Teissler* (Věstník král. čes. spol. nauk 1907, čís. V.).

Diffuse a osmosa kapalin.

§ 435. **Vymezení úkolu. Koncentrace.**

Jsou kapaliny, jako na př. voda a olej, kteréž se k sobě chovají passivně; i když je promícháváme neb protřepáváme, rozliší se od sebe opět úplně. Bližším zkoumáním ovšem vidíme, že kapalina A rozpustila v sobě malou část kapaliny B, a naopak B malou část kapaliny A, leč oba tyto roztoky jeví se jako oddělené vrstvy. U vody a oleje jsou navzájem rozpuštěná množství velmi nepatrná, téměř neurčitelná. Větší jsou na př. u alkoholu a oleje. U dvojice voda a aether, která se chová podobně, rozpouští se ve vodě asi 10% aetheru, v aetheru pak asi 3% vody. Tato vzájemně rozpuštěná množství se stoupající teplotou obyčejně rostou, tak že

se zdá, že za určité teploty více méně blízké teplotě kritické (viz Thermiku) nastává mísení úplné. Jiné dvojice kapalin jeví úplnou mísivost již za teplot obyčejných, tvoří, smíšeny byvše, kapalinu novou, vlastností jiných, jako na př. voda a alkohol, anebo jako voda a vodní roztoky rozmanitých solí anebo jako voda a kyseliny atd. Tato příbuznost jeví se zvláštním způsobem již při vzájemném styku; kapaliny vnikají totiž i bez mechanického napomáhání jedna do druhé, prostupujíce se navzájem i proti působení tíže. Dle toho, zda-li styk kapalin jest bezprostředním anebo zda-li se děje skrze pory nějaké pevné stěny, rozeznáváme *diffusi* a *osmosu* *) kapalin. Oba úkazy mají velikou důležitost ve fysiologii rostlin i zvířat pro výměnu látek a jsou i se stanoviska fysikálního i chemického velice zajímavými, poněvadž se zde účinek molekulových sil jeví způsobem nejpatrnějším.

V následujících statích budeme užívati pojmu koncentrace roztoku, proto je nutno jej definovati. Starší, nyní téměř opuštěný způsob udával hmotu látky rozpuštěné ve 100 dílech (dle hmoty) rozpustidla. Nověji udává se koncentrace procentuálně, a to dvojím způsobem: buď se určí, mnoho-li grammů rozpuštěné látky jest obsaženo ve 100 grammech roztoku, anebo, mnoho-li grammů rozpuštěné látky jest obsaženo ve 100 cm^3 roztoku. Je-li jednak m rozpuštěná hmota pevná, jednak M hmota, V objem a S specifická hmota roztoku, jest koncentrace dle způsobu prvého (dle hmoty) a druhého (dle objemu) udána zlomkem (v procentech vyjádřeným)

$$\frac{m}{M}, \text{ resp. } \frac{m}{V}.$$

Vzhledem k rovnici

$$M = VS \quad \text{jest} \quad S\frac{m}{M} = \frac{m}{V},$$

dle čehož lze údaje koncentrační obou způsobů přepočítávati. Nejnověji se zvláště v pracích fysikálně-chemických užívá dle Ostwaldova zavedení určení koncentrace roztoku jejich normalitou; normálním nazýváme roztok tehdy, když v 1 litru roztoku jest obsažena 1 gramm-molekula (§ 69.) (nebo, jak Ostwald se vyjadřuje, 1 *mol*) látky. Je-li v litru rozpuštěno n gramm-molekul, udává číslo n $\frac{\text{gramm-molekul}}{\text{litr}}$ koncentraci vzhledem k roztoku normálnímu. Dle toho, je-li $n > 1$ nebo $n < 1$, jest roztok koncentrovanější (sehnaný), nebo méně koncentrovaný (zředěný) oproti normálnímu.

*) Z latinského: diffundere, vlastně protékati, pak šířiti se skrze něco jiného, a z řeckého $\omega\theta\acute{\epsilon}\omega$ puditi, $\omega\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ ó popud. Mnozí užívají slova diffuse pro oba zjevy, rozeznávajíce diffusi volnou a diffusi skrze stěny čili osmosu.

§ 436. **Diffuse kapalin.**

Objasněme zjev, o který se jedná, příkladem typickým. Do vysoké, válcovité nádoby nasypeme na dno vrstvu drobných krystallů nějaké ve vodě rozpustné soli, na př. soli kuchyňské, anebo, abychom mohli okem, dle zabarvení, postup úkazu sledovati, skalice modré, načež dolejeme opatrně vody. V době nedlouhé rozpustí se tolik soli, až se ve výši krystallů utvoří ostrá vodorovná hranice mezi tmavomodrým nasyceným roztokem a čirou vodou. Ostré toto rozlišení, odůvodněné velkou hustotou (1·23) koncentrovaného roztoku, začíná se však během doby ztráceti; pozorujeme, že zabarvení se šíří v jemných odstínech ponenáhlu do výše, na důkaz, že proti zákonům hydrostatickým roztok soli vystupuje a vniká do vody. Sůl prochází tu z míst koncentrace větší na místa koncentrace menší.

Mysleme si tuto koncentraci C určenou dle objemu, totiž číslem udávajícím, mnoho-li (g) látky rozpuštěné se nalézá v jednotce objemové (cm^3). V každém horizontálním průřezu jest tato koncentrace stejnou, klesá však s odlehlostí l průřezu ode dna nádoby; je-li C v odlehlosti l, jest $C - \Delta C$ v odlehlosti $l + \Delta l$. Vzniká tudíž jistý *spád koncentrace*, stanovený poměrem $-\frac{\Delta C}{\Delta l}$, kdež přírůstek Δl pokládáme za velmi malý. Zavedeme-li tyto předběžné pojmy, můžeme základní zákon pro diffusi vyjádřiti takto: Množství M (g) soli, které za jednotku času projde vodorovným průřezem q (cm^2), jest úměrno tomuto průřezu a spádu koncentračnímu, jaký v tomto průřezu jest,

$$M = -kq\frac{\Delta C}{\Delta l}.$$

Konstantu úměrnosti k zoveme *koefficientem diffuse*. Rozměr její jest $\frac{L^2}{T}$ všeobecně, $\frac{cm^2}{sec}$ zvlášť. Jednotka časová »*sec*« je však zde velice krátkou, vzhledem k tomu, že diffuse pokračuje velmi zvolna. Proto se zde volívá za jednotku časovou den (86400 *sec*) tak, že se stanoví k v jednotce $\frac{cm^2}{den}$. Koefficient diffuse udává potom, mnoho-li grammů látky projde za jeden den každým čtverečným centi-

metrem určité vodorovné vrstvy, když zde spád koncentrační jest jednotkovým, t. j. když ve vodorovných vrstvách, o 1 *cm* vzdálených, rozdíl koncentrace dostoupí 1 grammu v každém cm^3 objemu. Někteří autoři užívají za jednotku časovou také hodinu.

Pokud diffuse trvá, mění se koncentrace v každém místě s časem. Závislost na čase snadno stanovíme. Nazveme směr, dle něhož v nekonečně dlouhém válci všude téhož průřezu q diffuse pokračuje, positivním směrem osy X-ové. Pak jest množství soli, které místem x za jedničku časovou v positivním směru projde,

$$M = - k \,.\, q \,.\, \frac{dC}{dx}.$$

Znamení záporné zde praví, že sůl tehdy prochází směrem kladným osy X-ové, když s rostoucím x koncentrace C klesá. V místě $x + dx$, vzdáleném o dx, jest pak koncentrace

$$C + \frac{dC}{dx} \,.\, dx.$$

a tudíž množství soli, procházející průřezem tím za jedničku časovou

$$M - dM = - k \,.\, q \,.\, \frac{d}{dx}\left(C + \frac{dC}{dx}\,dx\right).$$

Přichází-li tedy do objemu $q \,.\, dx$ mezi oběma průřezy M, vychází z něho $M - dM$ gramm soli, zvětší se tedy za jedničku času množství soli o

$$dM = k \,.\, q \,.\, \frac{d^2C}{dx^2}\, dx.$$

Dělíme-li toto přibylé množství objemem, dostaneme zvětšení koncentrace za jedničku doby

$$\frac{dM}{q \,.\, dx} = \frac{dC}{dt},$$

tak že konečně

$$\frac{dC}{dt} = k \,.\, \frac{d^2C}{dx^2}.$$

Kdyby koefficient diffuse k nebyl pro všechny koncentrace, a tedy také pro všechna místa stejný, bylo by všeobecněji, jak se snadno nahlédne,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{d}{dx}\left(k \,.\, \frac{dC}{dx}\right).$$

To je všeobecná differenciální rovnice pro diffusi. O jejím historickém vzniku budiž toto poznamenáno:

Již *Berthollet* (1803) poukázal na podobnost diffuse a vedení tepelného. Zákony vedení tepelného stanovil *Fourier* (1822), jenž ponejprv zavedl pojem spádu temperaturního. Analogicky stanovil pak *Ohm* (1825) zákony vedení elektrického, a zavedl podobný pojem spádu potenciálního. Týmž způsobem hleděl *Fick*, (fysiolog ve Würzburku), povzbuzen pracemi, jež před tím o diffusi provedl *Graham* (1850—1851), zjednati základní rovnici pro diffusi, položiv koncentraci na místo temperatury, spád koncentrační na místo spádu temperaturního a množství rozpuštěné látky na místo množství tepla. Tím obdržel konstantu diffuse jako veličinu analogickou vodivosti tepelné (1855). Vůbec hraje tato rovnice, zvaná někdy Fourierovým zákonem, v theoretické fysice význačnou roli. *Lord Kelvin* v pojednání: Five Applications of Fourier's Law of Diffusion (r. 1888, Math. and Physical Papers, Vol. III., str. 428, London 1890) ukazuje, jak vyjadřuje »diffusi« v širším slova smyslu, t. j. asi tolik, jako šíření se pohybu ve viskosní kapalině (C jest rychlost), uzavřeného el. proudu v homogenním lineárním vodiči (C je hustota proudová), tepla (C je teplota), látky v roztoku (C je koncentrace) a elektřiny v podmořském kabelu (C je el. potenciál). Integrace rovnice té není jednoduchou, zvláště pro omezené diffusní prostory, a děje se Fourierovými řadami. Nebudeme se jí zde zabývati, odkazujíce k velmi obsažné elementární knížce *Mellorově*: Higher Mathematics for students of chemistry and physics. (Londýn 1902, str. 374 až 384; také něm. překlad).

Poukážeme na jedinou konsekvenci: Spojíme-li nekonečný reservoir roztoku stálé koncentrace (na př. nasyceného) válcovitou trubicí s nekonečným reservoirem čistého (obnovovaného) rozpustidla, nastane po jisté době v trubici stav stacionární, koncentrace nemění se s dobou

$$\frac{dC}{dt} = 0 = k \,.\, \frac{d^2C}{dx^2} \quad \text{čili} \quad C = ax + b.$$

Je-li u ústí trubice $x = 0$ koncentrace nullou $C = 0$ a u druhého konce ve vzdálenosti l, tedy $x = l$, koncentrace stálá $C = C_0$, plyne

$$C = \frac{C_0}{l} \,.\, x,$$

t. j. koncentrace stoupá lineárně. Při tom ovšem prochází neustále stejnoměrně množství rozpuštěné látky z roztoku do rozpustidla, a to za jednotku časovou patrně

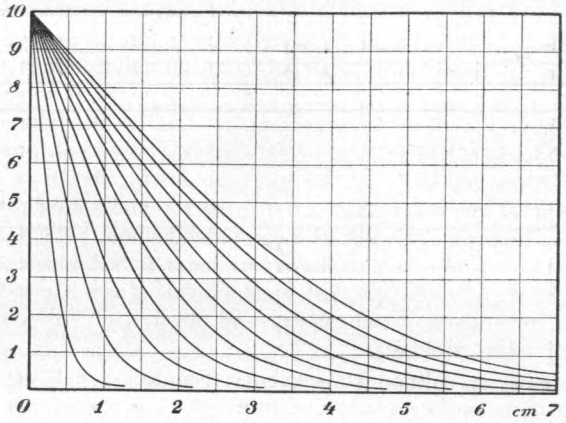
$$M = k \,.\, q \,.\, \frac{dC}{dx} = k \,.\, q \,.\, \frac{C_0}{l}.$$

Podobně jest tomu s teplotou u nekonečné stěny, jejíž obě strany se nacházejí na různých teplotách, nebo s potenciálem podél drátu spojujícího póly článků.

O časovém postupu, jakým se děj diffuse odehrává, když ze zdroje stálé koncentrace pokračuje v čistém rozpustidle, poučují nás křivky vzaté ze jmenovaného již pojednání Kelvinova, reprodukované obr. 392.

Hladina stálé koncentrace 10 odpovídá abscisse nullové. Ordináty značí koncentraci ve vzdálenosti od oné hladiny dané příslušnými abscissami. Časy, které uplynuly od počátku diffuse, jsou úměrny druhým mocninám čísel křivek; odpovídá-li tedy prvá křivka stavu věcí po čase T, odpovídá druhá času 2^2T, třetí času 3^2T atd. Pro tutéž ordinátu jsou abscissy křivek 2, 3, 4 ... 2-krát, 3-krát, 4-krát ... větší než na křivce 1. Tedy časy potřebné k diffusi danou délkou jsou kvadrátům délky úměrny. Pro diffusi

modré skalice vodou je $T = 25700$ vteřin, cukru vodou 17100 vteřin a kuch. soli vodou 5390 vteřin.



Obr. 392.

Za další příklad, jak pomalu diffuse pokračuje, uvádíme, že kdybychom naplnili trubici 10 *m* dlouhou z polovice roztokem modré skalice, z polovice čistou vodou, trvalo by za obyčejné teploty déle desíti let, než by se stal roztok homogenním.

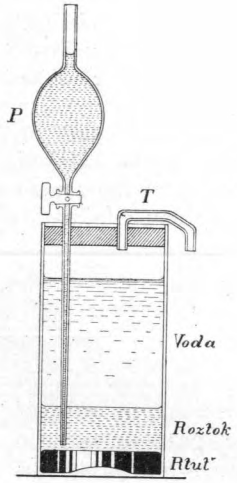
§ 437. Methody k stanovení diffuse.

Měření diffuse spojena jsou s velikými obtížemi. Především má veliký vliv teplota, a proto nutno zaříditi měření tak, aby po dlouhou dobu, které vyžadují, zůstávala pokud možno stálou. Náhlé, byť i nepatrné změny teploty, jako v thermostatech nastávají, škodí následkem mechanického promíchávání dle spec. hmoty více, než změny i větší, ale velmi pomalé. Nejlépe je užíti velikých reservoirů vodních ve sklepích. Druhá, velmi těžko překonatelná závada jest, vystříci se během určování koncentrace v jednotlivých vrstvách jich mechanickému promíchání.

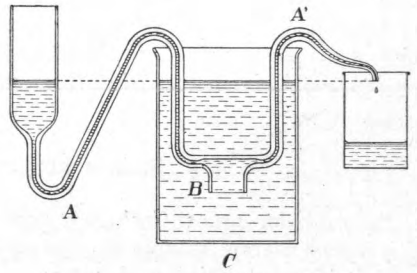
Prvý, kdo měrně zkoumal volnou diffusi, byl *Graham* (1850). Ponořil malou nádobku, vrchem naplněnou roztokem, do veliké nádoby s vodou. Po nějaké době nádobku vyňal a stanovil, mnoho-li látky rozpuštěné z ní přešlo do vody. Druhá jeho methoda, později často užívaná (na př. *Arrhenius* 1892), jest znázorněna obr. 393. Do válcovité nádoby, jejíž dno, aby bylo přesně horizontálním, jest pokryto vrstvou rtuti, zasahá téměř k hladině rtuti pipeta *P* s kapillárním koncem. Nádoba naplní se nejprve do určité výše vodou, pak se pod ní pipetou opatrně vpraví vrstva roztoku, a pipeta se opatrně vytáhne. Když byla diffuse po dostatečně dlouhou dobu (několik dní) působila, vpraví se pipeta v původní posici a opatrně nalévaným nitrobenzolem se jednotlivé vrstvy trubičkou *T* vytlačí ven a jejich

složení se stanoví. Theorii pokusů těchto podal *Stefan* (1879); z ní plyne složitý výraz pro koefficient diffuse.

Fickovy (1855) pokusy byly konány tím způsobem, že byla válcovitá trubice, naplněná vodou a dole ukončená nádobou, v níž udržován nadbytkem soli roztok koncentrovaný, postavena do veliké nádoby s vodou. V trubici nastal stav ustálený, gradient koncentrace stálý (viz předchozí §). Tento gradient, resp. koncentrace v různých vrstvách trubice, stanoven spec. hmotou, pomocí vztlaku malé kuličky skleněné na dlouhém drátě na jednom rameni vah zavěšené. Mimo to stanoven úbytek soli z dolení zásoby během určité doby. *W. Thomson* (*Lord Kelvin*) doporučil stanoviti spec. hmotu roztoku v různých místech dutými skleněnými kuličkami, jichž střední spec. hmota je regulována uzavřenou kapičkou rtuťovou, olovem a pod., a které se v místech své střední spec. hmoty v roztoku vznáší.



Obr. 393.



Obr. 394.

Jednoduché methody k stanovení relativních hodnot koefficientu diffuse užil na popud *Lothara Meyera Long* (1880). Čisté rozpustidlo probíhá velice pomaličku zvláštní trubicí *AA'* (obr. 394.) opatřenou otevřeným válečkem *B*, který jest ponořen v roztoku dané (stálé) koncentrace v nádobě *C*. V tomto válečku ustaví se stav rovnovážný, stálý gradient koncentrační, a stejnoměrně s časem uniká diffusí určité množství soli, které unáší se rozpustidlem trubicí *A'* a dá se snadno stanoviti.

Všechny dosavad popsané methody trpí mechanickým promícháváním jednotlivých vrstev. Toho prosty jsou jedině methody elektrické a optické. El. methody užil prvý *F. H. Weber* (1879), jenž stanovil koncentraci pomocí potenciální difference mezi roztokem a amalgamovanými zinkovými deskami. Spád koncentrační způsoben byl buď mechanicky, nalitím dvou roztoků různé koncentrace na sebe, nebo elektricky, elektrolysou původně homogenního roztoku. Ovšem trpí tato methoda tím, že potenciální diffe-

rence závisí na vedlejších okolnostech, jimž nelze se ubrániti, a které se s časem mění (*Seitz* 1898). Proto zkoušel *Niemöller* (1892) měřiti koncentraci el. odporem. Sem spadá také česká práce p. *F. Tomsy*: Hydrodiffuse elektrolytů, provedená ve fys. ústavě české university a uveřejněná v Rozpravách čes. akademie, tř. II., roč. XV., čís 22., 1906. Methodu optickou navrhli první *Simmler* a *Wild* (1857), později bylo jí častěji použito. Koncentraci lze měřiti buď indexem lomu, nebo u roztoků cukernatých otáčením roviny polarisační. Nejlepší methodou jest *Wienerova* (1893), již pracovali *Heimbrodt* (1904) a *Thovert* (1902), jež užívá toho poznatku, že světelný paprsek, prostupuje-li prostředí, v němž diffusí zjednán byl gradient indexu lomu, se kříví, a to i tehdy, vstupuje-li na př. horizontální paprsek do horizontální vrstvy diffusní; lze toto chování demonstrovati na př. v planparallelní nádobce, v níž diffusí alkoholu a síro-uhlíku, fluoresceinem zbarvených, takováto vrstva byla zjednána. Methoda Wienerova, jejíž krátký popis nalezne se i v *Kohlrauschově*: Lehrb. der praktischen Physik (Lipsko 1905), má také tu výhodu, že nevyžaduje dlouhých dob průběhu diffuse (stačí i hodina), a dále že z průběhu časového se dá stanoviti závislost koefficientu diffuse na koncentraci. Hodí se i k demonstraci objektivní. Spočívá v tom, že utvoříme čočkou obraz o 45° k horizontále nakloněné štěrbiny na stínítku. V cestu paprskům vsune se diffusní nádobka planparallelní. Obraz na stínítku dostane pak zvláštní tvar jakoby jakési vlny. Z vertikální distance minima od původního obrazu štěrbiny usuzuje se na velikost koefficientu diffuse, z postupu minima ve směru horizontálním na závislost jeho na koncentraci.

§ 438. **Něco z číselných výsledků.**

Již základní práce Grahamovy, a tím více methody pozdější, při nichž přesnost měření stoupla ze 3 až 5% na zlomky procenta, ukázaly, že nelze o koefficientu diffuse k mluviti jakožto o čísle charakterisujícím roztok vůbec. Jest totiž nyní zjištěno, že závisí na koncentraci; proto jest nutno v tabulkách tuto udávati. Mimo to není ani závislost na koncentraci pro všechny látky táž. *Heimbrodt* našel u HCl stoupání, u NaCl, močoviny a glycerinu klesání k se stoupající koncentrací, a to při roztocích zředěných velmi přibližně (mimo glycerin) dle zákona lineárního, tak že se zdá dosti oprávněným *Wiedeburgovo* (1890) rozšíření theorie Fickovy za supposice $k = K(1 + \varkappa . C)$, kde K a $\varkappa$ jsou konstanty, C koncentrace.

Následující tabulka obsahuje některé z výsledků *Oeholmových* (1904) pro k za teploty 18° a za různých koncentrací, určených normalitou roztoků. Aby byla čísla přehlednějšími, jest k v absolutní míře udané $\left(\frac{cm^2}{sec}\right)$ násobeno 10^7.

Vlivem teploty k velmi značně roste. *Nernst* (1888) z theoretických důvodů usoudil, že vzrůst u neutrálních solí je dán vzorcem

$$k_t = k_{18}\,[1 + 0{\cdot}026\,(t - 18)],$$

u kyselin a zásad pak

$$k_t = k_{18}\,[1 + 0{\cdot}024\,(t - 18)].$$

C normál	NaCl	KCl	LiCl	KJ	HCl	$C_2H_4O_2$	NaOH	KOH
0·01	135	169	116	169	269	108	166	220
0·1	129	161	110	161	258	102	158	215
0·5	125	156	106	159	253	99	152	213
1·0	124	154	106	158	257	96	149	215
2·0	—	153	107	—	—	—	146	219
4·2	—	—	111	—	—	—	—	—
5·5	123	—	—	179	—	—	—	—

Vskutku dle měření *de Heenových* (1884) i *Seitzových* (1898) leží temperaturní koefficient vzorců těchto mezi 0·024 a 0·028. Necháme-li diffundovati směs dvou solí, mění se rychlost diffuse přítomností druhé soli. Koefficienty k pro KCl a NaCl dle Grahama jsou v poměru 1·19 : 1, diffundují-li každá zvlášť, v poměru 1·47 : 1, diffunduje-li směs. Při tom se nezmění rychlost diffuse NaCl, kdežto diffuse KCl se uspíší. Také mnohé podvojné soli diffundují (*Rüdorff* 1888) jako směsi, tak že je lze diffusí částečně od sebe odděliti.

Graham pozoruje velmi značný rozdíl mezi rychlostí diffuse různých látek, rozlišil je ve dva druhy: krystalloidy, které diffundují rychle a k nimž patří veškeré soli, kyseliny a zásady obyčejné, a kolloidy (srv. § 67.), které diffundují velmi pomalu, a k nimž Graham čítá klih, dextrin, škrob, arabskou gummu, bílkoviny, karamel, mnohé oxydy kovů, kyselinu křemičitou a p. Ovšem není přechod od kolloidů ke krystalloidům náhlý, nýbrž téměř spojitý, jak ukazuje následující tabulka, kde prvá dvě čísla pocházejí z měření *Oeholmových*, ostatní ze *Stefanových* (1879).

Látka	Teplota	$k.10^7\,\frac{cm^2}{sec}$
Kys. solná ($n = 1$)	18°	257
Sůl kuch. ($n = 1$)	18°	124
Síran hořečnatý	10°	41
Arabská gumma	10°	15
Tannin	10°	12
Bílek	13°—15°	7·3
Karamel	10°—11°	5·4

Schumeister (1879) upozornil na to, že u solí se jeví jistý parallelismus mezi rychlostí diffuse, el. vodivostí a vnitřním třením. Měření

Longova (1880) u roztoků vodních a *Lenzova* (1882) u alkoholických, kde koefficienty diffuse jsou asi 2-kráte menší (*Kawalki* 1894 a 6), vskutku potvrdila, že větší rychlosti diffuse odpovídá větší el. vodivost.

Jest zajímavo, že rychlost diffuse solí ve vodě a v tuhých kolloidech (1—5% gelatině nebo agar-agaru) se mnoho neliší, jest téměř táž (*Graham* 1861, *Voigtländer* 1889). Diffuse v tuhých kolloidech hodí se dobře k demonstraci v přednáškách (*Kučera*), neboť lze zkoumavky i během processu diffuse dáti kolovati mezi posluchači. Rovněž lze velmi krásně tímto způsobem znázorniti diffusi zásady v gelatině s malým přídavkem fenolfthaleinu. Theorii diffuse v kapalině, opatřené indikátorem, podal *Stefan* (1889).

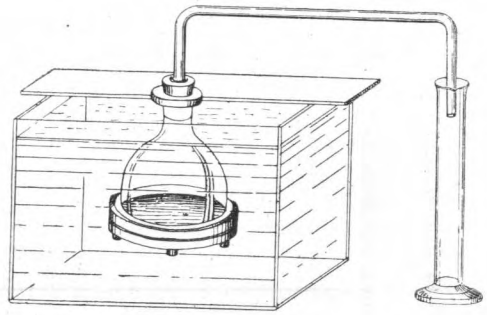
Sluší zde též poznamenati, že jako diffundují látky rozpuštěné ve vodě, alkoholu neb jiném rozpustidle, diffundují také kovy ve rtuti. Při tom má koefficient diffuse hodnoty téhož řádu jako u solí ve vodě; $k \cdot 10^7 \left(\frac{cm^2}{sec}\right)$ u Zn v Hg za 15° jest 231, u Cd (15°) 181, u Pb (15·6°) 159, u Au (11°) 83 dle měření *G. Meyera* (1897 a 8). Další mnohá měření o tomto thematu vykonal nejnověji *Wogau* (1907).

§ 439. **Osmosa kapalin.**

Poznání osmosy jest starší než diffuse a bylo učiněno náhodou. Abbé Nollet, chtěje při svých pokusech líh chrániti před vzduchem, nalil jej až na kraj cylindrické nádoby, obvázal neprodyšně měchýřem a ponořil pak do velké nádoby s vodou. Již po pěti hodinách zpozoroval s podivením, že líhu přibylo; měchýř se napial na venek tak silně, že, když jej propíchl, vytryskl paprsek kapaliny do výše mnoha stop. Nollet poznal, že tu měchýřem pronikla voda do líhu. Učinil ihned pokus obrácený. Nalil vody do podobné válcovité nádoby až na kraj, obvázal opět měchýřem a ponořil do větší nádoby s líhem. Vskutku se ukázalo, že nyní měchýř se napjal dovnitř, na důkaz, že voda ve větším množství vnikla do líhu, než líh do vody. První toto pozorování osmosy (1748) zůstalo však osamoceným; teprve *Dutrochet* *) (1827) ujal se předmětu toho; od něho pocházejí též názvy *endosmosa* a *exosmosa*, on také měřil změny objemové. Ve způsobu, jaký on zavedl, studujeme úkaz endosmometrem, v obr. 395. znázorněným. Nádobku, tvaru zvonovitého, jejíž dno jest nahrazeno pergamentovým papírem, šrouby těsně mezi pásky kaučukové upevněným (po případě blanou měchýřovou), naplníme na př. nasyceným roztokem skalice modré, abychom mohli průběh pokusu i okem sledovati, a vložíme do širší

*) René J. Dutrochet, lékař v Paříži, žil v letech 1776—1847, o diffusi uveřejnil několik pojednání v letech 1827—1835.

nádobky s destillovanou vodou tak hluboko, aby hydrostatický tlak na membránu s obou stran byl aspoň přibližně stejným. Na to otvor uzavřeme zátkou kaučukovou, kterou jest vedena trubička malého průměru ve způsobu v obr. znázorněném. V krátké době pozorujeme, že kapalina v trubičce této postupuje dál, až v kapkách po stěně malé mensury vytéká. Voda v širší nádobě zbarví se zcela nepatrně. Jest z toho patrno, že voda vniká pergamentovým papírem dovnitř ve větším množství, než roztok skalice modré na venek do vody; endosmosa vody je větší než exosmosa skalice modré.



Obr. 395.

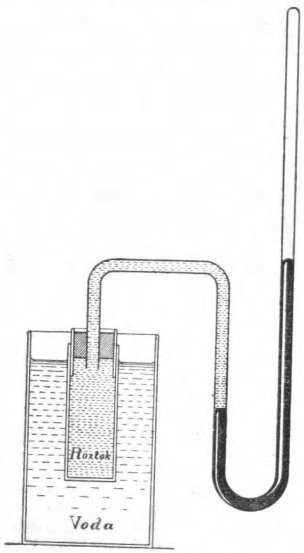
Jakýsi pokrok učinil *F. Jolly* zavedením pojmu endosmotického aequivalentu (1849); uzavřel dole měchýřem trubici skleněnou, do níž dával v roztoku odvážené množství jisté látky; trubici vnořil do vody a nahrazoval vodu stále čerstvou. Tak dosáhl konečně toho, že měchýřem veškerá látka prošla do vody, za to však opačně jisté množství vody vstoupilo do trubice. Jolly odvážil toto množství vody a přepočítal pak, mnoho-li grammů vody té přichází na jeden gramm látky před pokusem do trubice vložené. Tím obdržel číslo, jež nazval *endosmotický aequivalent*. Jolly měl za to, že tento aequivalent pro určitou látku jest konstantní. Za příklad buďtež uvedeny endosmotické aequivalenty některých látek.

Kuchyňská sůl . . .	3·8 až 4·6	síran hořečnatý . . .	11·5 až 11·8
Glauberova sůl . . .	11·0 » 12·4	alkohol	4·1 » 4·3
síran draselnatý . .	11·4 » 12·8	cukr	7·0 » 7·2

Ovšem ukázaly práce další, že endosmotický aequivalent není veličinou jen pro jistou látku význačnou, nýbrž že zde velmi značný, často rozhodující vliv má membrána sama. Často i jednotlivé kusy téže membrány dávají výsledek různý. Také vliv teploty jest velmi komplikovaný. Vůbec jest osmosa takovýmito zvířecími nebo rostlinnými blanami zjevem velmi složitým, daleko složitějším než diffuse volná, který těžko lze podřaditi určitým zákonům.

§ 440. Blány polopropustné. Osmotický tlak.

Velmi důležité a koherentní vztahy při zjevech osmotických byly nalezeny teprve použitím t. zv. *blan polopropustných* či *semipermeabilních*. Obyčejné membrány dovolují průchod i vodě jakožto rozpustidlu, i látce pevné ve vodě rozpuštěné. Lze však uměle utvořiti blánu, která propouští *jenom vodu* jakožto rozpustidlo, nikoli však rozpuštěnou látku. První takovou blánu zhotovil *Traube* (1867). Přijde-li roztok (3%) síranu mědnatého ve styk s roztokem (4%) ferrokyanidu draselnatého, utvoří se na stykové ploše jemná blanka ferrokyanidu mědnatého, která má tu zvláštnost, že propouští sice vodu, ale nikoli cukr třtinový, alespoň ne v množství s vodou srovnatelném. *Pfefferovi* (Osmotische Untersuchungen, Lipsko 1877) prvému se podařilo učiniti poloprostupnou blánu tak tuhou, aby vydržela vyšší tlaky, a to tím, že nechal ji vytvořiti se ve stěně pórovité nádoby (diafragmatu z nepálené hlíny). Když se taková nádoba naplní roztokem cukru třtinového mírné koncentrace (do 6%) a pak se všech stran uzavře až na manometrickou trubici se rtutí, a potom vloží do vody, vniká osmosou jen voda do oné nádoby, následkem čehož tlak stoupá (obr. 396.). Tento tlak se zove *osmotickým*. Ustálí se konečně na jisté výši, kterou lze na manometru odečísti. Uvedeme z pozorování Pfefferových následující tabulku, v níž udány jsou tlaky v millimetrech rtuti, pozorované pro roztoky cukru, jichž koncentrace jest udána v procentech, a kde jest přepočítán tlak všude na roztok jednoprocentní.



Obr. 396.

% cukru v roztoku	Tlak p mm Hg	$\frac{p}{\%}$
1	538	538
1	532	532
2	1016	508
2·74	1513	554
4	2082	521
6	3075	513
1	535	535

Z tabulky jest patrno, že osmotický tlak za stálé teploty je úměrný koncentraci, neboli jest obráceně úměrný objemu v, v němž jest určité množství látky rozpuštěno, tak že dospíváme k zákonu úplně obdobnému Boyle-Mariotteovu o plynech, $p \,.\, v = Const.$

Ještě lépe jest patrným souhlas z následujících čísel, jež pozorovali *Morse* a *Frazer* (1905), kterýmž se podařilo (1901 až 1905) elektrolyticky vyrobiti polopropustné blány v diafragmatech, jež vydržely tlak až do 30 atmosfér. V tabulce jest udána normalita roztoků cukrových, teplota, osmotický tlak v atmosférách; poslední sloupec, udávající tlak počítaný, jest vypočítán dle zákona van 't Hoffova (viz dále).

Normalita roztoku	Teplota	Tlak v atmosférách	
		pozorovaný	počítaný
0·05	20·8°	1·25	1·21
0·1	18·8	2·44	2·40
0·2	20 8	4·80	4·84
0·3	18·8	7·20	7·20
0·4	19·9	9·62	9·65
0·5	20·8	12·09	12·09
0·6	22·1	14·40	14·64
0·7	22·3	16·92	17·03
0·8	19·1	19·41	19·22
0·9	19·8	21·84	21·70
1·0	22·8	24·52	24·34

Velmi důležito jest uvědomiti si, že osmotický tlak nezávisí na povaze membrány, jen je-li tato vskutku polopropustnou. Stačí myšlenkový pokus: Mysleme si dutý prsténec, přepažený dvěma různými polopropustnými blanami, při čemž jeden prostor mezi nimi jest vyplněn roztokem, druhý vodou. Kdyby osmotický tlak u obou membrán nebyl týž, dostávala by se voda v prsténci do oběhu, vtékajíc v roztok u blány o větším tlaku, vytékajíc z něho u blány druhé. Tím by bylo installováno perpetuum mobile, dle věty o zachování energie nemožné.

Ovšem závisí tlak osmotický na teplotě. Uvedeme zase pozorování Pfefferova pro dvě různé koncentrace třtinového cukru a natriumtartrátu (vínanu sodnatého) za dvou různých teplot.

Látka	t	p poz.	p poč.	t	p poz.	p poč.
Cukr třtinový	32° 14°15	544 510	512	36° 15°5	567 521	529
Natriumtartrát	36°6 13°3	1564 1432	1443	37°0 13°3	983 908	907

Stoupá-li teplota, stoupá osmotický tlak. Hodnoty tlaku uvedené ve sloupcích p poč., jsou čítány ze vztahu

$$p_t = p_0 (1 + 0{\cdot}00367 \,.\, t),$$

jinými slovy, ze zákona Gay-Lussacova (Thermika § 48.). Vidíme, že v mezích chyb methody samé, velmi obtížné, jest také tento zákon splněn, jest tedy osmotický tlak úměrný absolutní teplotě.

Pro roztoky mnohých jiných látek — neelektrolytů — bylo to potvrzeno *Dondersem* a *Hamburgerem* (1890, jiné práce Hamburgerovy 1886—1905) tím, že ukázali, že roztoky, které jsou *isotonické* *), t. j mají týž osmotický tlak, za teploty 0°, jsou jimi i za 34°, t. j. stoupá tlak osmotický u všech stejným způsobem.

Užili k tomu červených krvinek, které jsou opatřeny semipermeabilní blanou, uzavírající červené barvivo krevní, kteréž samo má jistý osmotický tlak. Dáme-li je totiž do roztoku, který má osmotický tlak větší (hypertonického), tu se scvrkají, ale nepouštějí barviva. Dostanou-li se však do roztoku o menším tlaku osmotickém (hypotonického), bobtnají, až prasknou a vypustí barvivo, jímž roztok červeně zbarvují. Lze tedy pomocí této citlivé reakce vyhledávati roztoky isotonické. Jinak lze k tomu užíti methody *de Vriesovy* (1884 a 1888), který našel, že u buněk některých rostlin je protoplasma uzavřeno polopropustnou blanou, tak že, dostane-li se buňka do roztoku hypertonického, se blána ona s protoplasmatem stahuje — nastává t. zv. plasmolysa — ač vnější stěna zůstává nezměněnou. Konečně udal *Tammann* (1888) optickou methodu k poznání isotonickosti dvou membranogenů, t. j. roztoků polopropustnou blánu tvořících. Jeden z nich naleje se do nádobky s planparallelními stěnami a do něho se vpraví, eventuálně na malé sítko, kapka roztoku druhého, která se ihned pokryje blanou. Je-li vnější roztok hypertonický, vychází z kapky voda, která následkem menší spec. hmoty stoupá vzhůru. Je-li vnější roztok hypotonický,

*) ἴσος stejný, τείνω napínám, ἰσότονος stejného napětí (v akustice stejného tónu).

odchází v okolí kapky voda do ní, okolní roztok se stává koncentrovanějším a klesá ke dnu. Obojí zjev se v projekci Töplerovou methodou (Schlierenmethode) dá velmi krásně demonstrovati. Autor těchto řádků (*Kučera*) užívá od r. 1903 roztoků ferrokyanidu draselnatého a síranu měďnatého, jež pomocí přidané gelatiny (2—5%) nechá ztuhnouti. Také zde se vzrůst nebo scvrkání se kapek dá velmi snadno stopovati, tím snáze, že není se co obávati promísení se obou roztoků.

Zvláště pěkně jeví se různý tlak osmotický, nalijeme-li gelatinovaný roztok do široké zkoumavky, a když byl ztuhl, dolijeme roztok druhý. Na stykové hladině vytvoří se semipermeabla, která se během několika dnů směrem k roztoku hypotonickému vydouvá, a to velmi značně, zcela obdobně jako blána při pokuse Nolletově (*Kučera* 1903).

De Vries našel, že roztoky aequimolekulární, t. j. takové, které v určitém objemu obsahují týž počet gramm-molekul různých látek, tedy roztoky, jichž normalita je táž, jsou — pokud se jedná o neelektrolyty — isotonické za téže teploty. To můžeme vyjádřiti také tak, že díme: Je-li za jisté teploty v témž objemu (objemu roztoku) obsažen týž počet molekul různých látek, jest tlak osmotický týž. To však jest úplnou obdobou zákona Avogadrova o plynech. Na tyto analogie roztoků a plynů upozornil prvý *J. H. van 't Hoff* ve článku: Die Rolle des osmotischen Druckes in der Analogie zwischen Lösungen u. Gasen, uveřejněném v Zeitschr. f. physikalische Chemie, sv. 1., r. 1887, str. 481 a násl. Ale ukázal, že zde jest i další shoda. U plynů platí stavojevná rovnice (Thermika § 51.) $pv = RT$, kde p je tlak, v objem jedné gramm-molekuly plynu, T absolutní teplota a R t. zv. všeobecná konstanta plynová. Vyjádříme-li ji v absolutních jednotkách mechanických, plyne u všech plynů $R = 8{\cdot}31$ Joule. Vypočítejme u roztoků neelektrolytů, kde platí obdobný zákon $pv = R'T$, považujeme-li p za osmotický tlak, a v za objem roztoku, zde intervenující konstantu R'. *Pfeffer* našel, že 1% roztok třtinového cukru ($C_{12} H_{22} O_{11}$, mol. váha 342·2) jeví za 6·8° C osmotický tlak 50·5 *mm* rtuti. Tento tlak jest roven $50{\cdot}5 \,.\, 13{\cdot}596 \,.\, 981 \frac{dyna}{cm^2}$. Objem gramm-molekuly v, poněvadž u jednoprocentního roztoku je v 1000 cm^3 obsaženo 10 grammu cukru, jest 34220 cm^3; absolutní teplota jest 273 + 6·8 = 279·9. Výpočtem z $R' = \frac{pv}{T}$ plyne hodnota $R' = 8{\cdot}24 \,.\, 10^7$ *erg* = 8·24 *Joule*, tedy hodnota i číselně táž, $R' = R$, jako u plynů. Vzhledem k této shodě zákonů lze vysloviti všeobecně větu: Látky rozpuštěné působí v rozpustidle týmž tlakem jakožto osmotickým, kterým by při téže teplotě a při témž objemu působily jakožto plyny; nebo: jest jedno vzhledem ke tlaku, je-li prostor mezi molekulami látky rozpuštěné vy-

plněn rozpustidlem nebo je-li prázdný. To jest výsledek důležité práce *van 't Hoffovy.*

Pojem osmotického tlaku roztoku, ač se ovšem musíme na něj dívati jen jako na hypothesu pracovní, nabyl veliké důležitosti pro fysikální chemii. Nemůžeme se zde zabývati vývody, které jej spojují s theorií snížení bodu mrazu a zvýšení bodu varu u roztoků a jejich elektrolytické vodivosti. Jen některá sem spadající další fakta uvedeme.

Nernst (1888) a *Planck* (1890) podali theorii diffuse, založenou na pojmu osmotického tlaku v tom smyslu, že diffuse jest zjev, jímž různý osmotický tlak v různě koncentrovaných vrstvách se vyrovnává. Z této theorie dá se vyčísliti síla, která je nutná, aby se 1 gramm-molekula pohybovala rychlostí 1 *cm/sec* kapalinou, t. j. síla, které jest při tom k přemáhání tření v kapalině zapotřebí. Plynou pak pro tuto sílu čísla ohromná, na př. pro gramm-molekulu močoviny (t. j. 60-gramm CON_2H_4) 2500 milionů *kg*. Že síla jest tak ohromnou, nebo jinak, že zjev diffuse při poměrně velmi velikých tlacích osmotických jest tak pomalým, může se zdáti podivným. Ale vzpomeňme na analogii: Kámen spadne s výše 100 *m* ve vzduchu za méně než 5 vteřin; kdybychom jej však rozetřeli na nesmírně jemňounký prášek, padá tento vzduchem nesmírně pomalu, tak že mnoho hodin zůstane ve výši jako by suspendován. Důvodem zde i u zjevu diffuse jest, že rozdrobením v malé částečky nesmírně vzroste povrch hmoty a tím též síla odporová proti pohybu, od vnitřního tření okolního media pochodící.

Vzrůstem osmotického tlaku za zvýšení teploty vysvětluje se také t. zv. *zjev Soretův* (1881), že totiž v nádobě naplněné roztokem všude téže koncentrace, držíme-li její spodní část na teplotě nízké, hoření na teplotě vyšší, nastává diffuse rozpuštěné látky od míst vyšší k místům nižší teploty.

Dosud jednali jsme o osmotickém tlaku neelektrolytů. Ovšem že také elektrolyty — soli, které v roztoku činí vodu elektricky vodivou — jeví osmotický tlak, a to větší než neelektrolyty, tak že kdybychom počítali konstantu zákona van 't Hoffova pro tyto látky, vychází větší než u plynů, $R' = i \,.\, R$, kde $i > 1$. Z toho usoudil *Arrhenius*, později *Planck* a j., že elektrolyty v roztocích jsou částečně *dissociovány*, že některé molekuly jejich se rozpadly v samostatné částice menší, *ionty*. Chápeme-li pak osmotický tlak kineticky, totiž jakožto nárazy pohybujících se samostatných částic rozpuštěné látky v roztoku, vysvitne ihned, že dissociací osmot. tlak vzrůstá. Faktor i pak hraje velmi důležitou roli ve zjevech, o nichž jsme se zmínili, totiž při snížení bodu mrazu a zvýšení bodu varu roztoků, jakož i při nauce o elektrické jich vodivosti.

O tom, co vlastně jest příčinou polopropustnosti blan, se dosud mínění rozcházejí (srv. *Ostwald* 1890, *Tammann* 1892, *Enriques* 1902). Že zde hraje důležitou úlohu různá rozpustnost látek v membráně, o tom nás poučuje pěkný demonstrační pokus *Nernstův* (1892). Trychtýř, uzavřený na širokém konci měchuřinou, vodou nasycenou, naplníme směsí aetheru a benzolu a širokým koncem ponoříme do čistého aetheru. Brzo na to počne aether, který se částečně ve vodě rozpouští, kdežto benzol tak u větší míře nečiní, vnikati dovnitř nálevky, tak že kapalina v úzkém jejím hrdle stoupá. Aby voda měchýře se nerozpustila v aetheru, jest nutno před pokusem oba roztoky vodou nasytiti. Podobný jest pokus *Lhermitův* (1854), kde v trubici nad sebou jsou zvrstveny chloroform, voda a aether. Voda hraje úlohu polopropustné blány, ježto jí aether do chloroformu diffunduje.

§ 441. Dialysa.

Již jsme se zmínili o malé rychlosti volné diffuse kolloidů, kdežto krystalloidy diffundují i skrze kolloidy velmi rychle; také membránami osmují kolloidy velice pomalu, tak že lze na základě veliké této různosti v diffundování kolloidy snadno odděliti od krystalloidů pochodem, který Graham nazval *dialysou* (rozlukou). Jeho *dialysátor* má za hlavní část plochou nádobu, jejížto dno jest z pergamentového papíru. Do této nádoby dá se směs, která se má dialysovati, a nádoba se pak zapustí do jiné větší ploché nádoby s vodou. Nastává pergamentovým papírem osmosa, kterou krystalloidy přejdou do vody, kdežto kolloidy zůstanou zpátky.

Dialysy užívá se v toxikologii *); jest možno některé jedy (jako strychnin, kysličník arsenový), jež náležejí mezi krystalloidy, odděliti od látek jiných (bílkovin), jež náležejí mezi kolloidy. V cukrovarech extrahuje se dialysou z melassy, z níž cukr již z velké části byl vykrystallisoval, ještě dále velká část cukru tím, že se podrobí osmose pergamentovým papírem. Kdežto minerální soli, v melasse obsažené (jako KCl, KNO_3 a j.), snadno diffundují, zůstává cukr zpět, tak že se melassa zbaví oněch přimíšenin a pak znovu krystallisaci podrobí.

Roztoky kolloidů v krystalloidických rozpustidlech, jako ve vodě nebo alkoholu, dají se rozděliti ve dva druhy. Oba se dají smísiti s teplou vodou ve všech poměrech, a směs za vhodných podmínek tuhne, tvoříc t. zv. *gel* (rosol). Ale prvý druh, jako gelatina nebo agar-agar, znovu se rozpouští zahřátím nebo zředěním vodou, kdežto druhý druh, na př. kolloidální roztok kyseliny křemičité, bílkovina a p., nedá se znovu rozpustiti, zůstává ve tvaru rosolovitém, »koaguluje«. Graham nazval roztoky kolloidů ve vodě hydrosoly, rosoly pak vytvořené ztuhnutím nebo koagulací hydrogely. Koagulace nastává často již přidáním malého množství elektrolytických solí.

Vnitřní tření plynů.

§ 442. Definice koefficientu vnitřního tření a methody měrné.

Stejně jako u kapalin můžeme mluviti o vnitřním tření u plynů, zcela nezávisle na obrazu, který si o podstatě skupenství plynného konstruujeme. Rovněž můžeme jako tam vycházeti od

*) Z řeckého: *τόξον τό* luk, *τοξικόν τό* jed, jehož se užívalo k napouštění šípů; toxikologie nauka o jedech.

téhož zákona elementárního

$$F = \eta \,.\, q \,.\, \frac{\Delta v}{\Delta l},$$

kde jednotlivá písmena mají význam dříve udaný. Koefficient vnitřního tření η má jako dříve rozměr $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{L}^2} \,.\, \mathrm{T}$ všeobecně, $\frac{dyna}{cm^2} \,.\, sec$ zvlášť.

Úlohou experimentu jest důsledky z tohoto zákona zkoušeti. Methody měrné jsou podobné jako u kapalin, methoda výtoku kapillárními trubicemi a methoda Coulombova.

Při mathematickém zpracování výtoku plynu kapillárou potkáváme se s okolností, že objem plynu není jako objem kapaliny nezávislým na tlaku. U kapaliny zůstával objem její, protékající různými průřezy po celé délce kapilláry, týž. U plynů však jest veličina, která musí ve všech průřezech býti stálou, součin z objemu V a místního tlaku p.

Mysleme si kapilláru délky L rozdělenu na n dílů délky $l = \frac{L}{n}$. Tlak na začátku kapilláry buď p_0, na konci pak p_n; podobně u prvého dílku na začátku p_0, na konci p_1, u druhého p_1 a p_2 atd., až u n-tého p_{n-1} a p_n. Zvolíme-li jednotlivé dílky dostatečně krátkými, můžeme s přesností libovolně volitelnou pokládati tlak v nich za stálý a rovný středu z tlaku na začátku a na konci dílku. Pro každý dílek zvlášť lze pak užíti odvození téhož, jako jsme uvedli u kapalin, tak že máme potom objem plynu, protékající za vteřinu prvním dílkem

$$V_1 = \frac{\pi}{8\eta} \,.\, R^4 \,.\, \frac{p_0 - p_1}{l} = A \,.\, \frac{p_0 - p_1}{l} \quad \text{za tlaku} \quad \frac{p_0 + p_1}{2},$$

druhým dílkem

$$V_2 = A \,.\, \frac{p_1 - p_2}{l} \quad \text{za tlaku} \quad \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \text{atd.}$$

Součiny z objemu a středního tlaku, t. j.

$$V_1 \,.\, \frac{p_0 + p_1}{2} = A \,.\, \frac{1}{2} \frac{p_0^2 - p_1^2}{l}$$

$$V_2 \,.\, \frac{p_1 + p_2}{2} = A \,.\, \frac{1}{2} \frac{p_1^2 - p_2^2}{l}$$

musí nutně býti stálé a rovné $V_0 p_0$ nebo $V_n p_n$, množství vtékajícímu či vytékajícímu. Sečtením n takových stejných výrazů obdržíme

$$n \,.\, V_n p_n = \frac{1}{l} \,.\, A \,.\, \frac{1}{2} \,(p_0^2 - p_1^2 + p_1^2 - p_2^2 + \ldots - p_n^2)$$

$$= \frac{1}{l} \,.\, A \,.\, \frac{p_0^2 - p_n^2}{2}.$$

Poněvadž $n \,.\, l = L$ máme výsledkem, dosadíme-li zpět za $A = \frac{\pi}{8\eta} \,.\, R^4$

$$V_n p_n = \frac{\pi \,(p_0^2 - p_n^2)}{16 \,.\, \eta \,.\, L} \, R^4.$$

Kdybychom měřili objem vyteklého plynu za středního tlaku

$$p_m = \frac{p_0 + p_n}{2}$$

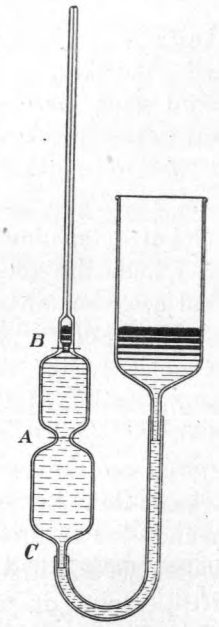
obdrželi bychom vzorec týž, jako u kapalin

$$V_m = \frac{\pi}{8\eta} \,.\, \frac{(p_0 - p_n) \,.\, R^4}{L}.$$

Kdyby nastávalo klouzání plynu podél stěny, bylo by nutno podobně jako u kapalin psáti místo R^4 obecněji $R^4 + 4\gamma R^3$. Konečně připomíná ve své již citované knize *Brillouin*, že nemá se zanedbávati korrekce na živou sílu, ač žádný z badatelů, kteří se měřením zabývali, na ni nevzal ohled; snadno za obyčejných teplot má vliv až do procenta jdoucí.

Ovšem jest u uvedených vzorců tichým předpokladem, že koefficient vnitřního tření nezávisí na tlaku plynu, alespoň ne patrně v rozmezí tlakovém od p_n do p_0.

Proto, aby se měření dálo za jediného tlaku, bylo velmi mnoho užíváno methody Coulombovy, torsního kývání desk na drátu nebo bifiláru zavěšených, a to ve tvaru *O. E. Meyerem* (1865) udaném. Útlum desky způsoben jest totiž jednak vnitřním třením vzduchu u desky, jednak třením vzduchu u závěsu a zrcátka a konečně viskositou závěsu. Aby se oba poslední parasitérní vlivy odstranily, užil Meyer tří rovnoběžných desk, upevněných na tyčince, jich středem procházející. Konány pak pokusy dva: Jednak s deskami ve stejných vzdálenostech nad sebou upevněnými, jednak dohromady k desce prostřední sešinutými, tak že tvořily jako by desku jedinou, ovšem tloušťky třikráte větší. *Maxwell* (1866) zdokonalil tuto methodu, vsunuv mezi oscillující desky jiné, s nimi rovnoběžné, centrálním otvorem opatřené a nepohyblivé. Zcela nejnověji (srpen 1909) užil *Zemplén* také methody obdobné s Margulesovou pro vnitřní tření kapalin, totiž stálé odchylky koule, kolem níž druhá, dutá se stálou úhlovou rychlostí rotuje.



Obr. 397.

Pro relativní měření a demonstraci v přednáškách lze užíti (*Kučera*) jednoduchého zařízení, analogického s Ostwaldovými kapillárami na vnitřní tření kapalin. Kapillára — dlouhá a úzká, na stativu připevněná — natavena jest na dvě baňky (obr. 397.), z nichž spodní, poněkud větší, jest kaučukovou trubicí spojena s reservoirem rtuťovým, na druhém stativu po-

sunovatelným. Ovšem jest nutno experimentovati vždy s týmž množstvím plynu, t. j. reservoir před pokusem musí býti vždy v téže posici. Také přetlak musí býti vždy týž, t. j. při pokuse musí reservoir býti zvednut vždy do téže výšky. Obojímu lze dvěma nárazníky snadno vyhověti. Pozorují se časy mezi průchody rtuťové hladiny dvěma značkami A a B. Jsou úměrny koefficientům vnitřního tření. V obrazci je znázorněn stav rtuti ke konci pokusu; na začátku při plnění musí meniskus býti asi u C.

§ 443. Vnitřní tření plynů dle kinetické theorie.

Vývody předchozího § jsou zcela nezávislé na mechanickém obraze, kterým si podstatu skupenství plynného znázorňujeme. Ačkoli nemůžeme na tomto místě rozvinouti širší obraz kinetické theorie plynů, která, byť snad neodpovídala skutečnosti, přes to vědě mnohé dobré služby prokázala, chceme přece alespoň v hrubých rysech objasniti, jakým způsobem tento mechanický obraz plynu vede k pojmu vnitřního tření.

Jak obecně je známo, představujeme si dle této theorie plyn jakožto složený z nesmírného množství hmotných, velmi pružných částic, molekul, které ve všech možných směrech s různými rychlostmi semo tamo poletují. Z různých rychlostí můžeme methodou statistickou vypočísti *střední rychlost* molekul. Tlak plynu pochází od nárazů molekul na stěny nádoby plyn uzavírající. Ježto tlak roste s teplotou, musíme si představovati, že také střední rychlost molekul s teplotou vzrůstá. Dále je patrno, že počet nárazů na stěny bude tím větší, v čím menším prostoru jest určitý počet molekul uzavřen, jinými slovy, zmenšujeme-li objem plynu, roste jeho tlak. Molekuly v prostoru poletující naráží ovšem dříve či později na molekuly jiné, proletují tedy dle náhodných srážek delší či kratší volnou dráhu. Statistickou methodou zase můžeme vyčísliti střední délku volného letu mezi dvěma nárazy a nazýváme ji *střední volnou drahou* molekul. Jest poměrně velmi krátká; u vzduchu za atmosférického tlaku je jen asi 10^{-5} *cm*. Když však tlak klesá, to znamená, když se prostor, který jest určitému počtu molekul k disposici, zvětšuje, klesá možnost vzájemných jejich srážek, a tedy roste střední volná dráha, tak že za velmi vysokých vakuí může dosíci velikosti až několika *cm*. Když se plyn pohybuje vnější silou s určitou rychlostí nějakým směrem, přistupuje patrně tato komponenta rychlosti k vlastní rychlosti molekul.

Když jsme toto předeslali, snadno můžeme si učiniti mechanický obraz, v čem vlastně dle kin. theorie spočívá vnitřní tření plynu. Představme si dvě vrstvy horizontální A a B, z nichž prvá

se pohybuje v horizontálním směru (třeba z leva na pravo) rychleji, druhá pomaleji. Mají tedy molekuly v A horizontální složku rychlosti z leva v pravo průměrem větší, než molekuly v B. Poněvadž však jednotlivé molekuly z vrstvy A přeletují do B, tedy při vzájemných nárazech s tamními molekulami sdílejí jim tuto větší rychlost, popohánějí je v tomto směru. Ale ježto tlak v plynu jest všude týž, a tedy také počet molekul v 1 cm^3 všude týž, přeletuje průměrem stejný počet molekul z vrstvy B do vrstvy A a tam při nárazech s tamními molekulami tyto v horizontálním směru z leva na pravo zdržuje. Celý děj jest tedy úplně obdobný s představou, jakou si tvoříme o vnitřním tření u kapalin.

Ale zde můžeme jíti dále. Tloušťka vrstvy, ze které molekuly proletují z A do B nebo naopak, bude podmíněna střední volnou drahou molekul, v nejpříznivějším případě bude jí rovna. Dejme tomu, že tato tloušťka jest d, a N počet molekul v 1 cm^3 se nacházejících. Pak počet molekul z A do B a naopak jednotkou plošnou proletujících, a tedy také vnitřní tření bude úměrno jak d, tak N, čili součinu $N \,.\, d$. Zvětšíme-li nyní tlak plynu na dvojnásobný, to jest zvětšíme-li počet molekul v 1 cm^3 z N na $N_1 = 2N$, zmenší se následkem větší hustoty molekul v prostoru střední volná dráha jejich a sice můžeme alespoň v prvém přiblížení předpokládati, že se zmenší ve stejném poměru jako tato hustota stoupne, či že z d se stane $d_1 = \frac{d}{2}$. Vnitřní tření jest ovšem z týchž důvodů jako dříve úměrno součinu $N_1 d_1$, ale ten, jak vidíme, se rovná Nd, t. j. docházíme k překvapujícímu výsledku, na kterýž upozornil prvý *Maxwell* (1860), že se *vnitřní tření plynu tlakem, a tedy hustotou plynu nemění.*

Když jdeme k tlakům velmi nízkým, tak že tloušťka d dosahuje až k stěnám nádoby a nemůže dalším snižováním tlaku se zvětšovati, kdežto N dále klesá, dá se očekávati, že tento Maxwellův zákon přestane býti splněn, že pak bude vnitřní tření s dalším klesáním tlaku klesati. Také za tlaků značně vysokých dají se očekávati anomalie, ježto pak při značné hustotě molekul není jejich vlastní objem vůči prázdnému prostoru k zanedbání.

V mathematické formulaci dochází kinetická theorie plynů pro koefficient vnitřního tření η k výrazu

$$\eta = K \,.\, N \,.\, m \,.\, L \,.\, \Omega,$$

kde je N počet molekul v 1 cm^3, m hmota jedné molekuly (tedy $N \,.\, m$ spec. hmota plynu), L střední volná dráha a Ω střední rychlost molekuly; K

jest numerický koefficient, jehož hodnota závisí na představě o rozdělení rychlosti mezi jednotlivými molekulami v plynu. Je vždy velmi blízký $^1/_3$. Střední volná dráha L jest dána výrazem

$$L = \varkappa . \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2},$$

kdež zase jest $\varkappa$ numerický koefficient podobný K, jehož hodnota jest velmi blízká $^3/_4$, λ jest střední vzdálenost středů dvou molekul, tedy λ^3 prostor, který průměrem připadá v celém objemu na jednu molekulu a ϱ poloměr molekuly. Dosazením plyne

$$\eta = \varkappa . K . \frac{m . N . \lambda^3 . \Omega}{\pi \varrho^2} = \varkappa . K . \frac{m \Omega}{\pi \varrho^2},$$

poněvadž patrně $N . \lambda^3 = 1$. Tímto výrazem, v němž žádná veličina není na tlaku závislou, jest dán zákon Maxwellův. Pro střední rychlost Ω za teploty t, je-li za 0^0 C její hodnota Ω_0, dává kinetická theorie vztah

$$\Omega = \Omega_0 \sqrt{1 + \alpha t},$$

kde α je koefficient roztažnosti plynu. Měl by tedy dosazením býti koefficient vnitřního tření η_t za teploty t, je-li za 0^0 C η_0 dán vztahem

$$\eta_t = \eta_0 \sqrt{1 + \alpha t}.$$

V následujícím § uvidíme, že, jakkoli zákon Maxwellův jest v širokých mezích splněn, tento vztah neodpovídá skutečnosti *).

§ 444. **Něco z výsledků měření.**

Koefficient vnitřního tření plynů jest oproti témuž u kapalin řádově asi 100-kráte menší. Nejvýše zajímavý výsledek kinetické theorie plynů, Maxwellův zákon, dle něhož — vyjímaje za tlaků velmi nízkých a velmi vysokých — vnitřní tření plynů na tlaku nezávisí, byl potvrzen měřeními Maxwellovými a ještě důkladněji měřeními, která provedli *Kundt* a *Warburg* r. 1874 pomocí kývající desky. Uvedeme zde jejich čísla pro logarithmický dekrement desky ve vzduchu za tlaků menších barometrického.

*) Odvození užitých vztahů najde čtenář v knihách o kinetické theorii plynů jednajících, zvláště v *L. Boltzmannových*: Vorles. über Gastheorie (I. sv. Lipsko 1896, stran 204, II. sv. 1898, str. 265) nebo v elementárnější *O. E. Meyerově*: Die kinetische Theorie der Gase (II. vyd. Breslau 1899, stran 352 + 128). Pro prvou informaci stačí krátká knížka *G. Jägerova*: Fortschritte der kin. Gastheorie (Brunšvík 1906, stran 121).

Tlak v *mm*	Log. dekr. za 15° C
750	0·0426
380	425
20·5	424
7·3	419
1·53	405
0·63	0·0394

Slabé klesání, které vystupuje v oboru tlakovém pod 20 *mm*, nepochází od zmenšení vnitřního tření, jak výpočtem dokázali, nýbrž od toho, že za těchto nižších tlaků nastává *klouzání* plynu podél pevné stěny, čímž síla od tření pochodící se zdánlivě zmenšuje.

Ovšem za tlaků velmi nízkých, pod několik setin *mm* rtuti sahajících, vskutku se koefficient vnitřního tření zmenšuje. Uvedeme zase čísla *Kundt-Warburgova* pro vodík, kteří však tyto velmi nízké tlaky nemohli přesně změřiti, nýbrž označují je pouze postupně jakožto první, druhé atd. vakuum. Prvé odpovídalo tlaku asi 0·04 mm. *Crookes* potvrdil jejich měření za tlaků ještě daleko nižších.

Tlak	log. dekr.
750 *mm*	0·0387
1. vak.	180
2. »	140
3. »	119
4. »	0·0121

Můžeme se přesvědčiti jednoduchým pokusem, že koefficient vnitřního tření za velmi nízkých tlaků je menší než za tlaku atmosférického; rozkmitáme-li uhlíkové vlákno v žárovce, vidíme, že kmity se tlumí velmi pomalu. Prořízneme-li však pilníkem její baňku a vpustíme do ní opatrně vzduch, vzroste útlum velmi očividně.

Za velmi značných tlaků naopak koefficient vnitřního tření plynů stoupá. Uvedeme zde tabulku pro vnitřní tření kysličníku uhličitého dle měření, jež provedli *Warburg* a *Babo* (1882) methodou výtoku kapillárou. Prvý sloupec udává spec. hmotu s $\left(\frac{g}{cm^3}\right)$ za tlaku p atmosfér (druhý a čtvrtý sloupec) přímo změřenou, třetí a pátý sloupec pak koefficient vnitř. tření násobený 10^6 v absol. jednotkách $\left(\frac{g}{cm \,.\, sec}\right)$ za dvou teplot 32·6° a 40·3° C. Při tom bylo v prvém případě k CO_2 přimíšeno 0·074% vzduchu.

$s \frac{g}{cm^3}$	$t = 32{\cdot}6°$ C		$t = 40{\cdot}3°$ C	
	p atm.	$\eta . 10^6 \frac{g}{cm . sec}$	p atm.	$\eta . 10^6 \frac{g}{cm . sec}$
0·100	43·1	—	45·3	180
0·170	60·3	188	64·3	196
0·240	69·9	213	75·9	218
0·310	74·6	239	82·7	243
0·380	76·6	270	86·8	275
0·450	77·2	304	89·2	316
0·520	77·6	351	91·7	366
0·590	78·2	414	94·9	426
0·660	80·7	493	101·6	499
0·730	88·5	574	114·6	580
0·800	107·3	677	—	—

Specifická hmota kysličníku uhličitého za 40° a tlaku jedné atmosféry jest 0·00172, a příslušný koefficient vnitřního tření 0·000165. Stoupne-li tlak na 45·3 atmosféry, stoupne specifická hmota asi 58kráte, kdežto $\eta \,.\, 10^6$ pouze z 165 na 180, tedy pouze o 9%. Později ovšem stoupá rychleji. Pozoruhodno jest, že za různých tlaků a teplot, ale týchž specifických hmot je η téměř stejné. Tekutý kysličník uhličitý (s 0·044% vzduchu) za 70 atmosfér a specifické hmoty 0·810 má vnitřní tření $\eta \,.\, 10^6$ rovné 629, tedy menší než za téže hustoty plynný.

Následujž zde ještě tabulka koefficientů vnitřního tření některých plynů za 0°, a to v míře absolutní:

Plyn	$\eta . 10^6 \frac{g}{cm . sec}$	Pozorovatel
Argon	210·4	Schultze (1901)
Helium	189·1	»
Vzduch	173·31	Breitenbach (1899)
Kyslík	192·6	Markowski (1904)
Dusík	167·4	»
Vodík	84·1	»
»	85·74	Breitenbach (1899)
Kysl. uhličitý	138·79	»

Pro závislost η na teplotě t dává kinetická theorie plynů, neberouc ohled na vzájemné síly mezi molekulami působící, vztah

$$\eta_t = \eta_0 \,(1 + \alpha t)^{\frac{1}{2}},$$

kde je η_0 koefficient za 0°C, α koefficient roztažnosti plynů. Z výsledků pozorovacích však plyne pro exponent číslo větší než $^1/_2$, a to od 0·6 až k 1·6 (u par rtuťových). Za to se velmi znamenitě osvědčuje jiný vzorec, odvozený *Sutherlandem* (1893) za supposice přitažlivých sil mezi molekulami, dle něhož

$$\eta = A \frac{T^{1/2}}{1 + \frac{C}{T}},$$

kde A a C jsou konstanty, T absolutní teplota; vzorec obyčejný byl by tedy jeho limitou pro teploty velmi vysoké. Rozhodně je zajímavo, že vnitřní tření plynů s teplotou stoupá, kdežto u kapalin, jak víme, naopak rychle klesá.

Připomeňme, že *Barus* (1889 a p.) navrhl měřiti velmi vysoké teploty vnitřním třením vzduchu (ev. vodíku) v rozžhavených trubičkách platinových; užíval jednoduššího vzorce s exponentem $^2/_3$.

Ze vzorců pro vnitřní tření směsí plynových v závislosti na jejich složení (*Puluj*, 1879) osvědčuje se jakž takž *Thiesenův* (1902). Jest zajímavo, že přidáním vodíku k nějakému plynu se jeho vnitřní tření zvětší, ač vodík sám má vnitřní tření nejmenší; na př. u směsi H_2 a CO_2 je vnitřní tření maximální pro směs 25% H_2 a 75% CO_2 (*Puluj*, 1879). Netřeba připomínati, že stejně jako vnitřní tření plynů, stává a měří se vnitřní tření par; koefficient η jest téhož řádu, číselně poněkud menší, než u plynů ($\eta \,.\, 10^6$ u alkoholu 83, aetheru 69, chloru 129, rtuťových par 160).

Diffuse a osmosa plynů.

§ 445. **Diffuse plynů. Zákon Daltonův.**

Diffuse plynů jest úkaz analogický s diffusí kapalin. Rozdíl jest v tom, že každý plyn diffunduje do každého jiného a že průběh diffuse plynů jest rychlejší. Jinak jest elementární zákon o diffusi zde i tam souhlasný. Co jest u kapalin koncentrace, čili množství rozpuštěné látky v jednotce objemové, to jest u plynů specifická hmota, čili množství plynu v jednotce objemové. Jako tam může nastati spád koncentrace, tak zde může nastati spád specifické hmoty. Množství plynu, jež následkem tohoto spádu za jednotku času diffunduje jistým průřezem, jest úměrno tomuto průřezu a spádu hmoty specifické, jaký jest v bezprostřední blízkosti tohoto průřezu; konstanta úměrnosti jest pak *koefficientem diffuse*, rozměru $cm^2 : sec$, téhož jako u kapalin.

Avšak zde u plynů brává se zpravidla na místě hmoty specifické veličina jí úměrná, totiž při dané teplotě tlak plynu p, vztahovaný na jednotku plochy. V souhlasu s tím zavádí se pak spád tlakový $\Delta p/\Delta l$ na místě spádu specifické hmoty. Konečně pišme za množství hmotné součin z objemu v a tlaku p plynu. Základní rovnice píše se tudíž ve tvaru

$$vp = -k \,.\, q \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

a konstanta k jest *koefficientem diffuse*. Rozměr jeho jest jako dříve

$$\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}} \quad \text{obecně,} \quad \frac{cm^2}{sec} \quad \text{zvlášť.}$$

Dle toho značí k tlakem a objemem měřené množství plynu $\left(cm^3 \,.\, \frac{dyna}{cm^2} \,.\, \frac{1}{sec}\right)$, které za jednotku času (sec) projde průřezem jednotkovým (cm^2), když v tomto průřezu jest tlakový spád jednotkový, t. j., když na odlehlost 1 cm tlak jednoho plynu roste o 1 $\frac{dynu}{cm^2}$, a druhého klesá o 1 $\frac{dynu}{cm^2}$. Koefficient k platí pro teplotu pozorovanou.

Tlak, v základním zákonu vystupující, jest tlakem plynu *částečným* čili *parciálním*. K jeho vysvětlení učiňme tuto úvahu.

Budiž dán libovolný počet plynů, 1, 2, 3, . . . Začáteční jich objemy buďtež v_1, v_2, v_3, . . ., tlaky p_1, p_2, p_3, . . . Směs plynů

nechť má objem V a tlak P. Dle zákona Boyle-Mariottova soudíme, že klesl

tlak p_1 plynu 1. na $\frac{v_1}{V} p_1$,

„ p_2 „ 2. „ $\frac{v_2}{V} p_2$,

„ p_3 „ 3. „ $\frac{v_3}{V} p_3$.

Úhrnný tlak P určen jest summací, dle zákona, který (1802) vyslovil *John Dalton* (1766—1844), jakožto

$$P = \frac{v_1}{V} p_1 + \frac{v_2}{V} p_2 + \frac{v_3}{V} p_3 + \ldots$$

anebo symbolicky

$$P = \Sigma \frac{v}{V} p.$$

Dle toho zachovává každý plyn svůj tlak přes to, že nezaujímá prostor V sám, nýbrž zároveň s plyny jinými. Úhrnný tlak jeví se proto jako součet těch tlaků, jež by plyny měly, kdyby v prostoru V byly samotny. Tyto tlaky zoveme částečnými, čili parciálními.

Je-li $$V = \Sigma v,$$

znamená $\frac{v}{V} = x$ procentuální dle objemu stanovené množství plynu, ve směsi dané. Vzorec

$$P = \Sigma xp$$

udává tudíž, že každý plyn přispívá k tlaku úhrnnému dle svého procentuálního zastoupení v dané směsi, toto zastoupení počítáno dle objemu. Dle toho lze parciální tlak pro jistou směs počítati. Tak na př. suchý vzduch obsahuje (nehledíc k nepatrnému zastoupení jiných plynů, na př. CO_2) dle objemu 21% kyslíku a 79% dusíku. Je-li tudíž b tlak atmosférický, jest

$0{\cdot}21 \,.\, b$ parciální tlak O_2,
$0{\cdot}79 \,.\, b$ „ „ N_2.

Kdyby se tedy v daném objemu V vzduchu kyslík ztrávil, na př. hořením, a kdyby se zbývající dusík uvedl na týž objem V, měl by napětí $0{\cdot}79 \,.\, b$.

Při vzduchu vlhkém dá se parciální tlak e vodních par hygrometricky určiti; pak udává $b - e$ tlak vzduchu suchého při témže objemu, jaký má vzduch vlhký. (Srovnej § 344.) Jiná forma zá-

kona Daltonova jest

$$VP = \Sigma vp.$$

Vytkněme dva případy zvláštní, v nichž zákon Daltonův se stává ještě srozumitelnějším.

a) Budiž

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots,$$

t. j. plyny před smícháním nechť mají týž tlak, na př. atmosférický. Pak jest

$$VP = p \Sigma v.$$

Je-li tedy

$$V = \Sigma v,$$

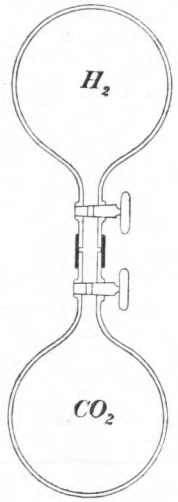
jest

$$P = p.$$

Zaujme-li tedy směs plynů objem úhrnný, nezmění se tlak.

b) Budiž

$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots,$$



Obr. 398.

t. j. plyny před smícháním nechť zaujímají týž objem. Pak jest

$$VP = v \Sigma p.$$

Je-li tedy

$$V = v,$$

jest

$$P = \Sigma p.$$

Když se tedy plyny vměstnají všechny do téhož objemu, stoupne úhrnný tlak na součet tlaků parciálních.

Při diffusi přichází zpravidla k platnosti případ *a)*. Plyny, jež se jistou plochou stýkají, mají týž tlak, na př. atmosférický. Když začíná plyn prvý vnikati do druhého, nemění se ve směsích vznikajících tlak úhrnný; plyn prvý začínaje vnikati do druhého má na tom místě tlak parciální nepatrný, a o to zase se umenšuje parciální tlak plynu druhého. Zde vzniká spád v jednom směru, tam v opačném směru. Když promíchání je provedeno, je všude parciální tlak jednoho i druhého plynu týž a úhrnný tlak je stále nezměněný. Když tedy na př. naplníme dvě eprouvetty různými plyny, jednu kysličníkem uhličitým, otvorem vzhůru, druhou vodíkem, otvorem dolů, mají oba plyny tlak atmosférický. Když dáme

otvory nad sebe, nastane diffundování; tlak plynu dolejšího klesá ve smyslu zdola nahoru, tlak plynu hořejšího klesá ve smyslu shora dolů. Úhrnem zůstává tlak směsi stále týž, až se utvoří směs všude stejná (*Volta* 1790). Že vodík, ač lehčí, přece směrem dolů vnikl do kysličníku uhličitého, dá se ukázati tím, že se směs v obou eprouvettách zapálí. Naplní-li se (obr. 398.) dva ballony, kohoutem opatřené, těmi plyny a přešine-li se otvorem ballon s vodíkem nad ballon s kysličníkem uhličitým, ukáže se výsledek souhlasný. Otevrou-li se kohouty, diffundují plyny do sebe vzájemně za téhož tlaku úhrnného (*Berthollet*).

Obraz, jaký podává kinetická theorie plynů o diffusi, snadno si čtenář zkonstruuje na základě toho, co bylo v § 443. uvedeno. Představíme-li si zase dvě vrstvy A a B, z nichž v prvé jest průměrně více molekul plynu α než v druhé, a naopak v druhé poměrně více molekul plynu β než v prvé, budou stykovou plochou vrstev proletovati oběma směry molekuly obou plynů α i β, avšak průměrem více molekul plynu α bude proletovati směrem od A do B, a více molekul plynu β směrem od B do A, než směrem opačným, tak že konečný stav nastane tehdy, když v obou vrstvách A i B budou molekuly α i β stejně zastoupeny, když plyny budou stejnoměrně promíchány. Mathematické zpracování tohoto obrazu dává pro přebytek počtu molekul plynu α, které proletují za jedničku doby plošnou jedničkou směrem od A k B nad počtem jich směrem od B k A proletěvších, výraz

$$K \,.\, L \,.\, \Omega \,.\, \frac{dN}{dx},$$

kde L jest střední volná dráha, Ω střední rychlost a K numerický koefficient blízký $^1/_3$. Při tom jest předpokládáno, že v 1 cm^3 v A jest počet molekul plynu písmenou α označeného $N + dN$, v B pak pouze N, a že vzdálenost obou míst jest dx. Poněvadž počtu N jest úměrný parciální tlak plynu, vidíme, že mechanický obraz vede k elementárnímu zákonu téhož tvaru, jako jsme jej byli zavedli. Součin $L \,.\, \Omega$ jest patrně úměrný koefficientu diffuse. O střední volné dráze L víme (§ 443.), že jest úměrna λ^3, tedy úměrna objemu plynu, čili za stálého tlaku úměrna absolutní teplotě T; Ω jest úměrno druhé odmocnině z abs. teploty, tedy součin $L\Omega$, a tudíž i koefficient diffuse úměrný $T^{3/2}$. Uvidíme, že tento důsledek kinetické theorie plynů jest ve skutečnosti splněn pouze přibližně.

Pokud se týče Daltonova zákona, dá se již předem dle analogie se zákonem Boyle-Mariotteovým očekávati, že ve skutečnosti bude splněn pouze přibližně. Odkazujíce na § 99. Thermiky (str. 287 a násl.), podotýkáme, že zvláště za vyšších tlaků se ukazují odchylky dosti značné. Uvádíme z *Margulesových* (1888) výpočtů, dle pozorování *Andrewsových*, následující čísla pro směsi 3 objemů CO_2 a 4 objemů N_2 za 31·1° C.

Tlak pozorovaný	50	60	70	80 atmosfér.
Součet tlaků parciálních	50·7	61·0	71·4	81·6 »

Podobné jsou výsledky *Golicynovy* (1890) a *Braunovy* (1888). Za nižších teplot jest součet parciálních tlaků zpravidla větší než pozorovaný tlak, za vyšších teplot a tlaků jest tomu naopak. Za teplot nad kritickou jsou však úchylky celkem velmi malé.

§ 446. Pozorovací methody a výsledky.

Podobným způsobem jako u kapalin (§ 435·), dá se z elementárního zákona o diffusi plynů dovoditi differenciální rovnice, vystihující zavedením příslušných krajových podmínek různá zařízení experimentální. Zní stejně jako u kapalin

$$\frac{d\sigma}{dt} = k\frac{d^2\sigma}{dx^2} \quad \text{nebo} \quad \frac{dp}{dt} = k\frac{d^2p}{dx^2},$$

kde σ jest spec. hmota, p parciální tlak plynu.

Prvý, kdo konal exaktní pokusy měrné o diffusi plynů, byl *Loschmidt* (1870). Užil dlouhé válcovité trubice, uprostřed přehrazené šoupátkem, tenkou destičkou kovovou, která buď obě části trubice od sebe oddělovala, nebo pomocí otvoru stejně velikého, jako světlost trubice, obě spojovala. Obě části naplněny byly různými plyny téhož tlaku, v daném momentu byly spojeny a po jisté době znovu odděleny, načež obsah obou částí pečlivě analysován. Podobně pracoval *Obermayer* (1880 až 1887), jenž na místě trubice používal k měřením za různých teplot železné hlavně ručnice, v čemž ho následoval nejnověji též *Schmidt* (1904), jenž také místo šoupátka užil kohoutu. *Waitz* (1882) místo analyse, resp. vážení směsí plynových na konci pokusu sledoval složení jich v různých vrstvách během pokusu pomocí měření indexu lomu Jaminovým interferenciálním refraktorem. Nověji navrhl *Töpler* (1896) užití velmi citlivé libelly, *Schultze* (1897) absorpce vodíku palladiem k měření koeff. diffuse, ale žádný z obou větší řady měření nekonal.

Následující tabulka udává koefficienty diffuse redukované na poměry normální (tlak 760 *mm* a 0° C) dle měření *Obermayerových* v absol. jednotkách $\frac{cm^2}{sec}$, uspořádané dle hodnot stoupajících.

Plyny	k_0	Plyny	k_0	Plyny	k_0
$CO_2 - N_2O$	0·092	$CO_2 - CH_4$	0·147	$H_2 - CO_2$	0·53
$CO_2 - C_2H_4$	0·101	vzduch — O_2	0·178	$H_2 - N_2O$	0·53
$CO - C_2H_4$	0·117	$N_2 - O_2$	0·179	$H_2 - CH_4$	0·63
$CO - CO_2$	0·131	$CO - O_2$	0·187	H_2 — vzduch	0·64
vzduch — CO_2	0·135	$H_2 - C_2H_6$	0·46	$H_2 - CO$	0·65
$O_2 - CO_2$	0·136	$H_2 - C_2H_4$	0·48	$H_2 - O_2$	0·67

Koefficienty diffuse jeví parallelní chod s geometrickým průměrem hutnosti obou diffundujících plynů. Ovšem ukázala měření *Waitzova* u vzduchu a CO_2, že k není úplně konstantní, jak v základní diff. rovnici je předpokladem, nýbrž že poněkud závisí na vzájemném poměru obou plynů, měníc se za 0° C mezi 0·1288 až 0·1366 $\frac{cm^2}{sec}$; ovšem jest změna poměrně malou. *Schmidt* (1904) dokázal, že tomu je podobně i u směsi dvou jednoatomových plynů, argonu a helia.

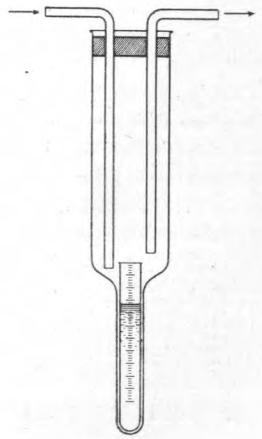
S teplotou koefficient diffuse stoupá poněkud rychleji, než jak jednoduchá kinet. theorie dává, totiž úměrně s $^3/_2$ potencí absolutní teploty; exponent leží mezi 1·75 až 2. Exaktnější theorie Maxwellova a Stefanova žádá hodnotu 2. Tlaku smíšeného plynu jest k obráceně úměrno, což s theorií úplně souhlasí *).

K oživení představy o rychlosti diffuse plynů uvádíme, že rychlost směšování se vodíku a vzduchu jest asi poloviční rychlosti, s jakou se vyrovnává teplota v mědi.

§ 447. Diffuse par.

Speciálním, ale velmi důležitým případem diffuse plynů jest diffuse par kapalinových do plynů; jest jí podmíněno vypařování se kapaliny do klidného plynu, tedy na př. vypařování se vody do ovzduší za bezvětří.

Theorii tohoto zjevu vyvinul *Stefan*, který také prvá přesná měření v tomto oboru vykonal (1873, 89 a 90). Další mnohá měření vykonal *Winkelmann* (1884 až 9) jednoduchým apparátem, znázorněným obr. 399. Kapalina obsažena jest v graduované nádobce, přes jejíž ústí se vede pomalý proud vzduchu nebo jiného plynu. Po nějakém čase ustálí se nad ní stejnoměrný gradient hustoty $\frac{\sigma}{l}$, je-li l vzdálenost hladiny od ústí jejího, a množství páry, která za jedničku časovou jedničkou průřezu z válečku ven diffunduje, t. j. množství vypařené kapaliny dělené průřezem, jež se snadno stanoví, jest $k \cdot \frac{\sigma}{l}$, z čehož plyne k.



Obr. 399.

*) O vnitřním tření a diffusi plynů jedná též článek Dra. Fr. Studničky, »Mathematická nauka o plynech« Časopis pro pěst. math. a fys. IV, 1875, pag. 176. O diffusi a kapillaritě v. též B. Raýman, Chemie theoretická, pag. 87. a 92., 1884.

Z výsledků *Winkelmannových* uvádíme hodnoty k v $\frac{cm^2}{sec}$ při vypařování se kapalin do vodíku, vzduchu a kysličníku uhličitého za poměrů normálních. Vliv chemického složení ukazuje pěkně řada alkoholů.

Kapalina	vypařuje se do		
	H_2	vzduchu	CO_2
voda	0·687	0·198	0·131
aether	296	0775	0552
sirouhlík	369	0883	0629
benzol	294	0751	0527
methyl- (alkohol)	5001	1325	0880
aethyl- (alkohol)	3806	0994	0693
propyl- (alkohol)	3153	0803	0577
isobutyl- (alkohol)	2771	0688	0483
butyl- (alkohol)	2716	0681	0476
amyl- (alkohol)	2351	0589	0422
beryl- (alkohol)	0·1998	0·0499	0·0351

S teplotou (abs.) stoupá koefficient diffuse par, a to u vody do H_2, vzduchu a CO_2 s její potencí 1·712, 1·774 a 1·972.

Vysoce zajímavým a pro botaniku velmi důležitým zjevem jest, že děje-li se diffuse malými kruhovými otvory v tenké stěně, nezmenšuje se množství diffundující v poměru zmenšování plochy stykové, tedy úměrně s kvadrátem radia otvorů, nýbrž pomaleji, úměrně s prvou potencí poloměru (*H. T. Brown* a *Escombe* 1900). Příčinou jest tvar proudových čar, dle nichž se diffuse děje a které k otvorům konvergují, jak *Stefan* při vypařování již r. 1881 předpověděl.

K demonstraci různé rychlosti diffuse par ve vzduchu a vodíku dobře se hodí pokus s bromovými parami v těchto plynech, uzavřených v obrácených válcovitých trubicích.

§ 448. **Osmosa plynů.**

Vzájemná diffuse dvou plynů nenastává jen tehdy, stýkají-li se přímo, ale i tenkráte, nachází-li se mezi nimi pórovité diafragma. Průchod plynů takovýmto diafragmatem může se díti trojím způsobem:

1. Je-li diafragma velmi tenké a má-li otvory sice malé, ale ne dimensí molekulárních, uniká plyn t. zv. effusí, o níž jsme jednali v §§ 368. a 369. Jedná-li se o výtok směsi plynové, nemění se jím její složení. (V některých knihách, na př. v Chwolsonově, nazývá se effusí také zjev pravé diffuse diafragmatem, pod 3. uvedený.)

2. Druhý případ nastává tehdy, nejsou-li otvory v diafragmatu příliš úzké, ale jsou-li poměrně k průměru dlouhé, tak jako by tvořily dlouhé, tenké trubičky. Tu se výtok plynu řídí zákony, které jsme projednali v kapitole o vnitřním tření plynů. Také v tomto případě se složení směsi výtokem nemění.

3. Jsou-li póry v diafragmatu velmi malé, jako v deskách z mořské pěny, z tuhového prášku, aneb i z pálené magnesie nebo nepolévané hlíny, tu hledá si každý plyn svoje vlastní cesty pórami a jedná-li se o směs různých plynů, mění tato svoje složení, Poněvadž jest úkaz úplnou obdobou osmosy kapalin, chceme jej důsledně zváti osmosou plynů. Ovšem jest rozdíl mezi oběma úkazy ten, že u plynů individuální vlastnosti stěn, jimiž plyny prolínají, méně vystupují v popředí, než u kapalin.

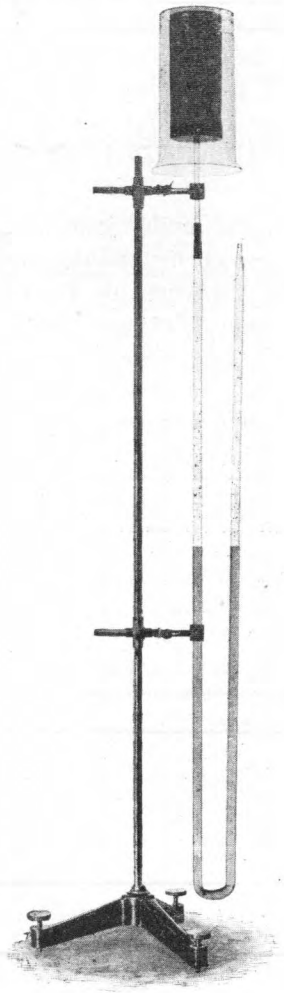
Základní pokus lze předvésti nejlépe přístrojem v obr. 400. znázorněným. Průlinčitá nádoba hliněná, jak se jí užívá ke galvanickým batteriím, jest spojena s manometrem vodním. Uvnitř nádoby jest vzduch. Když se přes nádobu tuto překlopí kádinka naplněná svítiplynem, pozoruje se ihned rychlé stoupání tlakové uvnitř nádoby, na důkaz, že endosmosa plynu do vzduchu jest značnější než exosmosa vzduchu do plynu. Po delší době se tlaky zase vyrovnají. Když se však kádinka sejme, ukazuje manometr prudké klesání tlaku, na důkaz, že nyní zase plyn ze směsi, jež jest v nádobě, rychleji proniká do vzduchu než na jeho místo vstupuje vzduch. Jinou úpravu pokusu znázorňuje obr. 401. Vzrůstání tlaku ukazuje se zde vodotryskem; klesání tlaku bublinkami vzduchovými, jež úzkou trubičkou vodou procházejí. Účinněji než svítiplynem experimentuje se vodíkem. Ukazuje se tedy, že plyn řidší prostupuje stěnou rychleji než vystupuje plyn hustší.

Graham nalezl (1833) pro osmosu plynů jemnou stěnou gypsovou zákon tento: Znamená-li Θ a Θ' dobu, za jakou týž objem plynu hutnosti Δ a Δ' projde průlinčitou stěnou do vakua, platí úměra

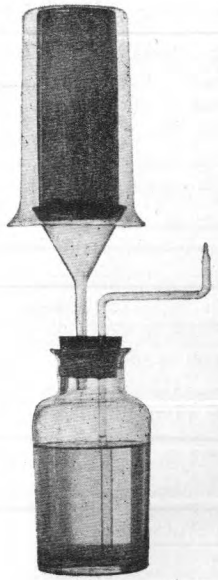
$$\Theta^2 : \Theta'^2 = \Delta : \Delta'.$$

Analogie s podobným zákonem (§ 368. a 369.) pro výtok plynů otvorem jest ihned patrnou. Dle toho jsou rychlosti, jakými plyny pronikají, obráceně úměrny kořenu z hutnosti. Vodík, hutnosti 1/14·4 vzhledem ke vzduchu, proniká tudíž $\sqrt{14{\cdot}4} = 3{\cdot}8$, t. j. téměř 4-krát rychleji než vzduch. *Bunsen* (1857) ukázal, že zákon Gra-

hamův jest pro stěnu s hrubší strukturou, jako je gyps, jen přibližným; nicméně *Graham* (1863) opakuje svoje pokusy s destičkou z tlačené tuhy, později *Hüfner* (1884) s destičkou z velmi vhod-



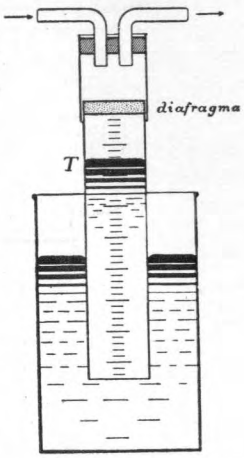
Obr. 400.



Obr. 401.

ného materiálu, na nějž *Reusch* (1865) poukázal, totiž z hydrofanu, ukázali, že zákon onen jest s dostatečnou přesností splněn u desk z látek o velmi jemných pórách, jež nejeví znatelné absorpce plynů. Podobně potvrzuje se Bunsenova věta o úměrnosti rychlosti diffusní s tlakem plynu (*Hansemann*, 1884, u gypsu do tlaků

690 *mm*). Pokusy *Pulujovy* (1877) ukázaly, že také páry přibližně dle Grahamova zákona diffundují. *Dufour* (1872) ukázal, že u diafragmatu vzniká na straně rychleji diffundujícího plynu oteplení, na druhé straně ochlazení a *Feddersenovi* (1873) se podařilo dokázati zjev obrácený, tak zv. thermodiffusi, že totiž diafragma, jehož jedna strana je teplá, druhá studená, se snaží přivoditi diffusi téhož plynu, jenž na obou stranách se nalézá směrem od strany studenější k teplejší.



Obr. 402.

Apparát *Grahamův* (1863) nastíněn jest v obr. 402. Dělená trubice *T* na začátku pokusu jest zcela naplněna rtutí. Když následkem osmosy plynu klesá její hladina, udržuje se přetlak plynu stálým pomocí snižování vnější nádoby se rtutí. Srovnávají se pak časy potřebné k témuž zvětšení objemu; jsou obráceně úměrny rychlosti diffuse, tedy dle zákona Grahamova mají býti přímo úměrny odmocnině z hutnosti. Čísla autorem obdržená obsahuje následující tabulka:

Plyn	Čas Θ	$\sqrt{\Delta}$
Kyslík	1	1
Vodík	0·2505	0·2502
Vzduch	0·9501	0·9507
Kysl. uhličitý	1·1860	1·176

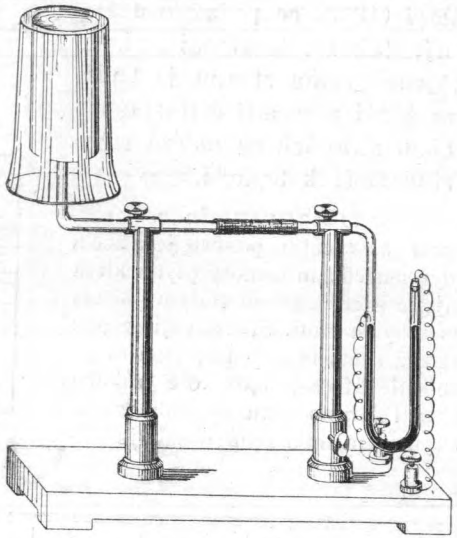
Jest patrno, že zákon Grahamův jest dosti přesně splněn. Se stanoviska kin. theorie plynů jest snadno k pochopení: Ježto za téhož tlaku a teploty jest dle Avogadrovy hypothesy v týchž objemech týž počet molekul různých plynů, musí záviseti rychlost diffuse pórovitou stěnou hlavně na střední rychlosti molekul Ω a tato jest obráceně úměrna $\sqrt{\Delta}$.

Vede-li se atmosférický vzduch trubicí průlinčitou, kolem níž se udržuje vakuum, proniká dusík rychleji než kyslík v poměru

$$\sqrt{16} : \sqrt{12} = 4 : 3{\cdot}46,$$

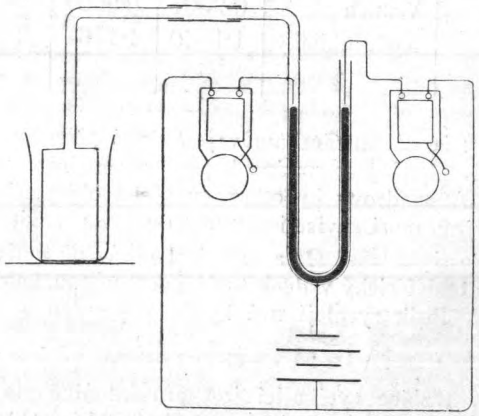
tak že vzduch z trubice vytékající jest procentuálně na kyslík bohatší (24·5%) než atmosférický vzduch (21%) do trubice vstupující (*Graham*, atmolysa). Vede-li se vodík dlouhou hliněnou trubicí průlinčitou, v jejímž okolí jest vzduch, vychází z trubice nikoli jen vodík, nýbrž směs vodíku a vzduchu, poněvadž vodík proniká do okolí a vzduch do trubice. Rozdíl

jest ještě větší, když v okolí trubice jest kysličník uhličitý. Vzhledem k tomu dlužno v chemii pro vedení plynu užívati trubic buď jen skleněných anebo hliněných glazovaných.



Obr. 403.

Přístroj v obr. 400. znázorněný lze pro účely přednášek pozměniti tak, jak obr. 403. ukazuje. Průlinčitá nádoba, upevněná na trubici skle-



Obr. 404.

něné, dá se otáčeti a stavěti buď nahoru neb dolů, dle toho, zdali se chce do kádinky, do níž pak nádoba zasahá, dáti plyn řidší neb hustší než

vzduch. Trubička skleněná jest spojena (kaučukem neprodyšně) s manometrem rtuťovým. Kontakty platinovými, zařízenými zcela blízko menisku rtuťového na jedné i druhé straně, a stálým kontaktem rtuti s platinovým drátem dole v manometru zatmeleným lze signálovými zvonky velmi citlivě demonstrovati buď stoupnutí nebo klesnutí tlaku v průlinčité nádobě. Uspořádání proudovodů znázorňuje obr. 404. schematicky. Apparát zde popisovaný reaguje i na stoupání tlaku při vnikání plynů řidších, i na klesání tlaku při plynech hustších. Často jde jen o přítomnost plynů řidších, na př. svítiplynu, plynu báňského (methanu CH_4) a pod. Tak lze sestrojiti výstražný apparát v úpravě zcela podobné (*Ansell*).

K zjevům osmosy plynů je nutno přiřaditi také diffusi jich látkami, v nichž nelze žádných pór konstatovati, což často se označuje názvem penetrace plynů.

Již *Priestley* (1787) pozoroval a *Graham* (1866) prvý obšírně zkoumal pronikání plynů tenkou blanou kaučukovou. Je-li rychlost pronikání dusíku rovna 1, jest u CO 1·113, vzduchu 1·149, O_2 2·556, H_2 5·500, CO_2 dokonce 13·585. S teplotou rychlost osmosy stoupá: Proniklo-li za 4° C během minuty 0·56 cm^3 vzduchu, proniklo za 60° C 6·63 cm^3. Další zkoumání tohoto zjevu konali *Wroblewski* (1876), *Kayser* (1891), *Grunmach* (1905) a j. Ostatně jest z obecného života známo, jak ballonek kaučukový, naplněný vodíkem, ponenáhlu jej ztrácí a tak svého původního napětí pozbývá.

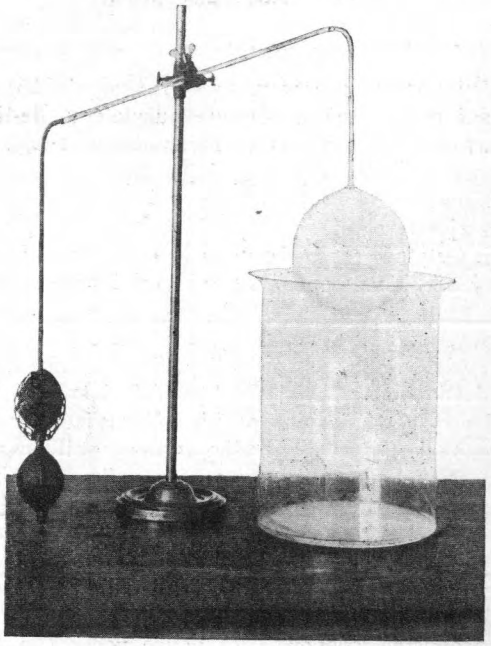
Že také kovy, jako Pt a Fe, za vyšších teplot (červeného žáru) propouštějí plyny, zvláště vodík, pozorovali prví *St. Claire-Deville* a *Troost* (1863), mnohé další pokusy konal *Graham* (1866—9). Z jeho čísel uvádíme, že za tlaku jedné atmosféry projde během jedné minuty skoro do červena rozžhavenou destičkou z palladia, 100 cm^2 velikou a 1 *mm* tlustou, 4·23 cm^3 vodíku, destičkou platinovou za červeného žáru, 1·1 *mm* tlustou 4·89 cm^3 vodíku.

Další práce *Ramsayovy* (1894), *Winkelmannovy* (1901, 1902 a 1905) a *Richardsonovy* (1904) ukazují, že osmosa plynů kovy souvisí se zjevy absorpce plynů v kovech, v tom smyslu, že plyny, jež nejvíce se absorbují, jeví u žhavých kovů nejrychlejší osmosu. Platina a palladium působí téměř jako blány polopropustné, propouštějíce pouze vodík (*Graham, Ramsay*); podobně vůči kyslíku se chová žhavé stříbro (*Troost* 1884). *Ramsay* usoudil, že vodík při této osmose prochází dissociován v atomy. Odtud snad pochází značná osmosa vodíku železem i za obyčejných teplot, je-li toto kathodou při elektrolyse. *Bellati* a *Lussana* (1890 a 91) učinili kathodou v roztoku NaOH železnou trubici, o stěnách 1 *mm* tlustých, na jednom konci uzavřenou, na druhém spojenou s manometrem, jdoucím do 20 atmosfér. Procházel-li proud (0·07 amp.), vnikal vodík stěnami do trubice, tak že po 50 dnech stoupl tlak uvnitř na 20 atmosfér.

Ježto proniká rozžhavenou litinou kysličník uhelnatý, jest povážlivo rozžhaviti železná kamna do červeného žáru; věc je tím nebezpečnější, že proniklý plyn, jsa stejné hutnosti jako vzduch, se s tímto rychle mísí.

Kapaliny, jak uvidíme v příštím §, absorbují plyny, a to tak dlouho, až se pro určitý tlak »nasytí«. Můžeme tedy mluviti o roztocích plynů v kapalinách, jich různé koncentraci a p. stejně jako o roztocích solí a jest tudíž pravděpodobno, že bude nastávati také diffusse plynů kapalinami.

Vskutku byla poprvé *Grahamem* (1850) zkoumána diffuse CO_2 vodou, a *Stefan* (1878) podal theorii její úplně na základě poznámky svrchu učiněné. Jest zajímavo, že koefficienty diffuse plynů kapalinami, které jsou asi téhož řádu jako u diffuse solí (na př. CO_2 ve vodě, $k = 0{\cdot}000016 \frac{cm^2}{sec}$, CO_2 v alkoholu $k = 0{\cdot}000031 \frac{cm^2}{sec}$ za 16° až 17°), nejsou v žádném vztahu s absorbovatelností, tak že by snad na př. větší absorbovatelnosti odpovídala rychlejší diffuse. Také gelatinou a gallertami děje se diffuse plynů,



Obr. 405.

ač pomaleji než vodou, ba i analogie zjevu Soretova byla *van Berchemem* (1890) nalezena. Z novějších prací sem spadajících uvádíme obšírné práce *Müllerovu* (1891) a *Hüfnerovy* (1897 a 8). Na témž základě spočívá průchod plynů a par tenkými blanami kapalinovými, pozorovaný již *Draperem* (1837), blíže zkoumaný po prvé *F. Exnerem* (1875 a 77). Blána nasytí se na jedné straně plynem, diffusí vzniká v ní gradient jeho koncentrace, a tedy průchod z jedné strany na druhou.

Pro účely přednášek lze ve způsobu velmi poučném ukázati takovouto osmosu par pokusem, jehož úpravu znázorňuje obr. 405. Do velké kádinky dají se na dno odstřižky pijavého papíru a pak se na ně naleje něco aetheru. Kádinka naplní se těžkými parami aetherovými. Na to se vyfoukne vzduchem bublina mydlinová na trubičce, vloží se opatrně do par aetherových, nechá se v nich nějakou dobu, a pak se zase vytáhne a kádinka se odstraní. Zapálením lze zjistiti, že do bublinky pronikly páry aetherové. Na místo par aetherových možno do kádinky vpustiti kysličník uhličitý; penetrace tohoto plynu do mydlinové koule ukazuje se tím, že se bublina z kysličníku uhličitého vytažená vahou vniklého těžkého plynu protáhne.

Absorpce a adsorpce plynů.

§ 449. **Absorpce plynů.**

Dotýká-li se plyn povrchu tekutiny, plynu zbavené (na př. vyvařením), vidíme, že část plynu do tekutiny přechází, že jej tato pohlcuje, *absorbuje*, že vzniká *roztok plynu v kapalině*. Zjev tento zvaný *absorpcí*, snadno si vysvětlíme molekulárním obrazem o podstatě hmoty: Molekuly plynu, přicházejíce v obor molekulového působení kapaliny, jsou přitahovány. Stav rovnovážný nastane tehdy, když v jednotce časové stejný počet molekul plynových v kapalinu vniká, jako ji opouští. Jest tedy množství plynu absorbovaného omezené, stavu dynamické rovnováhy odpovídá roztok plynem *nasycený*. Roztok se stává nasyceným v nepohnuté kapalině velice pomalu, neboť od povrchu odvádí se plyn dovnitř kapaliny diffusí; rozpouštění se urychlí protřepáváním.

Množství v objemové jednotce kapaliny za stavu nasycenosti absorbovaného plynu závisí na povaze kapaliny i plynu, na teplotě a na tlaku plynu, který nad kapalinou neabsorbován zůstane.

Nejjednodušší jest závislost na faktoru posledně jmenovaném, kterou pokusně poznal r. 1803 angl. fysik *C. Henry* a vyslovil ve tvaru zákona po něm nazvaného: Množství plynu, které se za dané teploty rozpustí v objemové jedničce kapaliny, jest úměrno tlaku nad tekutinou zbývajícího plynu.

Označíme-li množství absorbovaného plynu m, objem kapaliny V a tlak plynu nad ní p, praví zákon Henryův

$$\frac{m}{V} = Ap,$$

kde A jest konstanta, závislá pouze na povaze obou látek a teplotě. Množství plynu m jest úměrno součinu z tlaku a objemu; užijme tlaku p, jako jest u plynu nad kapalinou, a nazveme objem absorbovaného plynu za tohoto tlaku měřený v. Pak

$$m = Bpv, \quad \frac{pv}{V} = \frac{A}{B}p \quad \text{čili} \quad \frac{v}{V} = \lambda.$$

Ježto B byla konstanta, jest také λ stálé, a tím dostáváme zákon Henryův ve tvaru zvláště jednoduchém:

Poměr objemu pohlceného plynu — měřeného za tlaku vnějšího — k objemu kapaliny, čili objem plynu rozpuštěný v objemové jedničce roztoku, je na tlaku nezávislý, za určité teploty stálý a nazývá se dle *Ostwalda* (Allg. Chemie, 2. vyd., I. sv., str. 616, 1901) koefficientem rozpustnosti nebo (praegnantně) *rozpustností* plynu v kapalině.

Rozpustnost můžeme vyjádřiti také jinak pomocí tlaků, představujíce si, jaký tlak P by měl absorbovaný plyn, kdyby místo rozpustidla se nalézal v prázdném prostoru téhož objemu V. Pak jest patrně $PV = pv$ a tedy

$$\frac{v}{V} = \frac{P}{p}, \quad \text{tak že} \quad \lambda = \frac{v}{V} = \frac{P}{p}.$$

Bunsen (Gasometrische Methoden, Brunšvík 1857), který konal mnoho pokusů o absorpci plynů, interpretoval je poněkud jinak. Nazval koefficientem absorpce β objem plynu absorbovaný objemovou jedničkou kapaliny za tlaku 760 *mm* a redukovaný na normální poměry, t. j. tlak 760 *mm* 0°Hg a teplotu 0°C. Je-li tedy v_0 objem plynu absorbovaného takto redukovaný, V objem kapaliny, v němž jest pohlcen, jest definitoricky

$$\beta = \frac{v_0}{V}.$$

Tak jest na př. pro vodu teploty 15° a kysličník uhličitý

$$\beta_{15} = 1{\cdot}002.$$

To znamená: jeden litr vody 15° absorbuje 1·002 litru kysličníku uhličitého na normální poměry redukovaného při absorpčním tlaku jedné atmosféry. Koefficient takto definovaný odpovídá na otázku, *mnoho-li* plynu se absorbovalo, ve smyslu obvyklém, kdy totiž otázkou takovou míníme *množství hmotné*; vskutku třeba jen násobiti koefficient β specifickou hmotou plynu, pro normální poměry platící, abychom obdrželi hmotu absorbovaného plynu. Této hmotě úhrnné jest tudíž koefficient β úměrný.

Vztah mezi Bunsenovým koefficientem absorpce β a Ostwaldovou rozpustností λ snadno se najde: Především nutno redukovati objem v z tlaku p a teploty t na 760 *mm* a 0°, čímž obdržíme

$$v' = v \cdot \frac{p}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}.$$

Tolik se absorbovalo za tlaku p; za tlaku 760 by se absorbovalo

$\frac{760}{p}$-kráte více, tedy

$$v_0 = v' \cdot \frac{760}{p} = \frac{v}{1 + \alpha t}.$$

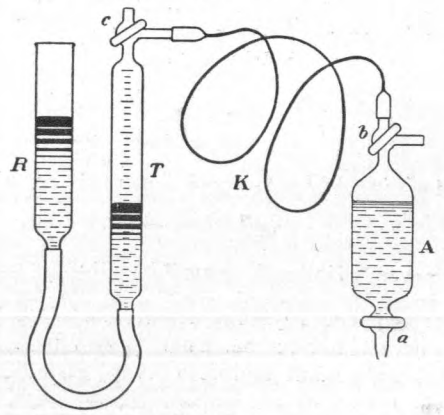
Jest tudíž

$$\beta = \frac{v}{V(1 + \alpha t)} = \frac{\lambda}{1 + \alpha t} \quad \text{a} \quad \lambda = \beta(1 + \alpha t).$$

Jest přirozenější určovati objem rozpuštěného plynu pro tu teplotu, za níž měření se dálo, tedy užívati rozpustnosti λ místo koefficientu β; přes to je dle onoho staršího způsobu mnoho měření interpretováno a proto se o něm zmiňujeme.

§ 450. **Měření a číselné výsledky.**

Velmi mnoho měření prováděno bylo *absorpciometrem* Bunsenovým, který však je dosti komplikovaným; daleko jednodušší a pohodlnější jest Ostwaldův. Absorpční nádoba A (obr. 406.), o známém objemu, opatřená kohoutem a, jest spojena trojcestným kohoutem b, ohebnou kapillárou olověnou nebo ocelovou a olovem krytou K, a druhým trojcestným kohoutem c s graduovanou trubicí T, z níž se dá plyn pomocí ve výši posuvného reservoiru R kapillárou ku kapalině vháněti. Před měřením naplní se A úplně kapalinou, vyvařováním za sníženého tlaku každého pohlceného plynu zbavenou. Potom se kohoutem a vypustí malý objem kapa-



Obr. 406.

liny (ca. 20 cm^3), který se změří, tak že v A zůstane známé množství kapaliny. Nádobkou A se potřepává v thermostatu, při čemž se plyn z T pohlcuje. Zvedáním reservoiru R se reguluje tlak plynu, aby zůstával neustále týž. Pokus je ukončen, když i po déle trvajícím energickém třepání se objem plynu nemění. Jak je patrno, lze jak objem a teplotu kapaliny, tak i objem a tlak absorbovaného plynu snadno stanoviti.

Jako jiné podobné zákony jest i zákon Henryův pouze přibližně platným. V užších oborech tlakových, tak jak zkoumal jej Bunsen v mezích jedné atmosféry, nebo pro CO_2 ve vodě v mezích 4 atmosfér (*Khanikof* a *Longuinine* 1867) neobnášejí odchylky více než asi 1%. *Wroblewski* (1882 a 3) zkoumal tutéž kombinaci až do 30 atmosfér a našel, že odchylky za 0° C obnášely 37%, za 12·43° C pak 29%. Leží v tom smyslu, že za vyšších tlaků absorbuje se plynu poměrně méně. Velmi značné odchylky jeví plyny, které se absorbují vodou ve velmi vysoké míře, jako je kysličník siřičitý (dioxyd síry SO_2), ammoniak nebo chlorovodík. Zde však jistě nastávají akce chemické, neboť na př. HCl nelze z vody vypuditi ani vařením, ani zmenšením tlaku; vždy zůstává část pohlcena, tak že zvyšuje-li se teplota takového roztoku, počne od jisté doby destillovati roztok určitého složení, který destilluje nezměněn.

S teplotou absorpce klesá, čímž je dána možnost vyvařováním vypuditi část pohlcených plynů. Zákon závislosti není jednoduchý, Bunsen užil pro absorpční koefficienty plynů ve vodě tvaru

$$\beta_t = \beta_0 - b \,.\, t + c \,.\, t^2.$$

kde b a c jsou konstanty. Při tom upozornil *E. Wiedemann* (1882) na tu okolnost, že podíl $\frac{b}{\beta_0}$ je u různých plynů skoro týž; změnilo-li se β_0 z 0·0247 (vzduch) na 79·79 (SO_2), vzrostl onen podíl z 0·0265 pouze na 0·0327. Tyto hodnoty v prvém přiblížení (zanedbáme-li $\frac{c}{\beta_0}$) udávají, kolikátá část plynu za 0° absorbovaného zvýšením teploty na 1° prchne; jest tedy tato část u různých plynů téměř stejná. *Bohr* (1897) navrhl pro závislost absorpč. koeff. β_T na absolutní teplotě T tvar

$$\beta_T = \frac{K}{T - n},$$

kde K a n jsou konstanty.

Ale teplota má ještě jeden vliv na děj absorpce: za vyšších teplot jest zákon Henryův přesněji splněn. To vidíme jednak z výše udaných čísel *Wroblewskiho*, zvláště však z pokusů *Simsových* (1861), jenž zkoumal kombinace kysličník siřičitý-voda a ammoniak-voda, mezi tlaky 0—2000, resp. 0—1400 *mm*. V prvém případě jevilo se za 7° C klesání absorpce o mnoho (přes 25) procent, za 50° C byl zákon Henryho splněn; v druhém případě obnášely za 0° odchylky přes 70%, za 100° byl zákon splněn.

V následující tabulce udány jsou některé koefficienty absorpční pro vodu za různých teplot. Nutno však připomenouti, že se výsledky různých pozorovatelů dosti značně liší.

Plyn	Pozorovatel	0°	10°	20°	100°
Kyslík	Winkler	0·0489	0·0380	0·0310	0·0170
Dusík	»	0·0235	0·0186	0·0154	0·0095
Vodík	»	0·0215	0·0196	0·0182	0·0160
Kysličník uhelnatý	»	0·0354	0·0282	0·0232	
Vzduch	Bunsen	0·0247	0·0195	0·0170	
Kysličník uhličitý	»	1·7967	1·1847	0·9014	0·2438
Sirovodík	Schönfeld	4·3706	3·5858	2·9053	
Kysličník siřičitý	»	79·789	56·647	39·374	
Chlor	»		2·5852	2·1565	
Ammoniak	Raoult	1299·6	867·7	712·2	

Po chlorovodíku nejmohutnější absorpci ukazuje voda vzhledem k ammoniaku. Při teplotě nullové absorbuje 1 cm^3 vody 1300 cm^3 ammoniaku (0°, 76 *cm* Hg). Absorpci plynů vodou lze tudíž ammoniakem nejfrappantněji ukázati. Velký ballon naplní se (na př. zahříváním ammoniakové vody) ammoniakem, na to se otvor uzavře korkovou zátkou, kterou je prostrčena skleněná trubice. Když se do ballonu naleje něco málo jen vody — co zatím trubička se rukou ihned neprodyšně uzavře — a když se třepá, absorbuje se rychle veškerý plyn; a když se pak trubička vloží do vody a prst odtáhne, žene se voda, vnějším tlakem vzduchu puzená, prudkým vodotryskem do ballonu. Přidá-li se k vodě něco fenolfthaleinu, barví se pak ammoniakem na černo.

Z jiných kapalin byla nejpodrobněji studována ještě absorpce plynů alkoholem aethylnatým. Pro mnohé plyny ukazuje absorpci větší než voda; uvádíme dle měření Bunsenových absorpční koefficienty β_0 za 0°

pro	N_2	H_2	O_2	CO_2	SO_2
	0·126	0·0693	0·284	4·33	328·6

Absorpcí vodních roztoků solí zabýval se obšírně *Setschenow* (1889). Neučinkuje-li sůl chemicky na absorbovaný plyn, zmenší se absorpce rozpuštěním soli, a to přibližně dle zákona

$$\beta_{\text{rozt.}} = \beta_{\text{vody}} \,.\, e^{-\frac{k}{x}},$$

kde k jest konstanta, x procentuální koncentrace; při tom jest splněn zákon Henryův. Příkladem jest na př. absorpce CO_2 v roztoku NaCl, nebo Na_2SO_4 a p. Účinkuje-li sůl chemicky na plyn, pak jest část plynu vázána solí, druhá část prostě absorbována; tato druhá část se vzrůstající koncentrací klesá, prvá stoupá, tak že obyčejně resultuje vzrůst absorpce s koncentrací; příklad: CO_2 v roztoku Na_2CO_3. V prvé skupině platí Setschenowova věta, že roztoky aequivalentních množství chemicky podobných solí téže kyseliny jsou také absorpciometricky aequivalentní.

Podobný účinek jako rozpuštění soli má přimíšení jiné kapaliny do kapaliny absorbující.

Absorpcí plynu mění se objem kapaliny, a to vždy se zvětšuje úměrně s absorb. objemem plynu; leč spec. hmota někdy roste, jindy klesá. Zvláštní jest, že relativní zvětšení objemu za 0^0 je dáno téměř týmž číslem, vztahujeme-li je na týž objem (na tlak 760 *mm* redukovaný) absorbovaného plynu (*K. Ångström* 1882 a 88).

Na př. absorbuje-li jistý objem vody za 0^0 týž objem plynu, jest relativní zvětšení objemu vodního

u N_2	0·00145	u O_2	0·00115
vzduchu	0·00140	H_2	0·00106
CO	0·00127	CO_2	0·00125

I u velmi značně absorbovaných plynů není tato hodnota značně jinou, ač je vždy o něco menší.

Přisoudí-li se zvětšení objemu jakožto vlastní objem absorbovanému plynu, následuje z toho, že jsou velmi značně komprimovány, asi na 2500 atmosfér.

Při absorpci nastává téměř vždy vývoj tepla, někdy velmi značný, dosud však málo zkoumaný.

Ke konci dlužno zmíniti se o zákonu, jakým se řídí absorpce jednotlivých plynů ve směsi některé obsažených. Množství hmotná absorbovaných plynů jednotlivých jsou v poměru jednak parciálních tlaků, jednak koefficientů absorpčních. Příkladem jest absorpce vzduchu vodou. Poměr parciálních tlaků kyslíku a dusíku jest 21 : 79, poměr koefficientů absorpčních velmi blízce 2 : 1, tudíž poměr absorbovaného kyslíku a dusíku (redukovaného na poměry normální) jest dán poměrem složitým

$$2 \,.\, 21 : 1 \,.\, 79 = 42 : 79.$$

Dle toho má voda procentuálně (dle hmoty)

$$\text{absorbovaného kyslíku } \frac{42}{42 + 79} = 35\%,$$

$$\text{absorbovaného dusíku } \frac{79}{42 + 79} = 65\%.$$

Kdežto vzduch má procentuálně (dle hmoty)

$$\text{kyslíku } \frac{0{\cdot}21 \,.\, 16}{0{\cdot}21 \,.\, 16 + 0{\cdot}79 \,.\, 14} = 23\%,$$

$$\text{dusíku } \frac{0.79 \,.\, 14}{0{\cdot}21 \,.\, 16 + 0{\cdot}79 \,.\, 14} = 77\%.$$

Jest tudíž voda na kyslík poměrně bohatší než vzduch, okolnost, jež pro živočišstvo vod, dýchající žábrami, má veliký význam.

§ 451. **Adsorpce a okkluse plynů.**

Mějmež ve skleněném válci, nahoře zataveném a dole do rtuti ponořeném, uzavřený plyn, na př. kysličník uhličitý, jisté teploty a tlaku atmosférického. Vložíme-li dovnitř válce některá tělesa pevná, na př. žíhané uhlí (zimostrázové) ve rtuti hašené, pozorujeme, že rtuť v nádobě válcovité stoupá, na důkaz, že se tlak daného plynu umenšuje, což zase z toho pochází, že jistá jeho část se ztrácí, jsouc, jak pravíme, pohlcována onou látkou pevnou. Podobný zjev nastává vždy, setká-li se plyn s úplně čistým povrchem nějakého tělesa pevného. Jakožto jeho příčinu představujeme si jakési zhuštění plynu na povrchu látky pevné, jež snadno, obdobně jako absorpci plynů kapalinami na povrchu jejich, si vysvětlíme na základě molekulární představy o hmotě. Ovšem bude množství plynu tím větší, čím větší jest povrch pevného tělesa, tedy zvláště velikým u těles pórovitých, jakými jsou dřevěné uhlí, platinová houba a p. Při tom jest nutno před pokusem odstraniti vrstvu plynovou na tělese se nacházející, čehož docílí se nejlépe žíháním eventuálně za sníženého tlaku.

Zjev popsaný zove se obyčejně po zavedení *Kayserově* (1881) *adsorpcí* plynů, ačkoli u látek, jako je dřevěné uhlí, se velmi podobá absorpci kapalin. Pozorován byl právě u uhlí poprvé *Fontanou* a blíže zkoumán *de Saussurem* (1814). Tento nalezl, že vyžíhané a ve rtuti hašené uhlí bukové adsorbuje za tlaku 724 *mm* a teploty asi 12° C 90-násobný vlastní objem ammoniaku, 85-nás. chlorovodíku, 65-nás. kysličníku siřičitého, 55-nás. sirovodíku, 35-nás. kysličníku uhličitého, 9·3-nás. kyslíka, 7·5-nás. dusíka, 1·8-nás. vodíka. Čísla takováto jsou ovšem pouze okrouhlá, měníce se dosti značně s užitou látkou. Adsorpce trvá po dlouhý čas, den, u kyslíku ještě více, než se dostaví mezný stav.

Důležitou úlohu hrají zde jednak tlak plynu, jednak teplota. Se stoupajícím tlakem stoupá množství adsorbovaného plynu, ale, jak ukázal *Chappuis* (1881) do tlaku 1 atmosféry, *Pfeiffer* (1882) do tlaku asi 8 atmosfér, daleko pomaleji, než úměrně s tlakem, tak že nelze mluviti o zákonu podobném zákonu Henryovu u absorpce kapalinami.

Se stoupající teplotou klesá adsorpce, a to dosti rychle, tak že na př. u CO_2 a uhlí se za 71° C adsorbuje méně než třetina množství adsorbovaného za 0^0 (*Chappuis* 1881).

Velmi důležitou applikaci tohoto poznatku navrhl a provedl *Dewar* (1904), jenž poznal, že s klesající teplotou adsorpce velmi značně stoupá. Jeden cm^3 uhlí adsorboval totiž 0^0 4 cm^3 vodíku, za — 185^0 pak 135 cm^3; podobně stanovil u dusíku čísla 15 a 155, u kyslíku 18 a 230, u argonu 12 a 175, u kysličníku uhličitého 21 a 190, u helia 2 a 15. Helium tvoří jakousi výjimku ze všeobecného chování ostatních plynů. Tlak adsorbovaného plynu za této nízké teploty jest nesmírně malý; můžeme tudíž pomocí adsorpce dřevěného uhlí, na teplotu tekutého vzduchu nebo vodíku ochlazeného, docíliti nesmírně nízkých vakuí, takových, že zbývající vodík má tlak tak nízký, že vakuem tím neprochází el. výboj. Podobná čísla jako *Dewar* obdržel i *Baerwald* (1906), jenž zároveň ukázal, že při adsorpci platinové hubky a okklusi palladia podobného zjevu nestává.

Jest zajímavo, že se přítomností vodních par nezmenšuje na př. adsorpce CO_2 uhlím, kdežto páry aetherové účinnost zjevu podlamují, adsorpce klesne na méně než polovici.

Podobný zjev adsorpce, jako u pórovitých látek, ovšem dle menšího povrchu v menší míře, nastává také u povrchů hladkých, na př. na skle. Zkoumán byl v letech 1881 až 1886 *Kayserem* a *Bunsenem*. Adsorpce na takových úplně čistých a plynů prostých plochách dokončí se během dvou až tří hodin. Adsorbované množství plynu roste s tlakem, klesá s teplotou. Také vodní páry adsorbují se sklem a tvoří na něm povlak, jejž jest nesmírně nesnadno odstraniti. Umývání nebo otírání, ba ani velmi značné zředění okolního vzduchu nestačí; má-li se odstraniti, jest nutno sklo asi na 500^0 C zahřáti.

Podobně děje se adsorpce na hmotách práškovitých, na př. na prášku skleněném, kde nejnověji obšírně byla zkoumána *Mühlfarthem* (1900). Při adsorpci nastávají tepelné zjevy sekundární, zpravidla, zvláště u práškovitých hmot, značné zahřátí.

Na tom založil chemik *Döbereiner* (1780—1849, professor v Jeně) své vodíkové rozžehadlo. Na houbu platinovou, která ze vzduchu má již adsorbovaný kyslík, vede se proud vodíku; adsorpci tohoto vzniká teplo tak značné, že se houba platinová rozžhaví a vodík zapálí. Před zavedením sirek se tohoto rozžehadla dosti užívalo. V životě obecném je známa adsorpce a jí následující absorpce vodních par ze vzduchu látkami hygroskopickými, jež vlhnou, jako mnohé soli (na př. sůl kamenná), látky organické (vlasy, žíně, kostice a j.). Absorpce takové užíváme k vysušování u mnohých látek, jež vodní páru zvlášť ve množství značném pohlcují, jako sehnaná kyselina sírová, chlorid vápenatý, kysličník fosforečný a j. Látek hygroskopických (vlásku) užíváme při hygrometrii.

Adsorpcí na hladkých plochách skleněných a kovových lpícím povlakem vodním a plynovým vysvětlují se (*Waidele* 1843) známé *obrazce Moserovy* (1842), že totiž, když na př. přejedeme suchým dřívkem, kouskem kovu a p. plochu skleněnou (hlazenou kovovou), objeví se čára dříve neviditelná zadýchnutím (ev. sražením rtuťových par).

S adsorpcí nebo snad spíše s absorpcí spřízněna jest t. zv. *okkluse* *) plynů kovy. Tak obsahuje železo kujné, litina i ocel vždy okkludované plyny, železo kujné zejména kysličník uhelnatý, litina vodík, a plyny tyto lze vypuditi jen ve vakuu zahřátím aspoň na 800^0. Také u meteoritů byly okkludované plyny dokázány. Podobně obsahuje stříbro okkludovaný kyslík, aluminium a magnesium i nikl okkludovaný vodík, který při velkém žáru ve vakuu se pouští. Nejvíce pozoruhodnou jest okkluse u platiny a palladia. Platina absorbuje kyslík a vodík již za obyčejných poměrů; jeví se to při polarisaci platinových elektrod v rozředěné kyselině sírové primárním proudem. Rozžhaví-li se platina v kyslíku, okkluduje až 9·1-násobný objem tohoto plynu (*Mior* 1899). Jinak se okkluse jeví zejména vůči vodíku. Nejúčinnějším jest z kovů palladium, jako drát a jako čerň. Palladiový drát v rozředěné kyselině sírové jako negativní pól absorbuje tisíckráte větší objem vodíku, než jest jeho objem vlastní. Při tom jest zvláštní, že mohutnost absorpční palladia vzhledem k vodíku s počátku vyšší teplotou roste až k maximu asi při teplotě 100^0 a pak teprve dle obecného zákona klesá. Při okklusi vzroste délka palladiového drátu asi o 1·6%, jeho objem o 10%.

Jak ukazuje výpočet z pozorování, musí se při tom vodík tak silně komprimovati, že jeho spec. hmota dosáhne hodnoty 1·7 $\frac{g}{cm^3}$; tlak musí býti tedy roven mnoha desetitisícům atmosfér. Snad tvoří se jakási slitina vodíka a palladia. Zjevy tyto zkoumal již *Graham* (1866 a 8); z novějších prací buďtež uvedeny *Mond-Ramsay-Shieldsovy* z let 1896 až 1898.

*) Z latinského occludere (ob-claudere), uzavříti.

Abecední index.

Absolutní soustava měr 112
Absorpce plynů 801
Adhaese 694, 706
Adsorpce plynů 807
Aequator 67
Aequinoctium 69
Almagest 367
Amplituda lineární 413
— úhlová 419
Aneroidy 543
Anomalie tíže 443
Aphelium 70
Apex 63
Apogeum 71
Ar 58
Araeometr Nicholsonův 491
Araeometry pro kapaliny 498
Archimedův zákon 469
Arretace vah 239
Atmosféra 549
— nová 550
Atom 106
Autografy 12
Autogrammy 12

Babinetův kohout 593
Ballistika 344
Barograf Kreilův 546
— Richardův 546
Barometr viz Tlakoměr
Blána poloprostupná 774
Bod hmotný 89
— jarní 68, 69
Bod mathematický 89
— nullový vah 247
— podzimní 69
Body aequinoctiální 69
— sdružené kyvadla 429
— solsticiální 69
Bohnenbergerův přístroj 408
Boyleův zákon 553
Byretty 60

Cardanův závěs 204
Cent metrický 98
Citlivost libelly 21
— vážení 232, 249
Clementinum, tlak barometrický 548
Cykloidální kyvadlo 449

Čas hvězdný 68
— pásmový 78
— sluneční pravý 69
— sluneční střední 71

Daltonův zákon 788
Dasymetr 612
Deformace 631
— koule rázem 685
— permanentní 687
Dekrement logarithmický 244, 457
Délka kyvadla redukovaná 425
— — sekundového 441
Den lunární 289
— solární 69
Densimetr 499

Depresse kapillární 728, 731
— rtuti 525
Destillace rtuti 535
Déšť rtuťový 611
Děvínské polokoule 612
Diagramm pohybu 122, 128
Dialysa 779
Diffuse kapalin 763, 765
— — methody 768
— par 793
— plynů 788, 792
Dilatace 633
— kubická 654
Dimense 117
Dissociace 778
Doba kyvu 420, 423
— — vah 234
Dopružování 672
Dvojice sil 182
Dyna 145

Effekt 151
Elasticita v. pružnost
Elementy 107
Elevace kapillární 728, 731
Ellipsa vrcholů 339
Ellipsoid centrální 390
— setrvačnosti 389
Elongace lineární 413
— úhlová 419
Endosmosa 772
Energie 157
— povrchová 709, 714
— tělesa deformovaného 642
— vodní 518
Erg 150
Exosmosa 772
Expanse plynů 551
Extrapolace grafická 8

Fase pohybu 412
Fesselův apparát 401
Filtrace rtuti 534
Fluidita 750
— absolutní a relativní 751
Fontana Colladonova 511
Formule interpolační 11
Foronomie 122
Foucaultův pokus 445
Frekvence pohybu periodického 415
Frikce 696

Gay-Lussacův zákon 557
Geometrie sil a dvojic 162
Goniometry 18
Gradient barometrický 626
Grahamův zákon 795
Gramm 97
Gramm-atom 109
Gramm-molekula 109
Gravitace všeobecná 266
Greenwich, hvězdárna 78
Guerickova vývěva 583

Heronova báň 611, 618
Hmota 88
— atomová 107
— specifická 102, 481
— — těles tuhých 483
— — kapalin 492
— — vody 482
Hodiny sluneční 76
— tropické 547
Hookův zákon 641
Horizont 67
Horror vacui 522
Hustota 102
— země průměrná 273
— zemských vrstev 277
Hutnost 103
— plynů 621
Hvězda polární 405
Hvězdárna v Klementinu 79
Hvězdy circumpolární 68, 405
Hybnost hmoty 155
— při rázu 678
Hydrometrie 517
Hyperbola rovnoosá 553
Hypsometrie 563
Hypsothermometr 545

Chod hodin 80
Chronometr 81
Chyba parallakční 42

Impuls síly 155
Intensita pole gravitačního 268

Intensita pracovní 151
— tíže 437
Interpolace grafická 8
Invar 43
Isobary 624
Isochronismus 399

Jednotka času gravitační 276
— hmoty gravitační 275
— úhlová 17
Jednotky délkové anglické 32
— délkové starofrancouzské 31
— odvozené 113
— praktické 120
— základní 113
Jezdec u vah 239
Jitro 58
Joule 151

Kapaliny ideální 459
Kapillarita 708
Kathetometr 54
Kelvin 153
Keplerovy zákony 370, 378
Kilogramm 94, 95
Kilowatt 153
Kinematika 122
Kladka 213
Kladkostroje 216
Klín 223
Klouzání 785
Kmitočet 415
Koefficient absorpce 801
— adhaese 694
— diffuse u kapalin 765
— — u plynů 788
— extense jednostranné 654
— fluidity 750
— kontrakce příčné 646
— objemový při tahu 647
— odporový při proudění kapalin 516
— restituce 683
— rychlostní při výtoku kapalin 508
— stlačitelnosti kapalin 705
— tření vlečného 696
— — valného 701
Koefficient tření vnitřního kapalin 750
— — plynů 780
— viskosity 750
— výtokový 508
Kohaese specifická 746
Kolloidy 105
Kolo na hřídeli 218
Kombinace strojů 226
Komparátor 52
Konstanta gravitační 296, 313
Konstanty kapillární 745
— vah 262
Kontinuita pohybu kapalin 501
Kontrakce příčná 645
— paprsku kapalného 508
Konvence metrová 28
Korec 60
Koule mydlinové 720
Kruhy sdružené 431
Krystalloidy 105
Křivka citlivosti vah 250
Kulminace hvězd 68
Kvadratury 290
Kyvadlo 417
— ballistické 686
— differenciální 446
— fysické 425
— indikátor rotace zemské 445
— mathematické 418
— převratné 434
— přístrojem geognostickým 443
— regulátorem hodin 449
— sekundové 440
— sférické 451
— v prostředí odporujícím 451
Kývání vah 234

Ladička chronoskopem 84
Libella kulatá 23
— podélná 20
Limnimetry 292
Lis hydraulický 461
— Realův 465
Litr 59
— a krychlový decimetr 100

Manometry 590, 616
Mariottův zákon 553
Maximum barometrické 625

Mazadla 760
Megadyna 145
Megaerg 150
Meniskus kapillární 732
— rtuťový 524
Meridián 67
Metacentrum 475
Methoda koincidencí 439
Metr 23, 25
Metr-kilogramm 151
Metronom 447
Mez pevnosti 687
— pružnosti 687
Měřítka 42
Měřítko kalibrové 46
— kontaktní pákové 47
— — šroubové 51
Mikron 30
Míle 36
— anglická 37
— geografická 36
— mořská 36
Minimum barometrické 625
— doby kyvu 430
Mnohoúhelník sil 167
Mocenství prvků 111
Modul pružnosti objemové 641
— stlačitelnosti kapalin 705
— pružnosti v tahu 641, 643
— — v tlaku 641, 643
— — tvarové 641
— střižný 641, 661
— Youngův 641, 668
Mohrovy vážky 496
Molekula 108
Moment dvojice 183
— řídící 428
— setrvačnosti 383, 385
— — pro osu těžištěm jdoucí 386
— — pro osy libovolné 387
— — příklady 390
— síly 147, 168
— útlumu 452
Motory vodní 518

Nadir 67
Nádoby spojité 467
Napětí 631, 637
— povrchové 709, 712
Napětí methody určovací 737
— střižné 640
Nivellace 21
Nonius 43
Nutace lunární 405
— solární 405

Oběžnice, vzájemná velikost 64
Objem 89
— atomový 109
— molekulový 109
— specifický 104
Ohýbání 663
Okulár mikrometrický 53
Okkluse plynů 807
Oprava hodin 80
Osa kyvu 426
— plování 475
— světová 67
— volná 393
Oscillace 415
Osmosa kapalin 763, 772
— plynů 794
Osmotický aequivalent 773

Pád volný 318
— po šikmé rovině 320, 698, 702
Padostroj 323
— Atwoodův 326
— Galileův 324
— Poggendorffův 331
Páka 210
Parabola ochranná 342
Paraboloid rotační 352
Paradoxon aerodynamické 623
— hydrodynamické 514
— hydrostatické 464
Parallaxa 43, 64
Pásmo neutrální 663
Penetrace plynů 801
Perigeum 71
Perihelium 70
Perioda pohybu 413
Petřín, tlak barometrický 548
Pevnost 688
— absolutní 689
— proti překroucení 691
— relativní 690
— v tlaku 690

Piezometr 706
Pipetty 60
Plastičnost 692
Plateauovy pokusy 715, 721
Plování tělesa 473
Počasí roční 86
Pohyb 121
— absolutní 121
— centrální 345
— harmonický 411
— křivočarý 129
— kyvadlový 417
— periodický 411
— přímočarý 122
— relativní 121
— rovnoměrný 123
— rovnoměrně urychlený 126
— středový 345
— bodu 122
— tělesa 136
Poiseuilleův vzorec 753
Poissonův poměr 661
Pokusy vývěvou 610, 618
Pole gravitační 266
— měsíce 285
— slunce 283
— země uvnitř 277
— — vně 280
— — v malé výšce 281
Poloměr setrvačnosti 385
Póly světové 67
Poměr útlumu 435
Popud síly 155
Pory 90
Posunutí virtuální 206
Povrchy anomální 748
Práce 149
— jednotka starší a novější 151
Praecesse lunární 404
— solární 404
Pravidlo ruky pravé 399
Princip zachování energie 157
— — hmoty 108
Prostor škodlivý 587, 614
Prototyp kilogrammu 96, 97
— metru 25, 28
Proudění kapalin 500
— — kapillárou 753
— plynů 618
Proudy vzduchové 624
Průběh časový výtoku kapaliny 504
Pružnost těles tuhých 630
— kapalin 704
— v kroucení 657
— v ohnutí 663
— v tahu neb v tlaku 643
Příbuznost chemická 110
Příliv a odliv 288
Přilnavost 694
Přilnavost u těles pevných 694
— u kapalin 706
Pyknometr 487, 492

Radiant 18
Ráz 676
— centrální a excentrický 677
— přímý a šikmý 677
— koulí nepružných 677
— koulí nedokonale pružných 683
— koulí pružných 679
— na pevnou stěnu 682
Reakce 347, 518
Recipient 585
Redukce doby kyvu 423
— vážení na vakuum 476
Registrace sekundy 82
Regulátor centrifugální 352
Revoluce země 62
Rigidita 641
Rok anomalistický 85
— platonický 404
— siderický 84
— světelný 65
— tropický 85
Rotace 136
— země 62
Rovina nakloněná 218
— pohyb 320, 698, 702
— rovnováha 218, 698
Rovnice časojevná 73
— přístavní 291
Rovník 67
Rovnoběžník sil 163
Rovnomocnost dvojic 183
— sil 162
Rovnováha, způsoby 200
Rozloha oběžnic vzájemná 58

Rozměr jednotek odvozených 117
Rozpínavost plynů 551
Roztoky aequimolekulární 777
— isotonické 776
Rtuť, čištění 534
Rychlost 123
— okamžitá 125
— průměrná 124
— úhlová 135
— větru 627
— výtoku kapalin 503
— — plynů 619

Řešení úkolů fysikálních 6
— grafické 8
— numerické 7
— tabellární 11

Segnerovo kolo 624
Sekunda časová 68, 72
— jak se signalisuje 82
— jak se registruje 82
— úhlová 17
Setrvačníky Schmidtovy 395
Setrvačnost 91, 141
Sférometr 48
Síla 138, 139, 143
— direkční 428
— dostředivá 345
— koňská 153
— odstředivá 347
— okamžitá 155
— větru 628
— živá 155
Síly molekulové 629
— v bodě 163
— v přímce 171
— v rovině 173
Skaláry 147
Skupenství 89
Složky 163
Slunovrat letní 69
— zimní 70
Směr větru 626
Soudržnost 629
— u kapalin 706
Soustava měr absolutní 112
— Kopernikova 368
— Ptolemaeova 367
Soustava Tychonova 368
Spád koncentrační 765
— rychlostní 750
— tlakový 626
Specif. hmota vzduchu 559
Spirály 670
Sploštění oběžnic 364
— země 357
Správnost vah 251
Stabilita 203
Stanice meteorol. v Praze 548
Stěre 60
Stereometr 581
Stopa Huygensova 23
Stroj centrifugální 349
— dělicí délkový 37
— dělicí kruhový 41
Stroje jednoduché 205
Střed hmotný 195
— kyvu 425
— rovnoběžných sil 177, 190
— tlakový 466
Střih 633
Suspensace 490
Systémy laminární 721
Syzygie 290
Šířka geocentrická 357
— geografická 357
Šroub 224

Tarování 255
Tekutost 459
Tělesa anisotropní 105
— isotropní 105
Tělíska ponorná 494
Těžiště 196, 203
Theodolit 19
Theorie atomická 106, 110
Tíže všeobecná 266
— na rovníku oběžnic 365
— na rovníku země 360
— v různých šířkách země 360
— zemská 195
Tlak absorpční 801
— hydrodynamický 502
— hydrostatický 462, 639
— na dno 464
— na stěny 465
— v kapalině 460, 468

Tlak osmotický 774
— parciální 788
— povrchový kapalin 710, 715
— vzduchu 522, 627
— vzduchu v Praze 548
— normální 549
— v míře absolutní 542
Tlakoměr 524
— Fortinův 527
— Gay-Lussacův 529
— násoskový 528
— Regnaultův 526
— variační 532
— Wild-Fuessův 531
— staniční a přenosný 524
Tlakoměru naplňování 536
— redukce
— na hladinu mořskou 569
— na norm. intensitu tíže 540
— na teplotu nullovou 537
Toise du Pérou 25, 30
Torricelliho pokus 522
— theorem 503
Torse 657
Toxikologie a dialysa 779
Trajektorie pohybu 122
Translace 136
— země 62
Triangulace poledn. Pařížského 25
Trojúhelník sil 163
Tření valné 700
— vlečné 696
— vnitřní kapalin 750
— — plynů 779
— vnější kapalin 761
— — methody 757
Tuna 97
Turbulentní stav 760
Tvrdost 691

Úhel fasový 412
— krajní 726
— prostorový 18
— rovinný 18
Urychlení 126
— dostředivé 346
— normální 134
— odstředivé 347
— okamžité 128
Urychlení průměrné 127
— tangenciální 134
— úhlové 135
Útlum 452
— kapalinou 757
— při kývání vah 244
Uzel 36

Váha 94
— atomová 107
— specifická 483
Vahadlo 231, 237
Váhy 229, 238
— Mohrovy 496
— točné 309
— vakuové 258
— Zengerovy 498
Vakuum Torricelliho 523
Vakua zkouška 536
Variace tlaku vzduchového 547
Varignonova věta 168
Vazkost 750
Vážení 229
— absolutní 258
— — methodou Bordovou 255
— — Gaussovou 255
— relativní 258
Vega 63
Vektory 147
Vernier 43
Vibrace 415
Virtuální posunutí 206
Virtuální práce 207
Viskosita 750
— absolutní a relativní 751
Volumenometry 499
Vrh 335
— svislý 336
— šikmý 337
Vrchol přílivu a odlivu 289
Vydmoměry 292
Výslednice sil 163
Výtok kapalin 502
— plynů 618
Výměna 582, 585
— Deleuilova 593
— dvojčinná 591
— olejová 598
— rotační Gaedeho 607

Výměna rtuťová 602
— Staudingerova 598
— Töplerova 603
— vodní 606
— zhušťovací 613
Vzduch, specifická hmota 559
Watt 152

Yard 32

Zákon fysikální 6, 9
— gravitační 268
Zákony Keplerovy 370
— stoechiometrické 108
Zástředí 475
Zatížení vah mezní 236
— — největší 238
Závaží 98
— kontrola 258
Země, rozměry 34
Zengerův nutoskop 407
Zengerovy vážky 498
Zenit 67
Zhušťování vzduchu, postup 614
Zkoušení libell 21
Změny stavu plynu 551
— isobarické 552
— isochorické 552
— isometrické 552
— isopiestické 552
— isothermické 552
Zřeďování vzduchu, postup 587

Živá síla 154
— — při rázu 680

Chyby tiskové v Thermice.

Str. 119., ř. 7. zdola; místo: *ztužené* má býti *zkapalněné.*
» 255., » 13. shora; » $Na_2S_2O_4$ má býti Na_2SO_4.
» 346., » 2. zdola; » $E - e$ má býti $E' - e$.
» 379., » 12. » » *kysliku* má býti *kysličníku.*
» 419., » 14. » » $\frac{q}{N}$ má býti $\frac{N}{q}$.
» 419., » 17. » » $N' \frac{N}{q}$ má býti $N' \frac{q}{N}$.
» 554., » 3. shora; » *isochromat* má býti *isotherem.*
» 564., » 24. » » $e^{-\frac{c}{\lambda^2 T^2}}$ má býti $e^{-\frac{c}{\lambda^2 T}}$.
» 566., » 26. » » $C\left(\frac{\alpha}{c}\right)^{\alpha}$ má býti $C\left(\frac{\alpha}{c}\right)^{\alpha} e^{-\alpha}$.
» 577., » 8. » » *12.6000* má *12.600.*
» 585., » 26. » » *vypařování* má býti *vyzařování.*
» 635., » 7. » » ABA_0B_0 má býti ABB_0A_0 atd.
» 327., v tabulce jsou sázeny první tři hodnoty vah atomových a podílů $\frac{\mu}{A}$ o řádek výše než býti mají.
(Srovnej Časop. math. a fys. 37, pag. 551, 1908, prof. Dr. V. Felix.)

Sborník Jednoty českých mathematiků v Praze obsahuje dosud tato čísla:

I. Dr. Ed. Weyr, **Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu.** (Cena 4 K 80 h, pro pp. členy 3 K 60 h.)

II. Dr. F. Koláček, **Hydrodynamika.** (Cena 7 K 60 h, pro pp. členy 5 K 70 h).

III. Dr. F. J. Studnička, **Úvod do nauky o determinantech.** (Cena 5 K 60 h, pro pp. členy 4 K 20 h.)

IV. Dr. Č. Strouhal, **Mechanika.** (Cena váz. 15 K, pro pp. členy 11 K.)

V. Ed. Weyr, **Počet differenciálný.** (Cena váz. 12 K, pro pp. členy 8 K.)

VI. Dr. Č. Strouhal, **Akustika.** (Cena váz. 11 K, pro pp. členy 7 K 50 h).

VII. Dr. F. J. Studnička, **Úvod do analytické geometrie v rovině.** (Cena váz. 7 K, pro pp. členy 5 K.)

VIII. Jan Koloušek, **Mathematická theorie důchodů jistých a půjček annuitních.** (Cena váz. 6 K 50 h, pro pp. členy 4 K 50 h.)

IX. Dr. F. Koláček, **Elektřina a magnetismus.** (Cena váz. 17 K, pro pp. členy 12 K.)

X. J. Sobotka, **Deskriptivní geometrie promítání parallelního.** (Cena váz. 18 K, pro pp. členy 11 K 50 h.)

XI. Dr. Č. Strouhal, **Thermika.** (Cena váz. 19 K, pro pp. členy 14 K.)