SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE.

Číslo VI.

Č. STROUHALA

AKUSTIKA.

V PRAZE.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ

AKUSTIKA.

Sepsal

c. k. dvorní rada
DR. ČENĚK STROUHAL,
professor exp. fysiky na české universitě K. F.

Vydáno podporou č. akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění.

V PRAZE 1902.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Knihtiskárna B. Stýbla v Praze.

Předmluva.

Předkládaje vědecké veřejnosti naší *„Akustiku“* nemám jiného přání, než aby přijata byla s touže přízní, jaké se všestranně měrou tak hojnou dostalo Mechanice. Celá bohatá látka vědecká, kterou za dob našich akustika obsahuje, rozdělena v osm hlavních oddílů; postup pak výkladu v každém oddílu jednotlivém upraven v odstavcích tak, jak dle přirozeného rozvoje a dle logické souvislosti jevilo se býti nejvhodnějším. Toto rozdělení v odstavce, jichž nadpisy zároveň udávají obsah, jest právě v učebnici fysiky výhodné jak pro první studium, tak zejména pro opakování. Z *podrobností* přijato tolik, kolik třeba, aby se *základní věci* doplnily, nikoli však, aby se podrobnostmi přílišnými ztrácel přehled celkový; nemá zajisté kniha býti archivem všech specialních prací akustických, nýbrž učebnicí pro studující a spisem, v němž by poučení ve věcech hlavních nalezli četní přátelé, jež akustika má zejména *v kruzích hudebních*. Vzhledem k těmto propracován byl podrobněji zvláště oddíl *akustiky hudební*. Jestiť přáním mým, aby knihy bylo užíváno též při vyučování hudbě, kde vedle cvičení praktických se pěstují *výklady theoretické o fysikalních základech hudby*. Dvojí tisk, vedle garmondu též borgisem, volen jednak pro úsporu místa, jednak aby oku byly věci důležitější odděleny od méně důležitých, jež při studiu začátečním možno i vynechati.

Část obrazová jest — vyjímajíc některé reprodukce z původních děl cizích — vesměs nová, a to nikoli jen nová rýsováním, nýbrž z velké části původním provedením. Jako v Mechanice jsou i zde v Akustice obrazce druhu dvojího. Apparaty byly dle originalů, jež jsou ve sbírkách c. k. ústavu fysikalního č. university, fotografovány a pak fototypicky reprodukovány. Přednosti i vady obrazců takových vytkl jsem již v předmluvě k Mechanice. Podávají pěkný přehled celkový, činí dojem skutečnosti, neuspokojují však v podrobnostech. Vinu toho nemá ovšem fotografie. Tato dává obrazy velice živé, i v podrobnostech věrné a zřetelné; zmenšením na format reprodukce zhorší se obraz poprvé, ale otištěn na tuhý, křídový papír jest pořád ještě dosti dobrý; podruhé se však zhorší, když se otiskne do textu na papír obyčejný. A tak mnohdy, když by se dle fotografie očekávalo, že se dostane obrazec velmi pěkný, nebývá výsledek tomuto očekávání přiměřený. Celkem jsou obrazce tyto značně zdařilejší než v Mechanice. Přes tento rozhodný pokrok není ovšem pochybnosti, že by dřevoryty byly lepší; ale jsou značně nákladnější; já pak jako autor bych nechtěl uvaliti velký ten náklad na Jednotu českých mathematiků, i kdyby obětavě jej převzíti chtěla. Neboť apparaty fysikalní nejsou povahy dokumentarní; mění se stále, zdokonalují se modelly, zlepšuje se provedení, čímž se stává, že často apparat dnes moderní, zítra se jeví zastaralým. Tak na př. vývěva Staudingerova v Mechanice (pag. 566.) popsaná a několika obrazci znázorněná dnes jest již ve sbírkách fysikalního ústavu předělána na vývěvu olejovou. Při každém novém vydání spisu vyskytnou se tedy novosti, jimiž obrazce dřívější se stávají bezcennými. Proto by nebylo vhodné na ně věnovati velký náklad. Jest známo, jakým nepříznivým dojmem působí na odborníka obrazce apparatů zastaralých, již dávno lepšími a dokonalejšími nahrazených, jež se ze starých vydání učebnic — jinak textově velmi dobrých — vlekou i do vydání nejnovějších, poněvadž nakladatel má k nim cliché, jež stála dosti peněz a jež proto se neodhodlává nahraditi novými též nákladnými. Proto jest lépe voliti lacinější způsob obrazcových reprodukcí. V budoucích však spisech, jež hodlám ještě vydati, budu k celkovým pohledům apparatů fototypicky zjednaným připojovati ve větším počtu než dosud schematické znázornění jednotlivých podrobností.

Jinak má se věc u obrazců povahy geometrické neb schematické. Reprodukce zinkografická stačí tu úplně. Obrazcům těmto věnoval jsem velkou píli a péči; rýsoval jsem je sám chtěje je míti co nejlepší; čtenář pozná, že obrazců s podobnou jen přesností provedených nemá žádná kniha cizojazyčná.

Část textová jest nová dle své formalní úpravy, nikoli, jakož jest při učebnici samozřejmo, dle svého obsahu meritorního. Nicméně vykazuje kniha i v této části mnoho nového: v textu, v úpravě pokusů, v četných tabulkách nově počítaných, v diagrammech a pod., což vše dobře vystihne každý čtenář, kterýž knihu s jinými učebnicemi cizojazyčnými bude srovnávati.

Práce fotografické prováděl dřívější assistent fysikalního ústavu, nyní professor č. techniky Brněnské, Dr. *Vladimír Novák*. Obrazce geometrické mnou provedené rýsoval pérem a mnohé schematické skizzy prováděl samostatně inženýr p. *Karel Friedl*. Reprodukci obrazců obstaral osvědčený závod *Unie-Vilím*. Všem zde jmenovaným děkuji upřímně za ochotu a péči, s jakou práce tyto vykonávali. Rovněž p. prof. *Aug. Pánkovi*, jenž opět při obstarání korrektury mi byl laskavě nápomocen a mnohou dobrou radou mi přátelsky přispěl, vzdávám díky srdečné. Idealu knihy bez tiskových chyb přiblížila se Akustika více než Mechanika; zůstaly jen chyby, kteréž, až na několik málo výjimek, smysl nikde neruší. V této příčině dlužno s uznáním vzpomenouti též knihtiskárny *B. Stýbla*, a zejména faktora tiskárny p. *V. Seidla*, jenž každému přání mému, formalní úpravy se týkajícímu, s největší ochotou vždy vyhovoval. Dodatečně připojen jest též seznam tiskových chyb, kteréž zůstaly v Mechanice, a z nichž některé, na př. číselných dat se týkající, jsou závažnější.

Vypracovati „akustiku fysiologickou" uvolil se ku přání mému odborník k tomu v prvé řadě povolaný, professor fysiologie na české universitě Dr. *Fr. Mareš*; za kollegialní ochotu jeho. kterouž tím ve prospěch dobré věci projevil, děkuji mu co nejvřeleji.

Ke konci vzdávám díky *Jednotě českých mathematiků*, kteráž přejala náklad na vydání Akustiky, a všem členům Výboru Jednoty, kteří o vydání její projevovali vždy opravdový zájem, konečně *České Akademii císaře Františka Josefa* pro vědy, slovesnost a umění, kteráž Jednotě subvencí šesti set korun na vydání díla ochotně přispěla.

V DĚČÍNĚ dne 12. října 1902.

Dr. **Čeněk Strouhal**.

Obsah.

Úvod.

I. Pohyb kmitavý.

II. Pohyb vlnivý.

Vlnění v řadě bodové.

Vlnění v útvarech dvojrozměrných.

Vlnění v útvarech trojrozměrných.

III. Základy theorie hudby.

IV. Šíření zvuku.

V. Vznik tonů chvěním příčným.

Struny.

Tyče.

Ladičky.

Desky.

Zvony.

Blány.

VI. Vznik tonů chvěním podélným.

Tyče.

Struny.

Píšťaly.

VII. Úkazy chvění a znění současného.

VIII. Fysiologie sluchu.

(Dr. *F. Mareš.*)

ÚVOD.

§ 1. Úkoly akustiky.

Akustika*) jest nauka o dojmech sluchových. Definicí touto jest stanoven rozsah akustiky v nejširším slova smyslu; náleží sem tudíž studium veškerých dojmů, jež zdravým organem sluchovým k vědomí našemu přicházejí a jež různí se, jak denní zkušenost ukazuje, v rozmanitosti nekonečné i dle kvality i dle kvantity; šelestění zvadlého listí jako hukot moře, řeč a zpěv lidí, hlasy zvířat, zvuky hudebních nástrojů nejméně zdařilých i nejvýše zdokonalených, a všechny ty jiné a jiné dojmy sluchové mohou býti předmětem vědeckého zkoumání.

Avšak ve zkoumání tomto rozlišují se i dle rozvoje historického i dle pragmatické povahy věci dva hlavní směry. Uvědomujíce sobě dojmy zvukové můžeme pozornost svou obraceti k tomu, jak ve svém účinku akustickém — nikoli po případě slovním — na mysl naši působí, jak účinkují příjemně neb nepříjemně, jak dovedou rozjařiti neb konejšiti, rozveseliti neb zasmušiti, jak mohou stupňovati se až na výši požitku uměleckého ve zpěvu a hudbě. V tomto směru jeví akustika stránku psychologickou, po případě aesthetickou; a směr tento, kdy pozorování přestává jenom na dojmech subjektivních, postupujíc na základech empirických, jest historicky nejstarší a vrcholí ve stkvělém rozvoji theorie i praxe hudební. Můžeme však také, uvědomujíce sobě dojmy sluchové, klásti sobě otázku, jak každý subjektivní dojem takový souvisí s objektivní svou příčinou, jak musí organ sluchový býti podrážděn, aby dojmy zvukové vůbec aneb jisté dojmy zvlášť ve vědomí našem vznikaly.

*) ἀκούω slyším, od toho adj. ἀκουστικός k slyšení se vztahující.

Tímto směrem béře se akustika fysikalní, spočívající na základech mechanických; pokračování a doplnění své má v akustice fysiologické, kteráž přihlíží k organu sluchovému zvlášť, popisujíc jeho složení a zkoumajíc, jak podráždění vnější se šíří do jeho ústrojí až ke vláknům nervovým.

Při nynějším stavu věci převládá při akustice hudební stránka umělecká, při akustice fysikalní stránka vědecká. Nicméně stýkají se obě v bodech velmi četných. Akustika fysikalní přejímá z theorie hudby základní pojmy a definice, užívá k pokusům nástrojů hudebních, jak je praxis hudební zdokonalila; naopak theorie hudby vysvětluje fysikalní podstatu tonů i zvuků, přejímá a zužitkuje pro praxis výsledky akustiky fysikalní. Proto třeba, aby fysik, pracující v akustice, měl sluch hudebně vycvičený a znal aspoň základy theorie hudby; naopak i hudebníku dobře poslouží, když se seznamuje s fysikalními definicemi a methodami akustickými, ježto nabývá tím pro theorii hudby dobrých základů.

Rozborem tímto jest již naznačen způsob, kterým ve výkladech akustických nejvhodněji lze postupovati. Především dlužno zkoumati, jakého druhu jest podráždění organu sluchového, aby vznikaly dojmy zvukové vůbec. Při tom studujeme jakožto nejdůležitější ty dojmy, jež povšechně zvuky hudebními zoveme, a jež vyznačují se jistou pravidelností, kladouce jako do druhé řady dojmy nepravidelné, jak je řeč rozmanitými jmény (šumot, hukot, rachot, praskot a pod.) označuje. V skutku jsou ony dojmy hudební jednoduššími; z nich skládají se dojmy nepravidelné, jevící se býti směsicí přečetných v pestrém neladu se hromadících zvuků, jež jednotlivě pro jich kratinké trvání nebo jich nepatrnou intensitu nelze rozeznávati.

Ukazuje se, že prostředí, — z pravidla vzduch — se kterým sousedí vnější části ucha, musí býti uvedeno ve zvláštní druh pohybu, který povšechně *vlněním* zoveme. Tento pohyb, vztahující se k prostředí, tudíž k *soustavě* nejmenších jeho částic, dlužno pokládati za pohyb celkový, skládající se z pohybu všech těchto jednotlivých částic; tyto pak vykonávají při tom jisté pohyby periodické kolem svých poloh rovnovážných, pohyby, jež povšechně jakožto *kmitavé* označujeme. Jest tudíž odůvodněno, když se výklady akustické začínají studiem kmitavého pohybu bodu, a dále studiem vlnivého pohybu prostředí. Tyto výklady přípravné jsou dle povahy své ryze mechanické a mají proto význam všeobecnější, nejen pro akustiku, nýbrž i pro jiné obory fysikalní. Potom následují části v užším slova smyslu akustické. Při těch lze rozeznávati část hudební a fysikalní.

Vlněním vzduchu vznikají v uchu našem dojmy, jež označujeme jako zvuky, po případě tony. Stanoviti jich rozdílnosti ve kvalitě i kvantitě, jich vzájemný poměr, jich posloupnost a jich postavení a užívání v hudbě, jest úkolem, který lze projednávati na základě toho, jak se dojmy ty uplatňují ve vědomí našem. Avšak dojmy tyto jsou podmíněny zvláštním pohybem těles, jež povšechně jako znějící označujeme. Vyšetřovati pohyby těles znějících, jich zvláštnosti, se zřetelem k jich užívání v hudbě, jest úkolem, který lze řešiti bez ohledu na dojmy zněním způsobené, na základě objektivními methodami fysikalními. Vzhledem k mechanické povaze úkolu zdálo by se býti přirozeným, tuto část akustiky ihned přidružiti k nauce o pohybu kmitavém a vlnivém, kteráž má úplně ráz mechanický. Dlužno však pamatovati, že při vyšetřování pohybu těles znějících — třebas methodami fysikalními — užíváme současně *sluchu* jakožto přístroje největší citlivosti, tak že stránka mechanická jest vydatně doplňována stránkou akustickou. Proto jest výhodno o dojmech těchto již dříve jednati, tedy onu část hudební předeslati. Naopak zase mnohé otázky do části hudební náležející, a to otázky podstatné, nalézají svého vysvětlení a odůvodnění v části fysikalní. Celkově souhlasí postup tento s historickým rozvojem akustiky. Mezi ony hlavní části vkládá se jako sprostředkující ta, která jedná o šíření se zvuku, t. j. o tom, jak od těles znějících přichází popud až k organu sluchovému. Závěrkem jest pak studium úkazů souzvuku, kteréž vyžadují znalosti i stránky hudební i fysikalní a kteréž jsou theoreticky nejdůležitější a nejzajímavější.

Rozdělení akustiky shledáváme v různých knihách provedené ve způsobu dosti rozmanitém dle toho, s jakého hlediska autor rozdělení to upraví. Celkem jest souhlas v tom, že se předesílá jako přípravná část nauka o kmitání bodu a vlnění ústředí; v dalším však výkladu rozcházejí se různí autorové dle zvláštního svého stanoviska dosti značně.

I.

Pohyb kmitavý.

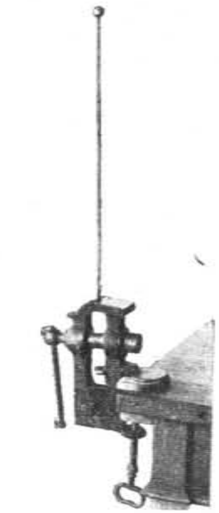
§ 2. Vznik pohybu kmitavého.

Budiž dána soustava hmotných bodů tvořících ve své nepřetržité souvislosti pružný útvar, buď jedno — neb dvou — neb trojrozměrný. Každý bod takového útvaru nalézá se účinkem svého okolí, působením sil molekulových, v rovnovážné poloze *stabilní*. Vyšine-li se tudíž takový bod (z pravidla zároveň s některými body sousedními) v mezích pružnosti z této polohy kterými body sousedními) v mezích pružnosti z této polohy, v jistých směrech síly molekulové, dávající sílu výslednou f. Pustí-li se vyšinutý bod, uvádí se působením síly té v pohyb, o němž povšechně lze říci tolik, že se děje *kolem polohy rovnovážné* přesně neb aspoň velmi přibližně *periodicky*. Pohyb takový zoveme *kmitavým* (vibračním, oscillačním); pravíme, že bod vykonává *kmity* (oscillace, vibrace) kolem rovnovážné polohy v době T, kteráž se zove *periodou* pohybu.

Kmitající bod opisuje kolem polohy rovnovážné dráhu, která všeobecně jest křivočarou. Stane-li se však vyšinutí bodu přímo proti síle f bez jakéhokoli postranního nárazu, kterým by se bodu udělila jistá rychlost začáteční ve směru jiném, vznikne kmitavý pohyb *přímočarý*. Délka y, o kterou kmitající bod jest v jakékoli své poloze od polohy rovnovážné vzdálen, označuje se jakožto jeho *výchylka* čili *elongace*.

Majíce úvodní tyto výklady objasniti pokusem, vyběřeme pružnou ocelovou tyč průřezu libovolného, na př. pravoúhlého,

jeden její konec opatříme lesklou kuličkou, aby její pohyb bylo dobře pozorovati, druhý zapneme do svěráku (obr. 1.). Když pak kouli z rovnovážné polohy jednou v tom, podruhé v jiném směru vyšineme a pustíme, vznikají kmity křivočaré i přímočaré dle toho, jakým směrem vyšinutí se stalo. Je-li perioda kmitová dostatečně krátká, splývají následkem trvání dojmu zrakového jednotlivé po sobě následující polohy lesklé kuličky tak, že vynikne dráha kmitová ve svém celku spojitě.


Obr. 1. Kmitavý pohyb kuličky na pružné tyči.

Kmity přímočaré jeví se býti oproti křivočarým jednoduššími; proto jest výhodno studovati především kmity přímočaré, určiti jich průběh a zákonitost a na tom základě pak vykládati kmity křivočaré.

§ 3. Přímočaré kmity jednoduché.

Z pohybů kmitavých přímočarých vyniká svou důležitostí a svým významem v akustice (i v optice) ten, který zoveme *kmitáním jednoduchým*, anebo též jednoduchým *pohybem harmonickým* (Thomson). K tomuto přicházíme uvažujíce, jak síla f, vznikající při vyšinutí kmitajícího bodu z polohy rovnovážné, souvisí s jeho výchylkou y. Povšechně lze vždy říci, že s touto výchylkou roste; jakým však způsobem, zda urychleně, neb opozdĕně, rozhodují bližší poměry. Kdybychom vzrůstání síly f znázornili graficky, nanášejíce výchylku y za úsečku a sílu f za pořadnici, obdrželi bychom čáru, kteráž jest k ose úseček buď konvexní nebo konkavní.

Skutečnost přivádí však ve věci této zjednodušení, kteréž má pro celou akustiku význam základní. Ukazuje se totiž, že každou čáru takovou v prvních počátcích, t. j. pokud výchylky y jsou velmi malými, lze pokládati za *přímou*. Jinými slovy, vztah mezi silou f a výchylkou y, pokud tato zůstává velmi malou, lze pokládati za linearní. Poněvadž pak síla f při dané hmotě vychýleného bodu jest úměrná s urychlením φ, kteréž tomuto bodu udílí, lze též říci, že vztah mezi urychlením φ

a výchylkou y jest linearní, tak že jej lze vyjádřiti základní rovnicí

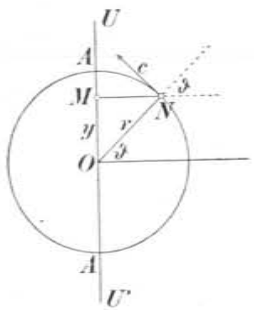
$$\varphi = -\varkappa y.$$

Rovnice jest v souhlasu s tím, že pro $y = 0$ jest též $\varphi = 0$; negativní pak znamení naznačuje, že směr urychlení jest opačný směru výchylky.

Konstanta úměrnosti $\varkappa$ vyjadřuje, zda-li volněji nebo prudčeji stoupá urychlení φ s výchylkou y. Rozměr její jest

$$\frac{1}{\mathrm{T}^2} \text{ všeobecně,} \qquad \frac{1}{sec^2} \text{ zvlášť.}$$

Mnohdy označuje se $\varkappa$ jako urychlení ($\varphi = \varkappa$) pro výchylku jednotkovou ($y = 1$).



Obr. 2. Pohyb harmonický jako průmět rovnoměrného pohybu kruhového.

Základní onou rovnicí jest pohyb bodu náležejícího pružnému útvaru a vychýleného poněkud z polohy rovnovážné úplně určen. Jest to pohyb, který jsme v Mechanice*) seznali jakožto pohyb *harmonický*. Zde v akustice označujeme jej jakožto *jednoduchý* pohyb *kmitavý*, *oscillační*, *vibrační*. Konstanty tohoto pohybu jsou *amplituda* r a *perioda* T. Kmitá-li bod M (obr. 2.) kolem své polohy rovnovážné O, obdržíme jednotlivé po sobě následující jeho polohy jako průměty bodu N, pohybujícího se konstantní úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$ na obvodě kruhu, který se amplitudou r kolem rovnovážné polohy O opíše. Počítá-li se plynulá doba t od okamžiku, kdy bod M ve směru positivním (zdola nahoru) právě z rovnovážné polohy O vychází, a zavede-li se úhel časoměrný

$$\vartheta = \omega t \quad \text{čili} \quad \vartheta = \frac{2\pi}{T}\, t,$$

jest kmitavý pohyb bodu M určen rovnicemi

$$y = r \sin \vartheta$$
$$v = \omega r \cos \vartheta$$
$$\varphi = -\omega^2 r \sin \vartheta.$$

*) Mechanika pag. 397, 1901.

Rovnice tyto formulují mathematicky pohyb průmětu bodu N; proto se konstanty těchto rovnic přímo vztahují k pohybu tohoto bodu. Tak jest ω jeho úhlová, ωr jeho linearní rychlost (c), $\omega^2 r$ jeho centralní urychlení (a); čtverec ω^2 udává konstantu $\varkappa$ úměrnosti mezi φ a y. Perioda T jest touto konstantou samotnou určena, dle vzorce

$$\varkappa = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Na místě periody T jest v akustice vhodné zavésti počet N kmitů za jednotku času vykonaných, *frekvenci* kmitovou, čili, jak zkrátka říkáme, *kmitočet*. Patrně jest

$$N = \frac{1}{T}, \qquad T = \frac{1}{N},$$

t. j. veličiny T a N jsou převratné.

Číslo N není číslem prostým, nýbrž má rozměr

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \text{ všeobecně,} \qquad \frac{1}{sec} \text{ zvlášť,}$$

vzhledem k tomu, že značí jistý počet za jednotku času.

Hořejší rovnice pro y, v, φ, jsou potud specialní, že pohyb v okamžiku nullovém z rovnovážné polohy začíná. Všeobecněji píšeme je ve tvaru

$$y = r \sin(\vartheta + \varepsilon)$$
$$v = \omega r \cos(\vartheta + \varepsilon)$$
$$\varphi = -\omega^2 r \sin(\vartheta + \varepsilon),$$

zavádějíce úhel ε jakožto *fasi pro okamžik nullový*. Je-li ε positivní, značí to, že pohyb v okamžiku nullovém již do jisté fase pokročil; jinak, je-li ε negativní, že pohyb v okamžiku nullovém jest opozděným a nalézá se teprve v oné fasi dané.

Shrnouce tedy vše v jedno, můžeme jako konstanty kmitového pohybu uvésti

amplitudu r,
periodu T nebo kmitočet N,
úhel fasový ε pro okamžik nullový.

Ostatní nahoře uvedené veličiny

$$\varkappa, \quad \omega, \quad c, \quad a$$

lze z oněch konstant jednoduše vypočísti.

Pohyby kmitavé, jak ve skutečnosti přicházívají, není-li učiněno opatření zvláštní k jich udržování, ponenáhlu přestávají následkem útlumu. Ony rovnice, nahoře uvedené, platí pro případ, kdy útlum není žádný; jinak stanoven jest pohyb rovnicemi analogickými, jak v Mechanice*) byly odvozeny pro pohyb kyvadla v ústředí odporujícím.

Experimentalně lze jednoduchý pohyb kmitavý ukázati velmi pěkně pomocí pružných kovových spiral, zavěšených na háčkách a dole na př. koulí železnou zatížených. Proporcionalita urychlení s elongací platí zde v mezích značných; amplituda udržuje se déle, pohyb má útlum mírný; periodu lze měniti zavěšením menších neb větších hmot; jsou-li na př. hmoty zavěšené v poměru 1 : 4, jest perioda v poměru 1 : 2 aspoň velmi přibližně, pokud hmota spiraly proti hmotám zavěšeným jest malou; úkaz tento, plynoucí z rovnice $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$, lze velmi pěkně předvésti na dvou shodných spiralách (z jediné spiraly půlením zjednaných), u nichž tedy síla s vyšinutím stoupá stejnou měrou; že však hmota na druhou spiralu zavěšená jest 4kráte větší, vzniká zde urychlení 4kráte menší; tím jest $\varkappa$ 4kráte menší a následkem toho pak T dvakráte větší, což s pokusem velmi dobře souhlasí.

Pozoruhodnou jest poznámka, v jakém vzájemném vztahu jsou elongace y a rychlost v.

Z hořejších rovnic plyne totiž

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1.$$

Sestrojíme-li tedy ellipsu o poloosách r a c, udávají pravoúhlé souřadnice y a v každého jejího bodu současné hodnoty elongace a rychlosti.

§ 4. Rozbor mathematický.

Řešení mathematické vychází od rovnice

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -hy$$

vyjádřující úměrnost síly s výchylkou; konstanta h stanoví svou velikostí, zda síly s vyšinutím přibývá mírněji nebo prudčeji; často se označuje jako síla příslušící vyšinutí jednotkovému. Násobíce hořejší rovnici výrazem $2\frac{dy}{dt}$ a integrujíce, obdržíme

$$m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + hy^2 = hr^2,$$

kdež konstanta r znamená amplitudu, t. j. maximalní výchylku y pro okamžik, kdy rychlost pohybu $\frac{dy}{dt}$ se stává nullou. Rovnice vyjadřuje

*) Mechanika, pag. 433.

zachování energie; živá síla $\frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ a funkce potencialní $\frac{1}{2}hy^2$ střídají se svou velikostí tak, že jich součet zůstává konstantním.

Oddělíme-li proměnné

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{h}{m}}\,.\,dt,$$

a integrujeme-li, obdržíme

$$arc\ sin\frac{y}{r} = t\sqrt{\frac{h}{m}} + \varepsilon,$$

načež, zaměníme-li závislost funkcionalní, nabudeme rovnice známého již významu

$$y = r\ sin\left(t\sqrt{\frac{h}{m}} + \varepsilon\right).$$

Perioda T pohybu vychází ze vzorce

$$T\sqrt{\frac{h}{m}} = 2\pi, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{h}}.$$

Patrně jest — vzhledem k dřívějšímu

$$\frac{h}{m} = \varkappa = \omega^2.$$

Jinak integruje se ona základní rovnice methodicky, totiž substitucí

$$y = e^{at}.$$

kterouž vychází

$$ma^2 + h = 0$$

$$a = \pm i\sqrt{\frac{h}{m}}.$$

Všeobecný integral má tvar

$$y = C_1 e^{it\sqrt{\frac{h}{m}}} + C_2 e^{-it\sqrt{\frac{h}{m}}}$$

čili

$$y = (C_1 - C_2)\ sin\ t\sqrt{\frac{h}{m}} + (C_1 + C_2)\ cos\ t\sqrt{\frac{h}{m}}$$

anebo

$$y = A\ sin\ t\sqrt{\frac{h}{m}} + B\ cos\ t\sqrt{\frac{h}{m}}$$

Výraz tento převedeme na dřívější, kladouce

$$r\ cos\ \varepsilon = A,$$

$$r\ sin\ \varepsilon = B.$$

Pak jest opět

$$y = r \sin\left(t\sqrt{\frac{h}{m}} + \varepsilon\right),$$

$$r^2 = A^2 + B^2, \qquad tg\,\varepsilon = \frac{B}{A}.$$

Případ, převésti funkci y formy

$$y = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta$$

na funkci formy

$$y = r \sin(\vartheta + \varepsilon),$$

přichází častěji; poslední rovnice ukazují, v jakém vztahu se konstanty nové funkce nalézají s konstantami funkce původní.

Když se přihlíží k útlumu, dlužno připojiti v oné základní rovnici člen, jímž se útlum vyjádří. Z pravidla brává se síla útlumu za úměrnou rychlosti pohybu; základní rovnice zní pak

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -hy - p\frac{dy}{dt},$$

kdež jest p koefficient útlumu. Majíce rovnici tuto integrovati, položíme opět

$$y = e^{\alpha t}$$

a dosadíme; tím vyjde

$$m\alpha^2 + p\alpha + h = 0,$$

$$\alpha = -\frac{p}{2m} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4hm}}{2m}.$$

Dlužno pak rozeznávati případy dva:

$$4hm < p^2, \qquad 4hm > p^2$$

anebo, zavedeme-li kvadratický doplněk q^2,

$$4hm = p^2 - q^2, \qquad 4hm = p^2 + q^2.$$

Pak vyjde

$$\alpha = -\frac{p}{2m} \pm \frac{q}{2m}, \qquad \alpha = -\frac{p}{2m} \pm i\frac{q}{2m}.$$

Položíce ke zkrácení

$$\frac{p}{2m} = a, \qquad \frac{q}{2m} = b,$$

obdržíme pro oba případy

$$\alpha = -a \pm b, \qquad \alpha = -a \pm ib.$$

Případ prvý vede k integralu

$$y = C_1 e^{(-a+b)t} + C_2 e^{(-a-b)t}$$

čili

$$y = e^{-at}(C_1 e^{bt} + C_2 e^{-bt})$$

anebo

$$y = e^{-(a-b)t}(C_1 + C_2 e^{-2bt}).$$

Poněvadž jest $a > b$ (čili $p > q$), jsou oba exponenty negativními; pohyb jest tudíž aperiodický.

Případ druhý, zde důležitější, vede k integralu

$$y = C_1 e^{(-a+ib)t} + C_2 e^{(-a-ib)t}$$

anebo, jinak vyjádřeno,

$$y = e^{-at}(C_1 e^{ibt} + C_2 e^{-ibt})$$

což lze opět, jako dříve již učiněno, upraviti na formu

$$y = e^{-at}(A \sin bt + B \cos bt)$$

anebo

$$y = e^{-at}\, r \sin(bt + \varepsilon).$$

Rovnice tato obsahuje dva faktory; jeden periodicky se měnící, druhý stále klesající. Pohyb lze tudíž pokládati za kmitavý ale amplitudou re^{-at}, která během času t stále se umenšuje.

Perioda T pohybu vychází z podmínky

$$bT = 2\pi,$$

$$T = \frac{2\pi}{b} = 2\pi\frac{2m}{q} = 2\pi\frac{2m}{\sqrt{4hm - p^2}} = 2\pi\sqrt{m : \left(h - \frac{p^2}{4m}\right)}.$$

Značí-li T^* periodu bez útlumu, jest

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{m}{h}}.$$

Jest tudíž

$$T > T^*$$

a sice pochází zvětšení periody T z toho, že síla h (pro $y = 1$) jest zmenšenou o $\frac{p^2}{4m}$; při určitém p jest účinek tento tím menší, čím jest hmota značnější.

Pro poměr obou period plyne

$$\frac{T}{T^*} = \sqrt{\frac{4hm}{4hm - p^2}}.$$

Co se pak týče amplitudy, ubývá jí za každou kmitavou periodu T geometricky dle poměru

$$k = e^{-2\pi\frac{a}{b}}.$$

Konstanta k udává koefficient útlumu; jeho přirozený logarithmus Λ jest dekrement logarithmický amplitud

$$\Lambda = -2\pi\frac{a}{b}.$$

Při tom jest

$$\frac{\Lambda^2}{4\pi^2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{p^2}{q^2} = \frac{p^2}{4hm - p^2},$$

tudíž

$$1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2} = \frac{4hm}{4hm - p^2}.$$

Vzhledem k výrazu, kterým jsme stanovili poměr $T : T^*$, vychází

$$T = T^* \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}.$$

Srovnávajíce výsledky zde odvozené s těmi, jež jsme nalezli pro pohyb kyvadla v ústředí odporujícím (Mechanika § 290.), shledáváme úplnou shodu, až na to, že zde periodu čítáme pro pohyb kmitavý sem i tam, tudíž dvojnásobně; proto, kde u kyvadla jest π, zde máme 2π. Veličiny a a b značí i zde čísla frekvenční, mající rozměr $\frac{1}{\mathrm{T}}$; ostatní veličiny se ovšem rozměrově liší; co tam jest K, D, p, to zde jest m, h, p. Základní rovnice differencialní při kyvadle měla rozměr *momentu síly*, zde má rozměr *síly*; tam jsme měli *úhlovou* rychlost a úhlové urychlení, zde *linearní* rychlost a linearní urychlení. Souhlasný jest výsledek závěrečný. Značí-li $N = \frac{1}{T}$ kmitočet při útlumu, $N^* = \frac{1}{T^*}$ kmitočet bez útlumu, a když, vzhledem k tomu, že jest $N < N^*$, zavedeme doplněk čtvereční

$$N_0^{\,2} + N^2 = N^{*2},$$

máme i zde analogicky

$$a = 2\pi\, N_0$$

$$b = 2\pi\, N$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2\pi\, N^*.$$

Trojúhelník pravoúhlý o odvěsnách a a b podává obraz kmitočtů.

Jest dobře, objasniti si příkladem, jak veliký jest účinek útlumu na periodu vibrační. V skutku velmi často nelze útlumu se vyhnouti; tak u ladiček, strun, tyčí, desk a pod.

Když na př. ladička sama kmity registruje, stává se třením útlum větší. V takových případech lze vyměřením amplitud vypočisti koefficient k útlumu a z toho pak vše ostatní počítati. Aby se ukázalo, jak při různých hodnotách tohoto poměru útlumového perioda vibrační se mění, jest v následujícím výsledek počtu pro jednotlivé hodnoty koefficientu k od 1·0 až 0·5 — tedy od útlumu nullového až k útlumu velmi značnému — sestaven.

Účinek útlumu na kmitočet.

k	Λ	$1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}$	$\frac{T}{T^*} = \frac{N^*}{N}$
1·0	0·00000	1·00000	1·00000
0·9	— 0·10537	1·00028	1·00014
0·8	— 0·22315	1·00126	1·00063
0·7	— 0·35668	1·00322	1·00161
0·6	— 0·51083	1·00661	1·00330
0·5	— 0·69315	1·01217	1·00607

Účinek útlumu na kmitočet jest tedy velmi malý. I při útlumu $k = 0{\cdot}5$ máme $\frac{N^* - N}{N} = 0{\cdot}00607$, tedy 0·6%. Intervall kommy jest $= \frac{81}{80}$, relativní rozdíl kmitočtů jest $1\frac{1}{4}$%. Rozladění oním velmi silným útlumem činí tedy jen asi půl kommy. Pro útlum $k = 0{\cdot}9$ máme $\frac{N^* - N}{N} = 0{\cdot}00014$, t. j. jenom 0·014%. Při ladičce normalní $N^* = 435$ způsobil by útlum takový rozladění o 0·06 kmitu, tak že by výška ladičky klesla na 434·94. Pro takové velmi malé útlumy lze ostatně počítati dle vzorců přibližných. Především jest

$$\frac{T}{T^*} = \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \doteq 1 + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2}.$$

Odtud plyne dále

$$\frac{T - T^*}{T^*} = \frac{N^* - N}{N} \doteq \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} = \frac{(2{\cdot}3)^2\,(\log k)^2}{8\pi^2} \doteq \frac{(\log k)^2}{15}.$$

kdež značí $\log k$ obyčejný (briggický) logarithmus.

§ 5. Časové rozvinutí kmitů přímočarých.

Má-li se *průběh* kmitů přímočarých, jednoduchých nebo též složených, učiniti oku patrným, má-li se předvésti názorně, — a úloha tato přichází v akustice velmi často, zejména, jde-li o kmity složené, jak je později seznáme, — jest velice účelnou a prospěšnou každá methoda, kterouž lze opatřiti *diagramm pohybu*. Základní myšlenkou této methody jest, elongace y, kteréž kmitající bod zaujme *časově za sebou*, rozložiti *prostorově* *vedle sebe.* Pravíme, zkrátka se vyjádřujíce, že jest pohyb *časově rozvinut.*

Tohoto rozvinutí časového docílíme *methodou* buď *grafickou*, nebo *optickou*. Obě methody doplňují se na vzájem; mnohdy — jako u vibrujících ladiček — lze užiti obou; jindy — jako u vibrujících plaménků — jest methoda grafická nemožnou, za to methoda optická velice případnou.

Methoda grafická má tu velikou výhodu, že diagramm pohybu jest fixován, že zůstává pro pozdější zejména srovnávací studium. Takový diagramm opatřiti lze způsobem dvojím; buď *konstrukcí*, nebo *registrací*. Konstrukce má ráz *geometrický*; jest obrazem jistých rovnic, jednoduchých nebo po případě i složitějších; diagrammy vypadnou proto zcela pravidelně a podávají základní typy vibrační, jež lze se skutečnými srovnávati. Oproti tomu registrace podává obraz skutečnosti; diagramm jest zde *autogrammem*, poněvadž hmotný bod sám svůj vlastní skutečný pohyb zaznamenává. V autogrammech takových zračí se mnohdy i nahodilé nepravidelnosti, které dobře vyniknou srovnáváním s diagrammy, jež pro týž případ se opatří konstrukcí geometrickou. Proto se obě tyto methody grafické velmi dobře doplňují.

Methoda optická předvádí názorně, mnohdy velice stkvěle, obraz pohybu, jak se právě skutečně děje. Lze ji prováděti též dvojím způsobem; buď pomocí obrazu virtualného, nebo obrazu realného; v tomto případě jest i fixace fotograficky možnou.

Z každého diagrammu kmitového pohybu lze souditi nejen na elongace y, nýbrž též na rychlost v i na urychlení φ, jak se průběhem času t mění; rychlost positivní se zračí prudčím neb volnějším výstupem křivky, negativní prudčím neb volnějším jejím spádem; urychlení pak souvisí s křivostí a směřuje vždy na konkavní stranu křivky. Proto není v akustice obyčejem znázorňovati graficky také závislost rychlosti a urychlení na čase, což by ovšem bylo možno jenom methodou geometrickou, totiž konstrukcí.

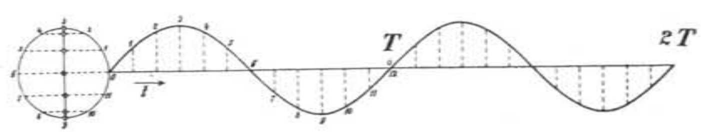
§ 6. **Methoda grafická**.

1. Majíce *konstrukcí* opatřiti diagramm pohybu kmitavého, nanášíme ve směru na př. vodorovném délky úměrné plynulému času t, a ve směru kolmém elongace y. Dle toho jest vlastně jen pořadnice y skutečně dána, poněvadž znamená délky *skutečné*; oproti tomu úsečka t může býti kratší neb delší, poněvadž se

nanášejí délky *úměrné*, kde jednotku časovou lze znázorniti délkou libovolnou. Dle toho lze pro týž pohyb kmitavý obdržeti diagramm buď sraženější nebo roztáhlejší. Obyčejně rozhodujeme, jakou délkou chceme znázorniti periodu T. Poněvadž jest pohyb kmitavý průmětem rovnoměrného pohybu kruhového, jest nejjednodušší, když se perioda T znázorní délkou $2\pi r$ obvodu tohoto kruhu; tato délka — a v souhlasu s tím i obvod onoho kruhu — rozdělí se na 12 stejných dílů (po případě na 24 neb 36 atd. dílů, ač 12 obyčejně stačí). Jak se potom stanoví elongace y pro dobu

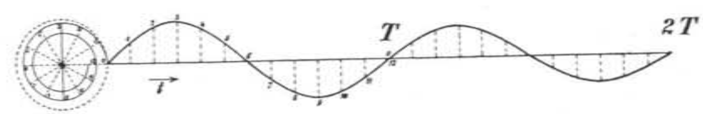
$$t = 1 \cdot \frac{T}{12}, \quad 2 \cdot \frac{T}{12}, \quad 3 \cdot \frac{T}{12} \cdots,$$

jak se tyto nanášejí a jak se body křivky tak sjednané grafickou



Obr. 3. Časové rozvinutí jednoduchého pohybu harmonického konstrukcí.

interpolací spojí, vysvítá dostatečně z obr. 3. Křivka, kterou tak obdržíme, jest sinusoidou v užším slova smyslu. Jakožto další velmi poučný příklad rýsován jest obr. 4., znázorňující



Obr. 4. Časové rozvinutí jednoduchého pohybu harmonického s útlumem konstrukcí.

kmitavý pohyb s útlumem. Jak v Mechanice*) vyloženo, lze pohyb tento pokládati analogicky za průmět pohybu bodu, který postupuje rovnoměrnou úhlovou rychlostí po smršťující se logarithmické spirale. Obrazec znázorňuje případ, kdy v době T amplituda se umenší o 25%. Začáteční hodnota amplitudy jest v millimetrech 6·00, v intervallech $\frac{T}{4}$ po sobě následujících umenšuje se tato hodnota na 5·58, 5·20, 4·84, 4·50, 4·19, 3·90,

*) Pag. 436.

3·63, 3·38. Perioda T jest — k srovnání — znázorněna touže délkou $2\pi r$ jako v obrazci 3.

Z obou diagrammů dobře jest patrno, že kmitající bod v nejzazších svých výchylkách na okamžik jako by stane, čímž dojem na oko, jež kmitající bod pozoruje, *déle trvá*; když jest tudíž kmitočet tak značný, že oko pohyb bodu sledovati nemůže, vidí se přece bod ten dosti zřetelně v obou nejzazších polohách, tak že vypadá jako by byl dvojitým. Kdyby pohyb nebyl tlumeným, zůstávala by odlehlost obou těchto poloh nezměněnou. Ve skutečnosti ovšem následkem útlumu obě ty polohy se stále vespolek sbližují.

Diagrammy v obr. 3. a 4. rýsovány jsou v rozměrech menších než jak obyčejně bývá. V skutku jest z důvodů věcných dobře zvykati oko na křivky kmitové rozměrů malých, poněvadž se tak konstrukce více blíží skutečnosti; neboť amplitudy těles znějících jsou ovšem velice malé. Hodnota amplitudy 6 *mm*, kteráž zde jest volena, hodí se dobře i pro konstrukce, jak je později seznáme.

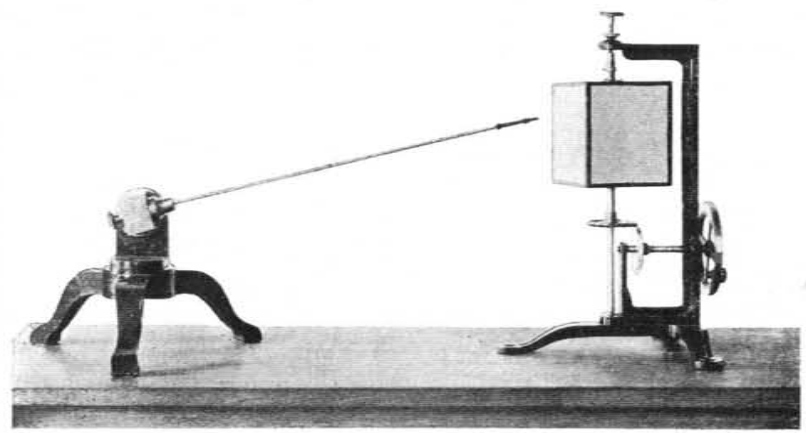
2. Majíce *registrací* opatřiti diagramm pohybu, připravíme pokus tak, aby kmitající bod sám psal výchylky y na rovině, která se rovnoměrně s časem, k těmto výchylkám kolmo, pošinuje. Také zde lze obdržeti diagramm buď sraženější neb roztáhlejší, dle toho, jakou rychlostí toto rovnoměrné pošinování se roviny nákresné provádíme. Nákres se děje buď na počazené desce skleněné, nebo na počazeném papíru. Deska skleněná hodí se dobře, když se má autogramm optickou projekcí ukázati; papír má zase tu výhodu, že možno jej natočiti na válec, tak že místo rovnoměrného pošinování papíru nastupuje pohodlnější rovnoměrné otáčení válce. Methoda se nejjednodušeji provádí u ladiček, po případě u vibrujících tyčí kovových vůbec, ale též u strun, desk a blan atd. K ladičce připevní se tenký plíšek do špičky přiříznutý a přiměřeně ohnutý; po případě (u malých ladiček) štětinka hrubší nebo jemnější. Jde-li jen o rychlou orientaci, lze také ladičku vibrující a rukojetí opatřenou vésti rukou tak, aby plíšek nebo štětinka na počazené desce skleněné psala; velmi pěkně provádí se pokus, když deska tato jest vodorovně položena na polní čočce svislého apparatu projekčního, tak že lze v projekci pozorovati, jak autogramm vzniká. Pro účely vědecké sestrojují se zvláštní apparaty autografické, jež se různými jmény označují, jako vibrografy, vibroautografy, fonautografy, fonografy a pod. Autogramm vzniká na válci, jehož osa jest buď vertikalní nebo horizontalní. Osa tato jest opatřena závitem šroubovým, který v jednom ložisku zasahá do příslušné matice šroubové; následkem toho válec při otáčení

současně postupuje v před, tak že křivky autografické se spiralovitě rozloží. Křivky tyto se kreslí na bílém papíru, který se mírně navlhčí, na válec navine a vhodně upevní, na to pak plamenem (terpentinovým) co možno rovnoměrně a ne více než třeba začadí.

První vibrograf, jakožto samostatný apparat, sestrojil *Duhamel* (1841) a zdokonalil *Wertheim* (1844), zejména pak *R. Koenig.*

§ 7. Methoda optická.

1. Methody optické, a to na základě zobrazení *virtualného*, lze užiti, kdykoli vibrující bod buď sám svítí anebo se dá osvětliti. Pozoruje se pak jeho obraz v rovném zrcadle, otáčivém kolem osy, jež jest rovnoběžná s rovinou zrcadla a zároveň se směrem kmitovým. Otáčením zrcadla rozvine se



Obr. 5. Optická analysa pohybu kmitavého.

pohyb časově kolmo k vlastnímu směru, oko vidí v zrcadle diagramm pohybu. Aby pozorování se mohlo díti spojitě, připojuje se k jedné desce zrcadlové kolmo druhá, k této opět třetí a k této čtvrtá, všechny rovnoběžně s otáčecí osou a stejně od ní daleko. Tak vzniká přístroj analysační, *analysator pohybů kmitavých*, jak jej v dokonalém mechanickém provedení (R. Koenig) ukazuje obr. 5. Za příklad jest znázorněno, jak se v analysatoru pozoruje kmitání konečného bodu pružné ocelové lamelly, zapjaté do těžkého železného stojanu; na konec lamelly jest nastrčen a upevněn dřevěný uhlíček, který se rozžhaví; v přítmí jeví se křivky vibrační v analysatoru velice pěkně.

2. Jiným způsobem užíváme optické methody na základě zobrazení *realného*. Na vibrující těleso, na př. lamellu, ladičku, desku a pod., postavené na př. vertikalně, upevníme malé, rovné zrcátko, které tudíž vykonává vibraci stejnou. Od toho stranou postaví se laterna s lampou drummondskou nebo elektrickou, od níž se vede kulatým otvorem ve výši zrcátka umístěným svazeček horizontalních, rovnoběžných paprsků na ono zrcátko tak, aby s jeho normalou uzavíraly úhel malý. Proti paprskům odraženým, kteréž současně se zrcátkem kmitají, postaví se malý zrcadlový analysator, od něhož se paprsky opět odrážejí, dopadajíce pak na bílou projekční stěnu. Aby zde vznikl ostrý obraz, postaví se mezi kulatý otvor laterny a malé zrcátko spojná čočka vhodně opticky silná, kterou se vytvoří realný obraz otvoru na stěně projekční. Při vibraci postačí analysatorem otáčeti mírnou rychlostí úhlovou; diagramm vibrace ukazuje se způsobem stkvělým, zejména, lze-li užiti světla slunečního.

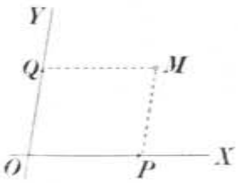
§ 8. Skládání kmitů jednoduchých.

Může se státi, že jistý bod vykonává současně dvojí pohyb kmitavý, jeden o konstantách r_1, T_1, ε_1, druhý o konstantách r_2, T_2, ε_2; všeobecněji může počet jednotlivých vibrací býti i větší. Vzniká pak otázka, jaký jest pohyb výsledný. Nalezne-li se způsob, jakým lze *dvojí* pohyb kmitavý skládati, jest tím řešen i případ všeobecnější, poněvadž připojení každého dalšího pohybu kmitavého k výslednému všech předcházejících znamená opakování téhož úkolu.

Úkol skládati *dva* pohyby vibrační, rozlišuje se přirozeně ve dva úkoly zvláštní, dle toho, zda-li dané vibrace jsou stejnosměrné nebo různosměrné. Pravidlo o skládání stává se velmi jednoduchým, je-li splněna podmínka, že elongace jednoho i druhého pohybu kmitavého jsou *velmi malé*. Pak skládají se obě elongace y_1 a y_2 v případu kmitů *stejnosměrných* sečítáním *algebraickým*, v případu kmitů *různosměrných* sečítáním *geometrickým*. Pravidlem tímto jest dáno jednoduché schema, dle něhož úkol řešiti dlužno. Řešení toto děje se pak buď mathematicky, nebo geometricky, a studuje se na vibracích skutečných buď

methodou autografickou nebo optickou. Výsledky stávají se celkově jednoduchými jen pro jisté případy zvláštní.

Při vibracích stejnosměrných jest pohyb výsledný vždy přímočarý, jako pohyby, z nichž skládáním vzniká. Jsou-li vibrace různosměrné, na př. ve směrech OX a OY, nalezneme ze současných elongací $y_1 = OP$ a $y_2 = OQ$ výslednou polohu M kmitajícího bodu jednoduchou konstrukcí, jak ji obr. 6. znázorňuje. Jednotlivé polohy bodu M druží se k sobě spojitě, tvoříce povšechně křivku. Vzniká zde tedy pohyb povšechně křivočarý. Tvar křivky souvisí též s úhlem obou směrů kmitání.



Obr. 6. Geometrické sečítání výchylek kmitajícího bodu.

§ 9. Kmity stejnosměrné.

Daný bod vykonávejž současně v témže směru dvojí pohyb kmitavý, určený rovnicemi

$$y_1 = r_1 \sin(\vartheta_1 + \varepsilon_1), \qquad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{T_1} t = 2\pi N_1 t,$$

$$y_2 = r_2 \sin(\vartheta_2 + \varepsilon_2), \qquad \vartheta_2 = \frac{2\pi}{T_2} t = 2\pi N_2 t.$$

Jsou-li jednotlivé elongace y_1 a y_2 velmi malé, sečítají se algebraicky v elongaci výslednou y^*, kteráž jest tudíž dána vzorcem

$$y^* = y_1 + y_2.$$

Je-li počet vibrací libovolný, a je-li každá určena rovnicí

$$y = r \sin(\vartheta + \varepsilon), \qquad \vartheta = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi N t,$$

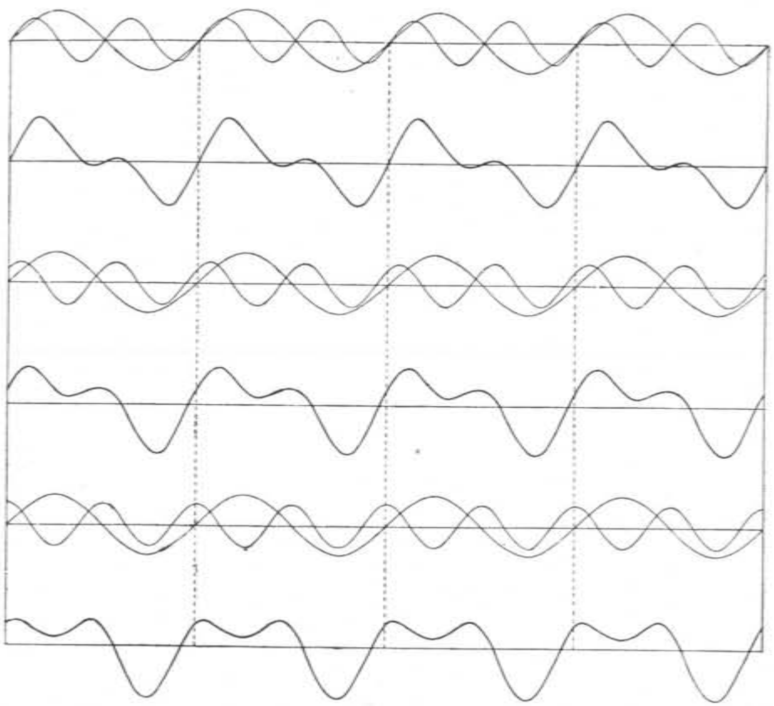
obdržíme dle téhož pravidla vibraci výslednou

$$y^* = \Sigma y.$$

Další postup mathematického zpracování daných rovnic jest možný jen tehda, jsou-li periody T_1 a T_2 čili kmitočty N_1 a N_2 souměřitelné; jednodušší výsledky lze při tom očekávati, je-li jich poměr vyjádřen jednoduchými čísly; ostatně i v těchto případech vycházejí vzorce málo přehledné.

Daleko lépe jest řešiti úkol geometrickou konstrukcí. Oba dané kmity znázorní se příslušným diagrammem, čímž výchylky současné y_1 a y_2 pro jakékoli t připadnou na totéž místo; provede-li se pak algebraická summace výchylek pro některá místa význačná v dostatečném počtu volená, lze grafickou interpolací diagramm výsledného pohybu rýsovati.

V tomto smyslu provedeny jsou v obrazcích 7. až 10. některé zvlášť pozoruhodné případy.



Obr. 7. Skládání kmitů stejnosměrných; prima a oktava; relat. rozdíl časový $= 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}$.

Poněvadž zde jde pouze o dvě vibrace, lze bez omezení všeobecnosti voliti vždy $\varepsilon_1 = 0$, tak že vibrace prvá začíná okamžikem nullovým. Proti tomu jest vibrace druhá v tomto okamžiku ve fasi ε_2, jsouc o dobu τ napřed; lze pak fasi ε_2 pojímati jako rozdíl fasový $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, při čemž jest

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}.$$

Jakým dílem celé periody T_2 jest časový rozdíl τ, takovým dílem plného úhlu 2π jest rozdíl fasový ε.

Vibrační křivky dané jsou rýsovány vždy napřed; prvá jest jako by základní, o *menším* kmitočtu N_1; druhá jako by přidružená, o kmitočtu N_2 *větším*. Poměr $n = \frac{N_2}{N_1}$ obou kmitočtů, dle toho větší než jednička, jest volen dle jednoduchých čísel 1, 2, 3, ... Pod obě dané křivky vibrační jest pak rýsována vibrační křivka výsledná pro sebe, aby lépe vynikla; vypadne různě dle hodnoty $\frac{\tau}{T_2}$ stanovící rozdíl časový; pro tuto hodnotu volena jsou jednoduchá zlomková čísla tak, aby pěkně vynikly tvary přechodné.

Obr. 8. Skládání vibrací stejnosměrných; prima a duodecima; relat. rozdíl časový $= 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}$.

Jakožto prvý význačný příklad provedeno v obrazci 7. skládání dvou pohybů kmitavých, při nichž kmitočty — čili doby kmitové — jsou v poměru

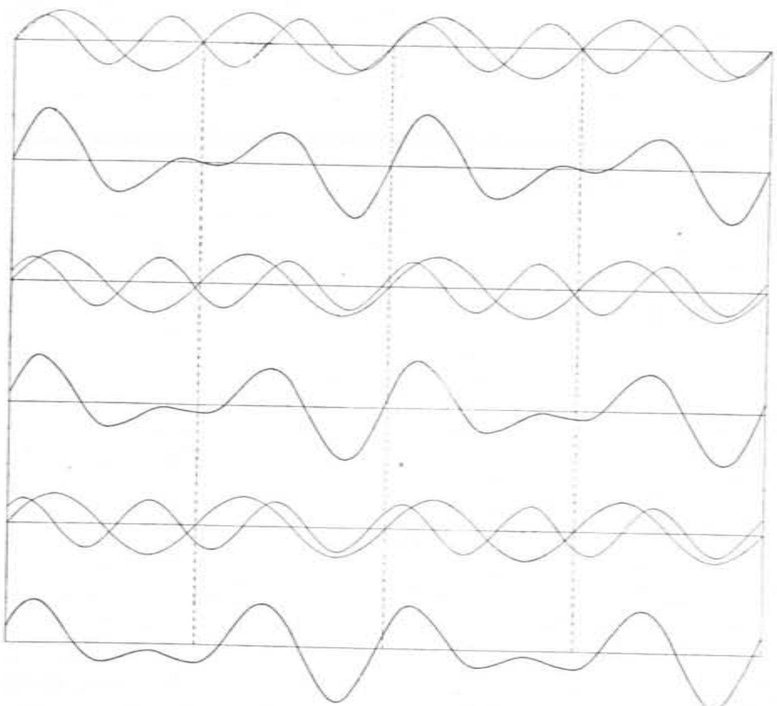
$$N_2 : N_1 = 2 : 1 = T_1 : T_2.$$

Akusticky znamená případ ten současné znění *primy* a *oktavy*. Výsledná vibrace jest sestrojena pro tři význačné rozdíly časové a fasové, kdy totiž jest

$$\tau = 0, \quad \frac{T_2}{8}, \quad 2 \cdot \frac{T_2}{8},$$

$$\varepsilon = 0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad 2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Pěkně lze pozorovati, jak jeden tvar křivky přechází v druhý a třetí; snadno lze pak v myšlenkách doplniti, jako by se křivka dále měnila, kdyby rozdíl fasový ε v témž kroku, vždy o $\frac{\pi}{4}$ postupoval dále; vznikaly by křivky souměrné.



Obr. 9. Skládání kmitů stejnosměrných; prima a kvinta; relat. rozdíl časový $= 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}$.

Jakožto druhý význačný příklad proveden v obr. 8. ten, kdy platí poměr

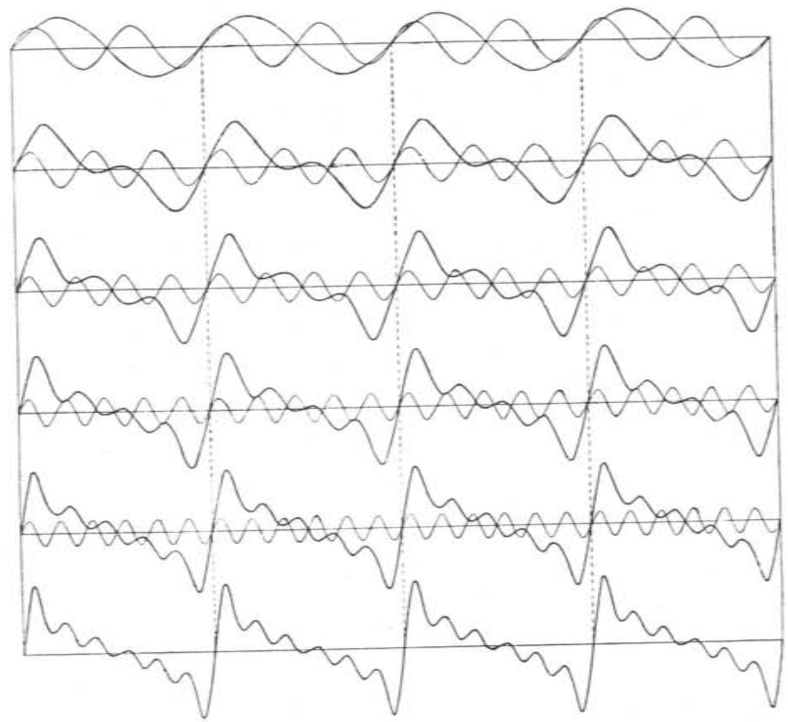
$$N_2 : N_1 = 3 : 1 = T_1 : T_2.$$

Akusticky znamená případ ten současné znění *primy* a *duodecimy*. Výsledná vibrace provedena opět pro tři význačné rozdíly časové a fasové, kdy totiž jest

$$\tau = 0, \quad \frac{T_2}{4}, \quad 2 \cdot \frac{T_2}{4},$$

$$\varepsilon = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad 2 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Přechody jedné křivky do druhé a třetí také zde dobře vynikají.



Obr. 10. Skládání kmitů stejnosměrných, současně začínajících; prima a oktáva; k tomu duodecima; k tomu druhá oktava; k tomu tercie druhé oktavy; k tomu kvinta druhé oktavy; $(1+2, \; 1+2+3, \; 1+2+3+4, \; 1+2+3+4+5, \; 1+2+3+4+5+6)$.

Jakožto třetí význačný případ jest v obr. 9. proveden ten, kdy platí poměr

$$N_2 : N_1 = 3 : 2 = T_1 : T_2.$$

Akusticky hledí případ ten k současnému znění *primy* a *kvinty*.

Při tom jest

$$\tau = 0, \quad \frac{T_2}{16}, \quad 2 \cdot \frac{T_2}{16},$$

$$\varepsilon = 0, \quad \frac{\pi}{8}, \quad 2 \cdot \frac{\pi}{8}.$$

Dobře jest tu pozorovati, jak vibrace druhá vibraci prvou na některých místech sesiluje a na jiných seslabuje a jak dle rozdílu fasového tato místa se mění.

Příklad zvláště poučný proveden jest v obrazci 10. Ukazuje se tu, jaké výsledné vibrace postupně vznikají, když k vibraci N_1 přistoupí druhá $N_2 = 2N_1$, k oběma pak třetí $N_3 = 3N_1$, k výsledné všech tří pak čtvrtá $N_4 = 4N_1$, k výsledné všech čtyř dále pátá $N_5 = 5N_1$ a konečně k výsledné všech pěti ještě šestá $N_6 = 6N_1$. Jde tedy o postupné skládání vibrací, jichž kmitočty jsou v jednoduchém poměru přirozených čísel

$$N_1 : N_2 : N_3 : N_4 : N_5 : N_6 = 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6.$$

Akusticky přísluší případ tento současnému znění tak zvaných tonů *harmonických.*

Při všech jest $\varepsilon = 0$, t. j. všechny vibrace začínají současně. Křivky silněji vytažené jsou výslednými a sice každá těch dvou, které jsou přímo nad ní; tudíž nejdolejší jest výslednou všech šesti vibrací, nad ní jest výsledná všech pěti vibrací, nad tou výsledná předešlých čtyř vibrací atd. U křivek výsledných znamenáme především prudký výstup, jakožto následek současného začínání všech kmitů; s nejvyššího bodu následuje pak sestup, již volnější, v kaskadách, jichž počet se množí přistupováním nových a nových vyšších tonů harmonických; při tom kaskady stávají se mělčími, a jako výstup tak i sestup blíží se přímočárnosti, čára diagrammová pak čáře klikaté.

Z příkladů, jak jsou v obrazcích 7. až 10. provedeny, vysvítá již ohromná rozmanitost vibračních křivek výsledných, která stoupá počtem vibrací jednoduchých, volbou amplitud a zejména fasových rozdílů. Odtud jest zase pochopitelno, že lze také zpět jakýkoli pohyb periodický y^* vyjádřiti jakožto součet

$$y^* = \Sigma\, r \sin(\vartheta + \varepsilon)$$

jednoduchých pohybů periodických, když se přiměřeně volí jich počet, jakož i jich amplitudy i fase.

Dlužno ještě vysvětliti, jak jsou při těchto diagrammech voleny amplitudy r. Každý, kdo výkresy takové provádí, poznává záhy, že tvar výsledných křivek velice jest závislý na volbě amplitud. Akusticky má amplituda význam pro *intensitu* tonu, která jest úměrná čtverci amplitudy.

Přihlížejíce tedy k tomuto akustickému významu poznáváme, že výsledné křivky vypadnou různě ve svých rozměrech dle toho, co předpokládáme o intensitě tonů, jimž kmity dané přísluší. Tu pak jest patrno, že ve skutečnosti tony vyšší z pravidla méně intensivně znějí než tony hlubší; struny na klavíru, na harfě a pod. pro vyšší tony kmitají amplitudou značně menší než struny pro hlubší tony i při témže nárazu na klavesy nebo při témže trhnutí na harfě. Není tudíž akusticky přirozeno, když se při výkresech takových, jako jsou v obr. 7. až 10., pro kmity o větším kmitočtu volí stejné amplitudy jako pro kmity menšího kmitočtu. Křivky vypadnou v takovém případu v nepřirozených rozměrech. Spíše nutno pro kmity s větší frekvencí voliti povšechně amplitudy menší, dojista tím menší, čím jest kmitočet větší. Aby však zde nerozhodovala libovůle a nahodilost, nýbrž aby se pro jistý princip vytvořily *obrazce typické,* voleny jsou ve výkresech uvedených amplitudy tak, aby jich *čtverec* byl obráceně úměrný *kmitočtu.* Akusticky to znamená předpokládati, že tony, jež jsou proti základnímu n-kráte vyšší, zaznívají intensitou proti základnímu n-kráte menší. Naznačíme-li tedy amplitudu primy jako jedničku, jest — dle onoho principu — amplituda primy $\sqrt{1}$, oktavy $\sqrt{\frac{1}{2}}$, kvinty $\sqrt{\frac{2}{3}}$, atd.

Podobně v obr. 10. jsou pro tony harmonické 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 voleny amplitudy v poměru

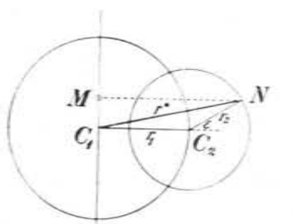
$$\frac{1}{\sqrt{1}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{4}} : \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{6}}$$

V skutku každý, kdo ony obrazce dle tohoto principu provedené studuje, přisvědčí, že výsledné křivky ukazují pěknou pravidelnost a typickou zákonitost. Není pak nesnadno představiti sobě, jak by křivky ty se změnily, kdyby u jednoho neb druhého tonu amplitudy s hořejší podmínkou nebyly v souhlasu.

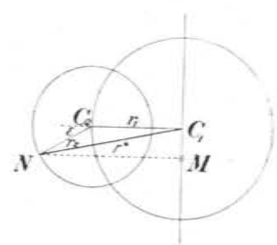
§ 10. **Kmity stejnodobé.**

Ve všeobecném úkolu, skládati kmity stejnosměrné, vyniká svou jednoduchostí ten případ zvláštní, kdy jednotlivé kmity dané jsou vesměs *stejnodobé* čili *isochronní,* rozeznávajíce se jenom amplitudou r a fasí ε v okamžiku nullovém. Snadno lze poznati, že v tomto případě *výsledný* pohyb kmitavý jest s danými též *stejnodobý, isochronní.*

Uvažujme věc především geometricky. Pohyb kmitavý jest průmětem rovnoměrného pohybu kruhového. Má-li tedy jistý bod M vykonávati současně vibrace dvě, o amplitudách r_1 a r_2, možno jeho pohyb pokládati za průmět pohybu bodu N, který postupuje rovnoměrně na obvodu kruhu o poloměru r_2, při čemž střed C_2 tohoto kruhu opět postupuje rovnoměrně na obvodu kruhu o poloměru r_1 s pevným středem C_1 (obr. 11.). Tato představa o průmětu pohybu epicyklického platí, ať jsou jednotlivé vibrace stejnodobé nebo ne. Buďtež však obě vibrace *stejnodobé*, druhá vibrace proti prvé o fasi ε napřed. Začáteční situaci znázorňuje obr. 11. Průběhem času otáčí se jistou úhlovou rychlostí poloměr C_1C_2, a *stejnou* úhlovou rychlostí poloměr C_2N; ze stejnosti této plyne však, že začáteční rozdíl ε obou směrů C_1C_2 a C_2N se *udržuje* i průběhem celého dalšího pohybu; když na př. se vykoná půl vibrace prvé, nastane situace, jak ji znázorňuje obr. 12. Pohyb děje se tudíž tak, jako by se trojúhelník C_1C_2N anebo jako by se přímka C_1N touže úhlovou rychlostí otáčela ze začáteční polohy v obr. 11. znázorněné. To však jest totéž, jako by se bod N rovnoměrnou rychlostí pohyboval po obvodu kruhu, poloměrem r^* opsaného (obr. 13.). Průmětem pohybu bodu N vzniká pak stejnodobá vibrace bodu M v daném směru jakožto pohyb výsledný. Obr. 13. objasňuje pak zároveň, jak obdržíme amplitudu r^* této výsledné vibrace jakož i fasi ε^* pro okamžik nullový.



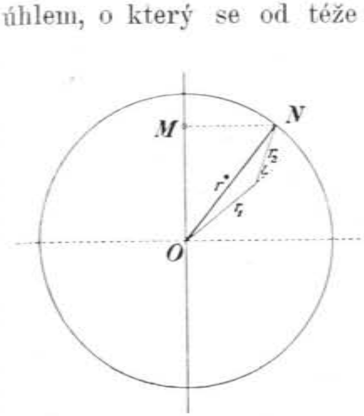
Obr. 11. Skládání dvou kmitů stejnosměrných, jež považujeme za průměty rovnoměrných pohybů kruhových.



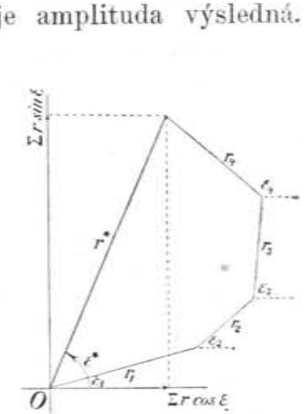
Obr. 12. Kmity stejnodobé dávají výsledný kmit rovněž stejnodobý.

Výsledek tuto pro dva kmitavé pohyby odvozený lze snadno zevšeobecniti. Z jednotlivých vibrací stejnodobých a stejnosměrných obdržíme jakožto výslednou opět vibraci stejnodobou a stejnosměrnou, jejíž amplitudu r^* a fasi ε^* obdržíme z amplitud r a fasí ε jednotlivých vibrací dle pravidla *geometrického sečítání*, znázorněného v obr. 14. Připojujeme totiž jednotlivé amplitudy r

k sobě i dle velikosti i dle směru, který se určí úhlem ε počítaným od určité osy; výsledná amplituda r^* jest dána stranou, uzavírající mnohoúhelník amplitud; a výsledná fase ε^* jest dána úhlem, o který se od téže osy uchyluje amplituda výsledná.



Obr. 13. Výsledná amplituda a fase při dvou kmitech stejnodobých.



Obr. 14. Geometrické sečítání amplitud.

Důkaz mathematický vedeme způsobem následujícím. Jednotlivé kmity dány jsou rovnicemi tvaru

$$y = r \sin(\vartheta + \varepsilon)$$

čili

$$y = r \sin\vartheta \cos\varepsilon + r \cos\vartheta \sin\varepsilon.$$

Rovnici pro pohyb výsledný obdržíme dle pravidla

$$y^* = \Sigma y.$$

Sečítání, symbolem Σ naznačené, vztahuje se na vibrace od prvé počínajíc do poslední. Jsou-li vibrace stejnodobé, jest $\vartheta = \frac{2\pi}{T} t$ pro všechny stejné, proměnnými pak jsou jen r a ε. Proto vytkneme při summaci stálé koefficienty $\sin\vartheta$ a $\cos\vartheta$ před znamení summační, tak že vyjde

$$y^* = \sin\vartheta\, \Sigma r \cos\varepsilon + \cos\vartheta\, \Sigma r \sin\varepsilon.$$

Tuto rovnici uvedeme na původní tvar

$$y^* = r^* \sin(\vartheta + \varepsilon^*),$$

když zavedeme amplitudu r^* a fasi ε^* dle rovnic

$$r^* \cos\varepsilon^* = \Sigma r \cos\varepsilon$$
$$r^* \sin\varepsilon^* = \Sigma r \sin\varepsilon.$$

Obr. 14. podává přímý geometrický výklad těchto rovnic; tyto formulují sečítání geometrické, udávajíce součet hlavních a vedlejších průmětů amplitud r na hlavní a vedlejší osu, při čemž se úhly ε od oné osy hlavní počítají.

Dle toho jest amplituda r^* výsledné vibrace určena vzorcem

$$r^* = \sqrt{(\Sigma\, r \cos \varepsilon)^2 + (\Sigma\, r \sin \varepsilon)^2}$$

a resultující fase ε^* pro okamžik nullový vzorcem

$$tg\, \varepsilon^* = \frac{\Sigma\, r \sin \varepsilon}{\Sigma\, r \cos \varepsilon}.$$

§ 11. **Kmity přibližně stejnodobé.**

Zvláštní případ, akusticky důležitý, nastává, když dvě vibrace stejnosměrné, jež skládati dlužno, jsou jen *přibližně* stejnodobé. Ve všeobecných rovnicích

$$y_1 = r_1 \sin (2\pi N_1 t + \varepsilon_1)$$
$$y_2 = r_2 \sin (2\pi N_2 t + \varepsilon_2)$$

jsou pak kmitočty N_1 a N_2 sobě téměř rovny. Předpokládejme na př. $N_2 > N_1$ a při tom $r_2 < r_1$, t. j. akusticky řečeno, ton vyšší budiž (jakož z pravidla bývá) méně intensivní. Položme pak:

$$\frac{N_1 + N_2}{2} = N \qquad \frac{N_2 - N_1}{2} = \nu.$$

Značí pak N kmitočet průměrný, ν pak odchylku každého jednotlivého od tohoto průměrného, tedy

$$N_1 = N - \nu, \qquad N_2 = N + \nu.$$

Původní rovnice kmitové přejdou pak v tyto:

$$y_1 = r_1 \sin (2\pi\, Nt - 2\pi\, \nu t + \varepsilon_1)$$
$$y_2 = r_2 \sin (2\pi\, Nt + 2\pi\, \nu t + \varepsilon_2).$$

Formalně jsou tudíž kmity stejnodobé, s jistým fasovým rozdílem ε, pro který máme výraz

$$\varepsilon = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + 4\pi\, \nu t;$$

tento obsahuje část konstantní a část s časem rostoucí. Vibrace výsledná, dle pravidel dříve odvozených, bude tudíž dána rovnicí

$$y^* = r^* \sin (2\pi\, Nt + \varepsilon^*),$$

kdež jest

$$r^{*2} = r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2 r_1 r_2 \cos \varepsilon.$$

Ve výrazu tomto fasový rozdíl ε s časem t roste; v okamžiku $t = 0$ jest $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ a odtud nabývá hodnot, jež jsou násobky vždy vyššími úhlu π. Následkem toho mění se periodicky amplituda r^* mezi hodnotou minimalní $r_1 - r_2$ a maximalní $r_1 + r_2$.

Přehledně máme:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 4\pi\nu t_0 &= 2k\,.\,\pi, & r^* &= r_1 + r_2\\
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 4\pi\nu t_1 &= (2k+1)\,\pi, & r^* &= r_1 - r_2\\
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 4\pi\nu t_2 &= (2k+2)\,\pi, & r^* &= r_1 + r_2\\
\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 4\pi\nu t_3 &= (2k+3)\,\pi, & r^* &= r_1 - r_2\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

$$t_2 - t_0 = \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{N_2 - N_1}$$

$$t_3 - t_1 = \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{N_2 - N_1}$$

Od jednoho maxima k následujícímu — a právě tak od jednoho minima k následujícímu — uplyne tudíž doba $\frac{1}{N_2 - N_1}$, t. j. v jednotce časové (v sekundě) opakuje se změna ta $(N_2 - N_1)$ kráte.

Výsledek, jehož jsme došli, lze jednoduše vysvětliti též geometrickou interpretací, jak jsme ji v obr. 11. zavedli. Jest to tak, jako by současně, co trojúhelník $C_1 C_2 N$ jako celek rovnoměrnou úhlovou rychlostí kolem C_1 se otáčí, úhel ε znenáhla rostl, t. j. jako by se při tom poloměr $C_2 N$ pro sebe zvlášť kolem středu C_2 rovnoměrnou úhlovou rychlostí poněkud stáčel. Následek toho jest, že výsledná amplituda $r^* = C_1 N$ se ponenáhlu zkracuje až do hodnoty $r_1 - r_2$, odkud zase ponenáhlu prodlužuje až do hodnoty $r_1 + r_2$.

Je-li specialně $r_1 = r_2$, smršťuje se amplituda výsledná r^* od maximalní své hodnoty $2r$ až do hodnoty nullové. K tomuto případu vztahují se výsledné vibrační křivky rýsované v obrazci 15., kterým se předešlé výklady způsobem poučným doplňují.

Pro jednoduchost jest voleno $\varepsilon_1 = 0 = \varepsilon_2$, t. j. oba kmity začínají současně. Výsledná křivka rýsována zvlášť. Na prvém místě jest proveden případ, kdy $\frac{N_2}{N_1} = \frac{5}{4}$ (akusticky: prima a tercie velká); rozdíl kmitový $N_2 - N_1$ jest zde poměrně značný, approximace, že kmity jsou téměř stejnodobé, jest jen hrubá, nicméně již zde jest ve výsledné křivce aspoň naznačeno, jak se amplituda výsledná střídá od hodnoty $2r$ do nully. Lépe vystupuje toto střídání v příkladu druhém, níže rýsovaném, kde jest poměr $\frac{N_2}{N_1} = \frac{9}{8}$ (akusticky: prima a sekunda), ještě lépe pak v příkladu nejníže rýsovaném, který jest sice týž, jako

Obr. 15. Skládání kmitů stejnosměrných a přibližně stejnodobých.

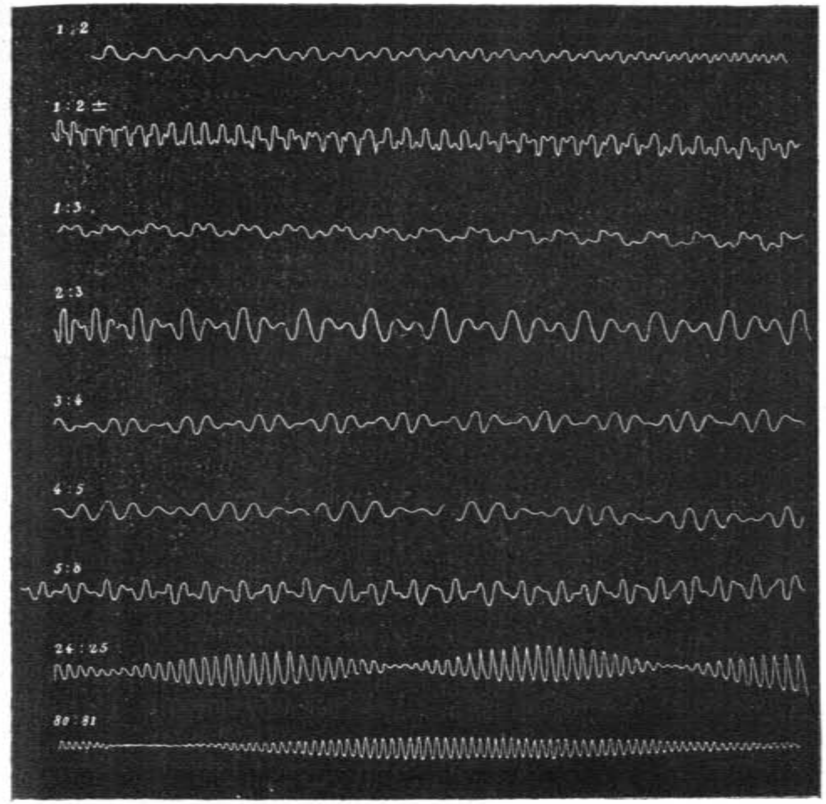
předešlý, ale jest proveden v míře zmenšené, čímž střídání se maxima a minima lépe vyniká. Kdyby tedy na př. bylo:

$$N_1 = 32, \qquad N_2 = 36,$$

opakovalo by se střídání amplitudy r^* od maxima $2r$ do následujícího maxima $2r$ za jednu sekundu 4krát. Zjev tento má akustický význam v tak zvaných rázech.

§ 12. Pokusy.

Studium o skládání vibrací stejnosměrných, kteréž jsme v odstavcích předešlých objasnili mathematicky i graficky, lze doplniti a kontrolovati pokusy. Tyto lze pak prováděti buď methodou autografickou, kterou se skutečné případy registrují, anebo methodou optickou.

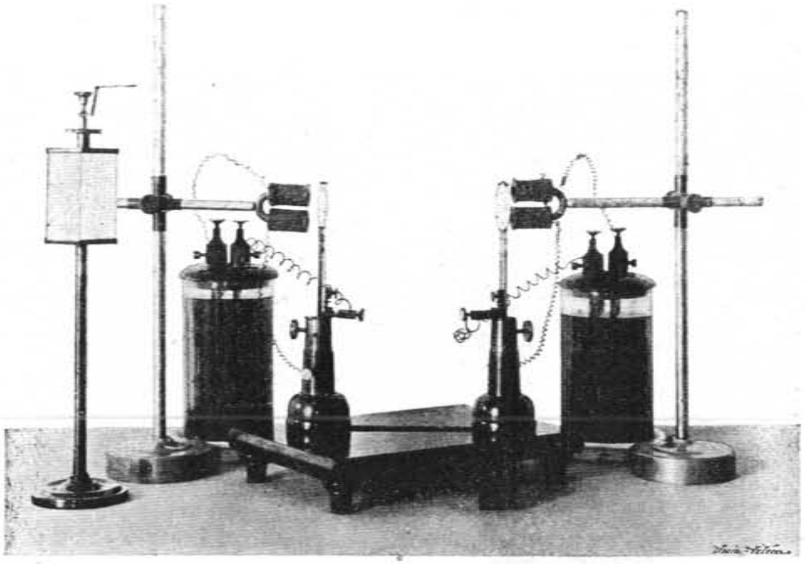


Obr. 16. Křivky skládáním kmitů stejnosměrných autoregistrací zjednané.

Autogrammy zjednávají se nejpohodlněji ladičkami dle daných poměrů kmitočtů laděnými. Proužek počazeného skla neb papíru, na němž registruje kmitající ladička jedna, jest upevněn na kmitající ladičce druhé. Obr. 16. předvádí výsledky, jež zvláštním vhodně upraveným přístrojem obdržel *R. Koenig**).

*) Vyňato z díla: Quelques expériences d'acoustique, R. Koenig, 1882, pag. 13.

Jest zajímavo, tyto křivky pokusem zjednané srovnávati s příslušnými typy, jak je dřívější geometrické obrazce předvádějí. Zvláště pěkně jeví se skládání kmitů přibližně stejnodobých ($\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$).



Obr. 17. Apparat, jímž se skládání kmitů stejnosměrných objektivně provádí.

Velmi krásně a poučně lze většímu auditoriu ukázati pokusy takové methodou optickou, na základě zobrazení realného. Apparat k tomu určený znázorňuje obr. 17. Dvě vertikalně postavené lamelly ocelové jsou nahoře opatřeny zrcátky. Stranou jest postavena laterna s lampou drummondskou neb ještě lépe elektrickou. Za kollimující čočku vloží se kruhová diafragmata, jimiž se vede svazek paprsků vodorovných (v obrazci s pravé strany) nejprve na zrcátko jedno, odtud odrazem na druhé a odtud na malý analysator (v obrazci na levo postavený). od něhož se odráží na stěnu projekční pokud možno kolem apparatu kruhovitě postavenou (bílý kreslicí papír na stojanech upevněný a do kola rozbalený). Čočkou spojnou, za otvorem kulatým vhodně umístěnou a přiměřeně opticky silnou, zobrazí se otvor realně na stěně jako světlý bod. Jakmile se jedna neb druhá lamella uvede ve vibraci, rozšíří se tento světlý bod ve

světlou přímku, která jest na koncích — kde při vibraci světlý bod na okamžik stane — dvěma body jako by ohraničena. Při mírném otáčení analysačním zrcátkem rozvine se přímka tato ve křivku sinusovou. Uvedou-li se obě lamelly ve vibrace současné, objeví se křivka výsledná. Křivky tyto jsou zvláště stkvělé, když lze užiti světla slunečního. Lamelly udržují se ve stálé vibraci elektromagneticky pomocí kontaktu platinového; aby bylo lze amplitudy v jistých mezích regulovati, dají se elektromagnety na stojanech umístěné k lamellám přiměřeně blízko pošinovati. Zdrojem proudu jest na př. článek Grenetův, po případě akkumulator. Frekvence vibrační dá se snížiti posuvnou hmotou. která se na jednu z obou lamell vhodně šroubem upevní: i lze vyzkoušeti, kam dlužno tuto hmotu umístiti, aby poměr frekvencí byl na př. $\frac{2}{1}$ nebo $\frac{3}{2}$ nebo $\frac{4}{3}$ atd.

Sejme-li se vůbec toto posuvné závaží a nechají-li se lamelly — jež jsou stejné a stejně upevněné — kmitati, ukazuje se krásně případ skládání vibrací přibližně stejnodobých. Smršťování a roztahování se amplitudy výsledné ukazuje se, když zrcátko analysační jest v klidu, tím, že světlá přímka na stínítku se zkracuje a prodlužuje; snadno lze upraviti amplitudy, aby se zkrátila až na bod. Když se pak analysatorem otáčí, objeví se diagramm zcela takový, jako na př. v křivkách Koenigových (obr. 16.).

Užívati místo ocelových lamell raději ladiček má ovšem tu velikou výhodu, že optický obraz se zároveň akusticky doplňuje: co oko vidí, ucho současně slyší. Zejména úkaz rázů stává se tak zvlášť poučným. Než užívání lamell má výhodu větších amplitud, čímž křivky zřetelněji vystupují — nehledíc ovšem k tomu, že ladičky, mají-li úpravu elektromagnetickou se zrcátky, jsou velmi drahé.

§ 13. **Kmity různosměrné**.

Podobně jako při skládání kmitů stejnosměrných jest i při skládání kmitů různosměrných základem řešení všeobecného ten úkol zvláštní, kdy se mají skládati kmity pouze dva, o periodách T_1 a T_2. Tu pak není žádným omezením všeobecnosti, když přihlížíme pouze k *rozdílu* fasovému obou kmitů, předpokládajíce, že v okamžiku nullovém na př. kmit prvý právě začíná, kdežto kmit druhý jest o fasi ε nebo o dobu τ napřed.

Patrně jest

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2},$$

dle kteréžto rovnice můžeme vždy z rozdílu fasového ε rozdíl časový τ anebo naopak počítati. Rovněž můžeme předpokládati, že směry kmitové jsou k sobě kolmé; ukáže se ostatně, že případ všeobecný, kdy jsou k sobě jakkoli šikmé, není podstatně od onoho zvláštního rozdílným, a že výsledků, jichž pro tento případ nabudeme, lze použiti i pro onen všeobecný, kdy jsou kmity jakkoli různosměrné.

Směry kmitové buďtež $X'X$ a $Y'Y$; prvý rýsujeme od levé k pravé, druhý zdola vzhůru, pokládajíce je v tomto smyslu za kladné, v opačném za záporné. Dle pravidla geometrického sečítání elongací jsou pak elongace tyto pravoúhlými souřadnicemi pro výslednou polohu bodu kmitajícího; proto, dle způsobu analytické geometrie, zaveďme pro elongace tyto označení x ve směru $X'X$ a y ve směru $Y'Y$, počítajíce je od společného průseku O obou těchto směrů; podobně pak pro amplitudy označení a ve směru $X'X$ a b ve směru $Y'Y$. Rovnice obou kmitů jsou pak

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T_1} t,$$

$$y = b \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \varepsilon\right).$$

Kmit ve směru $X'X$ pokládáme za *základní*, kmit ve směru $Y'Y$ za *přidružený*. Má-li z obou periodických pohybů ve směrech těchto vzniknouti výsledný pohyb opět periodický, musí periody T_1 a T_2 a tudíž i kmitočty

$$\frac{1}{T_1} = N_1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{T_2} = N_2$$

býti souměřitelné. Zaveďme pro jich poměr označení n, píšice

$$\frac{T_1}{T_2} = n = \frac{N_2}{N_1}.$$

Akusticky vznikají oběma kmity tony; poměr n značí pak *relativní výšku* tonu druhého vzhledem k prvému jako základnímu. Tato bývá vyjádřena poměrem dvou — obyčejně malých — celých čísel p a q, jež jsou relativní prvočísla, tak že jest

$$n = \frac{q}{p}.$$

Dle akustického způsobu — kde ton základní jest vždy tonem nižším — předpokládejme

$$n > 1, \qquad q > p.$$

Jest pak

$$pT_1 = T = qT_2,$$

$$\frac{p}{N_1} = \frac{1}{N} = \frac{q}{N_2};$$

i značí T periodu, N kmitočet *výsledné* vibrace. Zavedouce tuto periodu do rovnic hořejších, obdržíme:

$$x = a \sin p \frac{2\pi}{T} t,$$

$$y = b \sin\left(q \frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right).$$

Pro výklady následující jest výhodno rovnice tyto formalně co nejvíce zjednodušiti. Zaveďme především na místě proměnlivého času t úhel časoměrný ϑ dle definice

$$\frac{2\pi}{T} t = \vartheta \quad \text{čili} \quad \frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{t}{T}.$$

Dále povšimněme sobě, že souřadnice x, y jinak nepřicházejí než vždy jen v poměru k amplitudám a, b; zaveďme tedy čísla poměrná, píšice

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta.$$

Tak obdržíme zcela jednoduše

$$\xi = \sin p\vartheta,$$

$$\eta = \sin(q\vartheta + \varepsilon).$$

Rovnice tyto, pokládáme-li je za koexistentní, vyjadřují již rovnici kmitové křivky výsledné pomocí třetí nezávislé proměnné ϑ; tuto dlužno vyloučiti, má-li se zjednati rovnice ve tvaru obyčejném, jako relace mezi pravoúhlými souřadnicemi ξ a η. Nic nevadí, že souřadnice tyto jsou jako provisorní, udávajíce odlehlosti bodu od os souřadnicových měřené v příslušných amplitudách a, b jako jednotkách. Zavedouce však souřadnice tyto, docílíme, jak z následujících úvah dobře vysvitne, značného zjednodušení a lepšího rozhledu ve výpočtech; ovšem pak dosazení souřadnic definitivních x, y, jež se provede až ve *výsledku závěrečném*, nečiní pražádných obtíží, a nemění výsledek v jeho podstatě pranic. Konstantami a, b určují se blíže jen rozměry výsledné křivky v příslušných směrech, nemění se však nikterak její povaha, asi tak, jako se poloměrem kruhu určuje jenom jeho rozměr, při čemž povaha kruhu zůstává nezměněnou.

§ 14. Úvahy přípravné.

Zdálo by se býti nejjednodušším, v rovnicích

$$\xi = \sin p\vartheta,$$
$$\eta = \sin (q\vartheta + \varepsilon),$$

rozvésti výraz η ve dva sčítance; tím by se objevily funkce sinus a cosinus úhlu násobného. Jest známo, že lze funkce tyto vyjádřiti týmiž funkcemi úhlu jednoduchého*). Je-li α libovolný úhel, k číslo celé, platí vzorce následující:

$$\sin k\alpha = \binom{k}{1} \cos^{k-1}\alpha \sin\alpha - \binom{k}{3} \cos^{k-3}\alpha \sin^3\alpha + \binom{k}{5} \cos^{k-5}\alpha \sin^5\alpha - \ldots$$

$$\cos k\alpha = \cos^k\alpha - \binom{k}{2} \cos^{k-2}\alpha \sin^2\alpha + \binom{k}{4} \cos^{k-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots$$

Vzorce tyto mají platnost všeobecnou, pro číslo k jakékoli; je-li však toto číslo celým, pak se řady zakončí, poněvadž v binomických koefficientech $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$, $\binom{k}{3}$, . . . objeví se konečně činitel $k-k$, který jest $=0$. Na pravo přichází funkce $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ současně. Jest však možno výrazy tak upraviti, aby zůstala funkce buď jen $\cos\alpha$ nebo jen $\sin\alpha$.

Pro účely naše, kde ve výrazech pro ξ a η přichází funkce sinus, jest výhodnější tuto podržeti. Položme tedy

$$\sin\alpha = u, \qquad \cos\alpha = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Vzorce hořejší nabudou pak tvaru

$$\sin k\alpha = \binom{k}{1}(1-u^2)^{\frac{k-1}{2}} u - \binom{k}{3}(1-u^2)^{\frac{k-3}{2}} u^3 + \binom{k}{5}(1-u^2)^{\frac{k-5}{2}} u^5 - \ldots$$

*) F. J. Studnička, Výklady o funkcích monoperiodických neboli o nižších funkcích transcendentních, pag. 96 a násl., 1892.

$$\cos k\alpha = (1-u^2)^{\frac{k}{2}} - \binom{k}{2}(1-u^2)^{\frac{k-2}{2}} u^2 + \binom{k}{4}(1-u^2)^{\frac{k-4}{2}} u^4 - \ldots.$$

Do vzorců těchto vstupují tedy exponenty lomené $\frac{k}{2}$, $\frac{k-1}{2}$, $\frac{k-2}{2}$, . . ., což by formalně znamenalo, že výrazy stávají se irracionalnými. V skutku jest však pro jisté celé číslo k jen *jeden* z obou výrazů irracionalným, *druhý* však *racionalným*. Je-li totiž k číslo celé *liché*, jsou exponenty $\frac{k-1}{2}$, $\frac{k-3}{2}$, $\frac{k-5}{2}$, . . . vlastně celá čísla, tudíž výraz pro $\sin k\alpha$ *racionalným*, pro $\cos k\alpha$ však irracionalným. Naopak, je-li k číslo *sudé*, jsou exponenty $\frac{k}{2}$, $\frac{k-2}{2}$, $\frac{k-4}{2}$, . . . celá čísla, tudíž výraz pro $\cos k\alpha$ *racionalným* a ovšem pro $\sin k\alpha$ irracionalným. Pro úkol náš jest důležito, abychom pracovali jen výrazy racionalnými. Zaveďme označení zkrácené

$$\varphi(u, k) = \binom{k}{1}(1-u^2)^{\frac{k-1}{2}} u - \binom{k}{3}(1-u^2)^{\frac{k-3}{2}} u^3 + \ldots$$

$$\psi(u, k) = (1-u^2)^{\frac{k}{2}} - \binom{k}{2}(1-u^2)^{\frac{k-2}{2}} u^2 + \ldots$$

Funkce φ a ψ jsou tedy funkce racionalné, a to φ, je-li k číslo liché a ψ, je-li k číslo sudé.

Pro určitá čísla k lze mocnění na pravo vykonati a výraz upraviti dle stoupajících mocnin veličiny u. V následujícím jsou uvedeny vzorce pro hodnotu k od 1 do 9, jak pro účely akustické úplně postačuje:

$$\varphi(u, 1) = \sin\alpha = u$$
$$\varphi(u, 3) = \sin 3\alpha = 3u - 4u^3$$
$$\varphi(u, 5) = \sin 5\alpha = 5u - 20u^3 + 16u^5$$
$$\varphi(u, 7) = \sin 7\alpha = 7u - 56u^3 + 112u^5 - 64u^7$$
$$\varphi(u, 9) = \sin 9\alpha = 9u - 120u^3 + 432u^5 - 576u^7 + 256u^9,$$

a podobně

$$\psi(u,0) = \cos 0 = 1$$
$$\psi(u,2) = \cos 2\alpha = 1 - 2u^2$$
$$\psi(u,4) = \cos 4\alpha = 1 - 8u^2 + 8u^4$$
$$\psi(u,6) = \cos 6\alpha = 1 - 18u^2 + 48u^4 - 32u^6$$
$$\psi(u,8) = \cos 8\alpha = 1 - 32u^2 + 160u^4 - 256u^6 + 128u^8.$$

Všeobecně jest pro k liché

$$\varphi(u,k) = \sin k\alpha = ku - \frac{k(k^2-1^2)}{3!}u^3 + \ldots$$
$$\pm \frac{k(k^2-1^2)(k^2-3^2)\ldots(k^2-\overline{k-2}^2)}{k!}u^k$$

a pro k sudé

$$\psi(u,k) = \cos k\alpha = 1 - \frac{k^2}{2!}u^2 + \frac{k^2(k^2-2^2)}{4!}u^4 - \ldots$$
$$\pm \frac{k^2(k^2-2^2)(k^2-4^2)\ldots(k^2-\overline{k-2}^2)}{k!}u^k.$$

Kdybychom však dle vzorců těchto v rovnicích pro ξ a η vyjádřili funkce $\sin p\vartheta$, $\sin q\vartheta$, $\cos q\vartheta$ hodnotou $\sin\vartheta$, obdrželi bychom v obou výrazech řady, z nichž ϑ eliminovati bylo by všeobecně velmi obtížným. Výhodnou cestu ukazuje však formalní eliminace následující. Pišme rovnice pro ξ a η ve formě

$$\arcsin \xi = p\vartheta,$$
$$\arcsin \eta = q\vartheta + \varepsilon.$$

Násobíce hořejší rovnici koefficientem q, dolejší koefficientem p a odečtouce hořejší od dolejší obdržíme

$$p \arcsin \eta - q \arcsin \xi = p\varepsilon.$$

Společný úhel $pq\vartheta$ se vyloučil. Tím jest již řečeno, že dlužno zavésti tento úhel $pq\vartheta$, který jest nejmenším společným násobkem úhlů $p\vartheta$ a $q\vartheta$ a potom vhodně užiti vzorců nahoře uvedených.

Poznamenejme ještě, že jest

$$\varphi(-u) = -\varphi(u),$$
$$\psi(-u) = +\psi(u);$$

funkce φ jest tedy lichou, funkce ψ sudou.

§ 15. Všeobecné řešení analytické.

Po tomto výkladu přípravném vraťme se k svému vlastnímu úkolu, který budeme nyní moci zcela všeobecně a jednoduše řešiti.

K původním funkcím

$$\xi = \sin p\vartheta, \qquad \sqrt{1-\xi^2} = \cos p\vartheta,$$
$$\eta = \sin(q\vartheta+\varepsilon), \qquad \sqrt{1-\eta^2} = \cos(q\vartheta+\varepsilon)$$

zaveďme nové, pro úhly p- a q-násobné, šetříce zkráceného označení φ a ψ funkcí v předešlém odstavci zavedených,

$$\varphi(\xi,q) = \sin qp\vartheta, \qquad \psi(\xi,q) = \cos qp\vartheta$$
$$\varphi(\eta,p) = \sin p(q\vartheta+\varepsilon) \qquad \psi(\eta,p) = \cos p(q\vartheta+\varepsilon)$$
$$\overline{\varphi(\xi,q)}^2 + \overline{\psi(\xi,q)}^2 = 1$$
$$\overline{\varphi(\eta,p)}^2 + \overline{\psi(\eta,p)}^2 = 1.$$

Pak jest, rozvedeme-li,

$$\varphi(\eta,p) = \cos p\varepsilon \,.\, \varphi(\xi,q) + \sin p\varepsilon \,.\, \psi(\xi,q),$$
$$\psi(\eta,p) = \cos p\varepsilon \,.\, \psi(\xi,q) - \sin p\varepsilon \,.\, \varphi(\xi,q).$$

Rovnice tyto stanou se rovnicemi křivky, když ještě funkce $\varphi(\xi,q)$ a $\psi(\xi,q)$ vyjádříme proměnnou ξ samou, šetříce při tom požadavku racionalnosti; dle tohoto požadavku, který souvisí s otázkou, zda číslo p neb q jest liché neb sudé, zařídíme právě volbu buď funkce φ neb funkce ψ.

1. Budiž p liché a q též liché; pak jest funkce $\varphi(p)$ a $\varphi(q)$ racionalná, nikoli však $\psi(p)$ a $\psi(q)$; podržíce tedy ony racionalné, píšeme:

$$\varphi(\eta,p) = \cos p\varepsilon \,.\, \varphi(\xi,q) + \sin p\varepsilon \,.\, \sqrt{1-[\varphi(\xi,q)]^2}$$

anebo v úpravě závěrečné

$$\overline{\varphi(\xi,q)}^2 - 2\varphi(\xi,q)\,.\,\varphi(\eta,p)\cos p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta,p)}^2 = \sin^2 p\varepsilon,$$

což jest hledaná rovnice křivky.

2. Budiž p liché, q sudé; pak jest funkce $\varphi(p)$ a $\psi(q)$ racionalná, nikoli však $\varphi(q)$ a $\psi(p)$; podržíce tedy ony racionalné, obdržíme

$$\varphi(\eta,p) = \cos p\varepsilon \,.\, \sqrt{1-[\psi(\xi,q)]^2} + \sin p\varepsilon \,.\, \psi(\xi,q)$$

anebo v úpravě závěrečné

$$\overline{\psi(\xi,q)}^2 - 2\psi(\xi,q)\,.\,\varphi(\eta,p)\,.\,\sin p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta,p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

což jest též hledaná rovnice křivky.

3. Budiž konečně p sudé, q liché; pak jest funkce $\psi(p)$ a $\varphi(q)$ racionalná, nikoli však $\varphi(p)$ a $\psi(q)$; podržíce tedy opět ony racionalné, obdržíme

$$\psi(\eta, p) = \cos p\varepsilon \,.\, \sqrt{1 - [\varphi(\xi, q)]^2} - \sin p\varepsilon \,.\, \varphi(\xi, q)$$

anebo v úpravě závěrečné

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + 2\varphi(\xi, q) \,.\, \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

což jest opět hledaná rovnice křivky.

Sestavme přehledně rovnice výsledné křivky kmitové:

1. p liché, q liché:

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 - 2\varphi(\xi, q) \,.\, \varphi(\eta, p) \cos p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \sin^2 p\varepsilon;$$

2. p liché, q sudé:

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 - 2\psi(\xi, q) \,.\, \varphi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon;$$

3. p sudé, q liché:

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + 2\varphi(\xi, q) \,.\, \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon.$$

Pozorujeme v úpravě rovnic úplný souhlas; proto jsou také vzhledem k souřadnicím ξ, η stupně stejného. Vzhledem k tomu, že funkce $\varphi(u, k)$ i $\psi(u, k)$ jest stupně k-tého, mají čtverce funkcí pro ξ stupeň $2q$, pro η stupeň $2p$, a součiny funkcí pro obě proměnné stupeň $p + q$. Poněvadž jest pak $q > p$, jest rovnice celkově stupně $2q$-tého. K součinu přistupuje činitel (nehledíc ke znamení) buď $\sin p\varepsilon$ nebo $\cos p\varepsilon$; na pravo jest pak $\cos^2 p\varepsilon$ nebo $\sin^2 p\varepsilon$. V určitých případech jsou čísla p, q daná; jsou to konstanty. Naproti tomu rozdíl fasový ε může býti měnlivým. Vzhledem k tomu obdržíme pro měnící se ε celou řadu křivek, jež všechny náleží dohromady, tvoříce soustavu, význačnou pro určitý relativní kmitočet n.

Ze všech křivek každé takové soustavy vystupují zase v popředí dvě křivky jakožto zvlášť typické. Jedna z nich jest souměrnou k jedné i druhé ose souřadnicové; budeme ji zváti křivkou *souměrnou, symmetrickou* (par excellence). Druhá pak jest křivkou jako by dvojitou, kterou totiž kmitající bod v periodě T probíhá dvakrát, tak že její stupeň jest polovičním toho, který mají křivky ostatní; jest tedy křivka ta *zrůdnou, degenerovanou.*

Křivka symmetrická vznikne, když koefficient součinu funkcí φ neb ψ v analytické rovnici se stává nullou.

Jsou-li čísla p a q obě lichá, nastává případ ten pro

$$\cos p\varepsilon = 0, \qquad \sin p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k + 1}{4p}.$$

Je-li však z čísel p a q jedno liché a druhé sudé, nastává případ ten pro

$$\sin p\varepsilon = 0, \qquad \cos p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = 2k \,.\, \frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k}{4p}.$$

Při tom jest $k = 1, 2, 3, 4 \ldots$ až do toho čísla, pro které jest ještě $\varepsilon < 2\pi$, čili $\tau < T_2$, tedy

$$\frac{2k + 1}{4p} < 1, \qquad \text{resp.}\ \frac{2k}{4p} < 1.$$

V hořejších třech případech utváří se tudíž rovnice křivky symmetrické následovně:

1. p liché, q liché

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = 1;$$

2. p liché, q sudé

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = 1;$$

3. p sudé, q liché

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = 1.$$

Rovnice jsou vzhledem k úsečce ξ stupně $2q$-tého, vzhledem k pořadnici η stupně $2p$-tého; obě proměnné jsou v rovnicích od sebe oddělené.

Křivka degenerovaná vznikne, když koefficient součinu funkcí φ neb ψ v analytické rovnici stává se rovným jedničce; neboť pak vznikne na levo rovnice úplný čtverec, kdežto člen na pravo stává se nullou.

Jsou-li čísla p a q obě lichá, nastává případ ten pro

$$\sin p\varepsilon = 0, \qquad \cos p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = 2k \cdot \frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k}{4p}.$$

Je-li však z čísel p a q jedno liché a druhé sudé, nastává případ ten pro

$$\cos p\varepsilon = 0, \qquad \sin p\varepsilon = \pm 1,$$

tedy

$$p\varepsilon = (2k + 1)\frac{\pi}{2},$$

z čehož

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \frac{2k + 1}{4p},$$

kdež k má týž význam jako dříve.

Jest patrno, že případ křivky degenerované jest *komplementarným* k případu křivky symmetrické.

Rovnice křivky degenerované — když provedeme odmocnění, píšíce ji jakožto křivku jednoduchou — jest pro případy nahoře vytčené:

1. p liché, q liché

$$\varphi(\eta, p) = \pm \varphi(\xi, q);$$

2. p liché, q sudé

$$\varphi(\eta, p) = \pm \psi(\xi, q);$$

3. p sudé, q liché

$$\psi(\eta, p) = \mp \varphi(\xi, q).$$

Jak viděti, dvojitost znamení koefficientu $\cos p\varepsilon = \pm 1$, resp. $\sin p\varepsilon = \pm 1$ — která při křivce symmetrické následkem zdvojmocnění neměla významu — přijde zde k platnosti; obdržíme tedy touž křivku degenerovanou ve dvojí poloze. Uvážíme-li, že jest φ funkce lichá, ψ funkce sudá, t. j. že platí

$$\varphi(-u) = -\varphi(u), \qquad \psi(-u) = \psi(u),$$

pozorujeme ihned, že v případu 1. křivka *jednotlivá* nemá osu souměrnosti, ale že jest její druhá poloha souměrnou k poloze prvé vzhledem k ose $Y'Y$; v případu 2. má každá z obou degenerovaných křivek osu $Y'Y$ za osu souměrnosti a mimo to její poloha druhá jest vzhledem k ose $X'X$ souměrnou k poloze prvé; konečně v případu 3. má každá z obou degenerovaných křivek osu $X'X$ za osu souměrnosti a mimo to její poloha druhá jest vzhledem k ose $Y'Y$ souměrnou k poloze prvé.

Dosazovati do všeobecných rovnic, jak jsme je nyní obdrželi, za funkce φ a ψ příslušné řadové výrazy a do těch zase hodnoty $\frac{x}{a}$ a $\frac{y}{b}$ za ξ a η rušilo by přehled a neposkytovalo by žádného poznání nového. Jinak jest tomu, jsou-li za p a q dána určitá čísla; pak lze rovnice nalezené, jakožto schematické, vyplniti a tak zjednati rovnice tvaru obvyklého, což nečiní již žádných obtíží.

Určitými příklady objasní se zároveň výsledky zde všeobecně odvozené. Provedeme úkol tento v souvislosti s methodou grafickou.

§ 16. Obrazce Lissajousovy.

Důležitým doplňkem k výkladům odstavce předešlého jest methoda, kterouž se úkol, jak lze vibrace k sobě kolmé skládati, řeší graficky. Způsob, jakým se methoda tato provádí, zakládá se na tom, že jednoduchý pohyb kmitavý jest průmětem rovnoměrného pohybu kruhového; dle toho zařídí se pro určitý úkol práce *přípravná*, po níž vlastní grafické řešení již jednoduše pokračuje.

Pro přípravnou práci narýsujeme především dvě k sobě kolmé přímky, jednu $X'X$ pro kmity amplitudou a na př. směrem od levé ruky k pravé, druhou $Y'Y$ pro kmity amplitudou b ve směru zdola nahoru, tak jak obyčejně se rýsují osy souřadnic pravoúhlých v rovině. Kolem průseku obou těchto základních přímek opíšeme poloměry a a b dva soustředné kruhy, a rozdělíme jich kvadranty, oněmi základními přímkami vznikající, na vhodný počet stejných dílů, na př. 6 nebo 9, na nejvýše 12; lépe jest voliti menší počet dílů, aby se výkres nestal nepřehledným, a raději při práci další interpolovati. Spojujíce pak příslušné dělící body v jednotlivých kvadrantech, vedeme přímky k oněm dvěma základním $X'X$ a $Y'Y$ rovnoběžné; přímkami těmito protínají se oba průměry v délkách $2a$ na přímce $X'X$ a $2b$ na přímce $Y'Y$ v bodech, jimiž se určuje poloha bodu kmitajícího ve fasích časově stejně odlehlých, totiž v intervallech $\frac{T}{24}, \frac{T}{36}, \frac{T}{48}$, dle toho, zda-li kruhy byly děleny na 24, 36 neb 48 dílů. To platí stejně o kmitech ve směru $X'X$ i ve směru $Y'Y$ pro jakýkoli relativní kmitočet n. Tím jest vykonána práce přípravná; vznikne síť, jak ji znázorňují obrazce 18. a 19.; prvý pro amplitudy a, b různé, druhý pro amplitudy $a = b$ stejné.

Zbývá pak ještě voliti differenci fasovou ε. Vzhledem k tomu, že kmity ve směru $X'X$ amplitudou a pokládáme za základní, s nimiž druhé kmity ve směru $Y'Y$ amplitudou b srovnáváme, jest rozumno stanoviti, že v okamžiku nullovém $t = 0$ kmit ve směru $X'X$ začíná, kdežto kmit ve směru $Y'Y$ již začal a jest napřed ve fasi ε. Při tom jest zde jednodušší, na místě úhlu ε zavésti raději dobu τ, o kterou kmit ve směru $Y'Y$ jest napřed. Tato doba stanoví se pak raději relativně, vzhledem k celé periodě T_2, poněvadž poměrné číslo $\frac{\tau}{T_2}$ zároveň jest poměrným číslem rozdílu fasového ε vzhledem k plnému úhlu 2π, dle rovnice již dříve uvedené

$$\frac{\tau}{T_2} = \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

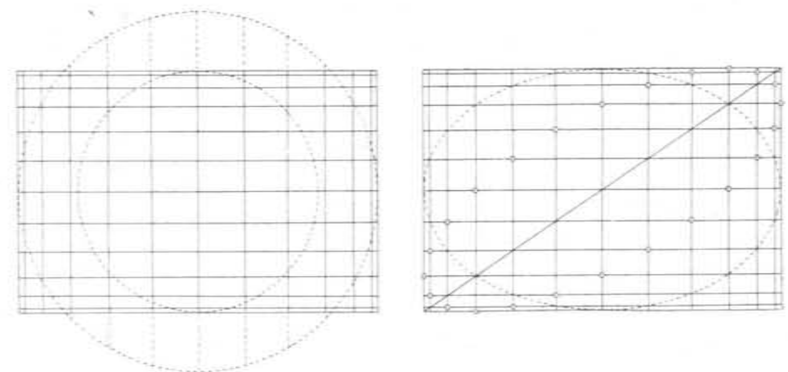
Poněvadž pak celá doba vibrační T_2 jest již rozdělena na jistý počet dílů, na př. 24, volí se výhodně

$$\frac{\tau}{T_2} = 0, \frac{1}{24}, \frac{2}{24}, \frac{3}{24}, \ldots$$

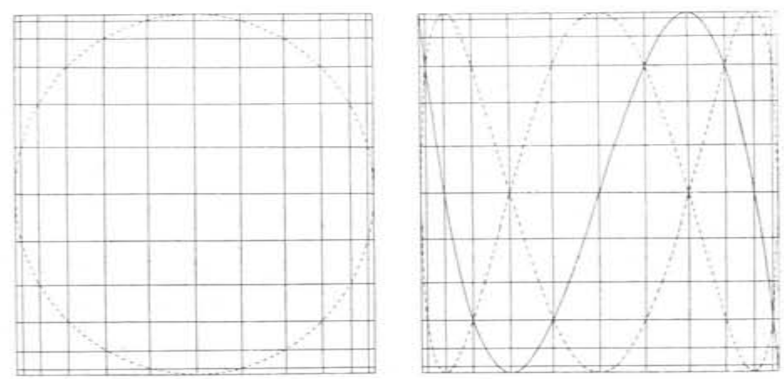
a podobně, kdyby T_2 bylo rozděleno na jiný počet dílů.

Volbou rozdílu časového τ určena jest pro okamžik nullový začáteční poloha kmitajícího bodu, od kteréž křivka začíná. Jde pak o to, stanoviti pro hledanou tuto křivku dostatečný počet bodů, aby jimi křivka s jistotou mohla býti vedena. K cíli tomu, vycházejíce od oné začáteční polohy, postupujeme na síti po jednotlivých krocích dále; postup od jedné dělicí přímky k druhé značí jako by krok. Jsou-li kmity stejnodobé, t. j. $n = 1$, jdeme vždy o jeden krok v pravo a o jeden nahoru, načež se poloha bodu kmitajícího označí; opět jeden krok na levo, jeden nahoru, atd. po případě též ve směru zpátečném. Je-li vibrace ve směru zdola nahoru o kmitočtu dvojnásobném, t. j. $n = 2$, jde se od oné polohy začáteční jeden krok ve směru od levé k pravé, ale dva kroky ve směru zdola nahoru. Všeobecně,

je-li $n = \frac{q}{p}$, jdeme p kroků ve směru prvém, q kroků ve směru druhém, počínajíce opět od té polohy začáteční, která je určena rozdílem časovým τ. Jsou-li čísla p, q poněkud veliká (na př. 4, 5, 6), jest výhodno, místo kroků celých počítati kroky poloviční a interpolovati, aby jednotlivé body hledané křivky nebyly od sebe daleko.



Obr. 18. Přípravná síť pro obrazce Lissajousovy při amplitudách různých.



Obr. 19. Přípravná síť pro obrazce Lissajousovy při amplitudách stejných.

K předběžnému objasnění toho, co zde řečeno, jest v obr. 18. a 19. na pravo na síti připojena konstrukce křivek „Lissajousových" pro hodnoty $\tau = 0$ (křivka plně vytažená) a $\tau = \frac{T}{4}$ (křivka čárkovaná), a to v obr. 18. pro $n = 1$, v obrazci 19. pro $n = 3$. Mimo to jest v obrazci 18. proveden ještě případ $n = 1$ pro $\tau = \frac{T}{8}$, a to tak, že jsou jen jednotlivé body křivky čili jednotlivé polohy bodu kmitajícího označeny.

V odstavcích následujících jsou pro jednotlivé číselné hodnoty relativního kmitočtu $n = \frac{q}{p}$ obrazce Lissajousovy rýsovány. O jich uspořádání budiž všeobecně poznamenáno následující. Ve všech případech jest uspořádání obrazců založeno tak, aby vynikly *základní jejich typy*, stanovené podmínkou

$$\sin p\varepsilon = 0, \qquad \cos p\varepsilon = 0.$$

Tyto typy tvoří začátek a konec serie obrazců. Jsou však kresleny *serie dvě* nad sebou; to proto, poněvadž se vždy jeden z obou základních typů ukazuje ve *dvou souměrných polohách*, buď prvý, pro který jest $\sin p\varepsilon = 0$, nebo druhý, pro který jest $\cos p\varepsilon = 0$; souměrnost platí pak buď vzhledem k ose $X'X$ nebo vzhledem k ose $Y'Y$; to řídí se číslem n a vynikne pěkně svým uspořádáním nad sebou. Vedle typů základních jsou pak rýsovány obrazce přechodní, jež mají něco z jednoho a něco z druhého typu, blížíce se buď jednomu neb druhému. Jest velmi poučno tyto přechody studovati. Když kmit základní, o periodě T_1 ve směru $X'X$ začíná, jest kmit přidružený, o periodě T_2 ve směru $Y'Y$ o dobu τ napřed. Pod každým obrazcem jsou udány číselné hodnoty poměru $\frac{\tau}{T_2}$ (který jest týž jako $\frac{\varepsilon}{2\pi}$), pro který obrazec vzniká. Jest viděti, že týž obrazec se opakuje několikráte pro různé ony hodnoty (při čemž zůstává $\tau < T_2$, $\varepsilon < 2\pi$); proto jest třeba tyto hodnoty, jak dle řady arithmetické jdou za sebou, sledovati, aby souvislost obrazců a jich přechody dobře vynikly. Když se tak obrazce studují, ukáže se zároveň, že se tytéž křivky, zejména složitější, při různých oněch číselných hodnotách opisují v různém smyslu.

Při tomto rýsování obrazců Lissajousových naskýtá se každému podobná otázka, jako při rýsování diagrammů pro skládání stejnosměrných vibrací. Rozměry obrazce souvisí s volbou amplitud a a b, nikoli s jich absolutní, nýbrž s jich relativní velikostí. Mohly by se voliti stejné, $a = b$; avšak tu vznikají křivky — jako v obr. 19., kde jest $n = 3$ — které činí rozhodně dojem nepřirozenosti, jsouce v jednom směru jako by sražené, v druhém roztáhlé. Podmínka $a = b$ značí akusticky,

že tony, při nichž ony kmity studujeme, jsou stejné intensity. Podmínka taková nesrovnává se z pravidla se skutečností, kde tony vyšší jsou slabšími svou intensitou nad tony vyšší. Dle toho bylo by nutno, amplitudu b — vyjímajíc unisono — voliti menší. Aby pak zde vyloučena byla jakákoli nahodilost nebo libovůle, provedeny zde obrazce Lissajousovy dle zásady vyjádřené rovnicí

$$\frac{a^2}{b^2} = n,$$

kterouž se stanoví, že ton n-kráte vyšší jest n-kráte méně intensivní než ton základní. Volbou touto jest pro obrazce zjednán určitý základ, a jest také viděti, že se jím pro rozměry křivek v obou směrech získává jistá přiměřenost.

Křivky tyto mají jméno „obrazců Lissajous-ových“. Pojednání, v němž *Jules A. Lissajous* — tehda professor fysiky na lyceu Saint-Louis v Paříži — výsledek obsáhlé práce uveřejnil, má název: Mémoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires. Annales de chimie et de physique (3), 51. pag. 147, 1857. (o zkoumání optickém pohybů kmitových), a bylo akademii věd předloženo dne 6. dubna 1857. Práce vzbudila zájem veliký; autorovi udělena cena Lacaze-ova; pokusy v práci popsané byly záhy opakovány, nejen od odborných pěstitelů fysiky, nýbrž i od mnohých, kteří akustikou se zálibou se zanášejí, vynalezeny mnohé variace v provádění pokusů, a za dnů našich přijímají se i do stručných učebnic akustiky.

Co se rozměrů křivek týče, volil Lissajous amplitudy a a b pro všechny relativní výšky n stejné, při tom $a < b$; v tomto provedení jsou jeho obrazce téměř ve všech učebnicích fysiky reprodukovány. Volba amplitud dle pravidla zde užitého shoduje se s volbou, která byla v odstavci 9. při skládání vibrací stejnosměrných přijata a kterou se v diagrammech tam sestrojených dosáhlo rovněž jisté typické přiměřenosti.

Úměrnost intensity tonu se čtvercem amplitudy platí s podmínkou caeteris paribus, kteráž jest splněna u téhož tonu, určitého kmitočtu, kdežto u tonů různých kmitočtů vždy splněna nebývá.

Aby se téže sítě, pro obrazce Lissajousovy při určitém relativním kmitočtu n připravené, dalo použiti pro případy rozmanitých rozdílů fasových, nekreslí se křivky do sítí samých, nýbrž na průsvitný papír, který se přes síť položí; křivky rýsují se pak z jednotlivých bodů grafickou interpolací.

Rýsovati obrazce Lissajousovy jest nejen důležito, aby se důkladněji poznaly a hloub v paměť vštípily, ale i zajímavo, aspoň pro každého, kdo má pochopení pro geometrickou pravidelnost a úhlednost.

§ 17. Případy zvláštní; n číslo celé.

Budiž n číslo celé, tedy $n = 1, 2, 3, \ldots$ V akustice zovou se tony o této relativní výšce harmonickými.

Příhlížejíce k obecným úvahám analytickým, položíme v příslušných rovnicích, kde přichází relativní kmitočet $n = \frac{q}{p}$, specialně $p = 1$.

Tím jest

$$\varphi(\eta, p) = \varphi(\eta, 1) = \eta = \frac{y}{b}.$$

Je-li tedy q liché, obdržíme rovnici křivky výsledné

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 - 2\varphi(\xi, q) \cdot \eta \cos\varepsilon + \eta^2 = \sin^2\varepsilon;$$

pakli jest q sudé, obdržíme rovnici křivky výsledné

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 - 2\psi(\xi, q) \cdot \eta \sin\varepsilon + \eta^2 = \cos^2\varepsilon.$$

Jednoduchostí svou vyniká tu křivka degenerovaná, kteráž jest určena rovnicí:

pro q liché

$$\eta = \pm \varphi(\xi, q),$$

pro q sudé

$$\eta = \pm \psi(\xi, q).$$

Křivka jest tedy povšechně parabolou stupně q-tého.

Projednejme nyní určité případy zvláštní.

1. Budiž $n = 1$. Zde jest

$$\varphi(\xi, q) = \xi = \frac{x}{a},$$

tudíž rovnice křivky výsledné

$$\xi^2 - 2\xi\eta \cos\varepsilon + \eta^2 = \sin^2\varepsilon$$

anebo v souřadnicích původních

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cos\varepsilon + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varepsilon.$$

Rovnice náleží ellipse. Ze dvou k sobě kolmých vibrací stejnodobých vzniká tudíž vibrace elliptická.

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ \begin{matrix} 0, & \frac{2}{4}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{3}{4} \end{matrix} \right. .$$

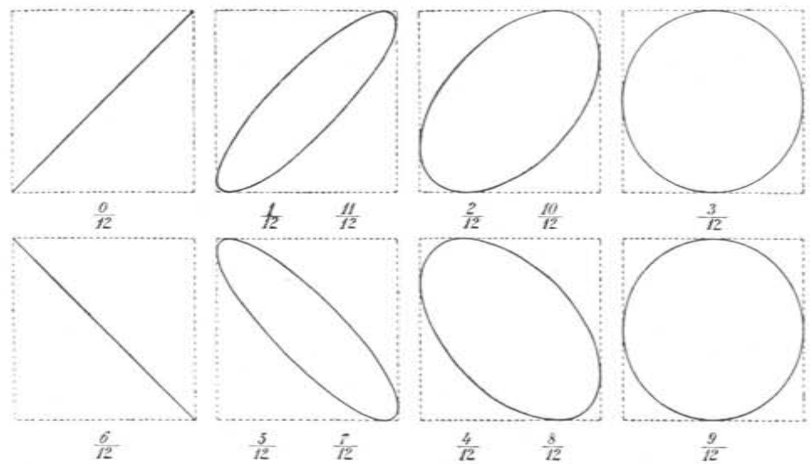
Dolejší hodnoty stanoví křivku symmetrickou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

hořejší pak křivku degenerovanou

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Obrazec 20. podává přehled změn, jaké vznikají, když hodnoty poměru $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$ se postupně mění, v intervallech $\frac{1}{12}$ od 0 do 1; intervall jest volen tak, aby mezi křivkami typickými byly ještě dvě přechodní. Při nenáhle rostoucím τ neb ε začíná serie obrazců křivkou degenerovanou v poloze prvé, přechází ke křivce souměrné, touto zase k degenerované v poloze druhé, načež ve zpětném pořádku k původní.



Obr. 20. Lissajousovy obrazce; unisono $\left(\frac{1}{1}\right)$.

2. Budiž $n = 2$. Zde jest

$$\psi(\xi, 2) = 1 - 2\xi^2 = 1 - \frac{2x^2}{a^2},$$

a rovnice výsledné křivky

$$(1 - 2\xi^2)^2 - 2(1 - 2\xi^2)\, \eta \cos\varepsilon + \eta^2 = \sin^2\varepsilon$$

anebo v souřadnicích původních

$$\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} \cos\varepsilon + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varepsilon.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \begin{cases} 0, & \frac{2}{4}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Zde naopak hořejší hodnoty stanoví křivku symmetrickou

$$\left(1-\frac{2x^2}{a^2}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}=1$$

čili

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{4x^2}{a^2}-\frac{4x^4}{a^4},$$

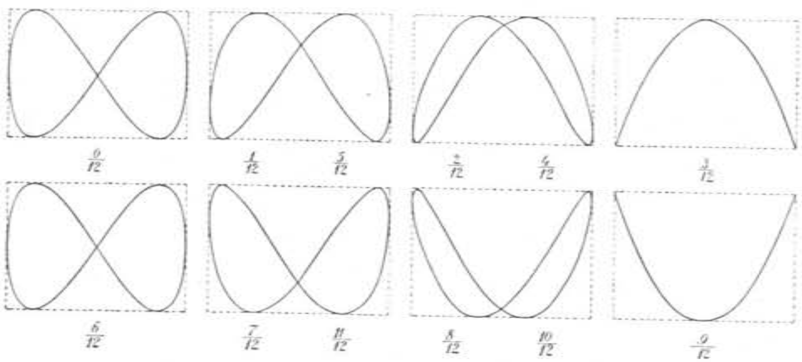
dolejší pak parabolu

$$\pm\frac{y}{b}=1-\frac{2x^2}{a^2}.$$

Křivka symmetrická označuje se často jako lemniskata (od λημνίσκος ὁ stuha, klička), ale nesmí pak býti stotožňována s lemniskatou, jež jest zvláštním případem křivek Cassiniho; neboť tato jest určena jedinou konstantou a, majíc za rovnici

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$

kdež a má týž význam jako při naší lemniskatě (poloosa); při této však rozhoduje ještě konstanta b; ale i při $b=a$ jest rovnice obou těchto tak zvaných lemniskat zcela rozdílnou.



Obr. 21. Lissajousovy obrazce; prima a oktava $\left(\frac{2}{1}\right)$.

Jak se serie obrazců utváří, když ε a τ postupně se mění, objasňuje obr. 21. Řada zde začíná křivkou souměrnou, pokračuje k parabole v první poloze, jde zpět ke křivce souměrné a postupuje k parabole v druhé poloze, odkud se opět vrací ke

křivce souměrné. Pořadí obrazců jest kresleno v intervallech $\frac{1}{12}$ pro $\frac{\varepsilon}{2\pi}=\frac{\tau}{T_2}$ jako v případu předešlém.

3. Budiž $n=3$. Zde jest

$$\varphi(\xi, 3)=3\xi-4\xi^3=\frac{3x}{a}-\frac{4x^3}{a^3},$$

a rovnice výsledné křivky

$$(3\xi-4\xi^3)^2-2(3\xi-4\xi^3)\,\eta\cos\varepsilon+\eta^2=\sin^2\varepsilon$$

anebo v souřadnicích původních .

$$\left(\frac{3x}{a}-\frac{4x^3}{a^3}\right)^2-2\left(\frac{3x}{a}-\frac{4x^3}{a^3}\right)\frac{y}{b}\cos\varepsilon+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\varepsilon.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \begin{cases} 0, & \frac{2}{4}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Hořejší hodnoty stanoví, jakožto křivku degenerovanou, parabolu stupně třetího

$$\pm\frac{y}{b}=\frac{3x}{a}-\frac{4x^3}{a^3},$$

dolejší pak křivku souměrnou

$$\left(\frac{3x}{a}-\frac{4x^3}{a^3}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

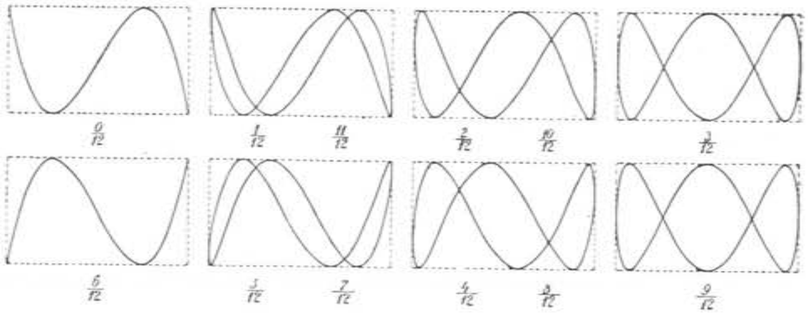
Jiná forma rovnice této jest

$$\frac{y^2}{b^2}=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{a^2}\right)^2,$$

která má tu formalní výhodu, že udává ihned průseky křivky s osou úseček. Křivka má tvar jako dvou ležatých osmiček, jež jsou uprostřed sloučeny tak, že zbývají jen dva body, v nichž se větve kříží.

Obr. 22. znázorňuje postup křivek při rostoucím ε a τ; začíná se parabolou v prvé poloze, pokračuje skrze křivku souměrnou k parabole v druhé poloze, odtud zpětným postupem skrze křivku souměrnou opět k parabole v prvé poloze. Pro poměr $\frac{\varepsilon}{2\pi}=\frac{\tau}{T_2}$ volen opět intervall $\frac{1}{12}$.

Příklady uvedené dostačí. Snadno lze již posouditi, jak se věc má všeobecně, když si představíme, jako by rozdíl fasový se měnil nepřetržitě. Je-li q liché, podobá se změna obrazců oscillaci od paraboly v prvé poloze skrze křivku souměrnou k parabole v druhé poloze a zase zpět. Je-li q sudé, vychází tato oscillace od křivky souměrné, jde k parabole v prvé poloze, pak zpět ke křivce souměrné, odtud k parabole v druhé poloze, pak zase zpět ke křivce souměrné.



Obr. 22. Lissajousovy obrazce; prima a duodecima $\left(\frac{3}{1}\right)$.

Diskussi křivek opomineme, poněvadž pohled na obrazce stačí a poněvadž provésti diskussi takovou analyticky — dle známých pravidel — nečiní obtíží žádných.

§ 18. **Pokračování; n číslo lomené.**

Přejděme dále k případům, kde n jest číslo lomené.

4. Budiž $n = \frac{3}{2}$, tedy $p = 2$, $q = 3$; sem náleží tedy všeobecná rovnice (p sudé, q liché):

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + 2\varphi(\xi, q) \cdot \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

do kteréž dlužno dosaditi:

$$\varphi(\xi, 3) = 3\xi - 4\xi^3 = \frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3},$$

$$\psi(\eta, 2) = 1 - 2\eta^2 = 1 - \frac{2y^2}{b^2}.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \begin{cases} 0, \quad \frac{2}{8}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{6}{8}, \\ \frac{1}{8}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{7}{8}. \end{cases}$$

Hořejší hodnoty určují křivku symmetrickou

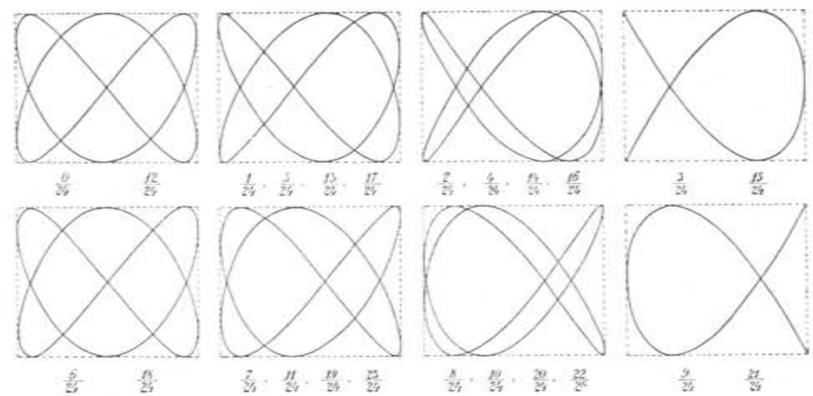
$$\left(\frac{3x}{a} - \frac{4x^3}{a^3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2y^2}{b^2}\right)^2 = 1$$

čili

$$\frac{4y^2}{b^2} - \frac{4y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2}\left(3 - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2,$$

dolejší pak křivku degenerovanou

$$\frac{2y^2}{b^2} = 1 \pm \frac{x}{a}\left(3 - \frac{4x^2}{a^2}\right).$$



Obr. 23. Lissajousovy obrazce; prima a kvinta $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Postup obrazců při rostoucím ε a τ znázorňuje obr. 23. Řada začíná křivkou symmetrickou, pokračuje k degenerované v první poloze, vrací se k symmetrické pokračuje k degenerované v druhé poloze a zakončuje symmetrickou. To se opakuje ještě jednou. Křivky jednotlivé rýsovány pro intervall $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$ takový, aby mezi obě křivky typické přišly ještě dvě přechodní; v předešlých případech byl tento intervall $\frac{1}{12}$, zde nutno k témuž cíli voliti $\frac{1}{24}$.

5. Budiž $n = \frac{4}{3}$, tedy $p = 3$, $q = 4$; (akusticky prima a kvarta). Užijme tedy všeobecné rovnice (p liché, q sudé)

$$\overline{\psi(\xi, q)}^2 - 2\psi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

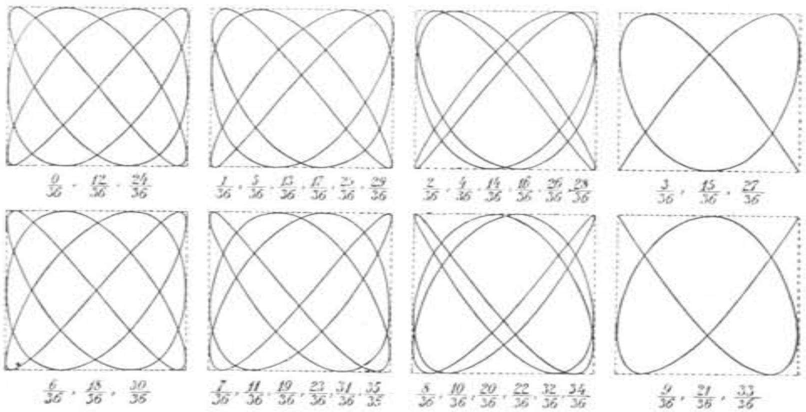
do kteréž dosadíme

$$\psi(\xi, 4) = 1 - 8\xi^2 + 8\xi^4 = 1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{8x^4}{a^4}$$

$$\varphi(\eta, 3) = 3\eta - 4\eta^3 = \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0, & \frac{2}{12}, & \frac{4}{12}, & \frac{6}{12}, & \frac{8}{12}, & \frac{10}{12}, \\ \frac{1}{12}, & \frac{3}{12}, & \frac{5}{12}, & \frac{7}{12}, & \frac{9}{12}, & \frac{11}{12}. \end{array} \right.$$



Obr. 24. Lissajousovy obrazce; prima a kvarta $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Hořejší hodnoty stanoví křivku symmetrickou

$$\left(1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{8x^4}{a^4}\right)^2 + \left(\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}\right)^2 = 1.$$

dolejší pak křivku degenerovanou

$$\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} = \pm\left(1 - \frac{8x^2}{a^2} + \frac{8x^4}{a^4}\right).$$

Obr. 24. představuje serii křivek při rostoucím ε a τ. Řada začíná křivkou souměrnou, pokračuje k degenerované v prvé poloze, vrací se k souměrné, pokračuje k degenerované v druhé poloze, vrací se k souměrné, a tento postup opakuje se ještě dvakrát. Aby mezi křivkami typickými byly dvě přechodní, jako vždy dříve, nutno pro intervall $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$ voliti hodnotu $\frac{1}{36}$.

6. Budiž $n = \frac{5}{3}$ (akusticky prima a sexta), tedy $p = 3$, $q = 5$; sem náleží rovnice všeobecná (p i q liché)

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 - 2\varphi(\xi, q) \cdot \varphi(\eta, p) \cos p\varepsilon + \overline{\varphi(\eta, p)}^2 = \sin^2 p\varepsilon,$$

kde dlužno dosaditi

$$\varphi(\xi, 5) = 5\xi - 20\xi^3 + 16\xi^5 = \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}$$

$$\varphi(\eta, 3) = 3\eta - 4\eta^3 = \frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}.$$

Křivky typické obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0, & \frac{2}{12}, & \frac{4}{12}, & \frac{6}{12}, & \frac{8}{12}, & \frac{10}{12}, \\ \frac{1}{12}, & \frac{3}{12}, & \frac{5}{12}, & \frac{7}{12}, & \frac{9}{12}, & \frac{11}{12}. \end{array} \right.$$

Hořejší hodnoty stanoví křivku degenerovanou

$$\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3} = \pm\left(\frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}\right),$$

dolejší pak křivku souměrnou

$$\left(\frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}\right)^2 + \left(\frac{3y}{b} - \frac{4y^3}{b^3}\right)^2 = 1.$$

Obr. 25. představuje postup křivek při rostoucím ε a τ; serie začíná křivkou degenerovanou v prvé poloze a přechází křivkou souměrnou k degenerované v druhé poloze a zase zpět křivkou souměrnou k degenerované v prvé poloze, a tento postup opakuje se třikrát. Pro intervall $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$ volena jako v případu předešlém hodnota $\frac{1}{36}$.

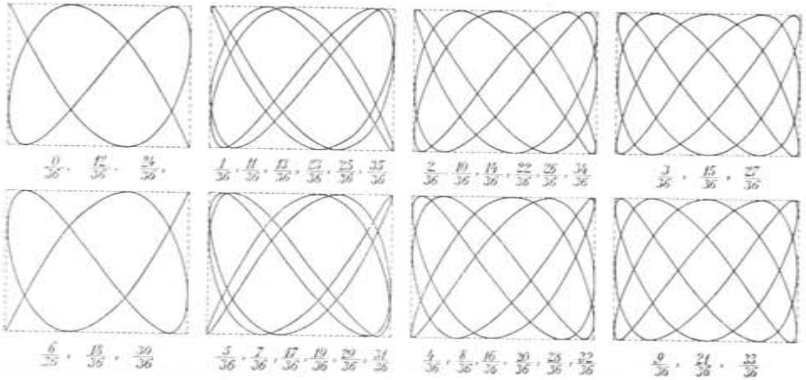
7. Budiž konečně $n = \frac{5}{4}$ (prima a tercie), tedy $p = 4$, $q = 5$; všeobecná rovnice sem náležející jest (p sudé, q liché)

$$\overline{\varphi(\xi, q)}^2 + 2\varphi(\xi, q) \cdot \psi(\eta, p) \sin p\varepsilon + \overline{\psi(\eta, p)}^2 = \cos^2 p\varepsilon,$$

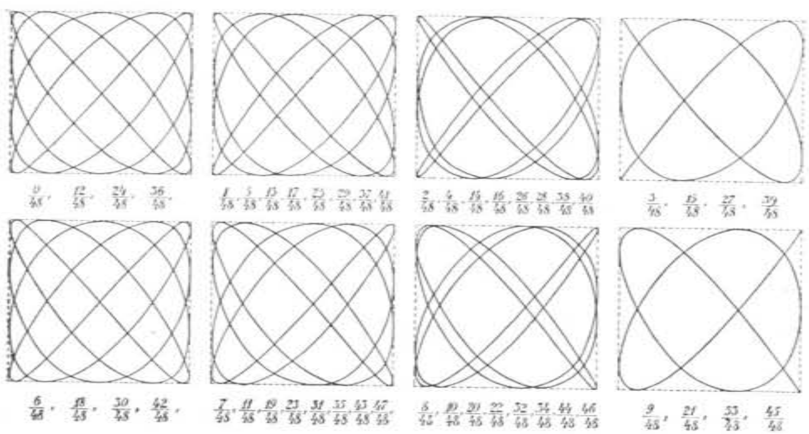
kde dlužno dosaditi

$$\varphi(\xi, 5) = 5\xi - 20\xi^3 + 16\xi^5 = \frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}$$

$$\psi(\eta, 4) = 1 - 8\eta^2 + 8\eta^4 = 1 - \frac{8y^2}{b^2} + \frac{8y^4}{b^4}$$



Obr. 25. Lissajousovy obrazce; prima a sexta $\left(\frac{5}{3}\right)$.



Obr. 26. Lissajousovy obrazce; prima a tercie $\left(\frac{5}{4}\right)$.

Typické tvary obdržíme pro hodnoty

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{T_2} = \begin{cases} 0, \quad \frac{2}{16}, \quad \frac{4}{16}, \quad \frac{6}{16}, \quad \frac{8}{16}, \quad \frac{10}{16}, \quad \frac{12}{16}, \quad \frac{14}{16}, \\ \frac{1}{16}, \quad \frac{3}{16}, \quad \frac{5}{16}, \quad \frac{7}{16}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{11}{16}, \quad \frac{13}{16}, \quad \frac{15}{16}. \end{cases}$$

Hořejšími hodnotami jest určena křivka souměrná

$$\left(\frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}\right)^2 + \left(1 - \frac{8y^2}{b^2} + \frac{8y^4}{b^4}\right)^2 = 1,$$

dolejšími pak křivka degenerovaná

$$1 - \frac{8y^2}{b^2} + \frac{8y^4}{b^4} = \mp\left(\frac{5x}{a} - \frac{20x^3}{a^3} + \frac{16x^5}{a^5}\right).$$

Obr. 26. předvádí postup křivek při rostoucím ε a τ; serie začíná křivkou souměrnou, odtud přechází k degenerované v první poloze, pak zpět skrze souměrnou k degenerované v druhé poloze a vrací se k souměrné; tento postup se pak opakuje čtyřikrát. Aby mezi křivkami typickými opět byly dvě přechodní, nutno zde pro intervall $\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2}$ voliti hodnotu $\frac{1}{48}$.

Uvedené příklady, při nichž jsme diskussi analytických rovnic pominuli, na grafickém znázornění přestávajíce, postačí úplně, abychom poznali, jak se věc má zcela všeobecně. Probíhá-li ε všechny hodnoty od 0 do 2π, mění se křivky mezi tvary typickými, tak že se změna opakuje p-kráte; je-li p a q liché, začíná se křivkou degenerovanou, je-li buď p nebo q sudé, křivkou souměrnou. Aby mezi typickými křivkami byly dvě přechodní, nutno pro hodnotu

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\tau}{T_2} \text{ voliti intervall } \frac{1}{4} : 3 : p = \frac{1}{12p}.$$

§ 19. **Měnlivost obrazců.**

Jednajíce o obrazcích Lissajousových poukázali jsme k veliké rozmanitosti, jaká i při určitém relativním kmitočtu n ve tvarech obrazců vzniká růzností fasového rozdílu daných kmitů, ale jinak předpokládali jsme, že z oněch rozmanitých tvarů jeden určitý se objevuje a zůstává. Tomu je v skutku tak při geometrických konstrukcích. Avšak při skutečných pokusech objevuje se úkaz jiný, nový; obrazec nejeví se *v určitém* tvaru, nejeví se býti strnulým, jako obraz konstrukcí zjednaný, nýbrž měnlivým, přecházejícím plynule z jednoho tvaru do následujícího, jenž vzniká při rozdílu fasovém poněkud jiném. Měnlivost tato ukazuje se tedy tak, jako by rozdíl fasový nepřetržitě stoupal nebo klesal; následkem toho není vlastně žádná křivka uzavřenou, poněvadž ke konci vibrační periody jsou již poměry poněkud změněné.

Jedná se zde o zjev tomu podobný, jaký nastává při dvou kmitech stejnosměrných, z nichž jeden jen přibližně jest stejnodobý s druhým; malý rozdíl period způsobuje tu nenáhlou změnu původního rozdílu fasového (§ 11.). Nejinak je tomu i v případu našem.

Poměr $\frac{N_2}{N_1} = \frac{q}{p}$ obou kmitočtů nelze fysikalně s naprostou přesností realisovati, nýbrž jen více méně přibližně; malý rozdíl periody T_2, jaká by býti měla a jaká v skutku jest, způsobuje pak nenáhlou změnu původního fasového rozdílu ε, a následkem toho nenáhlý spojitý přechod obrazce z jednoho tvaru do následujícího. Pokus nabývá tím zvláštní zajímavosti; jest viděti všechny tvary obrazce, pro jistý poměr $\frac{q}{p}$ dle rozdílů fasových možné, přecházeti jeden ve druhý. Zejména, když se obrazce promítají objektivně, světlem elektrickým nebo slunečním, ať již lamellami nebo ladičkami, jichž vibrace se udržují elektromagneticky, vzniká nenáhlou změnou obrazců zjev neobyčejně živý a poutavý. Celkový dojem jest ten, jako by pozorovatel měl před sebou jakýsi zjev oscillační; na krajích této oscillace jsou křivky typické *degenerované*, uprostřed, jako ve stavu rovnovážném, jest křivka *symmetrická*, kterou se děje přechod od křivky degenerované v poloze jedné ke křivce degenerované v poloze druhé. Stává se ovšem, že tytéž vibrační křivky, když se opakují, bývají bodem kmitajícím opisovány v různých směrech; ale oko této různosti neznamená, poněvadž jednotlivé polohy bodu kmitajícího — při dostatečné frekvenci — splývají v křivky souvislé.

Položme sobě otázku, jaké změně $\Delta\tau$ oscillace přísluší. Přechod od jednoho typického tvaru křivky ke druhému nastává dle dřívějších výkladů všeobecných, je-li

$$\frac{\tau}{T_2} = \frac{1}{4p} \quad \text{anebo} \quad \frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4q}.$$

Zaveďme raději celkovou periodu T, jež jest stanovena rovnicí

$$pT_1 = T = qT_2.$$

Pak jest

$$\tau = \frac{T}{4pq}.$$

Poněvadž pak při oné právě popsané oscillaci přechod se děje

od degenerované křivky v prvé poloze ke křivce souměrné, pak ke křivce degenerované v druhé poloze, a opět křivkou souměrnou ke křivce, od níž celá oscillace začala, tedy celkem 4-kráte, jest patrně

$$\Delta\tau = \frac{T}{pq}.$$

Proto, nežli předbíhání τ projde celou periodu T, opakuje se ona oscillace pq-kráte, při čemž jednotlivé z oněch typických křivek se opisují v různém smyslu. Čím jsou čísla p, q větší, t. j. čím jest poměr kmitočtů složitější, tím větší počet oscillací těch vznikne, než předbíhání τ projde plnou periodou T.

Popisovali jsme zjev, jak nastává, je-li doba T_2 jen *nepatrně* rozdílná od té, jež by kmitočtu $\frac{q}{p}$ přesně vyhovovala; změna obrazce se děje pozvolna. Je-li rozladění *větší*, děje se změna tato rychleji, ale pak zjev stává se neklidným; oko nemá již dojmu, že by pozorovalo obrazce relativnímu kmitočtu n příslušící; v skutku také neklidné ty obrazce přísluše jí již onomu poměru kmitočtů složitému, jak následkem rozladění vzniká. Je-li na př. rozladění — v případu unisono — $\frac{81}{80}$, má oko dojem, že vidí střídající se ellipsy; pak-li rozladění jest $\frac{25}{14}$, $\frac{16}{15}$ nebo dokonce $\frac{10}{9}$, $\frac{9}{8}$, pak nelze již mluviti o ellipsách rychle se měnících, nýbrž obrazec, který vzniká, přísluší vlastně tomuto kmitočtu složitějšímu.

Můžeme však věc též obrátiti. Když v určitém případu, na př. u dvou ladiček, shledáme, že tvar obrazce se mění velmi málo anebo dokonce že obraz se jeví strnulým, soudíme naopak, že ladičky jsou dle poměru n velmi dobře anebo zcela dobře naladěny. Prostředek tento, ladění ladiček zkoumati, jest velice citlivým, a v tom spočívá hlubší akustický význam obrazců Lissajousových.

Ke konci ještě malou poznámku. Když se obrazce Lissajousovy ukazují objektivně opticky, zpozoruje každý, že v různých svých větvích jsou různé intensity, a to větší, kde jest zakřivení větve větší. Vysvětlení podává obr. 18., ve kterém úmyslně ellipsa není vytažena, nýbrž naznačena jen jednotlivými polohami kmitajícího bodu; jest ihned viděti, že na místech, kde ellipsa jest zakřivenější, bod se pohybuje menší rychlostí, tudíž že na místech těch déle setrvává; odtud dojem zrakový déle trvá, tak že se tu křivka jeví jasnější. Ovšem to vše předpokládá, že pohybem vibrujícího bodu vzniká dojem úplné spojitosti křivky, což zase vyžaduje, aby světlý bod proběhl celou křivkou v době menší, než asi $\frac{1}{15}$ sekundy.

§ 20. Pokusy.

Experimentalní studium obrazců Lissajousových jest i co do stránky optické i akustické velmi zajímavé a poučné, a dá se provésti prostředky dosti jednoduchými a lacinými, v největší dokonalosti ovšem přiměřeně složitějšími a cennějšími.

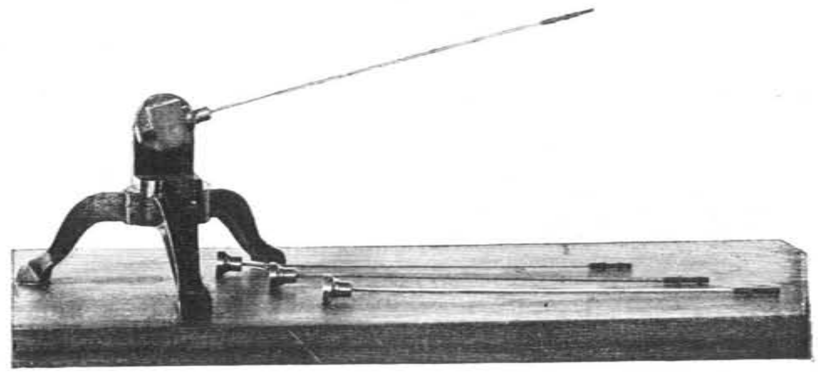
Obr. 27. Wheatstone-ův kaleidofon.

Přístrojem nejjednodušším k pozorování obrazců Lissajousových jest *Wheatstone-ův kaleidofon**), znázorněný v obr. 27. Skládá se z několika (6) ocelových na společném hmotnějším

*) Charles Wheatstone, Description of the Kaleidophon or phonic Kaleidoscope, New Quart. Journ. of Science I, 1827. Název kaleidofon jest méně vhodný, poněvadž o nějakém znění tyčí, když obrazce vznikají, nelze mluviti; lepší jest název kaloidoskop fonický, jehož se však neužívá.

základu upevněných tyčí, jež jsou na koncích opatřeny lesklou kuličkou.

Průřez tyčí jest obdélník, jehož strany mají se k sobě jako čísla p a q; vibrace ve směru strany p dává kmitočet N_1, ve směru strany q kmitočet N_2; šikmým vyšinutím tyče vznikají obě kolmé vibrace zároveň a kulička probíhá příslušným obrazcem Lissajousovým; děje-li se to s dostatečnou rychlostí, vzniká v oku spojitostí jednotlivých poloh, následkem trvání dojmu zrakového, obraz celé křivky.



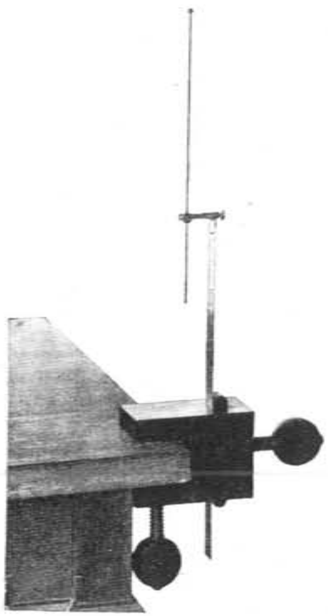
Obr. 28. Koenigův kaleidofon.

V přístroji v obr. 27. znázorněném jsou tyče 28 *cm* dlouhé; průřezové rozměry jsou upraveny dle poměrů

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}.$$

Místo tyče průřezu čtvercového jest užito tyče průřezu kruhového. Poměry $\frac{q}{p}$ lze též akusticky zkoumati; tře-li se tyč smyčcem na příč, jest slyšeti tony dosti čisté a zvučné, rozmanité výšky, dle toho, jak a na kterém místě se tyč tře; jsou to vrchní (alikvotní) tony tyče. Tře-li se však tyč smyčcem na *témže místě*, rovnoběžně nejdříve s jednou a pak s druhou stranou pravoúhlého průřezu, jest intervall obou tonů $\frac{q}{p}$, jak přísluší obrazci Lissajousově. Vzniknou totiž vrchní tony téhož řádu.

Pěknou modifikaci zavedl *R. Koenig*. Tyče, značně dlouhé, (60 *cm*) upevňují se do massivního stojanu, v obr. 28. znázorněného; na koncích pak jedné každé jest na místo lesklé kuličky nastrčen dřevěný uhlíček, který se rozžhaví; po tmě jeví se pak obrazce Lissajousovy jako ohnivé velmi pěkně a jsou vzhledem k značnější délce tyčí také větších rozměrů.



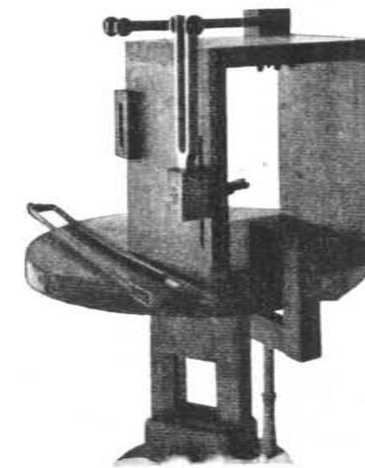
Obr. 29. Melde-ův universalní kaleidofon.

Kaleidofon universalní, znázorněný v obr. 29., sestrojil (1861) *Melde**). U předešlého kaleidofonu dává každá tyč *jediný* jen obrazec Lissajousův a to pro směry kmitavé na vzájem kolmé. U kaleidofonu universalního jest užito ocelové lamelly a ocelového drátku o průřezu kruhovém: lamella jest zapjata ve svěráku upevněném na stole experimentalním a dá se povytáhnouti nebo níže zastrčiti, tak že délka její jest v jistých mezích měnliva; nahoře na lamelle jest svorka, do níž se upevní drátek, na svém konci lesklou kuličkou opatřený, který lze rovněž na větší nebo menší délku zaříditi. Dle poměru obou délek mění se pak vzájemný kmitočet. Při tom se chvěje lamella ve směru určitém, drátek však ve směru libovolném — ač-li jest souměrně ve svorce utažen a jinak dobře homogenní; proto lze pohyby kmitavé voliti buď stejnosměrně anebo jakkoli, — v úhlu libovolném — různosměrně; odtud název kaleidofon universalní. Pro studium subjektivní jest kaleidofon tento velice poučný.

Přístroje dosavade popsané — výhodné svou jednoduchostí — umožňují studovati, jak se různosměrné pohyby kmitavé geometricky skládají ale nemají významu akustického; nevzniká při nich žádný ton, poněvadž vibrace se dějí s kmitočtem velmi malým. Patrně jsou dokonalejšími přístroje takové, při nichž pozorování geometrické se doplňuje akustickým. Požadavku tomuto nejlépe vyhovují ladičky. Jak pokus upraviti, aby účelu

*) *Frant. Em. Melde* (1832—1901), professor fysiky na universitě v Mariboru, jeden z nejlepších akustiků doby nejnovější; vydal též (1864) atlas obrazců kmitavých, jak je svým kaleidofonem pozoroval. Přístroj podobný sestrojil též *Ferd. Lippich* (* 1838), nyní professor něm. university K. F. v Praze.

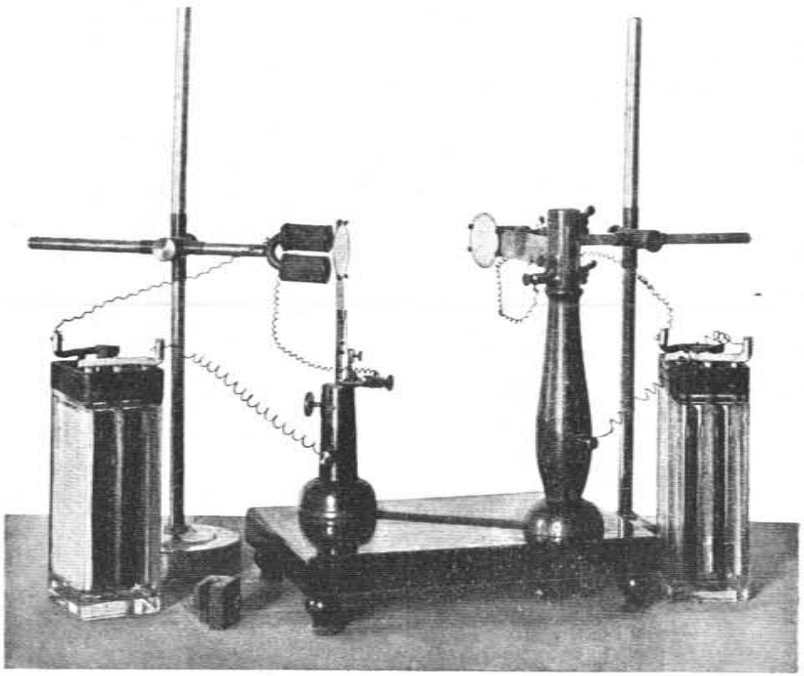
vytčeného se dosáhlo, znázorňuje obr. 30. Na společném dřevěném podstavci jsou nastrčeny a šroubem upevněny dvě ladičky, jedna vodorovně, druhá svisle. Každá má na jednom ramenu zrcátko v mosazné objímce, na druhém pak k vyvážení stejnou mosaznou hmotu též ve tvaru oné objímky. Ladičky se dají v rýhách ve dřevěném podstavci připravených pošinovati, také poněkud stáčeti, a zařídí se tak, aby zrcátka byla stejně vysoko a přibližně vespolek rovnoběžná.



Obr. 30. Skřížené ladičky se zrcátky k pozorování obrazců Lissajousových.

Jedná-li se o pozorování *subjektivní*, postaví se přístroj v síni mírně zatemněné blízko k okenici, v níž jest zasazeno diafragma s otvory kulatými různého průměru. Oko, zírajíc na otvor takový nepřímo, hledí na zrcátko jedno, tak postavené, aby se v něm zrcadlilo zrcátko druhé, v tomto pak aby se zrcadlil otvor sám. Když se smyčcem rozezvučí ladička vodorovná, roztáhne se obraz malého otvoru ve světlou přímku vodorovnou; když se pak rozezvučí též ladička svislá, vznikne obrazec Lissajousův, různý dle relativního kmitočtu *n* obou ladiček a dle jich rozdílu fasového. Větší neb menší přesnost ladění jeví se pak ve větším neb menším klidu obrazce; u ladiček lze dobře ladění tak přesně provésti, aby obrazec byl po dlouhou dobu stálým nebo jen velice málo měnlivým. Výhodou jest, když zrcátka jsou ze skla planparallelního; pak lze k pozorování užiti dalekohledu. To má význam dvojí; jednak jest dalekohledem poloha oka po předběžném vyzkoušení určitě dána, jednak lze obrazec, dalekohledem mírně zvětšený, pozorovati i při velmi malém (jako by bodovém) otvoru, čímž obrysy obrazce se stávají určitými, čistými, a sledovati i do výchylek velmi malých, což jest zase vzhledem k útlumu výhodné.

Ladiček se zrcátky planparallelními anebo ještě lépe se zrcátky na vnějším povrchu stříbřenými a hlazenými lze užiti též pro demonstrace *objektivní*. Ovšem jsou kmitavé obrázky velmi malé. Vzhledem k tomu jest výhodou, místo chvějících se ladiček užiti kmitajících ocelových lamell (podobně, jako při skládání vibrací stejnosměrných, § 9.). Přístroj účelu tomu sloužící znázorňuje obr. 31. Lamelly jsou na jednom konci upevněné, jedna vodorovně, druhá svisle, na druhém pak opatřené skleněnými zrcátky, jež zrcadlí na vnějším stříbřeném povrchu, a jež při upevnění lamell přijdou do stejné výše. Svazeček světelný vede se vodorovně od laterny s lampou drummondskou neb elektrickou. Do laterny jest vložena čočka kollimující a dia-



Obr. 31. Přístroj pro objektivní demonstraci obrazců Lissajousových.

fragma s kruhovými otvory různých průměrů. Světlo dopadá na jedno zrcátko, odráží se odtud na druhé a odtud na projekční bílou stěnu. Nejlépe jest zrcátka postaviti tak, aby paprsky světelné po dvojím tom odrazu postupovaly k původnímu směru, jak od laterny vycházejí, kolmo. Aby na stěně vznikl ostrý obraz kulatého otvoru, kterým světlo z laterny vystupuje, postaví se za otvor spojná čočka vhodné dálky ohniskové (na př. 100 *cm*), která zobrazí otvor realně. Lamelly udržují se ve vibraci elektromagneticky. Zdrojem proudu jest buď článek Grenetův anebo

lépe akkumulator. Amplitudy lze pošinováním elektromagnetů blíže k ocelovým lamellám v jistých mezích měniti. Na lamelle horizontalní jest pošinovatelná menší svorka k jemnější regulaci kmitočtu. Na lamellu vertikalní lze nasaditi a šroubem upevniti větší mosaznou hmotu, kterou se kmitočet zmenší; tím lze poměr *n* obou kmitočtů v jistých mezích měniti a tak obrazce rozmanité vytvořiti. Tyto jsou zvláště stkvělé, lze-li experimentovati světlem slunečním.

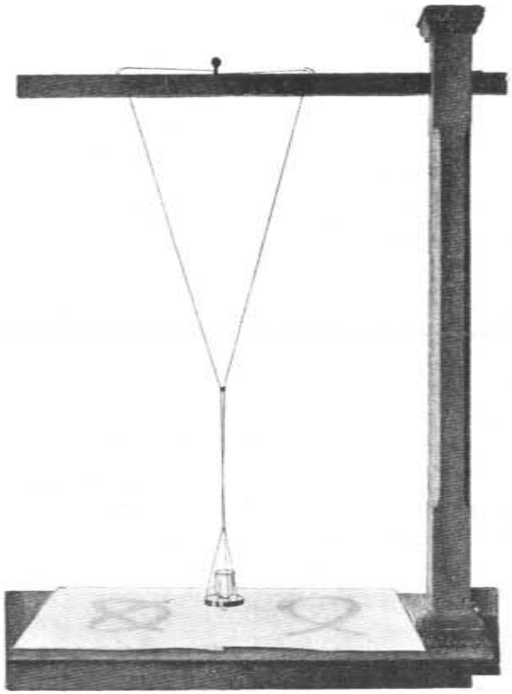
Kontakty na lamellách k samočinnému přerušování proudu mohou býti buď platinové, jako to bývá u signalových zvonků elektrických, anebo rtuťové. Při těchto vnořuje se platinový drátek, nahoře na lamelle upevněný, periodicky do rtuti, nalité na mističku ocelovou, která se dá na stojánkách dole svorkou opatřených stavěti níže nebo výše. V tomto způsobu upravil přístroj *L. Pfaundler* (nyní prof. fysiky ve Štyrském Hradci). Nelze popříti, že kontakty rtuťové jsou lepšími pro pravidelnost vibrací; ale jsou při experimentování velmi nepohodlné. Rtuť při nejmenším nárazu spadne, jiskrami se vypařuje, okysličuje, parami rtuťovými trpí stříbřená na povrchu zrcátka a oxydací rtuti zhoršuje se kontakt a pod. U platinových kontaktů, které vyžadují malého pružného péra, přicházívá do vibrace hlavní někdy vedlejší vibrace tohoto péra. Vzhledem k tomu jest výhodné, jsou-li lamelly poněkud silnější. V obrazci 31. jest na lamelle v levo viděti, jak jest kontakt platinový uspořádán; malým šroubkem lze péro, na němž jest malý platinový plíšek, v postavení správném říditi. Lamelly jsou 185 *mm* dlouhé, 25 *mm* široké a 0·8 *mm* silné. Jako zdroj proudu jsou v obrazci znázorněny dva příruční akkumulatory; při podobném uspořádání v obrazci 17. jest užito dvou článků Grenetových v úpravě takové, jako bývají články Smeeovy.

Když se při stejném kmitočtu obou lamell vytvoří ellipsa nebo po případě kruh, a když se některá z lamell nechá při svém chvění narážeti na pevný nějaký předmět, vzniknou v ní vibrace vedlejší, které se na kontuře oné ellipsy neb onoho kruhu jeví jako malé vlnky zvláštní. Podobné velmi jemné vlnky vznikají každým otřesením, na př. nárazem na stůl, poněvadž se tím zachvěje celý přístroj. Pozorování vlnek těchto na konturách obrazců Lissajousových jest velmi poučným příkladem superposice pohybů kmitavých.

Přes nepopíratelnou jednoduchost přístroje právě popsaného jest přece ve smyslu akustickém nejdokonalejším přístroj s *ladičkami*. K docílení větších obrazců jest ovšem nutno, aby ladičky byly dlouhé; rovněž jest velice žádoucno, aby byly ve vibraci udržovány elektromagneticky. Požadavky těmito stává se přístroj takový dosti drahým; ale za to jest velikou předností přístroje, že, co oko vidí, ucho současně slyší; dojmy zrakové doplňují a vykládají se dojmy sluchovými, čímž akustický význam obrazců Lissajousových daleko poučněji vyniká.

§ 21. Napodobení obrazců Lissajousových.

Obrazce Lissajousovy lze napodobiti *mechanicky*. Přístroje, kteréž k cíli tomu mnozí experimentatoři (jako Pfaundler, Stöhrer, Eisenlohr, Knoblauch a j.) sestrojili, zakládají se na tom, že lze pohyb kmitavý buď nahraditi promítáním rovnoměrného pohybu kruhového anebo napodobiti pohybem kyvadlovým. Jakožto příklad přístrojů takových budiž uveden apparat (obr. 32.), který sestrojil *H. Blackburn*. Zakládá se na



Obr. 32. Kyvadlo Blackburnovo.

kombinování dvou k sobě kolmých pohybů kyvadlových, způsobem, který z obrazce dostatečně jest patrný. Vzájemný poměr frekvencí kývavých ve směru jednom a druhém lze měniti zcela jednoduše pošinováním mosazného kroužku, kterým se bifilarní závěs uzavírá. Na konci nitek visí nádobka skleněná, nálevkovitá, do níž se dá něco jemného písku; při kývání vytéká písek a kreslí na podloženém kartonu obrazec, který jest přibližně Lissajousovým; shoda úplná vyžadovala by — při dokonalém poměru délek kyvadlových — aby byly amplitudy velmi malé a aby byl odstraněn útlum. Proto jest nádobka skleněná vložena do těžké mosazné (olovem zatížené) kulaté desky, jejíž pohyb se odporem vzduchu jen velice málo tlumí; tím způsobem lze docíliti obrazců, jichž

konec dobře splývá se začátkem. Karton béře se bílý, písek pak modrý, anebo červeně (alkoholickým roztokem fuxinu nebo eosinu) zbarvený. Jednoduchost celé úpravy jakož i rozmanitost pokusů, jež lze konati, činí přístroj tento zvláště zajímavým.

V obrazci 32., dle skutečnosti fotografovaném, vynikají oba obrazce pískem nakreslené slaběji, ač při nich užito písku červeně barveného; příčinou toho jest, že se při šikmém směru v pískové kontuře značně odráží bílé pozadí. Ale i tak dobře jest znamenati úhlednost a pravidelnost obou za příklad vytvořených obrazců.

Způsob právě vyložený, kterým se obrazce Lissajousovy napodobí, má základ foronomický. Podobně jednoduchý jest způsob následující, který má základ geometrický.

V úvahách předešlých kladli jsme

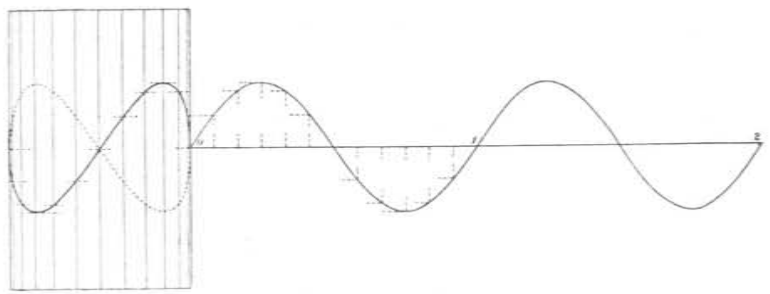
$$\frac{N_2}{N_1} = n = \frac{q}{p}$$

a předpokládali, že kmity s frekvencí N_1 se dějí vodorovně ve směru $X'X$ amplitudou a, kmity pak s frekvencí N_2 že se dějí svisle ve směru $Y'Y$ amplitudou b. Za tu dobu, kdy bod ve směru svislém vykoná q kmitů, vykoná ve směru vodorovném p kmitů. Majíce na paměti, že pohyb kmitavý vzniká promítáním rovnoměrného pohybu kruhového, zařídíme věc tak, aby bod ve směru svislém v skutku q-kráte kmital, ale ve směru vodorovném aby se kmitání jevilo jako průmět pohybu kruhového, t. j. aby zde bod p-kráte rovnoměrně obíhal na plášti kruhového kolmého válce, jehož osa souhlasí se směrem onoho kmitání.

Myšlenku tuto, kterou již *Lissajous* uvádí, lze uskutečniti následovně. Vybéře se skleněný, čistý válec, jehož vnější poloměr se shoduje s amplitudou a; vlastně se tato dle rozměru válce volí, a to menší pro účely pozorovatele jednotlivého (na př. $a = 2\frac{1}{2}$ *cm*), větší pro účely auditoria četnějšího (na př. $a = 5$ *cm*). Na to se připraví pravoúhle přiříznutý tenký papír, v šířce poněkud větší než jest dvojnásobná amplituda b, v délce pak takové, aby se rovnala p-násobnému obvodu válce $(p \,.\, 2\pi a)$, tak aby se papír právě p-krát dal na válec navinouti. Na tomto papíru vede se, po délce, střední přímka, rozdělí se na q stejných dílů a na těch narýsuje se q vibračních křivek amplitudou b.

Na to se křivka vibrační z papíru vystřihne, navine na válec, tak aby její začátek a konec splynuly, a obkreslí se na sklo, na př. černou barvou emailovou. Pravda, že při p-násobném navinutí prvnější část papíru se kryje částí pozdější; proto jest třeba onu vibrační křivku kresliti po částech a papír, již obkreslený, odvinovati. Když si pak myslíme, jako by jistý bod po křivce vibrační na válci postupoval, vykonává patrně q vibrací ve směru osy válce a při tom p oběhů; promítáme-li tyto oběhy na rovinu s osou válce rovnoběžnou, jeví se též jako vibrace. V projekci máme tudíž q vibrací ve směru svislém $Y'Y$, p vibrací ve směru vodorovném $X'X$, tudíž obrazec Lissajousův. Promítání lze i objektivně, rovnoběžnými paprsky na př. slunečními, ukázati, ale musí sklo býti velmi čisté a tenké.

Přístroj takto upravený nabývá zvláštní zajímavosti tím, že lze všechny variace, jaké v obrazcích vznikají různým fasovým rozdílem, zcela jednoduše obdržeti *pootočením válce* při promítání. Objasněme sobě, jak toto pootočení o jistý úhel α souvisí s rozdílem fasovým ε.



Obr. 33. Obrazec Lissajousův vznikající průmětem vibrační křivky na válci navinuté.

Pootočení o úhel α značí na obvodu délku $a\alpha$. Době vibrační T_2 přísluší délka $\frac{p \,.\, 2\pi a}{q}$. Poměr obou délek jest týž, jako poměr fasového rozdílu k plné úhlové periodě, tedy

$$\varepsilon : 2\pi = a\alpha : \frac{p \,.\, 2\pi a}{q},$$

odkudž plyne

$$\varepsilon = \frac{q}{p}\,\alpha.$$

Jak dříve dokázáno, přejde jeden typický tvar křivky Lissajousovy v druhý, kdykoli jest

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{1}{4p} \quad \text{čili} \quad \frac{q}{p} \,.\, \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{4p},$$

tudíž

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{4q}.$$

Vznikne-li tedy při projekci na př. obrazec symmetrický, přejde otočením válce o úhel $\frac{2\pi}{4q}$ v obrazec degenerovaný a dalším otočením o týž úhel opět v obrazec symmetrický. Je-li na př. $n = \frac{3}{2}$, střídají se obrazce symmetrický a degenerovaný otočením válce o úhel $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{12}$, tedy ve stupních, o úhel $\alpha = 30^0$.

V obr. 33. jest proveden případ $q = 2$, $p = 1$; (prima a oktava). Rozměry a, b jsou voleny tytéž jako v obr. 21. Pěkně lze zde sledovati, jak navinováním vibrační křivky na válec v průsvitu vzniká lemniskata pro tento případ význačná. Obrazce typické střídají se otočením válce o úhel $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{8}$ čili, ve stupních, o úhel $\alpha = 45^0$.

§ 22. Pohyb kmitavý ve významu všeobecném.

Úvahami odstavců předešlých získali jsme pro pojem kmitání bodu stanovisko všeobecnější. Seznavše, jak skládáním kmitů jednoduchých buď stejnosměrných nebo různosměrných se utváří pohyb výsledný, můžeme nyní i takovéto pohyby pokládati za dané a označiti všeobecně jakožto pohyby kmitavé. Společná jich vlastnost záleží v tom, že pohyb se děje kolem jisté polohy střední, rovnovážné, tak že výchylky od polohy této zůstávají malými, a že se děje periodicky. Jinak mohou kmity takové býti buď přímočaré neb křivočaré. Kmity přímočaré dají se rozložiti v jistý počet kmitů jednoduchých stejnosměrných o různých periodách, amplitudách a fasích v okamžiku nullovém. Kmity křivočaré dají se rozložiti ve dva k sobě kolmé kmity přímočaré, kteréž všeobecně opět lze pojmouti jako složené z kmitů jednoduchých o různých periodách, amplitudách a fasích v okamžiku nullovém. Z kmitavých pohybů křivočarých vynikají zejména *elliptické*, jež někdy stávají se i přímočarými, ve zvláštním případě též *cirkularními*. Vibrace elliptické dají se rozložiti ve dvě k sobě kolmé vibrace jednoduché stejnodobé; tvar a poloha ellipsy rozhoduje pak o amplitudách těchto jednoduchých vibrací a o jich fasovém rozdílu. U vibrací cirkularních jsou tyto amplitudy stejné, fasový rozdíl činí pak buď $\frac{\pi}{2}$ nebo $3\,\frac{\pi}{2}$, dle směru, v jakém kmitající bod kruh probíhá.

II.

Pohyb vlnivý.

§ 23. Vznik vlnění; přehled úkolů.

Jednajíce o kmitání bodu naznačili jsme již, že ve skutečnosti bod takový vždy náleží celé soustavě hmotných bodů, a že vyšinutím jednoho z polohy rovnovážné se vyšinou také body sousední; neboť body takové, tvoříce pružné těleso, nejsou jednotlivě isolovány; souvisí vespolek, účinkují na sebe silami, jež mají základ svůj v silách molekulových. Uvede-li se tudíž jeden bod v pohyb kmitavý, udílí se pohyb ten také bodu sousednímu, od toho pokračuje průběhem jisté doby k bodům dalším a dalším, tak že konečně celá soustava bodů se uvede v pohyb, tím vyznačený, že kmitá každý bod soustavy ale každý následující s jistým opozděním proti předcházejícímu. Říkáme, že se celá soustava bodů *rozvlní*, označujíce pohyb ten celkový jakožto pohyb vlnivý, čili *vlnění* (undulace).

Nejznámějším toho příkladem, od něhož také jméno pochází, jest vlnění vznikající na povrchu vodním. Malé zrno písečné, dopadnouc na hladinu klidné vody, poruší rovnováhu na místě, kam padlo; částečky vody strhnou se zde nárazem dolů, zvednou se však tlakem hydrostatickým; tím splněna jest podmínka ke vzniku pohybu kmitavého na tomto místě; avšak pohyb zde vzniklý přejde též na částečky sousední a od těch opět na další a další, tak že od onoho místa jako by středu šíří se, *postupuje* vlnka kruhovitě na všechny strany. Pohyb ovšem záhy se utlumí; avšak kdyby se pohyb zrnky neustále v jistém tempu padajícími opět a opět budil, rozčeřila by se hladina vodní trvalým

pohybem vlnivým. Takový vzniká na velkých plochách vodních, na řekách klidně tekoucích, na rybníku, jezeru, vánkem větru a stupňuje se vichřicí zejména na moři k pohybu vlnivému veliké mohutnosti.

Příklad zde uvedený má tu výhodu pro sebe, že lze vlnky okem pozorovati a sledovati; akusticky by nepůsobily, ježto jich frekvence jest velmi malá. Avšak dle takovýchto viditelných příkladů vysvětlujeme sobě, jak asi ve vzduchu na jistém místě vznikají vlny a jak se odtud všestranně šíří, jsouce oku neviditelné, uchu však znatelné, ježto zde působí dojmy zvukovými.

Majíce však studium tohoto zvláštního pohybu prohloubiti, zjednodušujeme sobě úkol především v tom smyslu, abychom postupování vlnivého pohybu mohli sledovati v *jediném* pouze směru; předpokládáme tedy bodovou soustavu *přímkovou* (lineární), čili jak říkáme, *řadu bodovou*, a hledíme především zde úkaz podrobně graficky i mathematicky vyšetřiti. Potom teprve přecházíme k soustavám bodovým *plošným* a *prostorovým*.

V řadě bodové šíří se kmitavý pohyb od bodu k bodu směrem řady samé; směr kmitání jednotlivých bodů může při tom býti libovolný. Avšak dva hlavní případy vystupují zde v popředí. Směr kmitavý může býti buď k řadě bodové *kolmý*, nebo s řadou bodovou *souhlasný*. V prvém případě děje se kmitání *napříč* řady bodové; proto i vlnění se zove *příčným* (transversalným). V druhém případě děje se kmitání *podél* řady bodové; proto i vlnění se zove *podélným* (longitudinalným). Případ, kdy kmitání se děje směrem k řadě bodové šikmým, anebo kdy kmitání se děje v křivkách, lze na tyto případy hlavní převésti. Poněvadž pak v soustavách bodových dvoj- i trojrozměrných podobné vztahy směru kmitání ke směru postupování pohybu lze rozeznávati, jest patrno, že uvedené dva druhy vlnění příčného a podélného mají význam všeobecný.

Úvahy, které jsme zde předeslali, ukazují rozdělení úkolů, dle něhož ve výkladech následujících pokračujeme. Při tom lze kmitání pojmouti v nejvšeobecnějším významu slova, jak byl v závěrečném odstavci předešlém vyložen. Avšak vzhledem k tomu, že základem vždy zůstává kmitavý pohyb přímočarý a jednoduchý, jest odůvodněno, proč se při studiu pohybu vlnivého předpokládá tento základní pohyb kmitavý; nečiní zajisté jeho zevšeobecnění obtíží žádných.

Vlnění v řadě bodové.

§ 24. Vlnění příčné.

Budiž dána řada bodů (obr. 34. a 35.) od sebe stejně odlehlých (aequidistantních). Ve skutečnosti jsou odlehlosti takové v mezích působení molekulového, tudíž nesmírně malé, počet pak bodů v souhlasu s tím jest nesmírně veliký; dlužno tudíž v takové řadě, jak si ji znázorňujeme, považovati jednotlivé body tak, jako by byly z přečetných jiných vyňaty, jsouce hlavními všech zástupci. Pro první bod řady volme pohyb kmitavý příčný o jisté amplitudě r a periodě T, v souhlasu s rovnicí

$$y = r \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

tak aby kmit v okamžiku nullovém začínal. Při vzájemné souvislosti jednotlivých bodů uvedou se také následující v týž pohyb kmitavý, ale tak, že každý následující bod pohyb svůj o něco později začíná než předcházející. Pohyb tudíž *postupuje* od částečky k částečce jistou rychlostí c. K bodu, kterýž jest od prvého vzdálen o délku x, postoupí pohyb až za dobu τ, určenou vztahem

$$c\tau = x;$$

jeho pohyb kmitavý začíná o dobu τ později, jest tedy vyjádřen rovnicí

$$y = r \sin \frac{2\pi}{T} (t - \tau).$$

Zavedeme-li zde za τ hodnotu $\frac{x}{c}$ z rovnice předposlední, obdržíme

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right).$$

V rovnici objeví se tudíž analogický součin rychlosti c a doby T, značící délku

$$cT = \lambda$$

jako nahoře

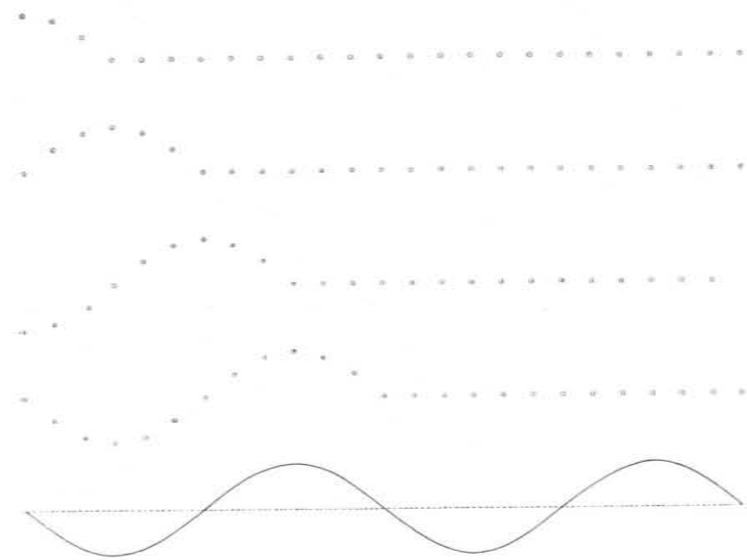
$$c\tau = x.$$

Délku tuto λ, udávající, jak daleko pohyb kmitavý postoupí za plnou periodu T, zoveme *délkou vlny*. Zavedouce ji do rovnice

pro y obdržíme

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

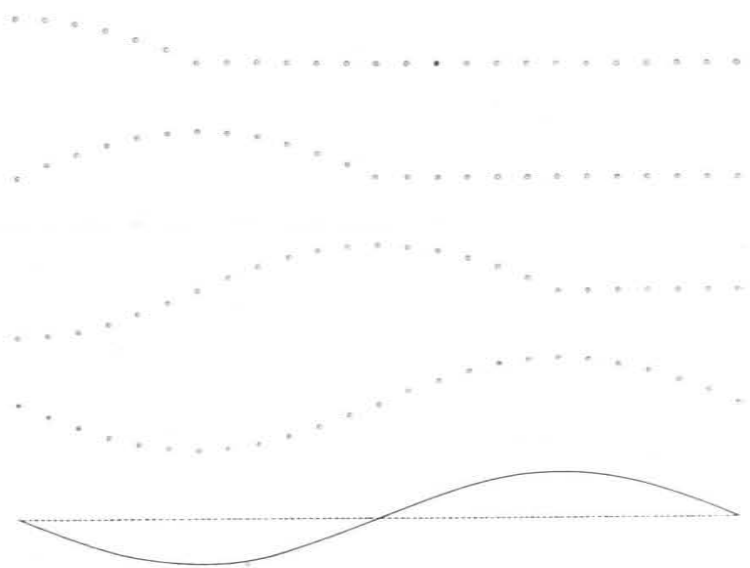
jakožto rovnici pohybu vlnivého.



Obr. 34. Vznik vlnění příčného v řadě bodové při menší rychlosti postupu.

K doplnění tohoto výkladu užijeme znázornění grafického. Pohyb kmitavý bodu prvého upravíme sobě konstruktivně známým způsobem jako průmět rovnoměrného pohybu v kruhu o poloměru r. Na to rozhodneme o rychlosti c postupu, anebo, což jest totéž, o délce vlny λ; ustanovíme na př., že za dobu T pohyb postoupí až k bodu 12. (obr. 34.), anebo k bodu 24. (obr. 35.); v posledním případě bude tedy rychlost c dvojnásobná. Dle toho činí pak opozdění od bodu k bodu v prvém případě $\frac{T}{12}$, v druhém $\frac{T}{24}$. Tím jest rozhodnuto o rozdílech fasových mezi jednotlivými body. Nyní můžeme již konstrukcí znázorniti situaci, jak se utváří na př. když prvý bod vykonal čtvrt, nebo půl, nebo tři čtvrti své vibrace, anebo vibraci celou; polohy ostatních bodů obdržíme vzhledem k fasovým rozdílům snadno, když onen kruh o poloměru r rozdělíme na 12, resp. 24 dílů a polohy kmitajícího bodu sestrojíme průmětem, jakož již v oddílu prvém vyloženo. Tak jsou provedeny obrazce 34. a 35.

Studujíce tyto obrazce poznáváme již, co jest pro vlnivý pohyb příčný význačným. Částečky seskupují se určitým způsobem, tvoříce křivku, která v přední části ukazuje *vrch*, v zadní *důl*; průběhem vlnění postupuje vrch a za ním důl, tak, že sice každá částečka kmitajíc zůstává na své dráze přímočaré, že však *tvar*, *forma* vlny, *postupuje v před*. Při větší rychlosti c jest vlna táhlejší, při menší jako by sraženější, jak srovnáváním obrazců 34. a 35. dobře vysvítá.



Obr. 35. Vznik vlnění příčného v řadě bodové při větší rychlosti postupu.

Pěkným objasněním postupu vlnění jest známý příklad z přírody. Když vítr zavane na poli do obilí, sklánějí se jednotlivé klasy a opět se zvedají dolů a nahoru, zůstávajíce ovšem jinak na svém místě; na povrchu však klasového pole pozorovati jest vlnu, jejíž důl a vrch přes celé pole postupuje.

Křivka představující vlnu, jak v řadě bodové postupuje, není vlastně ničím jiným než jako rozvinutím časovým kmitavého pohybu prvého bodu; neboť všechny fase, do nichž tento bod kmitaje přichází, shledáváme zastoupeny postupně v poloze jednotlivých dalších bodů řady, tak, jak to konstrukcí při časovém rozvinutí tohoto pohybu také provádíme. Rozdíl jest toliko ten, že při vlnění jsou *první* fase nejdále *na pravo* pokročilé, kdežto při kmitání *první* fase rýsujeme na *začátek*, t. j. nejvíce *na levo*; proto jest křivka jako by od levé k pravé přeloženou.

Důležitější rozdíl jest však v tom, že při rozvinutí časovém volba délky, která přísluší periodě T, jest zcela libovolnou, nemajíc žádného významu podstatného, kdežto při vlnění jest tato délka určitá, jsouc podmíněna rychlostí c, s jakou se vlnění v řadě bodové šíří; neboť rovnice

$$\lambda = c\,T$$

jest tu význačnou pro řadu bodovou jakož i analogicky pro jakýkoliv útvar jedno-, dvoj- neb trojrozměrný, kterým vlnění postupuje.

Mathematický výraz vlnění

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

znázorňuje výchylku y jednotlivých bodů řady jakožto podmíněnou dvěma proměnnými, jednak dobou t, jednak polohou x; s oběma mění se y periodicky, tak sice, že periodou časovou jest doba T, periodou pak místní že jest délka λ. Výchylky y jsou tedy v intervallech časových T pro každý bod (při jakémkoli x) tytéž, a podobně jsou v odlehlostech délkových λ pro každý okamžik (při jakémkoli t) rovněž tytéž. Dvojí tato periodicita výchylek jest pro vlnění charakteristickou.

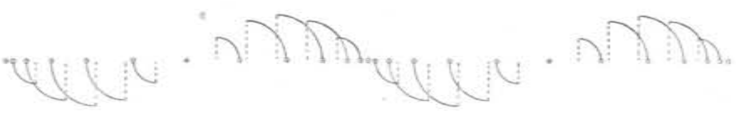
§ 25. **Vlnění podélné.**

Úvahy o postupování kmitavého pohybu řadou bodovou jsou při vlnění podélném tytéž jako při vlnění příčném; proto také rovnice

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

pro vlnění příčné odvozená podrží svou platnost i pro vlnění podélné. Rozdíl jest pouze ve směru kmitavém, který zde připadá do směru řady bodové samé. Máme-li tedy konstrukcí nalezené polohy jednotlivých bodů řady na př. pro okamžik, kdy prvý bod právě dokončil prvou svou vibraci, a to pro vlnění příčné, obdržíme seskupení bodů pro vlnění podélné, když výchylky y přeložíme o 90^0 z příčného směru na podélný, při čemž výchylky vzhůru překládáme na pravo, výchylky dolů na levo, dle obvyklého způsobu, kterýž za positivní přijímá směr vzhůru a směr v pravo, kdežto směry opačné přijímá za negativní. Tato myšlenka provedena jest v obrazcích 36. a 37., při tom jest v nich rýsována tatáž vlna, jakou jsme přijali (při určité rychlosti c) v obrazcích 34. a 35.

Jak se tímto přeložením výchylek situace změnila, lze z obrazců dobře poznati. Vrch a důl zmizely; za to však vystupuje v seskupení bodů něco analogického; na jistých místech jsou body těsněji u sebe, na jiných volněji od sebe; tam jest *zhuštění*, zde *zředění*, vzhledem totiž k seskupení bodů, jaké bylo původně v klidu. Jako dříve vrch a za ním důl postupovaly řadou bodovou, tak nyní postupují zhuštění a zředění. Dříve při vlnění příčném byl *tvar křivky* význačný, zde při vlnění



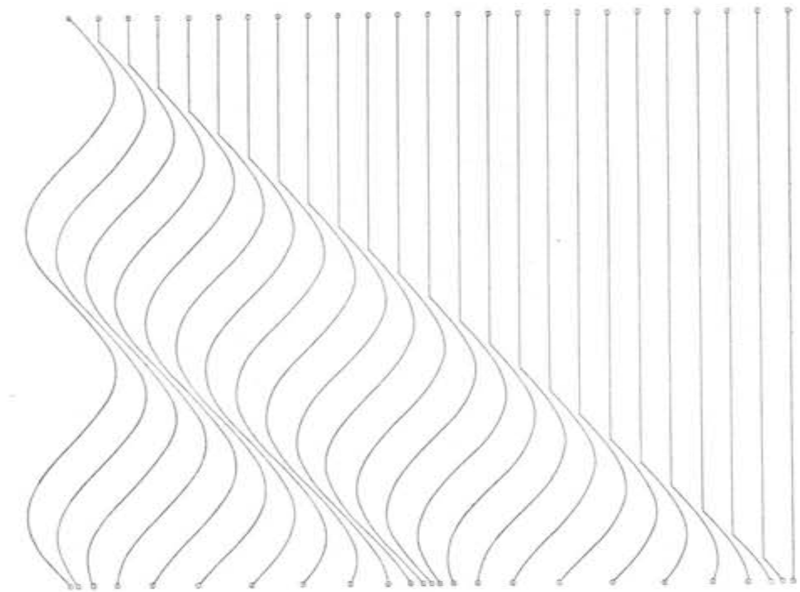
Obr. 36. Přeměna vlny příčné na podélnou při menší rychlosti postupu.

podélném jest *stav hustoty* význačným. Ale jistý rozdíl nebudiž přehlédnut. Vrch a důl vznikaly při výchylkách *největších* v positivním a negativním směru; zhuštění a zředění ukazuje se však v blízkosti poloh *rovnovážných*, kde kmitající bod ze své polohy rovnovážné právě vystupuje buď ve směru positivním nebo negativním. Z obrazců jest též dobře patrno, jaký rozdíl způsobuje větší neb menší rychlost c; při rychlosti menší jest u vlnění příčného vrch příkřejší, u podélného zhuštění větší; naopak při rychlosti větší jest vrch táhlejší, zhuštění mírnější; jest to tak, jako by částečky rychleji *ustupovaly* nakupení na

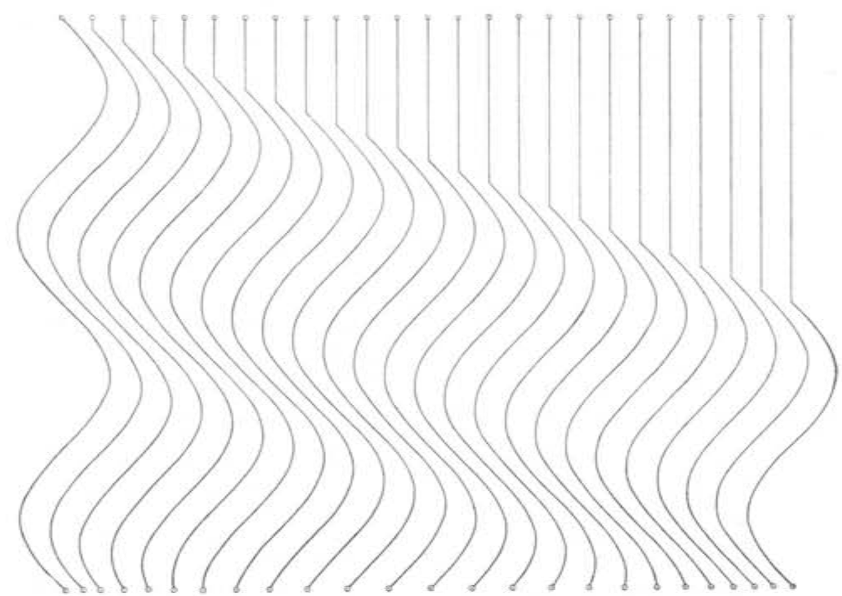
Obr. 37. Přeměna vlny příčné na podélnou při větší rychlosti postupu.

jistém místě, tak že velké zhuštění nastati nemůže. Rychlejší ustupování částeček souvisí zase s *pružností* řady bodové, z čehož již patrno, že rychlost postupu a pružnost jsou ve vzájemném vztahu; o tomto pojednáme později zvlášť.

Způsobem velice pěkným lze vlnění podélné studovati graficky. Poněvadž totiž směr vibrační a směr řady bodové jest týž, zbývá směr kolmý jakožto neupotřebený k účelům dalším, — i jest možno v tomto směru kmitavý pohyb *časově rozvinouti*. Tak vzniknou diagrammy, jako jest obr. 38. a obr. 39. Pro dobu

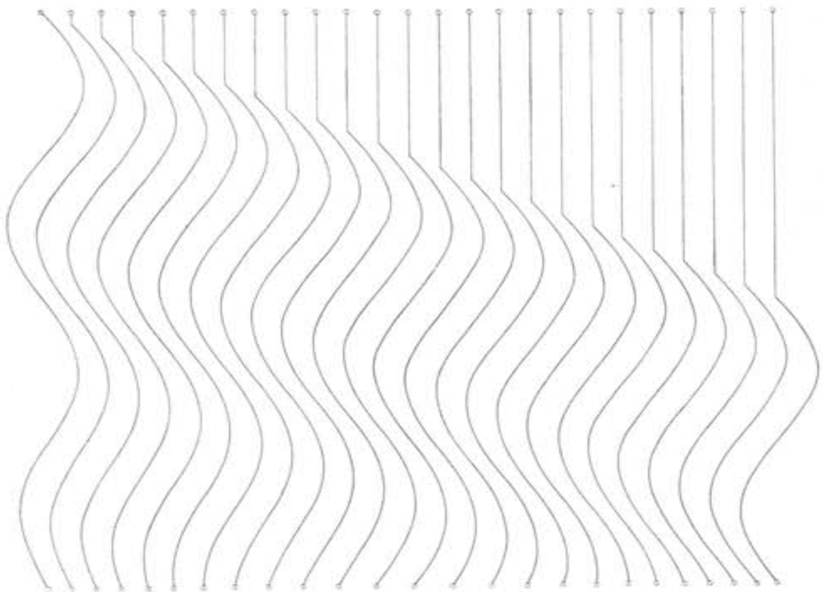


Obr. 38. Diagramm vlnění podélného analogický s obrazcem 34. (rychlost postupu menší).



Obr. 39. Diagramm vlnění podélného analogický s obrazcem 35. (rychlost postupu větší).

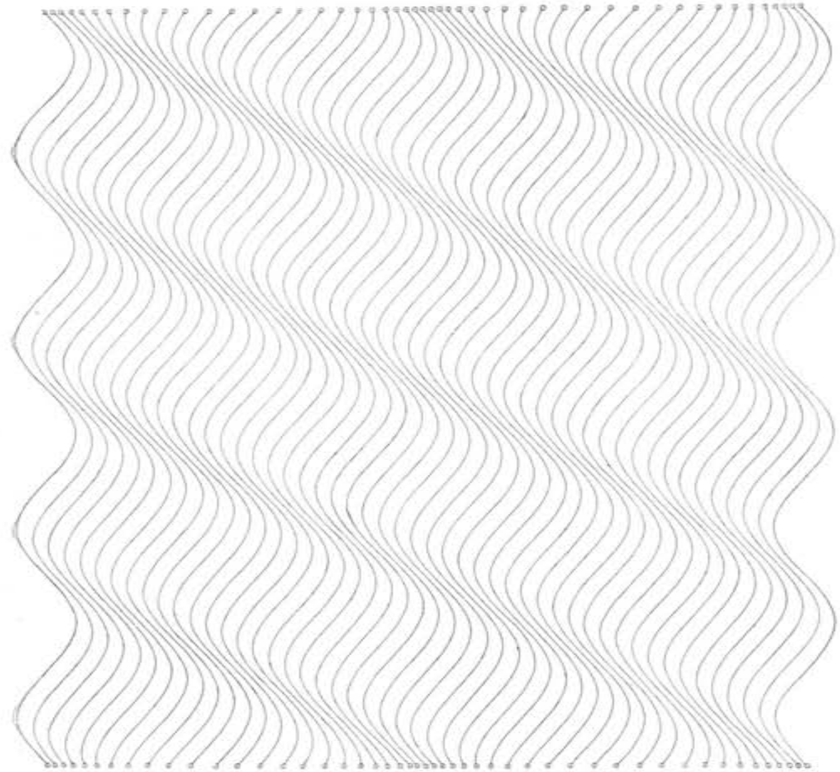
vibrační T zvolena délka $2\pi r$, což jest nejjednodušší. Pro rychlost c zvoleny tytéž hodnoty jako v obou analogických diagrammech obr. 34. a 35. Kdežto však tam pohyb jenom ve čtyřech okamžicích byl jako zachycen, zde jeví se v celé spojitosti. Dobře jest viděti, jak kmitavý pohyb postupně od částečky k částečce se sdílí, pěkně vystupuje vznikající zhuštění a za ním následující zředění, kteráž řadou bodovou se šíří. Větší rychlost postupu, mající za následek mírnější zhuštění, jeví se větším úhlem, který s osou časovou svírá přímka vedená body, jež právě svůj pohyb začínají.



Obr. 40. Vlnění podélné tlumené, při útlumu $k = 25\%$ (obr. 4.) a při rychlosti postupu větší (jako v obr. 39.).

Ve skutečnosti pohyb kmitavý útlumem ponenáhlu přestává; perioda sice trvá, avšak amplituda se umenšuje; v souhlasu s tím umenšují se též zhuštění a zředění, tak že každé následující jest menší než předešlé; řada bodová přichází tak znenáhla v klid. Útlum tento jest vyjádřen v diagrammu obr. 40., při čemž za základ vzata křivka obrazce 4., s útlumem $k = 25\%$. Účinek útlumu by se ovšem jevil patrněji, kdyby se diagramm provedl ještě dále ve směru časovém (t. j. ve směru shora dolů), což by vyžadovalo obrazce delšího; ale i tak jeví se v závěrečném seskupení bodů již rozdíl proti obrazci 39.

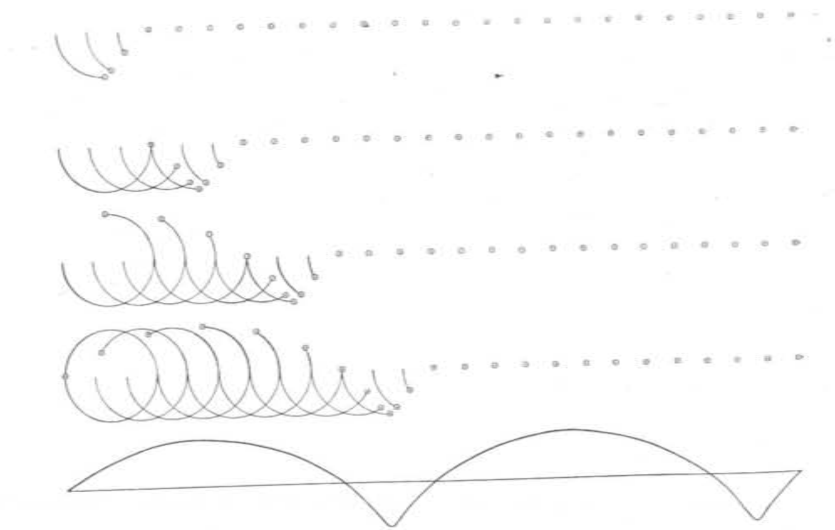
Velmi pěkně — v menším měřítku — znázorňuje obr. 41. podélné vlnění v řadě bodové, a to vlnění bez útlumu, nikoli jak začíná, nýbrž jak již v řadě bodové trvá.



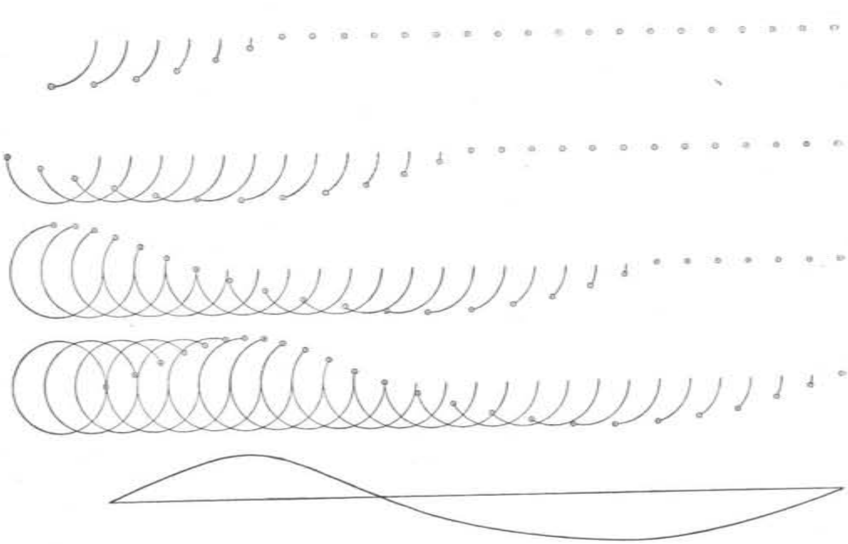
Obr. 41. Vlnění podélné rozvinuté časově ve směru k řadě bodové kolmém.

§ 26. **Vlnění kruhové.**

Jako vlnění příčné nebo podélné, tak může řadou bodovou postupovati též vlnění, jež jsouc z obou složeno, jest zároveň příčné i podélné. Při vlnění takovém opisuje tudíž každý bod řady všeobecně některou z křivek Lissajousových, ležící v rovině, směrem řady položené. Případ nejjednodušší jest ten, kde kmity ve směru příčném a podélném jsou stejnodobé; každý z bodů opisuje ellipsu, ale každý následující začíná o něco později než předcházející. Specialně může ellipsa býti kruhem, vlna tudíž kruhovou. Tento případ znázorněn jest diagrammy obr. 42. a 43.,



Obr. 42. Vlnění kruhové (začínající dolem a zhuštěním) při menší délce vlny.



Obr. 43. Vlnění kruhové (začínající dolem a zředěním) při větší délce vlny.

provedenými v témže způsobu jako diagrammy 34. a 35. Délkou vlny jest odlehlost bodů ve stejné fasi se nalézajících. V obr. 43.

jest vlna dvojnásob tak dlouhá jako v obrazci 42.; mimo to rozeznávají se oba diagrammy tím, že v jednom postupuje napřed důl a zředění, kdežto v druhém důl a zhuštění. V uspořádání bodů vyplňujících vrch a důl není již souměrnosti; aby forma vlny zřetelněji vynikla, jest toto uspořádání ke konci diagrammu znázorněno křivkou vytaženou.

§ 27. **Křížení vln.**

Prochází-li vlna jistou řadou bodovou, představujeme sobě, že vlnění vychází od jistého bodu jako *střediska*; toto definujeme nejjednodušeji jakožto bod, který v okamžiku nullovém ($t = 0$) svůj pohyb kmitavý právě začíná; od něho čítáme pak odlehlosti x bodů ostatních, jichž pohyb jest stanoven rovnicí

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Podmínkou $y = 0$ pro $t = 0$ není ovšem poloha střediska vlny určena; neboť podmínce této vyhovuje mnoho bodů, jež jsou od sebe o délku λ vzdálené. V skutku jest však jednostejno, který z bodů těchto za středisko volíme.

Zavedené zde zjednodušení není nikterak omezením všeobecnosti; jinak, kdyby se odlehlosti x počítaly od střediska libovolného, bylo by nutno do rovnice pro y zavésti ještě fasi tohoto střediska pro okamžik nullový, čímž by se rovnice zbytečně komplikovala.

Může se státi, že řadou bodovou se šíří dvě vlny, po případě několik vln, ve směru buď souhlasném anebo opačném. Mluvíme pak o *křížení* čili *interferenci* vln. Každá vlna jednotlivá uvádí jistý bod do jednoduchého kmitavého pohybu; všechny vlny dohromady uvádějí tedy bod ten ve *složený* pohyb kmitavý jakožto výsledný oněch jednoduchých, a tento pohyb výsledný dovedli bychom dle známých již pravidel mathematicky nebo graficky určiti. Zásadu algebraické summace jednotlivých výchylek, upotřebenou při skládání kmitů stejnosměrných, označujeme zde jakožto princip *superposice* vln a vyjadřujeme rovnicí, pro malé výchylky platnou,

$$y^* = \Sigma y.$$

Algebraické sečítání výchylek y děje se při tom vzhledem k rozdílům fasovým, jež vznikají jednak různou odlehlostí pozorovaného bodu od jednotlivých středisek vlny, jednak různou délkou vln jednotlivých. Výsledek lze, pokud se *bodů jednotlivých* týče, shrnouti v tom, že se každý uvádí ve *složený pohyb kmitavý*.

Avšak ne tak snadno lze všeobecně výsledek vyjádřiti, když se položí otázka, jaký jest pohyb *řady bodové* ve svém *celku*.

Skutečnost sama poučuje nás na jednotlivých — velmi známých — příkladech, kde lze úkaz křížení se vln přímo pozorovati, že výsledný pohyb celkový může býti velmi složitý. Na hladině vody na př. jezera, vznikají vlnky kratší a delší, ploché a strmé, vzbuzené zavanutím větru, vynořením se rybky a nárazem vesla, pohybem loďky, spadnutím listu, hozením kaménků atd.

Vlnky tyto tu jdou za sebou, tu proti sobě, prostupují se vzájemně ve směrech kolmých i šikmých, hned se sesilujíce, hned zase seslabujíce; při tom jsou kratinké vlny znatelné na delších a tyto na dlouhých táhlých, poskytujíce obraz veliké měnlivosti a pestrosti, obraz, který by bylo nemožno mathematicky vyjádřiti. A kdybychom mohli viděti analogicky vlnky ve vzduchu, jaké vznikají na př. v hudebním sále při produkci umělecké, kde vlnky pravidelné četnými zvuky současně vzbuzené se spojují s vlnami nepravidelnými, vznikajícími při šumotu, nárazech, mluvení atd., spatřili bychom obraz rozmanitostí svou daleko převyšující ten, který na hladině řeky, jezera a zejména moře v skutku viděti můžeme.

Volíme li místo útvarů dvoj- a trojrozměrných řadu bodovou, tedy útvar jednorozměrný, hledíme tím úkol zjednodušiti, ale i zde jest možno výsledek, pokud hledí k celku, přehlédnouti jenom na některých zvláštních případech.

Především jest patrno, že výsledek lze poměrně snadno vyjádřiti, když se jedná o křížení vln, jež postupují ve směru *souhlasném*, tedy *za sebou*. Neboť, uvážíme-li, že při *každé* vlně všechny body vykonávají *tytéž* pohyby vibrační, jenom že každý následující s jistým opozděním, pochopíme, že i při výsledném pohybu všechny body budou vykonávati *tytéž* — třebas sebe komplikovanější — ale *stejné* — pohyby vibrační, jenom že opět každý následující o něco později než předcházející. Obdržíme pak opět pohyb vlnivý postupný. Vyšetříme-li tudíž kmitavý pohyb *jediného* jen bodu, jest tím určen již pohyb *celé řady bodové*.

Složené pohyby kmitavé studovali jsme již v oddílu I. a to na některých jednoduchých případech methodou grafickou. Sestrojili jsme křivky, jak jsou rýsovány v obr. 7., 8., 9., 10., 15. a 16. Kdybychom elongace, zde *časově* vedle sebe položené, rozdělili na jednotlivé body dané řady bodové dle jisté rychlosti c, kladouce ty elongace nejvíce na pravo, které při rozvinutí časovém jsou jakožto začáteční nejvíce na levo, obdrželi bychom

vlnu *příčnou*, jak se jeví v jistém okamžiku časovém. Tvářnost její by byla patrně stejnou jako křivek vibračních samých, jenom že by se vlna jevila jako by od levé k pravé přeloženou (jako v zrcadle) a při tom dle rychlosti c po případě roztáhlejší neb sraženější. Kdyby se pak výchylky příčné přeložily do směru řady bodové, vznikla by *vlna podélná*, platící pro daný okamžik časový; mohla by pak časově podobně býti rozvinuta, jako v obrazcích 38., 39. nebo 41.

Naproti tomu utváří se situace zcela jinak, když vlny postupují směrem *opačným, proti sobě*. Zde již nelze říci, že všechny body vykonávají *týž* pohyb kmitavý — třebas sebe složitější; naopak, zde vzniká výsledný pohyb zvláštní, při němž *každý bod* povšechně má *svůj vlastní* pohyb kmitavý.

Rozdíl tento dobře vysvitne v nejjednodušším případě, kde se jedná o křížení dvou jednoduchých vln o stejné periodě kmitavé, čili o stejné délce vlny. Buďtež dána dvě střediska vln, O_1 a O_2, ze kterých vycházejí vlny, dané rovnicemi

$$y_1 = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Amplitudy volíme pro jednoduchost stejné.

Pohyb výsledný jest určen rovnicí

$$y = y_1 + y_2$$

čili
$$y = r\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)\right].$$

Dle známého vzorce

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)$$

obdržíme pak

$$y = 2r \cos \pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} \,.\, \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\lambda}\right].$$

Jdou-li obě vlny *za sebou*, od středisek O_1 a O_2, jest rozdíl $x_1 - x_2$ pro každý bod M stálým, naproti tomu součet $x_1 + x_2$ pro jednotlivé body M měnlivým. Zavedeme-li odlehlost $OM = x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, počítanou od bodu O, jenž leží u prostřed mezi body O_1 a O_2, a píšeme-li δ za rozdíl $x_1 - x_2$, značící odlehlost obou středisk O_1 a O_2 od sebe, obdržíme rovnici

$$y = 2r \cos \pi \frac{\delta}{\lambda} \,.\, \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Pohyb výsledný jest tudíž opět jednoduchým pohybem vlnivým, téže periody T, při čemž amplituda

$$r^* = 2r\, cos\, \pi \frac{\delta}{\lambda}$$

dle odlehlosti δ jest různou. Tato odlehlost označuje se jako *rozdíl dráhový*; v skutku vlnění, postupujíc od střediska O_1 k bodu M, vykonává dráhu o δ větší než postupujíc od střediska O_2.

Význačné hodnoty rozdílu dráhového δ jsou:

$$\delta = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & 3\frac{\lambda}{2}, \quad 5\frac{\lambda}{2}, \quad \ldots \\ 0, \quad 2\frac{\lambda}{2}, & 4\frac{\lambda}{2}, \quad 6\frac{\lambda}{2}, \ldots \end{cases}$$

Pro hodnoty dolejší obdržíme maximalní amplitudu

$$r^* = \pm 2r,$$

pro hodnoty pak hořejší amplitudu nullovou

$$r^* = 0.$$

Dle toho tedy, zda-li rozdíl dráhový se rovná sudému nebo lichému počtu polovln, vznikne výsledný pohyb kmitavý o dvojnásobné amplitudě anebo se seslabí až na úplný klid.

Jinak se má věc, jdou-li vlny *proti sobě*. V tom případě jest součet $x_1 + x_2$ stálým, rozdíl $x_1 - x_2$ naproti tomu od bodu k bodu M měnlivým. V rovnici

$$y = 2r\, cos\, \pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} . sin\, 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\lambda}\right]$$

udává faktor, pohyb kmitavý vyjadřující, *určitou* pro všechny body *fasi*; naproti tomu *amplituda*

$$r^* = 2r\, cos\, \pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda}$$

jest od místa k místu *měnlivou*, dle rozdílu $x_1 - x_2$. Význačné hodnoty jsou zde opět

$$x_1 - x_2 = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & 3\frac{\lambda}{2}, \quad 5\frac{\lambda}{2}, \quad \ldots \\ 0, \quad 2\frac{\lambda}{2}, & 4\frac{\lambda}{2}, \quad 6\frac{\lambda}{2}, \ldots \end{cases}$$

Pro dolejší hodnoty vychází amplituda maximalní

$$r^* = \pm 2r,$$

pro hořejší pak amplituda nullová

$$r^* = 0.$$

Výsledný pohyb jest dle toho následující: Všechny body vykonávají vibrace o stejné fasi, současně procházejíce rovnovážnou polohou a současně přicházejíce do nejzazších svých poloh; avšak amplituda jest od místa k místa měnlivou; jsou body — tak zvané *uzly* — kde amplituda jest nullovou, jiné pak — tak zvané *vrcholy* vlny — kde amplituda jest největší $= 2r$. Jinak řadí se amplitudy k sobě od jednoho uzlu k druhému dle sinusoidy, jsouce střídavě positivními a negativními, což znamená, že body, mezi uzly se nalézající, kmitají ve dvou sousedních polích *opačně*. Pohyb tohoto způsobu označuje se jakožto *vlnění stojaté*.

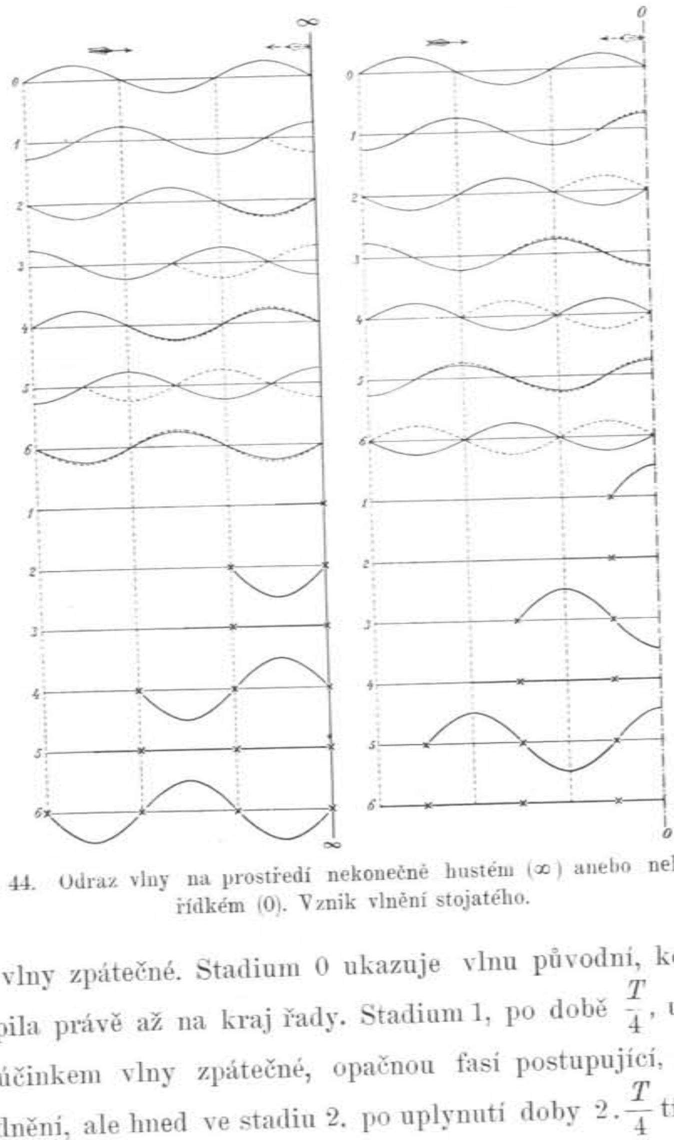
§ 28. **Odraz vln.**

Vznik vlnění stojatého, jak byl v odstavci předešlém úvahami mathematickými odvozen, objasní se ještě více, když se studuje na zvláštním ve skutečnosti velmi hojně se vyskytujícím případě, totiž na *odrazu vln*.

Budiž dána řada bodová, kterou postupuje vlna jisté délky; tato řada nechť končí na nějakém prostředí, jehož hustota budiž buď nekonečně veliká nebo nekonečně malá. Oba tyto případy jsou extremy, mezi nimiž případy skutečné bývají obsaženy; avšak právě tyto extremy vyznačují se jednoduchostí výsledku. Úkaz, který odrazem vlny zoveme, záleží pak v tom, že vlna, šířic se řadou bodovou a dojdouc až na kraj řady, *se vrací*, postupujíc směrem opačným a křižujíc se s vlnou původní; z obou vzniká pak vlnění *stojaté* jakožto výsledné.

V podrobnostech lze odraz studovati graficky, při čemž také rozdíl obou oněch extremních případů vynikne. Příslušný diagramm proveden jest v obr. 44. a to pro vlnění příčné. Aby rozdíl obou výše naznačených extremních případů zřetelně vynikl, jest diagramm rýsován ve dvou polovicích, levé a pravé, pro oba tyto extremní případy souhlasně. Vlna původní jest plně vytažena, vlna odražená jest čárkována; situace jest pak znázorněna, jak se utváří v jednotlivých stadiích, časově o $\frac{T}{4}$ od sebe odlehlých (1 . . . 6). Výsledek superposice jest rýsován v dolejší polovici diagrammu (1 . . . 6) zvlášť, aby tvar vlny, jež vzniká křížením vlny původní a odražené, dobře vynikl.

Šíření se vlny řadou bodovou děje se tak, že každý bod kmitaje sdílí pohyb svůj s následujícím. Je-li však na kraji řady nějaký *pevný* bod, který klade odpor pohybu od předposledního bodu s ním sdělovanému, působí jeho reakce na tento bod nárazem zpětným, kterým se dává podnět k vlně zpáteční, postupující tudíž *fasí opačnou*. V diagrammu lze studovati účinek



Obr. 44. Odraz vlny na prostředí nekonečně hustém (∞) anebo nekonečně řídkém (0). Vznik vlnění stojatého.

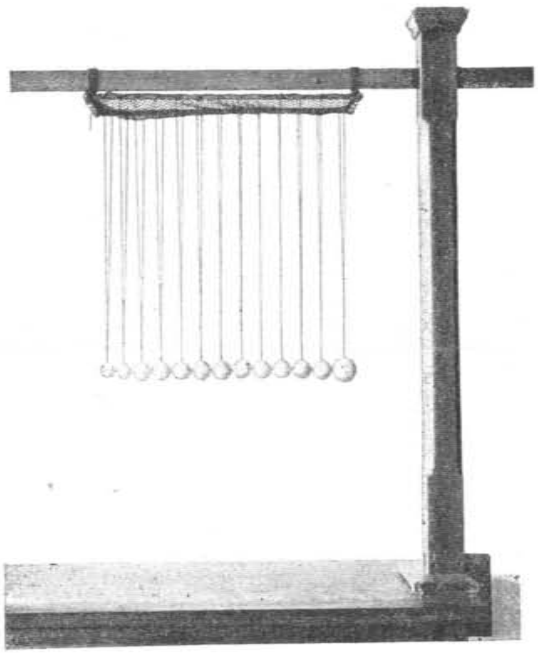
této vlny zpáteční. Stadium 0 ukazuje vlnu původní, když postoupila právě až na kraj řady. Stadium 1, po době $\frac{T}{4}$, ukazuje, jak účinkem vlny zpáteční, opačnou fasí postupující, nastane uklidnění, ale hned ve stadiu 2. po uplynutí doby $2.\frac{T}{4}$ tím větší

vzedmutí bodů všech, ve stadiu 3 po uplynutí doby $3.\frac{T}{4}$ opět povšechné uklidnění, ve stadiu 4 po uplynutí doby $4.\frac{T}{4}$ vzedmutí všech bodů ve stranu opačnou, atd. Při tom jest pozorovati, jak určité body — *uzly* — zůstávají *stále* v klidu, a jak mezi nimi body ostatní kmitají v tempu *současném*, amplitudami dle křivky sinusové seřaděnými, a to v sousedních uzlovými body omezených polích vždy ve smyslu opačném. Odlehlost bodů uzlových rovná se polovině vlny původní.

Podobně má se věc, když poslední bod řady hraničí na prostředí hustoty téměř nullové. Krajní tento bod nemůže pohyb odevzdati bodu dalšímu sousednímu, následkem toho, jsa ve smyslu postupu volným, dá výchylkou svou popud zpáteční k vlně, která pak ve stejném způsobu se šíří zpět, jak by se šířila v před, kdyby řada bodová ještě dále pokračovala. Jednotlivá stadia výsledného pohybu lze na diagrammu, v druhé jeho polovici na pravo, studovati podobně jako v případě předešlém. Poněvadž vlna odražená postupuje tentokráte fasí souhlasnou, nenastává ve stadiu 1 uklidnění jako dříve, nýbrž hned vzedmutí a teprve ve stadiu 2 uklidnění; jinak jest výsledek další stejný, jenom rozdělení uzlů v řadě bodové jest jiné, jako by bylo o čtvrt vlny pošinuto.

Podobně jako u vlnění příčného vzniká odraz vlny též u vlnění podélného. Končí-li řada bodová na prostředí hustoty veliké, vrací se náraz jdoucí na př. na pravo ve smyslu řady jako náraz opačný na levo, tak že zhuštění vlny původní na pravo postupující se vrací jako zhuštění vlny odražené na levo postupující. Naopak, končí-li řada bodová na prostředí velice řídkém, vrací se náraz na pravo opět jako náraz na pravo, poněvadž bod poslední, jsa ve smyslu nárazu volným, nesdílí náraz s následujícím bodem, nýbrž povoluje nárazu a sdílí jej ve smyslu stejném opět zpátky bodům předcházejícím, čímž zhuštění se vrací jako zředění.

Experimentalně lze úkaz odrazu při vlnění příčném objasniti na kovové, těsně (o malém poloměru) svinuté spirale, kterouž necháme končiti buď na pevné stěně (jako na prostředí velice hustém), nebo na tenké nitce (jako na prostředí velice řídkém). Napnouce pak mírně spiralu, dáme na jejím začátku příčný náraz, na př. zdola nahoru, kterým se způsobí vrch vlny; pozorujeme, jak tento vrch postupuje v před a jak se vrací v jednom případě opět jako vrch, v druhém jako důl. Podobně lze experimentovati na kaučukové trubici. Pro vlnění podélné vysvětluje podstatu odrazu rázostroj (obr. 45.). Volme řadu koulí stejných, k sobě těsně přiléhajících; spustíme-li pak kouli prvou, narazí tato na druhou, tato však sdělí náraz hned s třetí, tato se čtvrtou atd. až s poslední. Opírá-li se tato o pevnou stěnu, pak narazíc



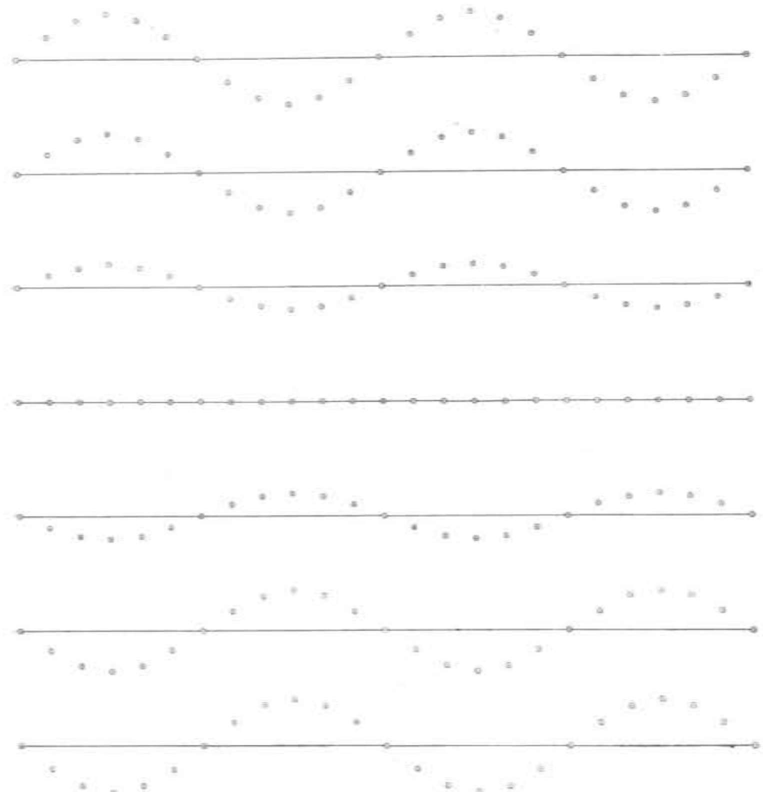
Obr. 45. Studium odrazu vln podélných na rázostroji.

na ni odrazí se ve směru opačném, tento náraz sdílí se postupně koulím předešlým ve směru opačném, přejde až k prvé, která jsouc volnou odskočí ve směru opačném, než jak byla spuštěna. Tím dobře vysvětluje se obrácení fase při prostředí velice hustém. Končí-li však řada koulí jen ve vzduchu, kterýž se chová jako prostředí velice řídké, pak koule poslední odskočí, — zde pak ovšem úkaz se stává neúplným; koule reagují proti přiblížení, ale nikoli proti oddálení; jinak by koule poslední, odskočíc, ihned táhla s sebou předposlední, tato zase předešlou atd., čímž by náraz se vracel ve smyslu souhlasném, jak přišel. Kdyby se však koule spojily vespolek pružnou spiralou o vel-

kých závitech, pak by reagovaly i na přiblížení i na oddálení a úkaz odrazu pro vlnu podélnou ukázal by se pro oba extremní případy zcela dobře. Zařízení takové seznáme později.

§ 29. Chvění příčné.

Pohyb řady bodové, kterýž jsme v odstavcích předešlých jakožto vlnění stojaté příčné seznali, vyznačuje se tím, že se při



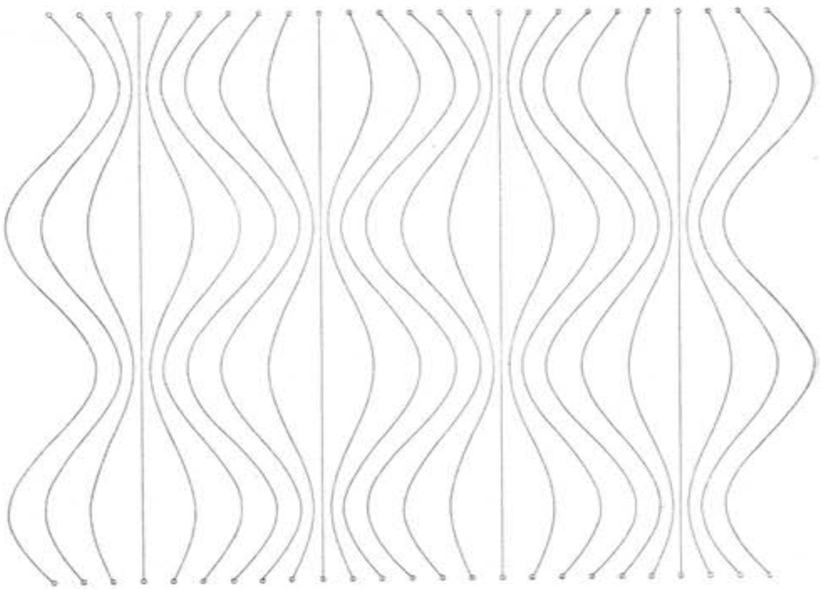
Obr. 46. Příčné chvění řady bodové.

něm řada bodová nalézá v pohybu kmitavém *jako celek*, poněvadž všechny její body současně procházejí rovnovážnou polohou a současně přicházejí do největších svých výchylek. Vzhledem k tomu jeví se býti oprávněným pohyb takový též jako *chvění celé řady bodové* označiti. V tomto smyslu mluvíme tedy o chvění struny, o chvění ladičky a pod.

Majíce *chvění příčné* objasniti graficky, znázorníme řadu bodovou v jednotlivých fasích chvění celkového, začínajíce na př. tou fasí, kdy všechny body jsou v největších výchylkách, jak se vracejí do polohy rovnovážné, jak do ní přijdou a jak potom souměrným způsobem přicházejí opět do svých výchylek největších na straně opačné. Obr. 46. jest v tomto smyslu proveden, a to tak, že mezi fasí poloh nejzazších a mezi fasí průchodu rovnovážnou polohou jsou (časově aequidistantně) položeny ještě fase dvě. Poloha uzlů dobře vyniká; odlehlost jich jest polovlna těch vln, jichž křížením při postupu proti sobě příčné chvění celé řady vzniká.

§ 30. **Chvění podélné.**

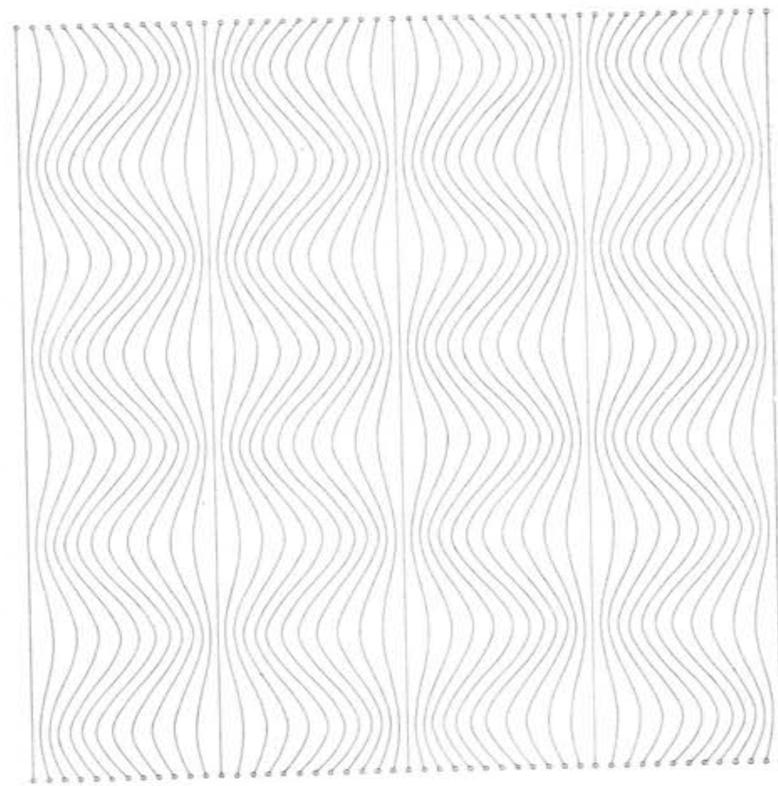
Podobně, jako při stojatém vlnění příčném, užíváme i při stojatém vlnění podélném raději názvu *chvění podélného*, ozna-



Obr. 47. Podélné chvění řady bodové.

čujíce tím, že řada bodová kmitá *jako celek*. Grafickým znázorněním lze chvění toto zvláště dobře objasniti, poněvadž se kmitání jednotlivých bodů děje ve směru řady bodové, tak že směr k řadě kolmý zůstává nepoužitým; lze ho tedy upotřebiti

pro časové rozvinutí pohybu. Tak rýsován jest obr. 47., představující chvění podélné, při kterém odlehlost uzlů jakož i všechny amplitudy jsou právě tak voleny, jako při chvění příčném v obr. 46. Lze tudíž dobře posouditi i kvantitativně analogii mezi vrchem a dolem tam, a mezi zhuštěním a zředěním zde, a zároveň rozdíl v tom se jevící, že zhuštění a zředění se ukazují vždy při uzlech, kdežto v meziuzlí jsou změny hustoty menší, uprostřed pak úplně přestávají; zde, kde pohyb jest nejživější, kde vlna vrcholí, zůstává hustota normalní.

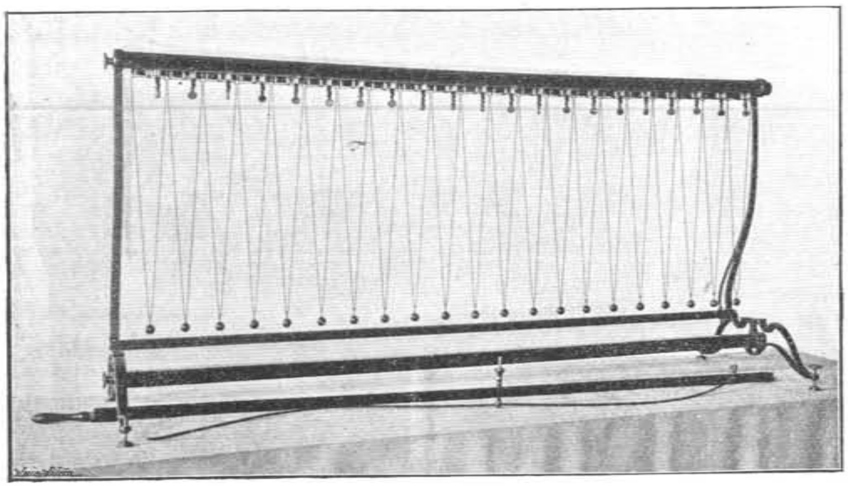


Obr. 48. Chvění podélné rozvinuté časově ve směru k řadě bodové kolmém (cf. obr. 41.)

V měřítku menším ale tím pěkněji znázorňuje chvění podélné obrazec 48., který jest jako protějšek k obrazci 41. Když vyřízneme z papíru podélnou úzkou štěrbinu (ne širší než 1 *mm*) a pak kryjíce výkres, vedeme rovnoměrně papír shora dolů, jeví se ve štěrbině pohyb řady bodové, jak při vlnění postupném (obr. 41.), tak při stojatém (obr. 48.), velice pěkně a poučně. Co obrazce znázorňují celkově pro jistý *intervall* časový, to obdržíme tímto způsobem *v časovém průběhu*, při čemž dle větší neb menší rychlosti pošinování měníme i periodu T celého zjevu.

§ 31. Vlnostroje.

Výklady slovné o vlnění ve spojení se znázorněním grafickým doplňují se velmi dobře vlnostroji, totiž apparaty, jichž účelem jest vlnění ukázati foronomicky v jeho průběhu, jakožto obraz vlnění skutečných.



Obr. 49. Vlnostroj Machův.

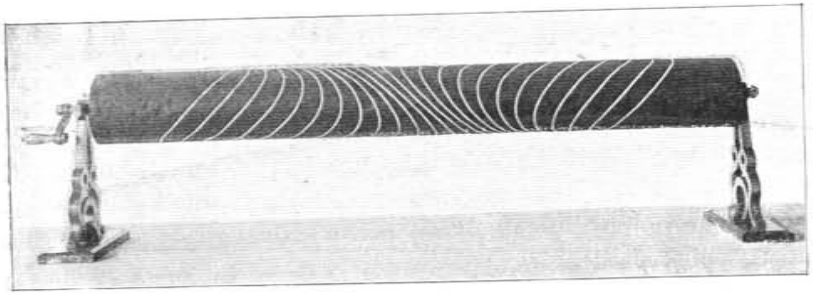
Vlnostrojem nyní nejvíce rozšířeným jest *vlnostroj Machův* (obr. 49.). Kmitání jest zde nahrazeno kýváním kuliček bifilarně zavěšených; směr tohoto kývání lze měniti stáčením roviny obou závěsných nitek. Kuličky, obyčejně olověné a bíle natřené, vespolek ovšem nesouvisí; proto stroj neobjasňuje, jak vlnění *vzniká*, nýbrž jen napodobí, jak vlnění *se děje*.

Obyčejně se ukazuje nejprve vlnění příčné. Roviny nitek stočí se rovnoběžně k řadě kuliček. Má-li se ukázati vlnění příčné *postupné*, odchýlí se linealem všechny kuličky do své

největší odlehlosti od polohy rovnovážné, načež se lineal, dolejší hranou ve zvláštním žlábku umístěný, rovnoměrně pošinuje, čímž kuličky jedna po druhé se pouštějí a v pohyb kyvadlový uvádějí. Řada pěkně znázorňuje postupnou vlnu, kratší nebo delší dle toho, zda-li se lineal pošinoval volněji nebo rychleji. Má-li se ukázati vlnění příčné *stojaté*, užije se mosazného drátu zakřiveného v sinusoidu téže délky, jako jest délka řady. Tento drát se vsadí mosaznou u prostřed kolmo umístěnou osou do dolejšího rámce stroje a podle drátu uchýlí se kuličky tak, že první, střední a poslední kulička, označující uzly, zůstanou na svém místě a ostatní mezi nimi zaujmou na opačných stranách největší svou odchylku dle zákona sinusového. Když se pak drát o 90° otočí, pustí se kuličky všechny současně do své rovnovážné polohy, kolem které pak vykonávají kyvy současné tak, že celek předvádí příčné chvění celé řady. Velmi pěkně lze vlnění *příčné*, postupné i stojaté, převésti na *podélné*. K tomu cíli lze roviny závěsných nitek *současně* stáčeti tak, že směr kývání jednotlivých kuliček ponenáhlu přechází od příčného v podélný. Tato transformace vlny jest jednou z předních výhod stroje. Aby při pokusech vlna jakákoli průběhem i jen kratší doby nepozbyla své pravidelnosti, nutno pečlivě délky jednotlivých kyvadélek učiniti stejnými, tak aby všechny kuličky kývaly isochronně; to lze předběžným pokusem zjistiti tak, že se koule všechny linealem příčně odchýlí a pak současně spustí; při kývání mají trvati stále v seřazení přímočarém, a žádná kulička nesmí se předbíhati nebo opozďovati; ovšem lze toho docíliti jen přibližně.

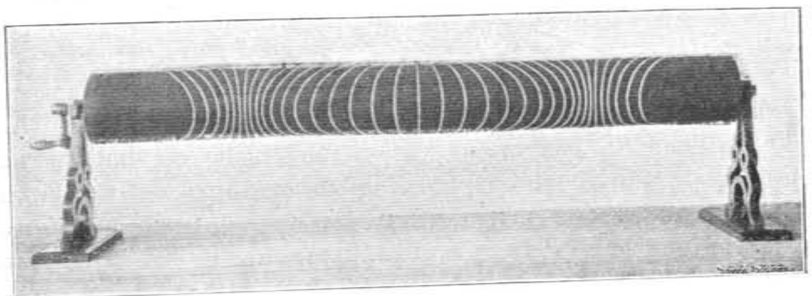
Pro vlnění *podélné* (výhradně) hodí se velmi dobře *vlnostroj Wheatstoneův*. Tento spočívá na myšlence na konci předešlého § 30. vyslovené. Diagramm vlnění podélného navine se na válec, jehož obvod se rovná délce znázorňující v diagrammu periodu kmitání (po případě i násobek této periody); tímto způsobem začátek a konec diagrammu přejdou v sebe na vzájem, čímž se křivky na válci stanou spojitými. Když se pak před válec postaví stínítko s podélnou štěrbinou a když se válcem otáčí, jest ve štěrbině viděti průběh vlnění. Obrazec 50. znázorňuje přístroj pro vlnění postupné, obr. 51. přístroj pro vlnění stojaté; stínítka s podélnou štěrbinou, jež dlužno před válec postaviti, jsou vynechána. Válce papírové mohou se zaříditi na snímání, tak že pak postačí jeden vlnostroj s jedním stínítkem. Také lze ukázati vznik vlnění postupného analogicky k obrazcům

38. a 39., odraz vlny a pod. Poněvadž lze příslušné diagrammy narýsovati *přesně*, jest také vlnivý pohyb zde znázorněný přesným, a zůstává jím, nechť se pokus provádí neb opakuje sebe déle. Také to jest velikou předností vlnostroje, že lze tempo podélného kmitání rychlejším neb volnějším otáčením válce měniti,



Obr. 50. Vlnostroj Wheatstoneův (bez stinítka štěrbinového) pro podélné vlny postupné.

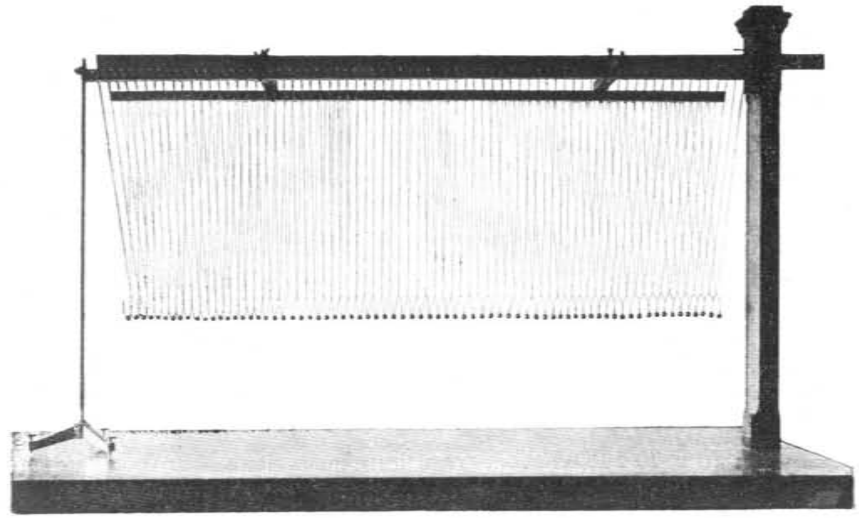
bez nejmenší újmy přesnosti celého zjevu; při velmi rychlém otáčení dociluje se dojmu, který spíše se blíží skutečným vibracím akustickým, než při vlnostroji předešlém. Jinak napodobuje i tento vlnostroj vlnění, *jak se děje*, ale nikoli, *jak vzniká*.



Obr. 51. Vlnostroj Wheatstoneův (bez stinítka štěrbinového) pro podélné vlny stojaté.

Aby se mohlo také vznikání vlnivého pohybu ukazovati, jest nutno jednotlivé kuličky vlnostroje tak vespolek spojiti, aby reagovaly i na přiblížení i na oddálení. Pro vlnění podélné lze toho docíliti dosti snadno. *A. F. Weinhold* upevnil olověné

kuličky na spiralu vinutou z drátu měděného dvoumillimetrového v závitech 7 *cm* širokých; spirala jest zavěšena bifilarně na nitkách, jichž konce jsou na kolíčkách zastrčených do dvou dřevěných rovnoběžných latí; lze tudíž délku nití otáčením kolíčku řiditi. Latě spočívají — v úpravě původní, Weinholdově — na čtyřech železných stativech. Poněvadž však tyto stativy při experimentování překážejí, jest lépe, celý vlnostroj upevniti přímo na sloup experimentalního stolu, v úpravě, v obr. 52. znázorněné. Spirala visí pak zcela volně, což jest výhodou i pro experimentování i pro pozorování.



Obr. 52. Vlnostroj Weinholdův.

Vlnostrojem tímto lze dobře ukázati, jak se malý podélný náraz řadou bodovou šíří, jak zhuštění neb zředění postupuje a jak na konci řady nastává odraz, při čemž lze způsobiti odraz na ústředí velké hustoty, když se poslední koule upevní do pevné svorky, anebo na ústředí velmi řídkém, když se poslední koule nechá volnou; v prvém případě vrátí se zhuštění opět jako zhuštění, poněvadž se směr pohybu při odrazu obrátí, v druhém případě vrací se zhuštění jako zředění, poněvadž směr pohybu při odrazu se zachová. Rovněž pěkně lze ukázati podélnou *vlnu stojatou*, při čemž mohou oba konce řady býti volnými, neb jeden upevněným neb i oba upevněnými, dle čehož se pak řídí rozdělení uzlů. Přístroj objasňuje tím velmi dobře chvění vzduchu v píšťalách nebo chvění v tyčích, podélným třením rozezvučených; při výkladu o formách vlny, jak v těchto případech vznikají, se proto k vlnostroji tomuto vrátíme. Předností vlnostroje jest, že se jím napodobí nejen, jak vlnění se děje, nýbrž i jak vzniká.

§ 32. Výklad mathematický.

Pro pohyb vlnivý v řadě bodové nalezli jsme rovnici

$$y = r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

kterou vyjádřena jest dvojí periodicita amplitud y, jednak dle času t, jednak dle místa x; perioda časová T a perioda místní λ jsou úměrny, dle vztahu

$$cT = \lambda,$$

v němž značí c rychlost postupu. Pro mnohé účely bývá výhodnější, tuto rychlost přímo v rovnici podržeti, nejlépe na místě periody T; pak jest

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x).$$

Forma rovnice této souhlasí s tím, co dříve bylo předpokládáno, že v okamžiku $t = 0$ pohyb v bodu $x = 0$ začíná a to směrem positivním (vzhůru), a že se též směrem positivním (na pravo) v řadě bodové šíří.

Je-li $t = T, 2T, 3T, \ldots$, což jest totéž jako $t = 0$, obdržíme

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (-x),$$

což znamená, že pro ony zvláštní hodnoty t obdržíme sinusoidu jako by shora dolů obrácenou, která, když x od nully stoupá ve směru positivním, začíná důlem a pokračuje vrchem, tedy obráceně, než jak jsme rýsovali křivky vibrační na př. v obrazci 3.

Velmi často, zejména v mathematických rozborech, vadí tato obrácenost; z důvodu toho psává se rovnice pro pohyb vlnivý ve formě takové, aby pro $t = T, 2T, 3T, \ldots$, což jest totéž jako $t = 0$, vyšla rovnice

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

vyjádřující vlnu v témže tvaru, v jakém se jeví křivka vibrační při rozvinutí časovém, jako na př. v obr. 3. Pohyb vlnivý děje se pak tak, jako by tato začáteční vlna řadou bodovou postupovala buď ve směru od pravé k levé (c positivní), anebo od levé k pravé (c nega-

tivní). Pro oba případy obdržíme rovnice

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + ct),$$

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

Prvnější praví tedy: řada bodová rozvlní se tak, jako by křivka sinusová v obvyklém tvaru řadou postupovala od pravé k levé; poslednější pak: řada bodová rozvlní se tak, jako by křivka sinusová téhož tvaru řadou postupovala od levé k pravé. V obou případech jest pro $t = 0, T, 2T, \ldots$ souhlasně

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

Znamení rychlosti c nesouhlasí dle toho s obvyklým směrem positivním na pravo a negativním na levo.

Differencialní rovnice jednoduchého pohybu kmitavého zněla (§ 4.)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varkappa y.$$

Differencialní rovnici pohybu vlnivého obdržíme, differencujíce příslušné rovnice pro y, jimiž se pohyb vlnivý vyjadřuje, při čemž jest jednostejno, volíme-li formu rovnice dřívější nebo poslednější; volme na př. poslednější. Vzhledem k tomu, že funkce y závisí na dvojím argumentu x a t, differencujeme i dle x i dle t.

Tak obdržíme:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 . y, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -c^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 . y,$$

tudíž

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Naopak jest rovnice

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + ct)$$

nebo

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)$$

částečným integralem oné rovnice differencialní, obsahující konstantu integrační r a λ, všeobecněji též fasi ε v okamžiku $t = 0$. Obecný integral obdrželi bychom tudíž summací všech takovýchto částečných.

Smysl této summace jest, že rovnice differencialní vyjadřuje nejen vlnivý pohyb jednoduchý, nýbrž jakkoli z jednoduchých složený, tak, jak o tom bylo jednáno v § 27. Ale nejen každá z obou rovnic hořejších jednotlivě jest částečným integralem hořejší differencialní rovnice, nýbrž též součet obou.

Takový součet vyjadřuje interferenci dvou *proti sobě* postupujících vlnění jednoduchých. Avšak tím vzniká po případě vlnění *stojaté*. Z toho plyne, že ona differencialní rovnice platí nejen pro nejvšeobecnější vlnění postupné, nýbrž též pro jakékoli vlnění stojaté.

Integraci rovnice differencialní

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

lze provésti ve způsobu ještě obecnějším. Jak totiž *Jean d'Alembert* (1717—1783) ukázal, vyhovuje této differencialní rovnici funkce nejen sinus, nýbrž *jakákoli*, jenom když do ní vstupují obě proměnné x a t v určité kombinaci

$$x + ct \qquad \text{nebo} \qquad x - ct,$$

tedy funkce

$$y = F(x + ct)$$

nebo

$$y = G(x - ct)$$

anebo též součet obou

$$y = F(x + ct) + G(x - ct)$$

tak že funkcemi takovými lze vyjádřiti jakýkoli, postupný nebo stojatý, pohyb vlnivý v řadě bodové.

V skutku, když differencujeme, obdržíme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F'' + G'', \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (F'' + G'')\, c^2,$$

kdež značí F'' a G'' druhou derivaci funkce F a G dle vlastní proměnné $(x + ct)$ a $(x - ct)$. Jest tudíž rovnice differencialní splněna.

Z toho poznáváme, jak tato rovnice differencialní, velice jednoduchá ve své stavbě, má rozsáhlý všeobecný význam. Ostatně jest i fysikalní smysl rovnice té jednoduchý. Je-li S hmota specifická linearního pružného útvaru, značí

$$S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

sílu působící na jednotku objemu, a sice vyjádřenou kineticky*). Jak ve výkladech pozdějších na patřičném místě podrobněji ukážeme, obdržíme touž sílu vyjádřenou staticky, na základě pošinutí, když zavedeme modul pružnosti E pro směr y, čímž vyjde výraz

$$E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,.$$

*) Mechanika, § 104, pag. 134. 1901.

Máme pak

$$S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

a z toho

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}},$$

kterážto rovnice vyjadřuje základní vztah mezi rychlostí postupu c a mezi veličinami E a S ji podmiňujícími.

Podrobný výklad důležitých těchto relací, zde jen v hlavních rysech skizzovaných, obsahuje Koláček - Seydler: Fysika theoretická, III., kniha druhá a třetí, 1895.

Vlnění v útvarech dvojrozměrných.

§ 33. Vlny na povrchu kapalin.

Plošným útvarem nejznámějším, na němž vlny, ovšem jen příčné, mohou vznikati, jest povrch kapalin, zejména vody a rtuti. Ke studiu subjektivnímu hodí se dobře rtuť. Vlnky postupné vznikají nejlépe kapkami rtuťovými, na povrch dopadajícími; k účelu tomu opatří se malá nálevka skleněná dole kohoutem v ocelovém kování a upevní v mírné výši nad nádobkou skleněnou nebo plechovou, do níž jest nalito rtuti; postavením kohoutu dá se frekvence kapek říditi. Nádobky mohou býti různých forem, dle čehož řídí se pak úkazy při odrazu vlnek na stěnách vznikající. Je-li na př. nádoba elliptická, a dopadají-li kapky v jednom ohnisku, soustřeďují se vlny odražené v ohnisku druhém. Stojaté vlnky vytvoří se na povrchu rtuti velmi pěkně spoluzněním, když se na stůl vedle nádoby se rtutí postaví větší ladička, elektromagneticky ve znění udržovaná. Pro demonstraci objektivní, v projekci, hodí se dobře voda v nádobě, jejíž dno jest ze skla zrcadlového. Nádoba položí se na polní čočku vertikalního apparatu projekčního a povrch vody zobrazí se na stínítku. Vznikání vlnek kapkami a odraz vlnek lze pozorovati velmi dobře. Je-li na př. nádoba kruhová, a padne-li kapka vody do středu jejího, ukáže se pěkně, jak vlnka odtud postupuje ke stěnám, jak zde se odrazí a opět do středu vrací.

Vlnění vznikající na hladině kapalin, zejména vody, studovali podrobně (1825) bratři *Weberové**). Aby mohli pohyby čá-

*) *Arnošt Jindřich Weber* (1795 - 1878) a *Vilém Eduard Weber* (1804—1891); druhý z obou proslul později jako spolupracovník *Gaussův* zejména svými klassickými pracemi v oboru elektřiny (kde zavedl absolutní soustavu měr). Spis sem hledící má název: Wellenlehre auf Experimente gegründet (v Lipsku 1825).

steček studovati v průsvitu, upravili sobě rovnoběžnostěnnou nádobu, jejíž stěny byly desky ze skla zrcadlového; nádoba měla délku $1\frac{1}{2}$ *m*, šířku 100kráte menší, jen $1\frac{1}{2}$ *cm*, hloubku pak 16 *cm*. Do vody dávali kousky jantaru, kteréž při své malé hustotě 1·07 se ve vodě vznášely, vykonávajíce při vlnění tytéž pohyby jako částečky vodní.

Z výsledků, k nimž rozsáhlá práce bratří Weberův vedla, buďtež stručně uvedeny nejdůležitější a nejzajímavější.

Především dlužno vytknouti, že zjevy *jednoduché, pravidelné*, lze očekávati jen tehda, jsou-li vlny jen *mírné výšky*, několik málo millimetrů (na př. 2 neb 3). Vlny takové lze vzbuditi tím způsobem, že se v uzounké oné stružce kapalina u jednoho konce násoskou (na 5 až 20 *cm*) zvedne a pak spustí. Vznikne vlna jisté délky, patrná svým vrchem a dolem, jež jistou rychlostí postupuje. Avšak vrch a důl nejsou souměrnými; vrch jest jako sraženější, důl táhlejší, ačkoli výška vrchu jest stejná s hloubkou dolu. Nesouměrnost tato jest důkazem, že částečky vodní nekmitají jen nahoru a dolů, tedy přímočaře, nýbrž též na pravo a na levo, tudíž v křivkách. Tyto křivky jsou povšechně *ellipsy*, obyčejně ve směru vodorovném táhlejší, ve směru svislém splošťtělejší; při pravidelném vlnění jsou ellipsy ty uzavřené, jinak konec elliptické dráhy již nesplývá se začátkem. Často bývají dráhy ty *kruhové*, zejména na povrchu; vlna nabývá pak tvaru jako v obrazci 43.; na vrchu vlny pohybují se částečky vodní v před, tak jak vlnění postupuje, v dolu však pohybují se zpět. Tvar podobný vzniká, i když jest pohyb částeček elliptický. Ve vrstvách hlubších tlumí se pohyb nahoru a dolů vždy víc a více a zůstává jen pohyb na pravo a na levo; ellipsa se tedy ve směru svislém značně splošťuje.

Že vodní částečky ve vlnách vykonávají pohyby nejen nahoru a dolů, nýbrž na pravo a na levo, lze dobře pozorovati na hladinách jezer a řek. Když vane vítr a když na hladině vodní se tvoří pěna, nebo když nahodile se tam nalézá svadlý list neb jiný lehounký předmět, jest dobře viděti při postupu vlny, jak pěna neb lístek jde na vrchu vlny v před s vlnou, v dolu však zase zpět. Křivočarý tento pohyb platí i pro vlny značnější výšky.

Důležité jsou výsledky, hledící k *rychlosti*, s jakou vlny se šíří. Rychlost tato *není stálou*, nýbrž závisí jednak na výšce vlny, jednak na její délce. Při větší výšce vlny jest rychlost větší, při větší délce vlny rovněž větší. Výška souvisí se způsobem, jakým vlna byla vzbuzena, s prudkostí nárazu a pod.;

na rychlost c má výška tato účinek sekundarní, čínicí jen několik procent. Naproti tomu rozhodující účinek na rychlost c má délka vlny λ.

§ 34. Vztahy kvantitativní.

Přihlédněme nyní ke stránce kvantitativní celého zjevu, kladouce otázku, kterými veličinami jest podmíněna rychlost c, s jakou vlnění na povrchu kapaliny postupuje. Vzorec přibližný stanovil r. 1804 *Gerstner**), totiž

$$c^2 = \frac{\lambda}{2\pi} g.$$

Zde značí λ délku vlny, g urychlení tíže. Vzorec tento dlužno pokládati za mezný, platící pro kapaliny veliké hloubky. Není-li hloubka h proti délce vlny velmi značnou, platí vzorec přesnější:

$$c^2 = k \frac{\lambda}{2\pi} g, \qquad k = \frac{1 - e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}}{1 + e^{-\frac{4\pi h}{\lambda}}}.$$

Koefficientem $k < 1$ se tedy ona limitní rychlost poněkud umenšuje. Jeví se v tom účinek pevného dna, kterým se postup (následkem tření) zadržuje.

Vzorce uvedené naznačují již, že základem vznikání a šíření se vln jest *tíže*. Hustota kapaliny nerozhoduje z týchž důvodů, ze kterých různé kapaliny stejnou rychlostí vytryskují z otvorů na dně nádob za poměrů jinak stejných. Jestiť zajisté při větší hustotě váha větší, ale též hmota, vahou v pohyb uváděná.

Avšak vedle tíže jest zde ještě další síla, jež působí na částečky kapaliny při povrchu, a tou jest *povrchové napjetí*. Na vrchu vlny jest větší, na dolu menší, následkem opačného zakřivení**). Povrchovým napjetím se účinek tíže sesiluje. Je-li c rychlost jen účinkem tíže, v rychlost též vzhledem k povrchovému napjetí, platí vzorec, který odvodil *W. Thomson* (nyní lord *Kelvin*),

$$v^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda^2}\right).$$

---

*) *Frant. Gerstner* (1756—1832), rytíř, působil v Praze jako adjunkt hvězdárny (u prof. Strnada), později jako professor na universitě a konečně na polytechnickém ústavu, jeho spoluúsilím roku 1806 zřízeném; vedle toho byl ředitelem vodních staveb v Čechách.

**) Mechanika, § 401., pag. 624, 1901.

kde značí $a^2 = hr$ (Poissonovu) konstantu kapillarní *). Pro vodu teploty 20° jest $a^2 = 14{\cdot}84\ mm^2$. Je-li tedy na př. $\lambda = 100\ mm$, obdržíme

$$v^2 = c^2\,(1 + 0{\cdot}0293)$$

čili

$$v = c\,(1 + 0{\cdot}0147).$$

Zvětšení rychlosti činí tedy okrouhle 1·5%.

Zajímavé vztahy nastávají spolupůsobením obou těch sil, jimiž vlnivý pohyb na povrchu kapalin vzniká, totiž tíže a povrchového napjetí. Když kombinujeme vzorec Thomsonův a Gerstnerův

$$v^2 = c^2\left(1 + \frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\right), \qquad c^2 = \frac{\lambda}{2\pi}\,g.$$

obdržíme, upravíce

$$\frac{2\pi}{g}\,v^2 = \lambda + \frac{2\pi^2a^2}{\lambda}.$$

V rovnici této jest na pravo *součet* dvou sčítanců, jichž *součin* jest vzhledem k měnlivé veličině λ stálým, totiž

$$\lambda\,.\,\frac{2\pi^2a^2}{\lambda} = 2\pi^2a^2.$$

Je známou větou, že v případě takovém onen součet jest minimalním, jsou-li oba sčítance sobě rovny, t. j., je-li

$$\lambda = \frac{2\pi^2a^2}{\lambda}.$$

Geometricky značí tato věta, že ze všech pravoúhelníků stejné plochy má čtverec nejmenší obvod. Existuje tudíž určitá, význačná délka vlny λ^*, při níž postupování vln se děje rychlostí *minimalní*. Můžeme pak, přihlížejíce k rovnici

$$\frac{2\pi}{g}\,v^2 = \lambda + \frac{2\pi^2a^2}{\lambda},$$

výsledek takto formulovati:

Pro $\lambda = \lambda^*$ jsou oba sčítance rovnice této na pravo sobě rovné.

Stává-li se $\lambda > \lambda^*$, klesá hodnota $\frac{2\pi^2a^2}{\lambda}$ sčítance druhého a vzrůstá hodnota λ sčítance prvého; pro velké λ mizí sčítanec

*) Mechanika, § 409.

druhý vždy více a zůstává prvý; účinek povrchového napjetí ustupuje vždy více účinku tíže.

Stává-li se $\lambda < \lambda^*$, klesá hodnota λ sčítance prvého a vzrůstá hodnota $\frac{2\pi^2a^2}{\lambda}$ sčítance druhého, kteráž při velmi malém λ úplně převládá; účinek tíže ustupuje vždy více účinku povrchového napjetí.

Význačná ona délka vlny jest stanovena vzorcem

$$\lambda^{*2} = 2\pi^2a^2.$$

Pro vodu 20° jest na př., jak již nahoře uvedeno,

$$a^2 = 14{\cdot}84\ mm^2,$$

z čehož

$$\lambda^* = 17{\cdot}11\ mm.$$

Minimalní rychlost v^* vypočítáme z rovnice

$$\frac{2\pi}{g}\,v^{*2} = 2\lambda^*, \qquad \lambda^* = \pi\sqrt{2a^2},$$

z čehož

$$v^{*2} = g\sqrt{2a^2}.$$

Při normalní intensitě tíže

$$g = 9806\,\frac{mm}{sec^2}$$

vychází pro vodu 20° dle hořejší hodnoty a^2

$$v^* = 231{\cdot}1\,\frac{mm}{sec}.$$

Rychlost v, jež by byla *větší* než tato minimalní, obdržíme vždy pro *dvě* hodnoty λ; jedna z nich, kde převládá působení tíže, jest větší než λ^*, druhá, kde převládá působení povrchového napjetí, jest menší než λ^*.

Jinak lze počítati též takto: Z rovnice Gerstner-Thomsonovy

$$v^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\left(1 + \frac{2\pi^2a^2}{\lambda^2}\right)$$

obdržíme, řešíce ji dle λ, a upravíce,

$$\frac{g}{\pi}\,.\,\lambda = v^2 \pm \sqrt{v^4 - 2a^2g^2}.$$

Aby λ bylo realné, musí býti

$$v^4 \geqq 2a^2g^2.$$

Minimalní hodnota v^* rychlosti v jest tudíž určena vzorcem

$$v^{*2} = g\sqrt{2a^2},$$

a pro tuto jest současně

$$\frac{g}{\pi}\lambda^* = v^{*2}$$

čili

$$\lambda^* = \pi\sqrt{2a^2}$$

jako dříve.

Poněvadž jest veličina a^2 jakožto konstanta kapillarní (dle Poissona) určité číslo, nebylo by vhodno psáti $a\sqrt{2}$ místo $\sqrt{2a^2}$. Zavede-li se raději povrchové napjetí F, dlužno klásti

$$a^2 = \frac{2F\cos\vartheta}{sg},$$

kdež jest s specifická hmota kapaliny a ϑ úhel krajní, pro vodu téměř $= 0$. Při tom se udává F v jednotce $\frac{dyna}{cm}$. Užívá-li se starší jednotky $\frac{váha\ mg}{mm}$, odpadá ve vzorci pro a^2 divisor g. Viz Mechanika, § 408., pag. 638, 1901. Proto shledáváme ve spisech i nejnovějších ještě vzorce (pro vodu)

$$\lambda^* = 2\pi\sqrt{\frac{F}{s}}, \quad v^{*2} = 2g\sqrt{\frac{F}{s}},$$

kteréž však pro absolutní osnovu měr neplatí.

Odvozené vzorce objasnili jsme konkretními příklady platnými pro vodu 20°. Výsledek pro jiné kapaliny jest tak dalece odchylný, pokud a^2 má jinou hodnotu. Vzhledem k tomu, že se v číslech λ^* a v^* zračí kapillarní zvláštnosti kapalin podobně jako v konstantě kapillarní, jest v následující tabulce proveden výpočet těchto veličin pro ty kapaliny, pro něž v „Mechanice" (§ 409., pag. 640, 1901) jsou hodnoty a^2 uvedeny.

Minimalní rychlost v^* vlnek o délce λ^* na povrchu různých kapalin o kapillarní konstantě a^2.

Kapalina	a^2 mm^2	v^* mm	λ^* mm
voda 20°	14·842	231·1	17·11
alkohol 20°	5·776	102·7	3·38
aether 20°	4·916	98·6	3·12
benzol 15°	6·817	107·0	3·67
meth. alkohol 15°	6·016	103·7	3·45
olivový olej 20°	7·68	110·2	3·89
petroleum 20°	6·758	106·8	3·65
toluol 15°	6·654	106·4	3·62
terpent. olej 20°	6·434	105·5	3·56
rtuť 20°	55·03	320·7	32·96

Z hodnot zde vypočtených vynikají svou velikostí zvláště hodnoty pro rtuť, pak pro vodu; u ostatních kapalin nejsou rozdíly značné.

Jest patrno, že lze též naopak, když se rychlost v vlnek experimentem zjistí, počítati z měřených délek λ kapillarní konstantu a^2. Práce touto methodou byly v skutku provedeny (Lord Rayleigh).

O předmětu zde vyloženém podal pojednání F. Koláček r. 1878 (Wied. Ann. 5, pag. 425, 1878) pod názvem: O účinku kapillarního napjetí povrchového na rychlost postupu vln vodních; zde jsou též vzorce nahoře uvedené dokázány. V souvislosti viz Koláček-Seydler, Theoret. fys. díl III. pag. 252, 1895 a F. Koláček, Hydrodynamika, kap. IX., 1899.

Vlnění v útvarech trojrozměrných.

§ 35. **Vlnoplochy.**

Budiž dána soustava hmotných bodů, tvořících pružné prostředí. Majíce na dosavadních základech sobě objasniti, jak se v soustavě takové vlnivý pohyb v jistém středisku vznikající šíří, myslíme sobě od tohoto střediska ve všech směrech vedené přímky vyplňující plný prostorový úhel. Každou takovou přímkou protíná se z celé prostorové soustavy hmotných bodů určitá *řada bodová*; i můžeme sobě šíření pohybu vlnivého od onoho střediska v daném útvaru prostorovém nahraditi současným postupem vlnivého pohybu ve všech těchto bodových řadách.

Pozorujíce, jak se postup tento děje jednak v téže řadě bodové, jednak v různých řadách bodových, poznáváme, že veličinou zde rozhodující jest *rychlost* tohoto postupu. Je-li tato rychlost v každé *jednotlivé* řadě bodové stálou, zoveme prostředí *stejnorodým* čili *homogenním*; délka vlny jest tu pro celý postup konstantní. Jinak zove se prostředí *nestejnorodým* čili *heterogenním*.

Homogenita prostředí bývá porušována nejčastěji teplotou. Vzduch v síni, ve které jest zatopeno, není prostředím homogenním, poněvadž vrstvy vzduchové nahoře jsou teplejší než dole. Držíme li tedy v rukou znějící ladičku a sledujeme-li v myšlenkách jak od ní postupuje vlna v řadě bodové na př. směrem svislým nahoru a dolů, poznáváme, že vlna směrem nahoru postupujíc, stává se stále delší, směrem dolů stále kratší, poněvadž ve vrstvách vyšších, teplejších, rychlost postupu se zvětšuje a naopak ve vrstvách nižších, chladnějších, se zmenšuje.

Je-li prostředí homogenní, tudíž při daném způsobu vlnění — příčného neb podélného — je-li rychlost v jistém daném směru konstantní, pak může zase v rozličných směrech býti buď stejnou neb nestejnou; v prvém případě jest prostředí *isotropní*, v druhém *anisotropní**).

Budiž prostředí isotropním, t. j. rychlost c šíření se vlny ve všech směrech stejnou. Za jistou dobu t postoupí tedy vlnění ve všech směrech stejně daleko; body, jež pohyb kmitavý právě *začínají*, leží na povrchu *koule*, jejíž poloměr jest ct. Ale i všeobecněji leží body, jež jsou v *téže fasi* svého kmitavého pohybu, rovněž na povrchu koule. Geometrické místo bodů, nalézajících se v téže fasi svého kmitavého pohybu, zoveme *vlnoplochou*. Dle toho jest v prostředí isotropním vlnoplochou *koule*. Poněvadž se však fase po uplynutí periody T vždy opakují, jest patrno, že při téže fasi obdržíme za vlnoplochu nikoli kouli jedinou, nýbrž soustavu soustředných koulí, jež jsou od sebe ve směru radialném vzdáleny o délku cT. Tato délka zove se analogicky, jako v řadě bodové, *délkou vlny* λ. Pro isotropní prostředí jest tedy délka vlny *stálou*.

Budiž prostředí anisotropním; rychlost šíření se vlny mění se pak se směrem; geometrické místo bodů ve stejné fasi kmi-

*) Srovnej Mechanika, § 68. a 69., pag. 98, 1901.

tavé se nalézajících není koule, nýbrž plocha jiná, na př. rotační ellipsoid, nebo plocha ještě složitější. Taková plocha zove se i zde *vlnoplochou*.

Příklady isotropních prostředí jsou kapaliny a plyny stejné všude teploty. Příklady anisotropních prostředí jsou krystally.

Pro účely akustické postačí, úvahy další omeziti na prostředí isotropní a zde předpokládati vlnění podélné. Pro účely optické, kde jde o vlnění příčné, mají též prostředí anisotropní velikou důležitost.

Obr. 53. Postupná vlna ve vzduchu.

Názornou představu o šíření se zvuku v prostředí isotropním, ve vzduchu, na základě vlnění podélného poskytuje obr. 53. Zhuštění a zředění, vznikající podélným kmitáním částeček — aneb, jak zde můžeme též říci, podélným kmitáním kulových vrstev — šíří se na všechny strany, postupujíc až k uchu našemu, kde budí dojmy zvukové. Dobře jest viděti, jak vlnoplochy, vzdalujíce se od střediska vlny, stávají se vždy méně zakřivenými, tak že — *v malém úhlu plošném* — jsou téměř rovinnými. V tom smyslu mluvíme mnohdy o *vlnách rovinných*.

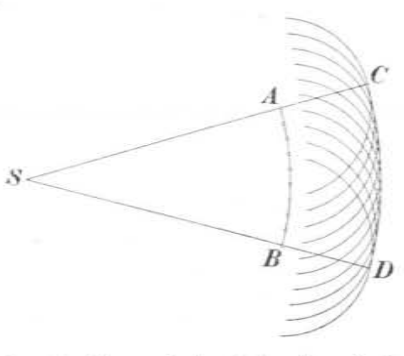
Obrazec 53. jest přesně dle sinusoidy rýsován; zhuštění a zředění jsou tudíž taková, jak by při kmitání jednoduchém, t. j. při znění tonu v skutku vznikla. Ton tento byl by ovšem velmi vysoký. Délka vlny zde volená jest 2·4 *cm*, což by při rychlosti zvuku 34000 *cm*|*sec* dalo kmitočet

$$\frac{34000}{2{\cdot}4} = 14167.$$

Ke srovnání uvádíme že nejvyšší ton v hudbě ještě užívaný, ton flétny oktavové (f), jest temperované $d^{V} = 4645$ dle ladění $a^{I} = 435$. Pátá oktava tohoto komorního tonu a^{I} má kmitočet $a^{VI} = 13920$; tomuto tonu byl by onen hořejší velmi blízký.

§ 36. Princip Huygensův.

Způsob v předešlém odstavci popsaný vykládá šíření se vlny v prostředí tak jako v řadě bodové. v tom smyslu, že každý bod svůj pohyb přejímá od bodu předešlého, kterýž leží na paprsku řadu bodovou stanovícím. V řadě bodové, jak si ji myslíme, jest názor tento oprávněn, poněvadž jeden bod řady souvisí (působením sil molekulových) jenom s bodem předešlým a následujícím. V prostředí souvisí však každý bod se všemi ve svém okolí. Položíme-li důraz na tuto souvislost, pak jest patrno, že kmitající bod sdílí svůj pohyb se všemi, jež se kol něho ve všech směrech nalézají a že tím stává se střediskem nové vlnky, kterouž můžeme zváti *elementarní*. Když tedy vlna, od střediska S vycházejíc, postoupí až ke kouli AB (obr. 54.), můžeme další postupování této vlny tak vykládati, jako by každý bod na této ploše AB se stal střediskem vlnky elementarní, odtud všestranně se šířící. Po uplynutí jisté doby postoupí všechny tyto vlnky o jistou délku a vytvoří ve svém úhrnu plochu obalující CD; tato jest pak pokračováním vlny AB. Patrně jest v případě tomto plocha obalující CD opět plochou kulovou.



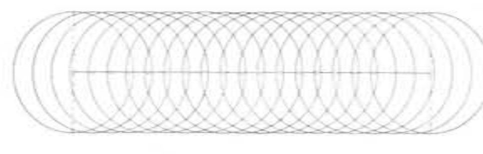
Obr. 54. Postup kulové vlny dle principu Huygensova.

Názor zde vylíčený zoveme principem *Huygensovým*.

Klassický spis, ve kterém Ch. Huygens položil základy pro undulační theorii světla a vyložil onen svůj princip, byl vydán roku 1690 a má název: Traité de la lumière, où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la réflexion et dans la réfraction et particulièrement dans l'étrange réfraction du cristal d'Islande. Spis vyšel tedy původně v jazyku francouzském v Leydenu; 38 let později vydal jej *Gravesande* v Amsterodamu 1728 v jazyku latinském (Tractatus de lumine, inter Opera Hugenii reliqua). Vlastní datum spisu jest však rok 1678; Huygens píše v předmluvě o tom sám: J'escrivis ce Traité pendant mon sejour en France, il y a 12 ans; et je le communiquay en l'année 1678 aux personnes sçavantes, qui composoient alors l'Académie Royale des Sciences, à la quelle le Roy m'avoit fait l'honneur de m'appeller. K akustice má spis Huygensův tak dalece vztah, že theorie undulační

světla, v něm podaná, vznikla dle analogií akustických; v skutku také vlnění, jež Huygens za podstatu světla přijímá, jest *podélné*, jako při šíření se zvuku ve vzduchu. Teprve *Fresnel* přijal — přihlížeje k polarisaci světla — vlnění *příčné* na místě podélného. Mimo to má princip Huygensův význam též pro akustiku, poněvadž dobře vysvětluje, proč zvuk jinak se šíří (nejen přímočaře nýbrž i stranou) a jinak odráží a láme než světlo, ač undulační základ jest tu i tam společný.

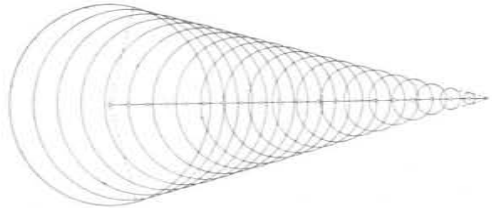
Buďtež zde ještě v původním znění uvedena slova, jimiž Huygens základní myšlenku svého principu, jak se nyní říkává, vyslovil: „Il y a encore à considérer dans l'émanation de ces ondes, que chaque particule de la matière, dans laquelle une onde s'étend, ne doit pas communiquer son mouvement seulement à la particule prochaine, qui est dans la ligne droite tirée du point lumineux; mais qu'elle en donne aussi necessairement à toutes les autres qui la touchent et qui s'opposent à son mouvement. De sorte qu'il faut, qu'autour de chaque particule il se fasse une onde dont cette particule soit le centre . . . Mais chacune de ces ondes ne peut estre qu' infiniment foible comparée à l'onde CD, à la composition de laquelle toutes les autres contribuent par la partie de leur surface, qui est la plus éloignée du centre S." (Obr. 54.) *)


Obr. 55. Postup vlny vysvětlený dle principu Huygensova.

Smysl principu Huygensova lze objasniti některými známými příklady. Mějmež před sebou klidnou hladinu vodní, a pusťme na ni vodorovně tenkou tyč (obr. 55.). V okamžiku, kdy tyč dopadne na vodu, rozvlní se hladina v jistém způsobu, který vystihneme, když si v myšlenkách představíme na místě oné tyče souvislou řadu zrnek pískových, přesně současně na vodu dopadších. Každé z nich stane se střediskem vlnky kruhové — analogon oněch vlnek elementarních — výsledek pak úhrnný vznikne superposicí všech těchto vlnek; v obalujících přímkách

*) Dlužno ještě při šíření se těchto vln uvážiti, že každá částečka hmoty, ve které se vlna šíří, nesdílí svůj pohyb toliko s částečkou sousední, která leží na přímce z bodu světelného vedené; nýbrž že udílí jej nutně i všem ostatním, které se jí dotýkají a jež jejímu pohybu brání. Tím jest nutno, že kolem každé částečky vznikne vlnka, jejíž jest tato částečka střediskem . . . Avšak každá z těchto vlnek nemůže býti než nekonečně slabou proti vlně CD, k jejíž složení všechny ostatní přispívají tou částí svého povrchu, která jest nejvíce vzdálena od středu S.

rovnoběžných sesílí se pohyb, jinak se ruší, od konců pak jdou vlny kruhové.

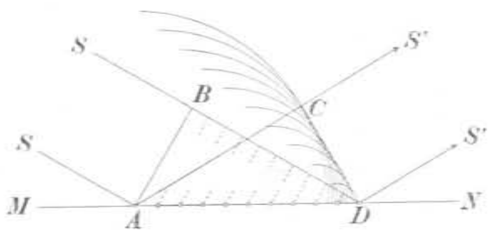


Obr. 56. Postup vlny vysvětlený dle principu Huygensova.

Na místě, aby ona zrnka písková dopadla současně, mohou dopadati postupně (obr. 56.), ta na pravo vždy o něco později; také zde vznikají kruhové vlnky, jež ve své superposici dávají přímky sbíhavé. Případ tento vzniká, když loď pluje rovnoměrně po vodě; za ní se šíří vlna jako klínovitá, majíc svůj hrot na místě, kde se loď právě nalézá.

§ 37. Odraz vln.

Huygens, položiv k vysvětlování úkazů světelných základy nové, ukázal jich spolehlivost a zároveň vhodnost svého principu především výkladem dvou nejznámějších zjevů, totiž odrazu



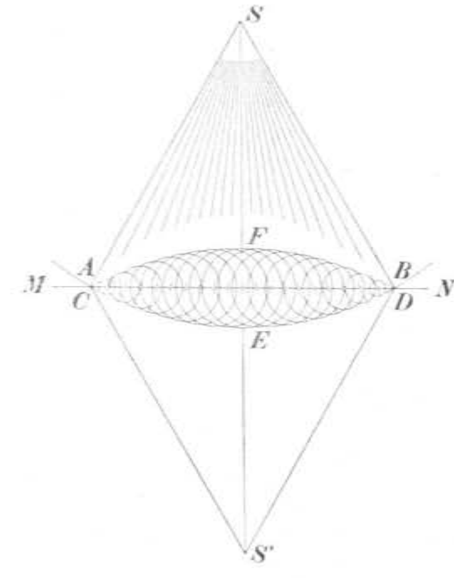
Obr. 57. Odraz vlny rovinné.

a lomu světla. Tyto zjevy dlužno vedle přímočarého postupu pokládati za základní; a poněvadž právě tyto úkazy theorie emanační vysvětlovala velmi jednoduše, bylo tím důležitější vysvětliti je též na základě nové theorie undulační. Způsob výkladu Huygensova, který provádí v kapitole II. a III. spisu výše citovaného, ukazuje zároveň, jak dalece to, co uvádí pro úkazy světelné, lze stejně oprávněně uznati pro úkazy akustické. Budiž MN (obr. 57.) rovina odrážející, na kterou dopadají ve směru SA

paprsky rovnoběžné. Vlnoplochou jest tedy rovina na směr paprsků kolmá, jakožto část vlnoplochy kulové, jejíž střed jest v nekonečné dálce. Studujíce průběh úkazu v rovině nákresné, rýsujeme dva paprsky rovnoběžné SA a SB a mezi nimi kolmou přímku představující vlnu rovinnou. Průběhem času postupuje tato přímka a v jistém okamžiku dojde bodem A právě na rovinu odrážející. V tomto okamžiku představujeme sobě, jako by od bodu A počínajíc na MN vznikaly vlnky elementarní, jedna po druhé, až k bodu D. Obrazec znázorňuje situaci, jak se utváří v okamžiku, kdy vlna AB proběhla dráhu BD a kdy vlnka elementarní od bodu D právě začíná; vlnky ostatní rozvířily se již na délky úměrné odlehlosti jich středisek od bodu D směrem k bodu A, při čemž vlnka od bodu A se rozšířila na délku

$$AC = BD.$$

Všechny vlnky elementarní dávají obalující vlnu rovinnou, jež jest v obrazci znázorněna přímkou CD. I jest pak SA paprsek dopadající, AS' paprsek odražený, a poněvadž dráhy BD a AC jsou stejné (v témže prostředí), jest paprsek odražený vzhledem ke kolmici dopadu souměrně položen s dopadajícím, úhel odrazu jest roven úhlu dopadu.

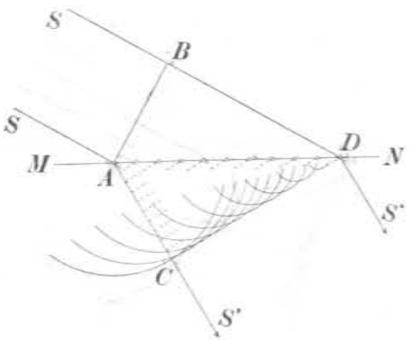


Obr. 58. Odraz vlny kulové.

Úvahou zcela podobnou lze při dopadající vlně kulové AED (obr. 58.) sestrojiti vlnu kulovou odraženou CFB, která postupuje zpět tak, jako by vycházela od střediska S' souměrně — vzhledem k rovině odrážející MN — s původním střediskem S položeného.

§ 38. Lom vln.

Vysvětlení obyčejného lomu světla, jež Huygens (v kapitole III.) podává, obsahuje důležité rozhodnutí o rychlosti, s jakou vlna postupuje v prostředí na př. opticky hustším. Budiž MN (obr. 59.) rovinné rozhraní obou prostředí. Vede-li se výklad zcela podobně, jako při odrazu světla, a znázorní-li se situace, jak se utváří v okamžiku, kdy z elementarních vlnek do prostředí druhého vnikajících vlnka od bodu D právě začíná, pak postoupila elementarní vlnka od bodu A na dálku AC, jež není rovna současné dráze BD v prostředí původním, nýbrž jest na př. menší, $\left(\text{v obr. 59. jest } \frac{BD}{AC} = \frac{7}{4}\right)$; vlnky ostatní postoupily na dálku přiměřeně menší, dle odlehlosti jejich středisek od bodu D. Jest viděti, že vlnky elementarní dávají obalující rovinnou vlnu, jež jest v obrazci znázorněna přímkou CD; paprsek AC k ní kolmý jest lomeným k paprsku dopadajícímu SA.



Obr. 59. Lom vlny rovinné.

Z konstrukce plyne ihned zákon *Snelliův-Descartesův* lomu světla. Je-li α úhel dopadu, t. j. úhel $= DAB$, který paprsek SA svírá s kolmicí dopadu, a podobně β úhel lomu, t. j. úhel $= ADC$, který paprsek AS' svírá s touže kolmicí dopadu, plyne ihned

$$AD \,.\, \sin\alpha = BD,$$
$$AD \,.\, \sin\beta = AC,$$

tudíž

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BD}{AC}.$$

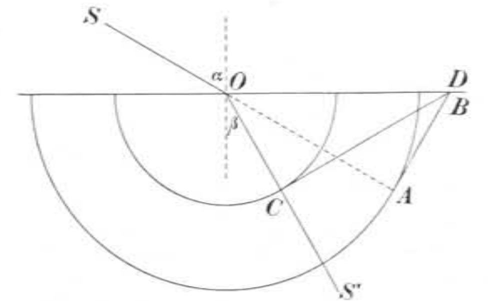
Zde značí BD a AC isochronní dráhy s_1 a s_2 v prostředí prvém a druhém; zavedeme-li pro jich poměr označení n, píšíce

$$\frac{s_1}{s_2} = n,$$

obdržíme

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Stálý tento poměr n zove se *index* neb *exponent* (udavatel) lomu; výkladem pak Huygensovým nabývá tento exponent jednoduchého a důležitého významu; značí poměr isochronních drah čili poměr rychlostí v obou isotropních prostředích. Plyne z něho zároveň, že v prostředích opticky hustších (lom ke kolmici) se světlo šíří *volněji*. Výsledkem tímto octl se Huygens v odporu proti názorům své doby, zejména Descartesovým; jediný *Fermat* došel téhož výsledku z principu jiného — že totiž světlo postupuje vždy v době *nejkratší* od jednoho bodu k druhému ať v témže prostředí nebo i v prostředích různých.



Obr. 60. Konstrukce paprsku lomeného.

Z principu Huygensova plyne konstrukce paprsku lomeného, kteráž jest ze všech nejlepší, poněvadž není jen geometrickou interpretací zákona sinusového pro lom platícího, jako konstrukce jiné, nýbrž má svůj základ přímo v pohybu vlnivém, jsouc obrazem dějů při lomu skutečně nastávajících. Budiž (obr. 60.) SO paprsek dopadající na rovinné rozhraní dvou prostředí (1 a 2). Opíšeme kolem bodu dopadu O dvě koule (nebo polokoule) poloměry (s_1 a s_2), jichž poměr jest exponent lomu $\left(n = \frac{s_1}{s_2}\right)$. Představují tedy, jak by vlnění, v bodě O vzniklé, pokročilo v jisté době v prostředí původním (s_1) a novém (s_2). Prodloužíce pak paprsek SO do A, položíme v bodě A ke kouli 1 tečnou rovinu (v obrazci přímku AB); tato protíná rovinné rozhraní obou prostředí v přímce (v obrazci v bodu D). Kolem této přímky jako osy pootočíme tečnou rovinu tak, aby v nové své poloze (v obrazci DC) se dotýkala koule 2 v bodě C; i jest OC paprsek lomený.

Tečná rovina (BA) má význam vlnoplochy; její pootočení znamená *změnu směru postupového*, jak vskutku lomem vzniká jakožto přímý následek změněné rychlosti postupu. Proto se dá konstrukce tato též mechanicky jednoduše napodobiti.

§ 39. Úvahy závěrečné.

Ve výkladu svého principu položil Huygens důraz na sesílení pohybu, jak nastává na ploše obalující — veden jsa více důmyslem než důkazem — a zanedbával pohyb, jaký elementarními vlnkami vzniká mimo plochu obalující. Že zde jistá mezera jest, sám vyciťuje; ale poukazuje na to, že „všechny zvláštnosti světla, a vše, co se vztahuje k jeho odrazu a lomu", se oním názorem dobře vysvětluje. Domyslil se tudíž Huygens — ač toho nedokázal — že pohyby mimo plochu obalující nepřijdou k platnosti. Důkaz toho podati však nemohl — neznaje principu *interference*; důkaz ten podal a tím princip Huygensův doplnil *Fresnel*.

Vlnky elementarní docházejí do jistého bodu M od středisek různě vzdálených; proto vznikají rozdíly dráhové δ, tyto pak nutno přepočísti na rozdíly fasové ε, jež při skládání vlnek mají rozhodující význam. Jest však

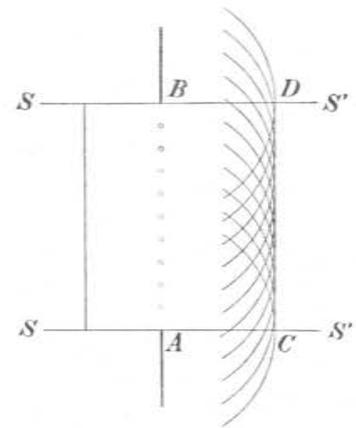
$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta .$$

Vzorec tento naznačuje již rozdíl mezi světlem a zvukem. Jde o koefficient $\frac{2\pi}{\lambda}$. U světla jest délka vlny λ velice malá, proto onen koefficient velmi veliký. Vznikají tudíž značné rozdíly fasové ε již malými rozdíly dráhovými δ. Při zvuku však naopak. Když tedy do bodu M docházejí vlnky elementarní od různých středisek, probíhá δ spojitě řadu hodnot a tudíž také ε; avšak při téže různosti v řadě δ vznikají v řadě ε u světla různosti velmi velké, u zvuku velmi malé.

Pozorujme, jak se věc má při průchodu na př. rovinné vlny štěrbinou (obr. 61.). Plochou obalující jest zde opět rovina. Je-li bod M na ploše obalující, jest jedno ze středisek elementarních vln ve vzdálenosti *minimalní*; v okolí tohoto minima jsou tudíž i četná jiná střediska ve vzdálenosti téměř stejné (až na rozdíly nekonečně malé stupně druhého); proto nevznikají zde rozdíly dráhové a tudíž ani ne fasové téměř žádné, a nastává sesílení pohybu. Ale toto sesílení vztahuje se jen na střediska nejbližší, v okolí onoho minima. Věc je stejná v akustice

i optice. Je-li však M mimo plochu obalující, není takového minima; odlehlosti od středisek vln mění se prudčeji, tudíž i rozdíly dráhové δ. Zde však nastává rozdíl mezi světlem a zvukem.

V optice, při velikém koefficientu $\frac{2\pi}{\lambda}$, způsobují tyto různosti δ tak značné rozdíly fasové ε, že výsledný pohyb se z pravidla ruší. Vzniká stín; světlo se šíří přímočaře, nejde stranou, není ohybu světla. Jen výjimečně může ohyb nastati, když jest štěrbina velice úzkou, tak že pak rozdíly dráhové δ jsou nepatrné.

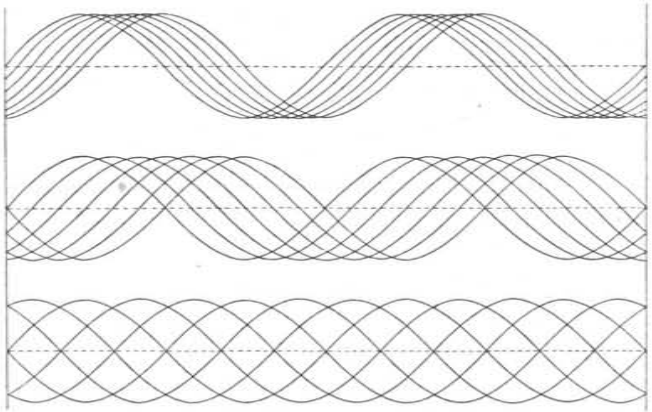


Obr. 61. Postup vlny rovinné otvorem.

Naopak v akustice. Zde jest ohyb pravidlem; nevzniká stín, zvuk jde kolem, stranou, poněvadž koefficient $\frac{2\pi}{\lambda}$ jest velmi malý. Jenom výjimečně, kdyby šlo o tony velmi vysoké, tudíž o λ velmi malé, šíří se zvuk přímočaře. Světelný stín jest pravidlem, ohyb výjimkou; naopak akustický stín jest výjimkou, ohyb pravidlem. Obyčejné otvory — dveří, oken, ulic — jsou vzhledem k velkým vlnám akustickým již jako štěrbiny opticky velice úzké; proto jest ohyb zjevem všedním, a přestal by jen výjimečně, při tonech nejvyšších. Na výkladu nemění se ničeho, kdyby za štěrbinou bylo prostředí nové; vznikal by i zde ohyb, nikoliv lom*).

*) Proto nutno pokusy o lomu zvuku přijímati s jistou reservou. Srovnej: Koláček-Seydler, Theoret. fys. III. díl, § 36., pag. 291.

Co zde slovy naznačeno, lze ovšem prostředky analyse dokázati způsobem přesným a naprosto přesvědčivým. Poučnou illustraci ke slovním těmto výkladům podává obr. 62. Představuje v časovém rozvinutí superposici sedmi stejných kmitavých pohybů o aequidistantních rozdílech fasových. Tyto rozdíly postupují v trojím intervallu, 1. (nahoře) $\frac{\pi}{12}$, 2. (u prostřed) $\frac{\pi}{6}$, konečně 3. (dole) $\frac{\pi}{3}$. Jediným pohledem rozhodneme, že v případě 1. jednotlivé kmity se sesilují nejvíce, v případě 2. poněkud méně, v případě 3. pak že se úplně ruší. Ve skutečnosti



Obr. 62. Interference akustické a optické.

jest počet elementarních vlnek, tudíž i počet jednotlivých vibrací, jež se skládají, velmi veliký. Avšak při ohybu zvuku obyčejnými otvory mění se fase v intervallech tak malých, že vibrační křivky i při svém počtu velikém zůstávají jako by sraženými podobně jako při 1. a složeny jsouce dávají výslednou vibraci značnou. U světla kladou se křivky vibrační ve velikém svém počtu na sebe obyčejně tak, jako v případě 3. — leč by otvor byl přiměřeně k malým délkám vln světelných uzounkým, kdež nastávají pak poměry na př. podobné jako v případě 2. anebo poměry periodicky měnlivé.

III.

Základy theorie hudby.

§ 40. Vlastnosti tonu a zvuku.

Vzduch, v němž žijeme, jest jen v případech zcela výjimečných v klidu; téměř vždycky jest v pohybu, kterýž při veliké pošinutelnosti částic vzduchových bývá nad míru rozmanitý. Pohyb tento jest neviditelný, ale znatelný v účincích, jež způsobuje. Tyto jsou jednak mechanické jednak akustické. Účinky mechanické vznikají pohybem postupným nebo vířivým, jak bývá při větrech a bouřích; účinky pak *akustické*, o nichž jest nám zde jednati, jsou vlastní pohybu, kterýž zoveme *vlnivým*, hledíce ke vzduchu jako celku, a *kmitavým*, přihlížejíce k nejmenším vzduchovým částečkám.

Co dává *podnět* k tomuto pohybu, jest otázkou, o níž dlužno jednati zvlášť. Co se však pohybu samého týče, víme ze zkušenosti, že rozmanitost dojmů sluchových jest nevyčerpatelná; z toho pak soudíme, že také nesmírně rozmanitým může býti pohyb kmitavý těch částic vzduchových, kteréž k bubínku ušnímu přímo přiléhají, a tudíž i celého okolí vzdušného, od něhož pohyb svůj přejímají. Jest pak úkolem akustiky, sledovati *souvislost* stránky subjektivní i objektivní, pocitu sluchového i příslušného pohybu částeček vzduchových.

Vlnivým pohybem základním jest ten, při němž částečky vzduchové jsou v *jednoduchém pohybu harmonickém*, vykonávajíce *jednoduché kmity* jisté amplitudy r a určité, stálé periody T čili určitého stálého kmitočtu N. Kmity takové, v obrazcích 2. a 3. graficky znázorněné, jsou stanoveny rovnicí

$$y = r \sin (2\pi Nt + \varepsilon),$$

kdež jest ε fasí v okamžiku $t = 0$. Když částečky vzduchové, k bubínku ušnímu přiléhající, takovýmto pohybem dráždí organ náš sluchový, pocifujeme dojem určitě charakterisovaný, kterýž zoveme *tonem* *).

Vlastností dojmu tohoto zvláště význačnou jest jeho *výška*; mluvíme o tonech vyšších a nižších, obrazně tím vyjadřujíce ty rozdíly pocitové, jež nelze popsati slovy, ale o nichž lze dokázati, že souvisí s periodou kmitovou čili, jak zde raději říkáme, s *kmitočtem* N; když tento *stoupá*, stává se ton, jak pravíme, *vyšším*, když *klesá*, *nižším*; proto zoveme tento kmitočet přímo *výškou* tonu *absolutní*.

Při určité výšce může ton zníti větší neb menší mohutností, intensitou, může býti silnější neb slabší. Tato vlastnost souvisí s větší neb menší prudkostí podráždění, a tato zase s větší neb menší energií pohybovou kmitajících částeček vzduchových. Budiž m hmota takové částečky. Je-li v její rychlost v jistém okamžiku časovém, jest v témže okamžiku $\frac{1}{2}mv^2$ její živá síla. Tato jest

$$\text{nejmenší} = 0 \qquad \text{při } v = 0,$$
$$\text{největší} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad \text{při } v = c,$$

kdež značí c maximum rychlosti, jakáž nastane při průchodu polohou rovnovážnou. Arithmetický průměr z nejmenší a největší hodnoty živé síly činí

$$\frac{0 + \frac{1}{2}mc^2}{2} = \tfrac{1}{4}mc^2.$$

Při tom jest (§ 3.)

$$c = \omega r, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

tak že onen průměr jest dán výrazem

$$\tfrac{1}{4}m\omega^2 r^2.$$

Dá se dokázati, že tento průměr hodnoty nejmenší a největší jest též průměrnou hodnotou energie pohybové pro celou periodu vibrační. Z toho soudíme, že i mohutnost čili intensita tonu jest úměrna čtverci amplitudy.

Průměrná energie pohybová v době $0 \ldots T$ jest přesně stanovena integralem

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}mv^2 . dt.$$

*) řecké τόνος ὁ od τείνω napínám, ve smyslu napjetí hlasu, τῆς φωνῆς a jeho účinku při zpěvu, pak i podobného účinku při nástrojích hudebních.

ve kterémž jest rychlost pohybová v vyjádřena rovnicí (§ 3.)

$$v = \omega r . \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Dosadíce výraz tento do hořejšího integralu a provedouce integraci, obdržíme postupně

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}mv^2 . dt = \frac{m\omega^2 r^2}{2T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \varepsilon)\, dt$$

$$= \frac{m\omega^2 r^2}{4T}\int_0^T [1 + \cos 2(\omega t + \varepsilon)]\, dt = \frac{m\omega^2 r^2}{4T}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2(\omega t + \varepsilon)\right]_0^T$$

$$= \frac{m\omega^2 r^2}{4},$$

tak že vskutku průměrná hodnota živé síly pro celou periodu T souhlasí s arithmetickým průměrem její hodnoty maximalní a minimalní.

Tony jsou základním elementem hudby a zpěvu; umění vyluzovati tony takové, jest podmíněno jednak nástrojem hudebním — k čemuž i ústrojí hlasové počítáme — jednak dovedností, s jakou kdo nástroj takový ovládá. Rozvoj hudby způsobil velikou rozmanitost nástrojů hudebních, kteréž v rozsahu každému nástroji vlastním dávají (jak též říkáme) tony různé výšky a různé síly. Tu pak skutečnost ukazuje, že tony, jež *stejné* výšky a síly se nám jeví, jež však různými nástroji hudebními bývají vzbuzeny, ucho *rozeznává*, přisuzujíc jim různou, jak pravíme, *barvitost* (fr. timbre). Otázka, v čem podstata této vlastnosti záleží, jest nyní pracemi, jež *Helmholtz* provedl, rozřešena. Nehledíc k šumotům, jež vznikajíce při tvoření zvuku, jsou různým nástrojům vlastní, jako flétně, píšťalám zejména dřevěným, kde šumoty jsou způsobeny proudícím vzduchem, anebo klarinetu, fagotu, píšťalám jazýčkovým, kde jsou způsobeny chvěním jazýčku, anebo nástrojům smyčcovým, kde vznikají tahem smyčce a třením, což vše již dodává zvuku zvláštní povahu, jest základem barvitosti kmitavý pohyb sám, který nebývá jednoduchý harmonický, nýbrž složený harmonický. Složené kmity, jež částečky vykonávají, dají se rozložiti v řadu kmitů jednoduchých, z nichž každý budí dojem tonu. Ucho cvičené vskutku samo rozklad tento provádí, rozeznávajíc jistý ton *hlavní* (nejhlubší a nejsilnější) a jiné tony (vyšší a slabší) *průvodní*; proto úhrnný dojem označujeme zde slovem *zvuk*, užívajíce tohoto výrazu ve smyslu praegnantním; *výška zvuku* jest pak určena *výškou* jeho tonu *hlavního*.

Dle toho má slovo zvuk význam dvojí, jeden širší, jako dojem sluchový vůbec, druhý užší, jako dojem hudební. Mnozí, chtějíce se vyhnouti tomuto dvojímu významu, utvořili (dle německého Schall a Klang) na místo „zvuku" ve smyslu hudebním slovo „zněna" (jiní: „zvěna"). Nehledíc k tomu, že slovo není šťastně tvořeno a že z něho nelze odvoditi adjektivum (analogické slovu „zvukový") je slovo zvuk v ustálených názvech: trojzvuk, souzvuk atd. tak zdomácnělé a i jinak pohodlné, že nelze užívání názvů výše uvedených schvalovati. Také časoslova zvučeti neužíváme jinak než ve smyslu onom zvláštním; kde vzniká šumot, rachot, šramot a pod. nepravíme, že slyšíme něco zvučeti. O hlasu říkáme, že jest zvučný. V těch případech, kde mluvíme o rychlosti neb o odrazu a pod. zvuku, jest dvojí význam tohoto slova dokonce pohodlný — neboť jinak by bylo nutno mluviti o rychlosti, neb o odrazu atd. „zněny (zvěny) a zvuku". Také ve francouzštině slovo „le son" — v italštině „il suono", v angličtině „the sound" souhlasné s naším zvuk — znamená dojem sluchový vůbec a hudební zvlášť, a dojista z dvojího tohoto významu nevznikají v literaturách oněch národů nesnáze žádné.

Dle jednoduchých tonů ve zvuku zastoupených řídí se *forma* vlny složené; avšak forma tato jest při týchž jednoduchých pohybech kmitavých o určitých amplitudách a kmitočtech podmíněna též fasovými rozdíly, kteréž na barvitost zvuku nemají účinku žádného. Vzhledem k tomu nelze prostě říci, že barvitost zvuku jest podmíněna *formou* vlny.

Dle výkladu tohoto přísluší *zvuku* trojí vlastnost (kvalita): *výška*, *síla* a *barvitost*. Ton barvitosti nemá. Většina hudebních nástrojů dává zvuky, jen některé, jako ladičky, kryté píšťaly dřevěné, za jistých podmínek i struny a j. dávají tony. Výška zvuku jest vlastností jeho nejdůležitější; rozumíme tím, jak řečeno, výšku *tonu hlavního* ve zvuku obsaženého.

§ 41. Výškové odlehlosti tonů.

Buďtež dány tony o kmitočtech N_1, N_2, N_3, N_4. . . . ., při čemž budiž

$$N_1 < N_2 < N_3 < N_4 \ldots$$

Ton druhý jeví se býti vyšším než prvý, podobně ton čtvrtý vyšším než třetí; lze tedy mluviti o *odlehlosti* výškové. Zdálo by se, že odlehlost tato, jak ji posuzujeme dle dojmu sluchového, jest určena *rozdílem* kmitočtů, tak že by na př. tony N_1 a N_2 se jevily stejně odlehlými jako N_3 a N_4, kdyby rozdíly jich kmitočtů sobě se rovnaly, kdyby tedy bylo

$$N_4 - N_3 = N_2 - N_1.$$

Dle toho by pak kmitočty tonů stejně odlehlých tvořily *řadu*

arithmetickou, na př.

32, 64, 96, 128, 150, 182, . . .

Jednoduchý pokus by však ukázal, že tomu tak není; tony na př. 32 a 64 jeví ve své výšce odlehlost velmi značnou, kdežto tony 1032 a 1064, ač rozdíl kmitočtů jest týž, jsou ve své výšce velmi blízce u sebe. Důvodem toho jest, že odlehlost dvou tonů jest určena nikoli rozdílem nýbrž *poměrem* kmitočtů. Jsou tedy tony N_1 a N_2 stejně odlehlé jako N_3 a N_4, je-li *poměr* kmitočtů týž, tedy, je-li

$$\frac{N_4}{N_3} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Tvoří tudíž kmitočty tonů stejně odlehlých *řadu geometrickou*, na př.

32, 64, 128, 256, 512, 1024, . . .

v níž poměr (zde $= 2$) dvou po sobě následujících členů jest stále týž.

Odlehlost dvou tonů, určena *poměrem* jich kmitočtů, zove se jich *intervall*. Vyjadřuje se *z pravidla* poměrem kmitočtu *vyššího* k *nižšímu*, tak že jest číslem *větším než jednička*.

Zavedeme-li v rovnici hořejší

$$\frac{N_4}{N_3} = \frac{N_2}{N_1}$$

logarithmy kmitočtů, obdržíme logarithmujíce

$$\log N_4 - \log N_3 = \log N_2 - \log N_1.$$

Když se tedy místo kmitočtu, jakožto výšky *číselné* (numerické), určí jeho logarithmus jakožto výška *logarithmická*, pak se může intervall dvou tonů stanoviti *rozdílem* (differencí), ale ne výšek číselných, nýbrž logarithmických. Pak jeví se býti takové tony stejně odlehlými, jichž *logarithmické výšky* ukazují stejné rozdíly (difference), tvoříce *řadu arithmetickou*.

Ve výkladech následujících užíváme výšek číselných i logarithmických zároveň; mnohdy se lépe počítá čísly samými, mnohdy zase jich logarithmy; povšechně nelze říci, co jest výhodnější; proto jest dobře uváděti čísla i logarithmy současně.

Závislost *stupňů* výškových na *poměru* kmitočtů jest významu všeobecnějšího, majíc kořen svůj v psychofysickém zákonu Fechnerově. Pocit jest podmíněn podrážděním; když podráždění se zvětšuje, stupňuje se též pocit; avšak pocit se stupňuje o tolikéž, tedy *arithmeticky*, když podráždění se zvětšuje stejněkrát, ve stejném *poměru*, tedy *geometricky*. Když na př. hledíme na plochu ozářenou osmi a pak devíti svíčkami, máme dojem, že světlosti přibylo; pocit tudíž o jistý stupeň stoupl. Aby o týž stupeň stoupl při osvětlení osmdesáti svíčkami, dlužno počet svíček zvětšiti, ale ne *o tolik* jako dříve, tedy o jednu, nýbrž *stejněkráte* více, tedy v poměru 8 : 9, tudíž z osmdesáti na devadesát svíček. Podobně při sluchu. Slyšíme-li po sobě dva tony o výškách 32 a 36, máme dojem, že druhý jest o jistý stupeň vyšší. Zní-li ton o výšce 80 a chceme-li, aby jeho výška o týž stupeň stoupla, nutno zvýšiti kmitočet, ale nikoli o 4 kmity, nýbrž ve stejném poměru, tedy na 90, tak aby bylo $\frac{36}{32} = \frac{90}{80}$.

Při přesnějším výkladu psychofysického zákona dlužno pamatovati, že mnohdy pocit začíná až teprve, kdy podráždění jistého stupně dosáhlo jakožto *začátečného*; nutno pak podráždění další od tohoto stupně — jako *nullového* — počítati. Pro podráždění velmi silná se smysly otupují; oko se oslňuje, ucho ohlušuje a pod. Zákon psychofysický pak ovšem platnosti pozbývá.

Co se otázky týče, zda-li je při počítání intervallů lépe užívati výšek číselných či logarithmických, dlužno doznati, že jsou tu i tam jisté výhody a jisté vady. Logarithmy se pohodlněji počítá. Kde by bylo nutno, číselné výšky násobiti neb děliti, tam jednodušeji sečítáme neb odčítáme příslušné logarithmy. Za to bývají z pravidla intervally *číselné* vyjádřeny zlomky o *jednoduchých číslech*, jako na př. $\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{81}{80}$ a pod., kterážto jednoduchost se v logarithmech úplně ztrácí.

Nahoře bylo řečeno, že se intervall dvou tonů udává z pravidla poměrem kmitočtu tonu *vyššího* ke kmitočtu tonu *nižšího*, tak že jest intervall číslo *větší jedničky*. Když se stanoví intervall obráceně, pak jest číslem menším jedničky, jeho logarithmus tudíž *negativní*. Tím jest již naznačeno, že způsob tento jen tehdá jest na místě, kdy od téhož tonu jako základního vycházejíce určujeme intervally směrem negativním, k tonům nižším, a s nimi srovnáváme stejné intervally ve směru positivním, k tonům vyšším, hledajíce tony *souměrně* k témuž základnímu položené.

§ 42. Stupnice tonů.

V hudbě nazývá se *stupnicí* čili *škálou**) posloupnost určitého počtu tonů o jistých intervallech. Jeden z tonů těch, kterým stupnice počíná, zove se *základním*; i jest pak k vyznačení stupnice nejjednodušším, počítati odlehlost každého tonu škály od tohoto tonu základního. Jsou-li tedy $N_1, N_2, N_3, N_4, \ldots$ kmitočty tonů ve stupnici obsažených, určíme poměry

$$\frac{N_2}{N_1}, \quad \frac{N_3}{N_1}, \quad \frac{N_4}{N_1}, \ldots$$

*) scala, zkráceně místo scandela od lat. scandere stoupati, odtud scandela žebřík, schody, zde obrazně dle analogie odlehlostí výškových.

Tak obdržíme řadu čísel, z nichž každé udává odlehlost některého tonu od téhož tonu základního. Jinak řečeno, čísla ta udávají výšku každého tonu měřenou tonem základním, jehož výška při tom jako jednotka vystupuje; proto zoveme každé z čísel těch *relativní výškou tonu*.

V moderní hudbě užívá se stupnic několik; nejdůležitější z nich mají relativní výšky tonů vyjádřeny poměrem jednoduchých čísel v přirozené řadě 1, 2, 3, 4, 5 . . . Rozeznávají se pak stupnice *diatonické* a *chromatické*, kteréž obě mohou býti buď *tvrdé* (durové, dur) nebo *měkké* (mollové, moll); dle toho určuje se *tonorod*. Základní jest stupnice diatonická; od této se odvozuje stupnice chromatická. Ve všech stupnicích jest poslední ton, stupnici zakončující, o *dvojnásobném kmitočtu* proti základnímu; relativní výška jest tedy u prvého tonu = 1, u posledního = 2. Tento poslední ton jeví se býti sluchu jako by ve vyšší poloze opakováním základního, s nímž v souzvuku splývá; proto může opět býti prvním tonem stupnice další, jež se k prvé připojuje.

§ 43. Stupnice diatonická.

Stupnice tato obsahuje *osm* tonů, počítajíc v to i poslední, jímž se řada zakončuje a po případě nová začíná; tony ty, jež se dle tonorodu od sebe poněkud liší, jmenují se po latinsku prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima a oktava, a označují se latinskými číslicemi.

Relativní výšky *stupnice tvrdé* (dur) a intervally tonů sousedních jsou, jak následuje,

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2

$$\left(\frac{9}{8}\right), \quad \left(\frac{10}{9}\right), \quad \left(\frac{16}{15}\right), \quad \left(\frac{9}{8}\right), \quad \left(\frac{10}{9}\right), \quad \left(\frac{9}{8}\right), \quad \left(\frac{16}{15}\right).$$

Tony řady této nejsou tedy aequidistantní; celkem přichází tu trojí intervall tonů sousedních, totiž

$$\frac{9}{8}, \quad \frac{10}{9}, \quad \frac{16}{15}.$$

Relativní výšky *stupnice měkké* (moll) a intervally tonů sousedních jsou, jak následuje,

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$1,$	$\frac{9}{8},$	$\frac{6}{5},$	$\frac{4}{3},$	$\frac{3}{2},$	$\frac{8}{5},$	$\frac{9}{5},$	2

$$\left(\frac{9}{8}\right),\quad \left(\frac{16}{15}\right),\quad \left(\frac{10}{9}\right),\quad \left(\frac{9}{8}\right),\quad \left(\frac{16}{15}\right),\quad \left(\frac{9}{8}\right),\quad \left(\frac{10}{9}\right).$$

Také tony této řady nejsou aequidistantní; přichází zde však týž trojí intervall tonů sousedních, jako dříve, totiž

$$\frac{9}{8},\ \frac{10}{9},\ \frac{16}{15}.$$

Vidíme zároveň, že v obou tonorodech jsou některé tony stejné, vedle primy a oktavy řadu začínající a končící ještě sekunda, kvarta a kvinta; tony ostatní, tercie, sexta a septima, jsou ve stupnici mollové o týž intervall blíže pošinuty k tonu základnímu, čímž jich odlehlost od tonu tohoto jest *menší*; proto se zovou *malá* tercie, *malá* sexta a *malá* septima. Jaký tento intervall jest, vypočítáme z původního intervallu stupnice tvrdé a zmenšeného stupnice měkké, jakožto

$$\frac{10}{9} : \frac{16}{15} = \frac{25}{24},$$

kterýžto nový intervall přistupuje k hořejším třem již uvedeným.

Dle toho máme ve stupnici diatonické čtyři intervally, jichž jména jsou:

velký celý ton $\frac{9}{8}$,

malý celý ton $\frac{10}{9}$,

velký půlton $\frac{16}{15}$,

malý půlton $\frac{25}{24}$.

Zároveň vychází pro poměr velkého a malého celého tonu hodnota

$$\frac{9}{8} : \frac{10}{9} = \frac{81}{80}.$$

Intervall tento zove se *komma**); v hudbě praktické bývá vhodnou

*) z řeckého κόπτω udeřiti, tlouci, odtud κόμμα, -ατος τό ráz a také jeho stopa, značka.

jednotkou intervallovou, kteréž se ještě šetřívá. Jinak ovšem není intervall tento nejmenším, který ucho hudebně cvičené dovede ještě (bez pomůcek) rozeznati, ač zase na více než třetinu neb nanejvýše pětinu kommatu citlivost ani sluchu nejjemnějšího nejde.

Intervall malého celého tonu lze rozložiti na velký a malý půlton; intervall velkého celého tonu má v rozkladu tomto o komma více; platí tu identity:

$$\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24},$$

$$\frac{9}{8} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{81}{80}.$$

Převedeme-li ještě veliký půlton na malý, zavedouce intervall obou, dle vztahu

$$\frac{16}{15} = \frac{25}{24} \cdot \frac{128}{125},$$

obdržíme ony identity ve tvaru

$$\frac{10}{9} = \frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{128}{125},$$

$$\frac{9}{8} = \frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}.$$

Rozkladů takových budeme později často užívati.

Jak jsme již dříve poznamenali, jest záhodno užívati vedle intervallů a relativních výšek *číselných* též intervally a relativní výšky *logarithmické*. Dlužno pak rozhodnouti o tom, jaké logarithmy k cíli tomu jest voliti, tak aby zájmu přesnosti i jednoduchosti zároveň bylo šetřeno.

O tom, že jsou logarithmy při výpočtech různých stupnic výhodné, není mezi autory žádného sporu; každý na výhodu tuto poukáže, ale vskutku jí jen málo užívá. Příčinou toho jest, že se volí logarithmy sedmimístné, kteréž ovšem, jsouce množstvím cifer nepřehledné, spíše odstrašují než vábí. Lze však snadno ukázati, že volba tolikaciferních logarithmů je zcela zbytečnou. Intervall kommatu činí totiž logarithmicky

$$\log \frac{81}{80} = 0{\cdot}0053950.$$

Bylo řečeno, že i sluchem nejjemnějším nelze (bez pomůcek na př. rázů) zjistiti více než na nejvýše pětinu kommatu; tato obnáší

$$\frac{1}{5} \log \frac{81}{80} = 0{\cdot}0010790.$$

Přísluší tudíž tomuto nejmenšímu intervallu v logarithmu jednička *třetího místa*; to znamená, že čtvrté místo má ještě své odůvodnění, aby se jím korrigovalo místo třetí, že však páté a dokonce šesté a sedmé místo nemá pro rozdíly sluchové žádného významu. Dle toho by logarithmy čtyrmístné úplně postačily. Jenom z důvodů početních, aby difference mezi logarithmickými výškami vycházely přesněji, jest v následujících úvahách užíváno logarithmů *pětimístných*. Hudebně má však význam na nejvýše místo čtvrté a to jen ke korrekci místa třetího.

Basis 10 obyčejných (briggických) logarithmů není ovšem pro účely, o něž zde jde, vhodnou; vychází pro oktavu, kterou se zakončuje serie tonů, jistý hudební celek tvořících, číslo neokrouhlé, nikterak onen celek nenaznačující. Proto navrhl *Leonhard Euler* (1729, Tentamen novae theoriae musicae), aby se výšky logarithmické udávaly pro basis = 2. Pak by logarithmická výška oktavy byla = 1, což by proti číslu 0·30103 mělo rozhodnou výhodu. Není pochybnosti, kdyby existovaly tabulky logarithmické přepočítané pro basis 2, že by se jich v theorii hudby jistě užívalo na místě logarithmů briggických. Takto jest však nutno, briggické přepočítávati. Označíme-li symbolem „log" logarihmy obyčejné briggické, pro basis = 10, a symbolem „Log" logarithmy pro basis = 2, platí rovnice

$$\frac{Log\, x}{Log\, 2} = \frac{log\, x}{log\, 2}$$

vyjadřující, že logarithmy různých soustav jsou vespolek úměrné. Jest však

$$Log\, 2 = 1,$$

tudíž

$$Log\, x = \frac{log\, x}{log\, 2}.$$

Logarithmy briggické intervallů x přepočítáme tudíž na logarithmy pro basis 2, když je dělíme logarithmem briggickým právě této basis. Ostatně lze věc pojmouti ještě jednodušeji. Tím, že dělíme logarithmus jistého intervallu x logarithmem oktavy = 2, přepočítáváme vlastně intervall tento na jednotku určenou právě tímto intervallem oktavovým. Proto můžeme výraz $\frac{log\, x}{log\, 2}$ označiti jako logarithmický intervall vyjádřený v logarithmickém intervallu oktavovém. Tím způsobem obdržíme čísla, která jsou v přímém vztahu k oktavě jakožto hudebnímu celku. Rozestavení jednotlivých tonů v tomto celku lze pak z čísel bezprostředně poznati.

Co se konečně týče přesnosti v *číslech*, jimiž vyjadřujeme výšky a intervally, uvažme, že pětina kommatu značí číselně intervall

$$1{\cdot}00249,$$

tak že jednička třetího místa decimalního znamená desetinu kommatu. Z toho plyne, že stačí úplně, když se číselné výšky a intervally udávají na tři neb nejvýše, v souhlasu s pětimístnými logarithmy, na čtyři místa decimalní.

Sestavme pro stupnici diatonickou relativní výšky (n) a intervally sousedních tonů $\left(\frac{n'}{n}\right)$ *číselné* i *logarithmické* ($log\, n$ a $\Delta\, log\, n$); při těchto užívejme logarithmů obyčejných, briggických, ale vedle toho přepočítejme je též na *intervall oktavový* jako *jednotku*, tím, že je dělíme logarithmem briggickým ($log\, 2$) tohoto intervallu oktavového $\left(\frac{2}{1}\right)$. Tak obdržíme následující tabulku pro stupnici tvrdou.

Stupnice diatonická tvrdá.

Stupeň	n	$log\, n$	$\frac{log\, n}{log\, 2}$	$\frac{n'}{n}$	$\Delta\, log\, n$	$\frac{\Delta\, log\, n}{log\, 2}$	Intervall
I	1	0·00000	0·00000				
				$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16992	velký celý ton
II	$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16992				
				$\frac{10}{9}$	0·04576	0·15200	malý celý ton
III	$\frac{5}{4}$	0·09691	0·32192				
				$\frac{16}{15}$	0·02803	0·09311	velký půlton
IV	$\frac{4}{3}$	0·12494	0·41503				
				$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16993	velký celý ton
V	$\frac{3}{2}$	0·17609	0·58496				
				$\frac{10}{9}$	0·04576	0·15200	malý celý ton
VI	$\frac{5}{3}$	0·22185	0·73696				
				$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16993	velký celý ton
VII	$\frac{15}{8}$	0·27300	0·90689				
				$\frac{16}{15}$	0·02803	0·09311	velký půlton
VIII	2	0·30103	1·00000				

Vzhledem ke stupnici měkké stačilo by vytknouti jen ty stupně, jimiž se stupnice tato od tvrdé odchyluje. Abychom však zachovali dobrý přehled celkový, upravíme pro měkkou stupnici tabulku zcela podobně, jako pro stupnici tvrdou.

Stupnice diatonická měkká.

Stupeň	n	$log\, n$	$\frac{log\, n}{log\, 2}$	$\frac{n'}{n}$	$\Delta\, log\, n$	$\frac{\Delta\, log\, n}{log\, 2}$	Intervall
I	1	0·00000	0·00000				
				$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16992	velký celý ton
II	$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16992				
				$\frac{16}{15}$	0·02803	0·09311	velký půlton
III	$\frac{6}{5}$	0·07918	0·26303				
				$\frac{10}{9}$	0·04576	0·15200	malý celý ton
IV	$\frac{4}{3}$	0·12494	0·41503				
				$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16993	velký celý ton
V	$\frac{3}{2}$	0·17609	0·58496				
				$\frac{16}{15}$	0·02803	0·09311	velký půlton
VI	$\frac{8}{5}$	0·20412	0·67807				
				$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16993	velký celý ton
VII	$\frac{9}{5}$	0·25527	0·84800				
				$\frac{10}{9}$	0·04576	0·15200	malý celý ton
VIII	2	0·30103	1·00000				

K těmto dvěma tabulkám připojme následující pro intervally, jichž budoucně stále budeme užívati.

Přehled intervallů stupnice diatonické.

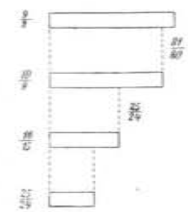
Intervall	n	$log\, n$	$\frac{log\, n}{log\, 2}$
velký celý ton . . .	$\frac{9}{8}$	0·05115	0·16992
malý celý ton . . .	$\frac{10}{9}$	0·04576	0·15200
velký půlton	$\frac{16}{15}$	0·02803	0·09311
malý půlton	$\frac{25}{24}$	0·01773	0·05889
komma	$\frac{81}{80}$	0·00539	0·01792
inter. v. a m. půltonu	$\frac{128}{125}$	0·01030	0·03422

Číslům sloupce $\frac{log\, n}{log\, 2}$ dlužno tedy rozuměti takto: Pokládáme-li intervall primy a oktavy za hudební jednotku, činí intervall na př. kvinty 58·5 %, kvarty 41·5 % atd. Podobně činí intervall na př. velkého celého tonu 17·0 %, malého celého tonu 15·2 %, tudíž kommatu 1·8 % atd. Čísla tato bývají, jak později se ukáže, v mnohých případech výhodná. Tak zejména ke grafickému znázornění výšek a intervallů. Toto jest provedeno v diagrammech obr. 63. a 64. V obou jsou čárkami naznačeny jako by klavesy, jež by svou odlehlostí udávaly relativní výšky a intervally tonů.

Obr. 63. Diatonická stupnice durová a mollová dle intervallů logarithmických.

Intervall dvou tonů jeví se buď *melodicky*, hrají-li se oba tony po sobě, nebo *harmonicky*, znívají-li současně *). V hudbě rozlišují se požadavky melodické a harmonické. S tím souvisí, že se stupnice mollová mnohdy uvádí v jistých přeměnách.

Každou stupnici lze hráti buď vzestupně nebo sestupně. Stupnice durová se obrácením tímto nemění; hraje se sestupně právě tak jako vzestupně. Jinak při stupnici mollové. Původní měkká stupnice, zvaná *aeolská*, nehodí se malou svojí septimou pro harmonické souzvuky, které žádají velkou septimu; když se tedy místo malé septimy položí velká, vznikne varianta stupnice mollové, tak zvaná měkká stupnice *harmonická*. Ale pak se intervall od malé sexty $\left(\frac{8}{5}\right)$ k velké septimě $\left(\frac{16}{15}\right)$ zvýší na $\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24}$, tak že činí velký celý ton a malý půlton. Tím stává se přechod od malé sexty k velké septimě nezpěvným, nemelodickým; proto se k vyrovnání přijímá též zvýšená sexta a tak vzniká nová



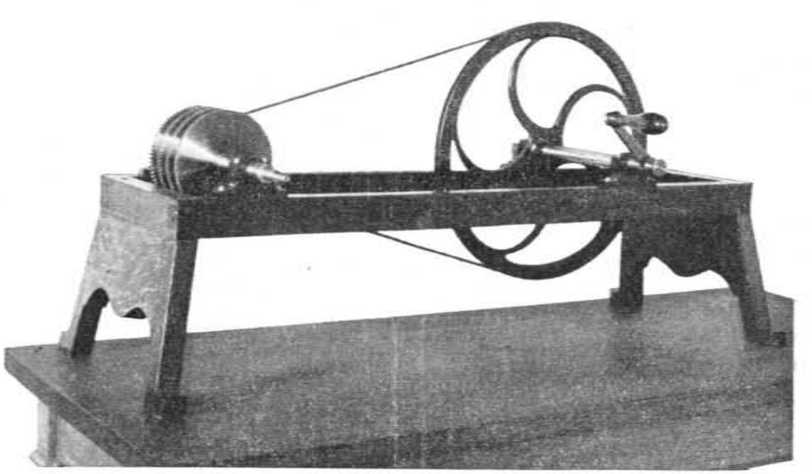
Obr. 64. Intervally stupnice diatonické.

*) z řeckého: μελ-ῳδέω zpívám, μελ-ῳδία ἡ zpěv, a ἁρμόζω spojovati, ἁρμονία ἡ spojení, zejména ve správném poměru, v hudbě ve smyslu libozvuku.

varianta stupnice mollové, tak zvaná měkká stupnice *melodická*; hrává se jen vzestupně, lišíc se pak od durové jenom malou tercií; sestupně připojuje se k ní stupnice aeolská.

§ 44. **Sireny.**

Postup tonů, jak jest stanoven stupnicí diatonickou, jakož i jednotlivé intervally lze akusticky ukázati a theoreticky studovati apparaty, jež *sirenami* zoveme. Bylo jich během doby sestrojeno několik druhů, o nichž pojednáme nikoli chronologicky, nýbrž dle jich důležitosti, o méně dokonalých napřed, o dokonalejších později. Fysikalně jsou tím zajímavy, že při nich ton aneb všeobecněji zvuk nevzniká chvěním pružného tělesa, jakož jinak bývá pravidlem, nýbrž nárazy pravidelně se opakujícími. Právě tím vystupuje u siren nejpatrněji *periodicita* ke vzniku tonu potřebná a jeví se proto nejzřetelněji souvislost periody čili kmitočtu s výškou tonu. Mají-li pak sireny potřebná k tomu zařízení, lze tento kmitočet pro jistý daný ton na základě unisonity přímo určiti.



Obr. 65. Sirena Savartova (R. Koenig).

Sirena Savartova *) (1830), v úpravě nynější (R. Koenig) v obr. 65. znázorněná, skládá se z několika mosazných desek,

*) *Savart Felix* (1791—1841), lékař a fysik, posledně na Collège de France, člen Pařížské akademie věd, vynikl četnými pracemi akustickými; pojednání k sireně se vztahující jsou obsažena v Ann. chim. phys. XLIV. 1830, též XLVII. 1831.

umístěných na společné, vodorovné ose, položené středem desek k jich rovinám kolmo; vhodným mechanismem, na př. převodem od většího kola, lze tudíž všechny desky stejnou úhlovou rychlostí otáčeti. Na obvodu desek jsou vysekány a vypilovány zuby, na různých deskách v počtu různém, na téže desce však tak, aby jeden zub od druhého stejně byl vzdálen (aequidistantně). Když se k zubům přidrží lístek z kartonu neb z plechu a začne se deskami otáčeti, lze z počátku, při velmi malé úhlové rychlosti, jednotlivé nárazy zubů na lístek dobře rozeznávati; stoupá-li však úhlová rychlost, splývají nárazy jeden s druhým a povstává nový dojem spojitý, dojem tonu; jeho výška stoupá, když se otáčí vždy rychleji a rychleji; nepravidelnosti při otáčení jeví se citlivě kolísáním výšky tonové. Drží-li se dva lístky současně proti dvěma deskám, při nichž počet zubů jest v jistém jednoduchém poměru, lze dobře slyšeti, jak intervall obou tonů následkem stálosti relativní výšky i při stoupající neb klesající rychlosti úhlové zůstává nezměněným. Při sireně, v obrazci 64. znázorněné, činí počet zubů u čtyř desek

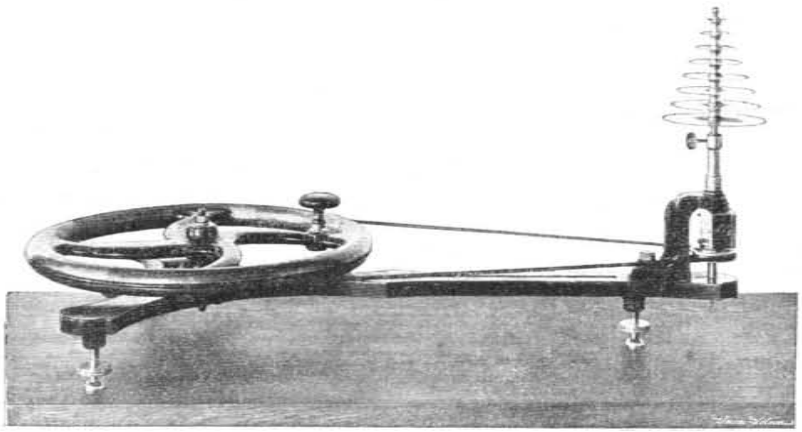
$$80,\ 100,\ 120,\ 160,$$

kterýžto počet se dá vyjádřiti jednoduchými čísly poměrnými

$$4 : 5 : 6 : 8.$$

Lze tedy ukázati intervally velké tercie $\left(\frac{5}{4}\right)$, malé tercie $\left(\frac{6}{5}\right)$, kvarty $\left(\frac{8}{6} = \frac{4}{3}\right)$, kvinty $\left(\frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$, malé sexty $\left(\frac{8}{5}\right)$ a oktavy $\left(\frac{8}{4} = 2\right)$. Tony jsou silnější neb slabší, dle prudkosti nárazů, při tom dosti čisté, ač-li jisté podmínky jsou splněny.

Má-li se touto sirenou určiti též kmitočet daného tonu, dlužno zaříditi otáčení na jistou úhlovou rychlost, kterou by bylo lze stanoviti a dlužno tuto rychlost udržovati co možná konstantní; při známém počtu zubů lze pak počet nárazů a tím i kmitočet vypočísti. Počet otoček sireny lze určiti zvláštním indikatorem, tomu podobným, jakého se užívá u stroje centrifugalního; přístroj v obr. 65. znázorněný nemá tohoto indikatoru; proto slouží spíše jen k účelům kvalitativním. V obr. 66. jest viděti, jak lze sirenu Savartovu (o osmi deskách) spojiti se strojem centrifugalním, u něhož indikator otoček vždy bývá; nutno pak jen co možná rovnoměrně točiti, aby se ton na jisté výšce udržoval; variace (positivní i negativní) lze eliminovati v hodnotách průměrných. Pokus jest jednoduchý a pro účely vyučování poučný.



Obr 66. Sirena Savartova na stroji centrifugalním.

Při sireně Savartově nastává někdy úkaz při jiných sirenách nemožný, že ton, který slyšíme, jest jiný, než který se vypočítá z daného počtu zubů a z indikovaného počtu otoček za sekundu. Lístek kartonový nebo plíšek kovový přichází totiž nárazem na zuby sám ve vibraci; odráží se a vrací k zubům sireny teprv po uplynutí jisté ovšem velmi kratinké doby. Otáčí-li se však sirena značnou rychlostí, může se státi, že mezi touto dobou jeden zub nebo i dva i tři přeběhly, na kteréž tudíž lístek, vrátě se, nenaráží. Následkem toho slyšíme *spodní tony harmonické*, dolejší oktavu $\left(\frac{1}{2}\right)$ neb duodecimu $\left(\frac{1}{3}\right)$ atd. Bylo by pak omylem výšku tonu takového obvyklým způsobem z dat sireny počítati. Zejména při tonech velmi vysokých dlužno dbáti jisté opatrnosti, aby výška tonu vypočítaná se shodovala s výškou tonu, který slyšíme.

Aby se při pokusu lístky neřezaly, mají desky sireny býti dostatečně tlusté a zuby nikoli ostré, nýbrž zaoblené. Při sireně obr. 65. jsou desky mosazné 5 *mm* silné, zuby jsou řezány radialně a pak v úhlu asi 45^0 připilovány do kulata. Otáčí-li se sirenou dostatečně rychle, lze velmi dobře při téže desce obdržeti ton vlastní, nebo jeho harmonické tony *spodní* dle toho, jak se drží kartonový lístek, který na zuby naráží; drží-li se na krátko, naráží na všechny zuby; drží-li se v délce poněkud větší, vibruje nárazy sám a při tom přeskakuje jeden neb po případě i dva zuby neb i více. Při tom jsou spodní tony, dolejší oktava, dolejší duodecima, velmi čisté, jako ton původní, a jich záměna způsobí se při určité rychlosti otáčecí jen tím, že se lístek poněkud jinak v ruce drží.

Malé sireny Savartovy lze připojiti k setrvačníkům; v „Mechanice", pag. 379, obr. 182., jsou na levo dvě takové sireny znázorněny. Když se roztočí setrvačník prudce, a přidrží k zubům kartonový lístek, jest slyšeti zvuky vysoké, dosti pronikavé, kteréž při ubývající úhlové rychlosti setrvačníku ponenáhlu ve výšce své klesají. Poněvadž pak jsou zuby malé a rychlost otáčení značná, přeskočí zde ton zvláště snadno, dle toho, jak se lístek kartonový proti zubům drží, do spodních tonů harmonických.

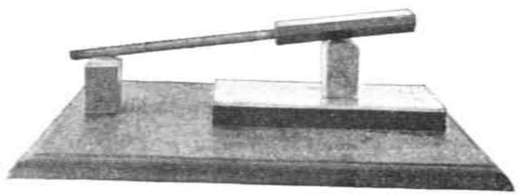
Savart zkoumal svou sirenou, jaké jsou meze pro pocifování tonů nejvyšších. Pro tony nejnižší zařídil sirenu zvláštní, při níž dvě dlouhé ploché rotující tyče procházely štěrbinami a zde průchodem způsobovaly nárazy vzduchové; otázka však, o niž šlo, touto sirenou uspokojivě rozřešena nebyla.

Historicky jest zajímavo uvésti, že již *G. Galilei* znal sirenu tuto v principu; studoval tony dle nárazů na vroubky mincí. Vlastním vynálezcem sireny jest však *Robert Hooke* (1681), jenž dokonce různou šířkou zubů napodobil hlas lidský (Birch, History of the Royal Society, 1757).

Přístroj Trevelyanův. Na tomto místě budiž zmínka učiněna o přístroji, při němž podobně jako u sireny Savartovy nárazy dostatečně rychle po sobě následujícími vzniká zvuk. V lednu roku 1805 tavil *Schwarz*, inspektor na huti Seigerhütte*), stříbro; položiv pak kus stříbra, které právě ztuhlo, aby rychleji se zchladilo, na železnou kovadlinu, zpozoroval, že stříbro na kovadlině začalo zvučeti. Úkaz zjistil a ve svých annalech popsal (1806) *Gilbert*. Podobné pozorování učinil v roce 1829 *Arthur Trevelyan* v Edinburku a sledoval je podrobněji; horká tyč železná neb měděná i zinková, položená na špalek olověný, se rozzvučela. Úkaz studovali blíže též *Faraday*, (*Forbes*), *Savart* a *Tyndall*. Ukázalo se, že olovo, jako podklad, není právě nutné, — také jiné kovy, jako na př. cín, jsou možné — ale jest nejvýhodnější. Poněvadž se zjev (mylně) uváděl ve spojení s proudy vzduchovými, konstatoval *Leslie*, že zvučení trvá pod recipientem vývěvy, i když se vzduch vyčerpá. Vysvětlení, jež hned ponejprv podal *Trevelyan* a *Faraday*, ukázalo se býti správným; základ zjevu jest thermický; horký kov, spočívající jednou hranou na olovu, dostává roztahujícím se olovem náraz, kterým se odstrčí na druhou hranu, odkud podobným účinkem se vrací na prvou; oscilluje tudíž na obou hranách, a narážeje vydává zvuk. Olovo

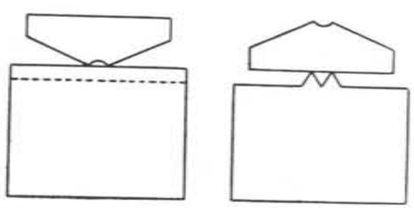
*) Severně od města Hettstedtu (v pruském vládním okresu merseburském), v jehož okolí se ode dávna doluje měď a stříbro.

hodí se k pokusu nejlépe, poněvadž má velký koefficient roztažlivosti ($29 . 10^{-6}$) a malou vodivost tepelnou (jen 8% vodivosti stříbra).



Obr. 67. Přístroj Trevelyanův.

Přístroj, kterým se nyní pokus ukazuje, jest znázorněn v obr. 67. Hlavní částí jest hranol mosazný, na jedné straně tyčí končící, nahoře plochý, dole podélnou rýhou opatřený, jak z průřezu v obr. 68. lépe patrno. Touto rýhou vznikají dvě hrany, a těmi klade se hranol na špalík olověný, tak aby těžiště hranolu bylo v blízkosti této opory, poněkud na straně tyče. Před pokusem položí se hranol, plochou dolů, na kruh železného stojanu a rozpálí se plamenníkem Bunsenovým asi tak značně, až kousek cínu, do rýhy položený, začne se taviti. Zároveň



Obr. 68. Průřez přístroje Trevelyanova.

se očistí špalík olověný na své hořejší ploše, kde má hranol svými rýhami spočinouti; nejlépe, když se vrstva kysličníku olova, který se vždy na povrchu čistého kovu tvoří, nožem seškrabe. Tento špalík položí se pak na resonanční skřínku a k opoře hranolu připraví zároveň druhý špalík, který má též rýhu, do níž se vkládá tyč hranolu. Když se pak hranol, dostatečně rozpálený, způsobem popsaným na oba špalíky olověné položí, postačí malý postranní náraz a hranol začne zvučeti; ve zvuku lze velmi dobře ton hlavní a tony vyšší rozeznávati. Malé přitlačení hranolu způsobuje zvýšení zvuku. Pokus lze též obrátiti. Onen druhý olověný špalík, který sám má rýhu se

dvěma hranami, položí se na resonanční podložku a prvý špalík vezme se za oporu. Znění nastane, když se pak rozpálený hranol položí svou rovinou na hrany olověné. Pokus v tomto obrácení daří se právě tak dobře jako ve způsobu prvém; i zde vznikne zvuk, dosti silný, o mnohých tonech. K lepšímu porozumění obou způsobů experimentování slouží nákres průřezový, obr. 68., dle skutečnosti (v měřítku $\frac{1}{3}$) provedený.

*Sirena Seebeckova**) (1843) jest v mnohém ohledu výhodnější a pohodlnější než Savartova. Na místě zubů jsou zde malé kulaté otvory, v kruhu aequidistantně do mosazné desky vyvrtané. Proti otvorům žene se trubičkou ke konci zúženou, obyčejně mosaznou, vzduch; tento proudě proti desce vyráží ven, kdykoli přejde otvor; tím způsobují se opět pravidelné nárazy ve vzduchu, jimiž vzniká ton. Mají-li se takovou sirenou vzbuditi dva, tři, čtyři atd. tony, netřeba tolikéž desek, poněvadž lze v soustředných kruzích na jedné a téže desce několik řad aequidistantních otvorů umístiti. Tak stává se sirena tato velmi jednoduše *mnohozvučnou, polyfonní***). Užije-li se tedy dvou trubiček, jimiž se proti otvorům žene vzduch, lze zde snadno stálost intervallů studovati při rostoucí nebo klesající úhlové rychlosti otáčení. Za týchž pak podmínek jako u sireny předešlé lze též absolutní výšku tonu určiti.

Sirena Seebeckova vyniká nad Savartovu již jednoduchostí úpravy; více však ještě tím, že prouděním vzduchu proti otvorům se nezpůsobuje žádná tak znatelná překážka pohybu, jako tomu jest při narážení lístků na zuby; může tudíž konstantní rychlost otáčecí býti spíše zachována; také tony jsou zde čistější. Koná tedy sirena Seebeckova zejména pro účely vyučování — kde se doporučuje též svou lácí — velmi dobré služby.

Pro tyto účely lze s velkou výhodou užívati malého elektromotoru (obr. 69.), k němuž se jako sirena připojí deska mosazná nebo ještě lépe kartonová, kteráž, jsouc lehkou, nespotřebuje k roztáčení velké elektrické práce. Úhlová rychlost mění se v jistých mezích pohodlně a citlivě rheostatem, vepjatým do proudového kruhu, v němž se vedle elektromotoru a klíče nalézá batterie několika akkumulatorů (nebo vhodných hydroelementů). Lze pak sluchem demonstrovati velmi pěkně regulaci proudu rheostatem; při určitém proudu udržuje se ton velmi dobře na určité výšce. Desk z kartonů lze upraviti několik. Jedna se určí pro diatonickou stupnici durovou. Nejmenší čísla, stanovící počet

*) *Seebeck Ludvík* (1805—1849), professor fysiky, posledně na universitě Lipské. Jiný jest *Tomáš Jan Seebeck* (1770 - 1831), objevitel thermoelektřiny (1822).

**) πολύς mnohý, φωνή ἡ zvuk.

otvorů na osmi soustředných kruzích, jsou zde tato:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
24	27	30	32	36	40	45	48.

Počet tento lze u desky sirenové zdvojnásobiti, tak že nejvýhodnější čísla jsou

48	54	60	64	72	80	90	96.

Obr. 69. Sirena Seebeckova na elektromotoru.

Druhá deska určí se pro stupnici diatonickou mollovou. Nejmenší čísla, stanovící počet otvorů pro osm soustředných kruhů, jsou zde tato:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
120	135	144	160	180	192	216	240.

Pro desky mírných rozměrů jsou čísla tato příliš veliká; tolik otvorů nedá se na desce umístiti. Lze však bez velké újmy věcné tento počet na čtvrtinu zmenšiti, tak že na místo přesných hořejších čísel nastoupí následující:

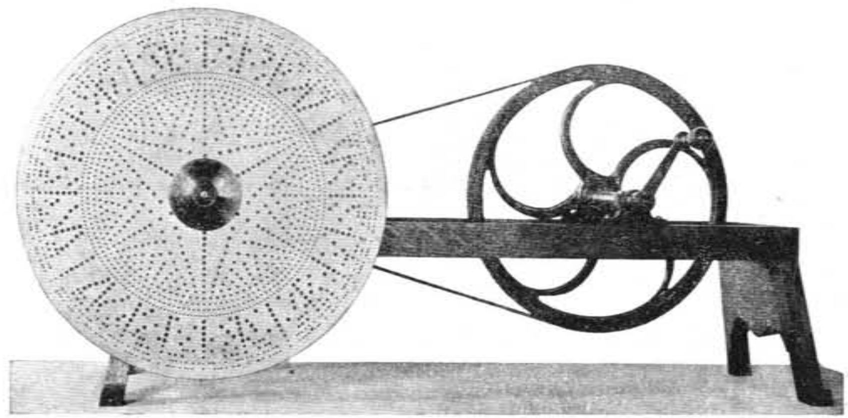
30	(34)	36	40	45	48	54	60.

Úpravou touto utrpí poněkud sekunda, pro kterou se béře číslo 34·0 na místo 33·75. Logarithmy těchto čísel jsou 1·5315 a 1·5283,

logarithmická difference tudíž 0·0032, což činí něco více než půl kommatu; o tolik jest tedy ona sekunda vyšší. Další desky zařídí se promtervally: velký a malý celý ton, velký a malý půlton; tím se ukáže akusticky velmi pěkně a přesně též intervall kommatu mezi velkým a malým celým tonem, jakož i intervall velkého a malého půltonu, což žádným jiným způsobem (ani ne polychordem) nelze v té přesnosti a pohodlnosti provésti. Vhodná čísla jsou zde

$$\left(\frac{9}{8}\right)\left\{\begin{array}{l}72\\80\\81\end{array}\right. \begin{array}{l}\left.\right\}\left(\frac{10}{9}\right)\\ \left.\right\}\left(\frac{81}{80}\right)\end{array} \quad \text{a} \quad \left(\frac{16}{15}\right)\left\{\begin{array}{l}120\\125\\128\end{array}\right. \begin{array}{l}\left.\right\}\left(\frac{25}{24}\right)\\ \left.\right\}\left(\frac{128}{125}\right)\end{array}$$

Sirenu Seebeckovu zhotovuje *R. Koenig* v provedení velmi dokonalém, s počitadlem, klaviaturou a motorem hodinovým. O zdokonalení sireny zde popsané má zásluhu též *Opelt* *), jehož jméno dlužno vedle Seebeckova uváděti.



Obr. 70. Polyfonní sirena Opeltova.

V obrazci 70. znázorněna jest velká sirena *Opeltova*; hotoví se buď ze silného kartonu nebo z mosazi (R. Koenig). Sirena dává tony: primu a kvintu, pak v následující oktavě primu, velkou tercii a kvintu, což se opakuje ještě v oktavě druhé,

*) *Bedřich Vil. Opelt* (1794—1863), finanční rada, žil v Drážďanech, zanášel se též otázkami akustickými; sirenu svou popisuje v díle: Všeob. theorie hudby atd. 1852. V pojednání však Seebeckově O sireně (Pogg. Ann. 60, 1843) jmenuje se Opelt již jako původce sireny té, tak že by její vynalezení připadlo do roku dřívějšího než jest datum tohoto spisu.

třetí a čtvrté, načež se řada tonů zakončí primou oktavy páté. Počet otvorů v soustředných kruzích jest tento:

6, 9; 12, 15, 18; 24, 30, 36; 48, 60, 72; 96, 120, 144; 192

Až dotud jsou otvory v každém kruhu stejně odlehlé (aequidistantní). Na to následuje pět kruhů, v nichž otvory nejsou stejně odlehlé; v každém však jsou jako na sebe položeny dvě řady otvorů stejně odlehlých; jednotlivá řada má svou periodu vlastní a dala by tudíž určitý ton; proto jest výsledná perioda, v níž otvory jsou uspořádány a v níž pak též vzduchové nárazy po sobě následují, z těchto dvou jednoduchých superposicí složená. Zajímavo jest však, že ucho ze složené periody ony dvě jednoduché *rozeznává*; slyšíme *dvojzvuky*, totiž primu, k ní pak velkou tercii, kvartu, kvintu, sextu a malou harmonickou septimu; zvláště poslední dvojzvuk příslušný intervallu v hudbě neužívanému působí dojmem nikoli nelibým, ale nezvyklým. Počet otvorů jest následující:

$$[24,\ 30],\ [24,\ 32],\ [24,\ 36],\ [24,\ 40],\ [24,\ 42]$$
$$\left(\tfrac{5}{4}\right)\quad \left(\tfrac{4}{3}\right)\quad \left(\tfrac{3}{2}\right)\quad \left(\tfrac{5}{3}\right)\quad \left(\tfrac{7}{4}\right).$$

Další čtyři řady dávají periodu ještě komplikovanější, ze *tří* jednoduchých superposicí složenou; sluchem však se výsledná perioda opět rozkládá tak, že slyšíme *trojzvuky*. Počet otvorů jest následující:

[32, 40, 48], [30, 36, 48], [64, 80, 96], [60, 72, 96].

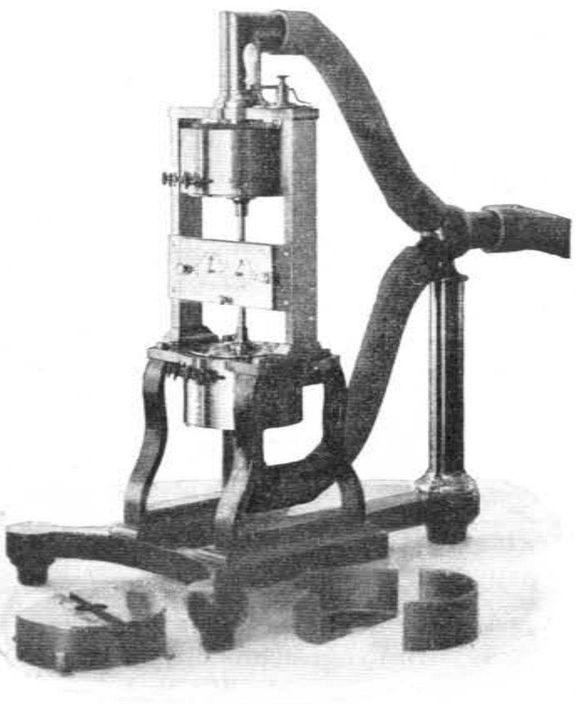
Třetí a čtvrtá řada dává tedy trojzvuky tytéž jako řada prvá a druhá, jenom v poloze o oktavu vyšší. K otázce, jaké tyto trojzvuky jsou, vrátíme se později.

Harmonické pravidelnosti ve všech udaných počtech otvorů jeví se též v geometrické pravidelnosti hvězdovitého obrazce, jakýž sirena představuje. Kdyby této pravidelnosti nebylo, kdyby tedy otvory v některých soustředných kruzích byly umístěny zcela *nepravidelně*, bez jakékoli periodicity jednoduché neb složené, vznikly by zde jen šumoty nikoli zvuky.

Sirena Cagniard-Latourova *), nejstarší ze všech, byla původně zařízena pro jediný zvuk, tedy jako jednozvučná (monofonní), doznala během doby mnoho změn v úpravě, stala se

*) *Cagniard-Latour*, též *de la Tour*, baron (1776—1859), inženýr-geograf, později attaché státní rady a ministeria vnitra v Paříži, člen akademie věd; první pojednání o sireně obsaženo v Ann. chim. phys. XII. 1819.

mnohozvučnou (polyfonní) pro čtyři zvuky úpravou, kterou jí dal *Dove* *) (1851) a konečně pro osm zvuků (sedm rozdílných) úpravou nejdokonalejší, jak ji zavedl *v. Helmholtz* **) a jak ji v provedení *R. Koenigově* znázorňuje obr. 71.



Obr. 71. Sirena Dove-Helmholtzova.

V podstatě jest sirena tato stejnou jako Seebeckova, kterou jsme již popsali, a která dle oné starší byla sestrojena. V původní své úpravě měla jediný mosazný kotouč, otáčivý kolem svislé, středem kotouče kolmo položené osy. Na kotouči byla v kruhu, jehož střed ležel v ose otáčecí, řada stejně odlehlých otvorů jako při sireně Seebeckově; vzduch však hnal se proti kotouči nikoli z jediného jen otvoru, nýbrž současně z tolika,

*) *Dove*, Jindř. Vil. (1803—1879), slavný meteorolog a fysik, muž veliké činnosti vědecké; viz Pogg. Ann. 82., 1851. Jeho sirenu sestrojil berlinský mechanik Sauerwald; počet otvorů ve čtyřech řadách byl 8, 10, 12, 20.

**) *Helmholtz* v., Herrmann L., slavný fysik a fysiolog (1821—1894). Sirenu jeho sestrojil též mechanik Sauerwald.

kolik otvorů bylo na kotouči; proto byla proti vodorovné desce sirenní umístěna zcela blízko druhá deska pevná, činící vrchní část komory vzduchové, a v této druhé desce bylo v kruhu téhož poloměru tolik otvorů vyvrtáno, kolik jich měla deska pohyblivá; následkem toho přicházely při otáčení desky sirenní otvory přímo nad sebe, tak že vzduch vyrážel *všemi otvory najednou.* Proto jest zvuk u této sireny mohutný. Vedlejší věcí bylo zařízení sireny k tomu směřující, aby sirena týmž proudem vzduchovým, kterým se rozezvučela, také se otáčela; k cíli tomu byly otvory v obou deskách vrtány šikmo k rovině desky, pod úhlem asi 45°, v desce pohyblivé opačně než v desce pevné; následkem toho vzduch naráželje na stěny otvorů hořejšího kotouče tento sám roztáčel. A jako proud vzduchu, působil též proud vodní; sirena zvučí tedy též vodou, a když nádoba, v níž jest postavena, plní se vodou, zvučí též pod vodou*).

Dove zařídil otáčivou a i pevnou desku pro čtyři zvuky a připojil též zařízení počítací, kterým se počet otoček desky za jistou dobu dal určiti. Zařízením polyfonním bylo pak nutno upraviti sirenu tak, aby kterýkoli neb kterékoli ze čtyř zvuků sireny zněly. K cíli tomu byly uvnitř komory vzduchové přímo před pevnou deskou umístěny kruhové soustředné proužky mosazné, jež se daly tyčinkou na venek vyčnívající, pootočiti; na proužkách byly vrtány otvory souhlasně jako na příslušné řadě desky pevné; lze tedy u oněch kruhových proužků otvory na otvory vložiti, tak že vzduch proudí a příslušný zvuk zazní, anebo pootočením, kdy otvory se kryjí, přístup vzduchu zameziti, podobně, jak se při střídání (mutování) hlasů u varhan děje tahy rejstříkovými (mutacemi).

Ještě dále pokročil *Helmholtz*, zařídiv sirenu dvojitou; na společné svislé ose jsou kolmo umístěny kotouče dva; počitadlo jest uprostřed; komory vzduchové jsou též dvě, při čemž lze však, když již sirena zní, hořejší komoru zvlášť ještě otáčeti. Zařízení toto má účel zvláštní, o němž později pojednáme.

Sirenou Dove-Helmholtzovou lze akusticky předvésti četné intervally a studovati zároveň jich souzvuk. Následující přehledná tabulka koná při experimentování dobré služby; při intervallech, jež se mají demonstrovati, jsou otvory hořejší zaznamenány též nahoře, a podobně otvory dolejší zaznamenány dole.

---

*) Odtud pojmenování „sirena" dle mythologických Siren starého věku, dcer boha vodstva Acheloa (odtud Acheloidy).

Sirena Dove-Helmholtzova.

Počet otvorů: 16, 15, 12, 9. / 18, 12, 10, 8.						
Intervally	o poměru	lze způsobiti otvory				
Unisono . . .	1 : 1	12 12				
Oktava	2 : 1	16 8	9 18			
Kvinta	3 : 2	 12 8	12 8	 18 12	12 18	15 10
Kvarta	4 : 3	12 9	9 12	16 12	16 12	
Tercie velká .	5 : 4	 10 8	15 12	15 12		
Sexta velká . .	5 : 3	15 9				
Tercie malá . .	6 : 5	 12 10	12 10	15 18		
Sexta malá . .	8 : 5	16 10				
Sekunda . . .	9 : 8	9 8	16 18			
Septima malá .	9 : 5	 18 10				
Sekunda snížená	10 : 9	9 10				
Septima . . .	15 : 8	15 8				
Půlton velký .	16 : 15	16 15				

Automatické zařízení sireny Cagniard-Latourovy má též své vady; neboť vzduch zvučící poháněje zároveň stroj roztáčí kotouč a způsobuje tudíž stoupání výšky zvukové; následkem toho jest velice nesnadno udržeti zvuk na konstantní výšce. Lze sice poněkud mírniti roztáčení desek, když se množství proudícího vzduchu umenší, na př. stlačením trubice kaučukové, která sirenu spojuje s měchem, anebo zúžením otvorů, jimiž vzduch z komory proudí proti kotouči; avšak tím se zase mění intensita zvuku, což jest rovněž velice na závadu. Jest tedy automatické zařízení sireny vlastně pochybeným. Proto již Helmholtz spojil sirenu se zvláštním motorem; otvory byly pak ovšem vrtány k deskám kolmo. Nejlépe jest kombinovati sirenu s elektromotorem, na př. v úpravě, kterou zavedl *Pellat* *). Takovou sirenou lze pak vskutku velmi přesně určovati dle unisonity absolutní výšky tonů, poněvadž rychlost otáčení lze rheostatem v jistých mezích ovládati.

§ 45. Dvojzvuky ve stupnici diatonické a jich obraty.

Znějí-li ve stupnici diatonické, durové nebo mollové, dva tony zároveň, vzniká *dvojzvuk*. Dle intervallů obou tonů jest dvojzvuk více neb méně dokonalý, jest konsonantní neb dissonantní. Dvojzvuk nejdokonalejší dává *prima* a *prima*, to jest ton s tonem jiným *téže výšky*; souzvuk ten označujeme jako *jednohlas*, *unisono*. Neméně dokonalý jest však dvojzvuk, který dává *prima* a *oktava*. I zde zdá se, jako by oba tony splývaly v jediný, tak že sluch rozdílnost obou ani nepociťuje. Zpívá-li touž melodii hlas mužský a ženský (na př. bass a alt, nebo tenor a sopran), rozeznávají se v poloze hlasu oktavou, ale dojem zpěvu jest takový, jako by byl unisonní. Podobně když v kvartettu komorním hraje touž melodii na př. bass a violoncell; proto se v případě tomto v partituře psává „col basso al unisono", ačkoli to pravé unisono není. Na varhanách spojují se četné hlasy vespolek, které se rozeznávají v poloze oktavové, a zaznívajíce společně činí dojem jednotný. Proto jest oktava jako opakováním primy ve vyšší poloze, proto oktavou stupnice končí a nová začíná. Z dalších dvojzvuků jest velice dokonalým souzvuk *primy* a *kvinty*. Na varhanách připojují se také k hlasům základním jiné, které dávají kvinty v téže oktavě (po případě i v oktavě vyšší). Konečně rovněž velmi dokonalým jest souzvuk *primy* a *kvarty*.

Intervally zde uvedené, *primy*, *oktavy*, *kvinty*, *kvarty* zovou se v hudbě *intervally čisté*.

Jsou-li v mezích oktavy dány dva tony, jichž intervall jest x, a přeloží-li se buď ton spodní do oktavy vyšší, nebo ton svrchní do oktavy nižší, vzniká intervall nový y, kterým se původní doplňuje na oktavu, dle rovnice

$$x \cdot y = 2.$$

*) Journal de physique 4. 1895, pag. 367. Sirenu zhotovuje firma E. Ducretet v Paříži.

Pravíme, že přeložením jednoho z obou tonů do oktavy utvořen byl *obrat* (převrat), a nazýváme intervall y *komplementarným* k intervallu x.

Věc jest samozřejmou: neboť ton na svém místě ponechaný dělí intervall oktavový $= 2$ mezi tonem původním a přeloženým na intervally dva x, y, které tudíž dohromady intervall oktavový tvoří; tuto komplementarnost obou vyjadřuje právě rovnice v číslech

$$x \cdot y = 2,$$

anebo v logarithmech

$$log\, x + log\, y = log\, 2.$$

Kdybychom dle návrhu Eulerova užívali logarithmů pro basis $= 2$, bylo by

$$Log\, x + Log\, y = 1,$$

kterážto rovnice by komplementarné intervally x, y zřejměji vyznačovala. Jinak počítáme takto: Mají-li původní tony relativní kmitočty p, q, tak že jest ton druhý vyšší prvého, $q > p$, ale oba jsou v mezích oktavy, $q > 2p$, jest intervall původní

$$x = \frac{q}{p}$$

a intervall přeložením vzniklý, utvořený opět poměrem kmitočtu tonu vyššího ke kmitočtu tonu nižšího,

$$\text{buď } y = \frac{2p}{q}, \quad \text{nebo } y = \frac{p}{\frac{1}{2}q},$$

tudíž v obou případech $\quad x \cdot y = 2.$

Omezení $q < 2p$ není mathematicky nutným; ale pak by po případě $log\, y$ byl negativním; ton na svém místě zůstávající byl by jako vnější bod, kterým by se daná odlehlost oktavová rozdělovala.

Provedeme-li obrat u intervallů *čistých*, obdržíme *opět* intervally *čisté*. Z primy vzniká oktava, z oktavy prima; z kvinty vzniká kvarta, z kvarty kvinta; dle vztahů

$$1 \cdot 2 = 2, \quad \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

Stupnice diatonická obsahuje dále intervally *velké* a *malé*; jest v ní velká a malá tercie, velká a malá sexta. Z rovnic

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{5} = 2, \quad \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2$$

poznáváme, že obratem velká tercie přejde v malou sextu, malá tercie ve velkou sextu; a rovněž naopak z velké sexty povstane malá tercie, z malé sexty velká tercie.

Zkoumáme-li obraty pro velkou a malou septimu, obdržíme

$$\frac{15}{8}\cdot\frac{16}{15}=2, \qquad \frac{9}{5}\cdot\frac{10}{9}=2.$$

Z velké septimy vzniká tedy obratem intervall $\frac{16}{15}$, který analogicky se zavádí jakožto malá sekunda; z malé septimy pak intervall $\frac{10}{9}$, který se pak nazývá velká sekunda, a jest od vlastní sekundy $\frac{9}{8}$ rozdílný o komma. Proto zase obratem této sekundy vzniká intervall

$$\frac{9}{8}\cdot\underbrace{\frac{9}{5}\cdot\frac{80}{81}}=2,$$

který jest o komma nižší než malá septima $\frac{9}{5}$. V hudbě nehledí se k této nepatrné odchylce a vyslovuje se všeobecně pravidlo: Obratem povstávají z *malých* intervallů *velké*, z *velkých* *malé*.

Všeobecně lze pak říci: Z intervallů primy, sekundy, tercie a kvarty vznikají obratem intervally oktavy, septimy, sexty a kvinty, a naopak, dle schematu

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1, \end{array}$$

který jest jen jinou formou vztahu

$$x\,.\,y=2.$$

Neshoda mezi sekundou $\frac{9}{8}$ a septimou $\frac{9}{5}$ pochází odtud, že krok od oktavy zpátky k septimě velké činí $\frac{16}{15}$ a od septimy velké k malé $\frac{25}{24}$, kteréžto dva kroky dávají úhrnem $\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}=\frac{10}{9}$, tedy o komma méně, než jest krok od primy k sekundě $\frac{9}{8}$.

Intervally *čisté* lze zvětšiti neb zmenšiti. Čistý intervall *zvětšený* obdržíme, když o půl tonu buď ton vrchní zvýšíme nebo ton spodní snížíme. Čistý intervall *zmenšený* pak obdržíme, když o půl tonu buď ton vrchní snížíme, nebo ton spodní zvýšíme. Jest pak samozřejmo, že čistý intervall zvětšený přechází obratem v čistý zmenšený, a naopak, čistý intervall zmenšený že přechází obratem v čistý zvětšený.

Co se ostatních intervallů ve stupnici diatonické týče, kteréž jsou buď velké neb malé, mohou se *velké* učiniti *zvětšenými*, *malé* pak *zmenšenými*, dle téhož pravidla, jakéž jsme právě stanovili pro intervally čisté. Když pak tímto způsobem zevšeobecníme pojem intervallů zvětšených a zmenšených, můžeme též všeobecně pronésti větu v theorii hudby často užívanou: Z intervallů *zvětšených* stávají se obratem *zmenšené* a ze *zmenšených zvětšené*.

§ 46. **Trojzvuky ve stupnici diatonické a jich obraty.**

Znějí-li ve stupnici diatonické tři neb i čtyři tony, po případě zvuky, současně, vzniká trojzvuk neb čtyrzvuk. Dle toho, jaké tony v tomto seskupení se nalézají, jsou souzvuky takové jednak vůbec — se stanoviska hudby jako umění — nemožné, jinak více neb méně dokonalé. Rozeznáváme dle toho souzvuky konsonantní a dissonantní. Hudba užívá souzvuků konsonantních, připouští však i souzvuky dissonantní, docilujíc rozvedením dissonance, t. j. převedením na konsonanci dojmů hudebních nejvíce účinných.

Z pravidla jest konsonance libozvukem, dissonance nelibozvukem; avšak konsonance není vždy libozvukem, jako zase naopak dissonance mnohdy není nelibozvukem. Jisté troj- neb čtyrzvuky znějí na manualu varhan velmi libozvučně, v pedalu však by byly nesnesitelnými; naopak mnohé dissonance v přechodech jsou velice příjemné.

Souzvuk primy a kvinty jest dokonalý, ale sluchu jeví se býti prázdným, postrádaje určitého hudebního charakteru. Avšak nedostatek tento zmizí, když se souzvuk primy a kvinty *doplní* tonem středním, totiž *tercií*. Tím docílí se plnosti souzvuku a dle volby tercie též určitého hudebního charakteru. Proto jest trojzvuk čili akkord *) primy, tercie a kvinty *základním akkordem* hudební harmonie, a zove se *akkord kvintový*. Ona tercie, vstupující do trojzvuku, může však býti buď *velká* neb *malá*. Dle toho rozeznáváme též kvintový akkord *velký* a *malý*. Relativní výšky a (intervally) jsou v akkordech těchto následující:

---

*) franc. accord, z lat. ad-, corda (chorda, χορδή ἡ struna), accorder laditi nástroj hudební (dle struny), tudíž accord soulad, shoda.

Trojzvuk kvintový

velký			malý		
1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$,	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$
	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$		$\left(\frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$.

Jest viděti, jak vstoupením tercie intervall kvinty se rozdělí na dvě části nestejné, totiž na velkou tercii a malou tercii, dle vztahu

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}.$$

Jest tudíž akkord kvintový souzvukem dvou tercií nad sebou položených; u velkého jest velká tercie dole, malá nahoře; u malého naopak malá dole, velká nahoře. Oba spočívají, jak pravíme, na primě jakožto tonu základním, čili oba jsou na stupni prvém. Prvý se zove též akkord *durový*, tvrdý, druhý pak *mollový*, měkký.

Nahoře bylo řečeno, že souzvuk primy a kvinty doplňuje se tercií jakožto tonem „středním". Ve smyslu arithmetickém platí to o velké tercii doslovně; její kmitočet jest vskutku arithmetickým středem obou kmitočtů primy a kvinty. Podobné vztahy arithmetické platí ostatně u všech stupňů diatonické stupnice, což pro počítání výšek absolutních bývá na prospěch. Vskutku lze z primy (I) a oktavy (VIII) počítati kmitočty dle vzorců:

$$V = \tfrac{1}{2}(I + VIII), \quad III = \tfrac{1}{2}(I + V), \quad II = \tfrac{1}{2}(I + III),$$
$$IV = \tfrac{1}{2}(I + VI), \quad VI = \tfrac{1}{2}(IV + VIII), \quad 2\,VII = \tfrac{1}{2}(2\,VI + VIII).$$

Znamenitý organista století 18., *Sorge* (Georg Ondřej) nazývá velký akkord: „Trias harmonica perfecta", (trojice harmonická dokonalá). Tuto dokonalost nelze sice na varhanách nebo na pianu a pod. znamenati než jen přibližně, vzhledem k nepřesnosti ladění temperovaného. Překrásně vynikne však dokonalost tato na př. sirenou Dove-Helmholtzovou (otvory: 8, 10, 12, 16), kde všechny tony akkordu tohoto splývají jako v jediný harmonický celek.

Jako na stupni prvém můžeme trojzvuky podobné, v tonech stupnice diatonické, tvořiti též na stupni druhém, třetím atd. Výsledek, jehož tak dojdeme, ukazuje přehledně tabulka následující.

Trojzvuky kvintové ve stupnici diatonické.

dur			moll		
Na stupni	relativní výšky (intervally)	akkord	Na stupni	relativní výšky (intervally)	akkord
I	$1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2}$ $\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right)$	*velký*	I	$1 \quad \frac{6}{5} \quad \frac{3}{2}$ $\left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{5}{4}\right)$	*malý*
II	$\frac{9}{8} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{3}$ $\left(\frac{32}{27}\right) \left(\frac{5}{4}\right)$	(malý)	II	$\frac{9}{8} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{5}$ $\left(\frac{32}{27}\right) \left(\frac{6}{5}\right)$	zmenšený
III	$\frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{15}{8}$ $\left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{5}{4}\right)$	malý	III	$\frac{6}{5} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{5}$ $\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right)$	velký
IV	$\frac{4}{3} \quad \frac{5}{3} \quad 2$ $\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right)$	*velký*	IV	$\frac{4}{3} \quad \frac{8}{5} \quad 2$ $\left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{5}{4}\right)$	*malý*
V	$\frac{3}{2} \quad \frac{15}{8} \quad \frac{9}{4}$ $\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right)$	*velký*	V	$\frac{3}{2} \quad \frac{9}{5} \quad \frac{9}{4}$ $\left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{5}{4}\right)$	*malý*
VI	$\frac{5}{3} \quad 2 \quad \frac{5}{2}$ $\left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{5}{4}\right)$	malý	VI	$\frac{8}{5} \quad 2 \quad \frac{12}{5}$ $\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right)$	velký
VII	$\frac{15}{8} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{8}{3}$ $\left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{32}{27}\right)$	zmenšený	VII	$\frac{9}{5} \quad \frac{9}{4} \quad \frac{8}{3}$ $\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{32}{27}\right)$	(velký)

Poznámka: $\frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}.$

Z tabulky této vysvítá, že akkordy *stejnorodé*, t. j. durové ve stupnici tvrdé a mollové ve stupnici měkké, obdržíme na stupni *prvém*, *čtvrtém* a *pátém*. Akkordy na stupni *třetím* a *šestém* jsou *různorodé*, měkké ve stupnici durové, tvrdé ve stupnici mollové. V akkordech na stupni druhém a sedmém přichází intervall nový *), totiž $\frac{32}{27}$, kterýž jest malá tercie $\frac{6}{5}$ snížená o komma, dle vztahu

$$\frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}.$$

Když bychom toto malé snížení opomíjeli a intervall $\frac{32}{27}$ též za malou tercii přijali, pak by byly ještě akkordy různorodé ve stupnici durové na stupni druhém a ve stupnici mollové na stupni sedmém.

K těmto akkordům známým přistupuje ještě akkord nový a to ve stupnici durové na stupni sedmém a ve stupnici mollové na stupni druhém. Akkord ten obsahuje malou tercii $\left(\frac{6}{5}\right)$ a onu o komma sníženou malou tercii $\left(\frac{32}{27}\right)$. Oba tyto intervally za sebou dávají čistou kvintu $\left(\frac{3}{2}\right)$ sníženou o malý půlton $\left(\frac{25}{24}\right)$ a o komma $\left(\frac{81}{80}\right)$, dle vztahu

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{32}{27} = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{80}{81}.$$

Proto lze říci, že v onom akkordu jest čistá kvinta nahrazena kvintou zmenšenou. Zove se proto akkord ten *kvintový zmenšený*.

Stejnorodostí akkordů nabývá stupeň čtvrtý a pátý, t. j. kvarta a kvinta zvláštního významu; označuje se pak kvinta jakožto *dominanta* (quinta toni, dominans), a kvarta jakožto *subdominanta* (sub-dominans), její dolejší oktava jest totiž kvintou tonu základního, tudíž též dominantou, ale spodní, na rozdíl od oné, kteráž jest vrchní. Můžeme tedy hořejší výsledek vyjádřiti též slovy: akkordy toniky, dominanty a subdominanty jsou ve stupnici diatonické stejnorodými, t. j. velké ve stupnici durové, malé ve stupnici mollové.

*) Týž intervall seznáme níže, při ladění pythagorejském, jakožto malou tercii pythagorejskou.

Význam akkordů těchto vynikne ještě více, když na základě hořejší tabulky shledáme, že se jimi právě vyčerpávají veškeré tony stupnice diatonické. Jakýkoli ton (po případě jeho oktava) jest tudíž v jednom z oněch tří akkordů zastoupen. Proto se akkordy tyto zovou *hlavními*, jsouce základem celé harmonie; ostatní zovou se *vedlejšími*.

Ve výsledku, jehož jsme tuto nabyli a jenž v oné tabulce jest přehledně sestaven, jeví se pozoruhodná souměrnost při tonorodu dur a moll, kteráž vynikne, když výsledek takto přepíšeme:

Tonorod

I II III IV V VI VII I | II III IV V VI VII VIII

m zm v m m v (v) m | *v (m) m v v m zm v*

← moll | dur →

Akkordy velké, malé, zmenšené v tonorodu tvrdém jeví se jako akkordy malé, velké, zmenšené v tonorodu měkkém a to souhlasně na stupních, kteréž jsou od základního tonu souměrně v pravo a v levo rozloženy. V akkordech zmenšených jeví se souměrnost obráceným pořádkem intervallů $\frac{6}{5}$ a $\frac{32}{27}$. Základem všeho toho jest souměrnost akkordů hlavních, durového a mollového, kteráž se jeví v jich stavbě souměrné směrem nahoru a dolů, dle intervallů

$\left(\frac{6}{5}\right)$ $\left(\frac{5}{4}\right)$ | $\left(\frac{5}{4}\right)$ $\left(\frac{6}{5}\right)$

← moll | dur →

K souměrnosti této a k mnohým úkazům s ní souvisícím vrátíme se později.

Výsledky zde uvedené změní se poněkud, když se ve stupnici mollové místo malé septimy přijme septima velká, t. j. když se místo stupnice původní, aeolské, přijme stupnice *harmonická*; akkord na stupni pátém stane se pak velkým, jako ve stupnici durové; na stupni třetím stane se akkord zvětšeným, obsahujícím dvě velké tercie nad sebou, za to na stupni sedmém zmenšeným, jako ve stupnici durové.

Podobně jako u dvojzvuku vznikají *obraty trojzvuku* přeložením krajních tonů do oktavy vyšší nebo nižší. Již u dvojzvuku se ukázalo, že jest to jednostejno, zda-li se přeložení děje do oktavy vyšší nebo nižší; obyčejně se míní do oktavy vyšší, a na tom zde ve výkladech číselných přestaneme.

Studujme obrat trojzvuku kvintového, velkého i malého. Číselně ukazuje se výsledek následující.

Trojzvuk velký.

$1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$ . . . (terc-) kvint-akkord,

$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} : 2 \quad = 1 : \frac{6}{5} : \frac{8}{5}$ . . . (terc-) sext-akkord,

$\frac{3}{2} : 2 : \frac{5}{2} = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3}$ . . . kvart-sext-akkord.

Trojzvuk malý.

$1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2}$ . . . (terc-) kvint-akkord,

$\frac{6}{5} : \frac{3}{2} : 2 \quad = 1 : \frac{5}{4} : \frac{5}{3}$ . . . (terc-) sext-akkord,

$\frac{3}{2} : 2 : \frac{12}{5} = 1 : \frac{4}{3} : \frac{8}{5}$ . . . kvart-sext-akkord.

Z toho, co již o obratech dvojzvuku řečeno, nemůže překvapiti, že prvý obrat trojzvuku velkého má intervally malé, a trojzvuku malého intervally velké; druhým obratem se opět dostavují původní intervally velké a malé. V obou případech jest však souhlas v tom, že původní pořádek intervallů: tercie, kvinta, se prvým obratem změní na tercii, sextu, druhým pak pak na kvartu a sextu. Proto se zove trojzvuk druhý terc-sextovým, nebo krátce *sextovým*; trojzvuk třetí pak *kvarto-sextovým*. Ton základní *zůstává základním* i v obratech, třebas nebyl tonem nejhlubším. Také tonorod nemění se obratem, přes to, že, jak řečeno, prvním obratem vystupují intervally malé na místě velkých a naopak.

Sirenou Dove-Helmholtzovou lze studovati akkord velký v původní poloze otvory 8, 10, 12, v prvém obratu otvory 10, 12, 16, v druhém pak otvory 9, 12, 15. V poloze o kvintu vyšší lze obdržeti akkord velký též otvory 12, 15, 18. Akkord malý dávají otvory 10, 12, 15.

Co se sireny Opeltovy týče, dává trojzvuky počtem otvorů

32, 40, 48   64, 80, 96
30, 36, 48   60, 72, 96.

Poměrná čísla jsou

$$1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$$

$$1, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}.$$

Prvý akkord jest tedy kvintový dur, druhý sextový dur. Poněvadž však, když se oba akkordy hrají za sebou, oktava zůstává, jest přirozenější psáti poměrná ona čísla takto

$$\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$$

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2,$$

čímž první akkord vystupuje jako akkord subdominanty a druhý jako akkord příslušné toniky v prvém obratu.

§ 47. Základ stupnice diatonické.

Pokud nám jest známo, byl *Pythagoras* (kolem 582—500 před Kr.) první hudební theoretik, jenž zkoumal, jak jisté intervally, určené sluchem, tedy subjektivně, souvisí s jich základem objektivním*). Na *monochordu*, nejstarším tomto přístroji akustickém, nalezl, že délka zkrácené struny, jež dává oktavu, kvintu a kvartu tonu daného, činí $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ délky původní. Dokonalost souzvuku těchto tonů se základním obrážela se tu v jednoduchosti relativních čísel 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, a objev tento působil dojmem tak velikým, že Pythagoras a žáci jeho základ harmonie viděli v samých těchto číslech, že následkem toho čísla za podstatu všech věcí pokládali a poměry zde nalezené též jinam — na př. na harmonii sfér — přenášeli. Vskutku není však třeba, strunu na monochordu na polovičku *zkrátiti*, aby dala oktavu tonu původního; postačí, když se nějakým způsobem dá podnět, aby struna, kmitajíc jako *celek*, u prostřed měla uzel; podobně dává kvintu této oktavy, pak druhou oktavu, její tercii, kvintu atd., když se — stále jako *celek* — rozechvěje tak, aby měla mezi oběma pevnými konci dva, tři, čtyři atd. uzly. Tony, jež tímto způsobem jednotlivě vznikají, jichž kmitočty jsou v poměru čísel:

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 \ldots,$$

slují *tony harmonické*. A jako tony tyto, způsobem naznačeným, vznikají *jednotlivě*, po sobě, tak zaznívají i (superposicí kmitů) *úhrnně, současně*, když struna přiměřeně jsouc smyčcem ve chvění uvedena, dává plný svůj *zvuk*. Vzhledem k tomu jest zvuk takový

*) Srovnej *A. Libický*, Stručný přehled dějin fysiky v pořádku chronologickém (pag. 5), v Praze, 1901.

jako mohutný *akkord*, v němž základní intervally kvintového trojzvuku, kvinta a velká tercie jsou zastoupeny. Souzvuk všech těchto tonů harmonických jeví se sluchu jako *celek*. Proto také slyšíme-li tony různého původu, jichž intervally však jsou harmonické, poznáváme v nich *části* takového *celku* a shledáváme jich souzvuk srozumitelným, lahodným, konsonantním. A poněvadž akkord kvintový, tvořený na tonice, dominantě a subdominantě, vyčerpává celou stupnici diatonickou, poznáváme, že základ této stupnice jest v tonech harmonických.

Krásný souzvuk tonů harmonických lze studovati zvláště dobře v plném *zvuku*, jaký dává jazýčková píšťala přiměřených rozměrů, opatřená kovovým (nejlépe cínovým) ozvučníkem, jejíž ton základní jest na př. *C*. Již sluchem, bez pomůcek, lze ve zvuku rozeznávati oktavu, duodecimu, druhou oktavu, její tercii, kvintu i malou septimu, kteráž zní pro hudební sluch jako ton jakýsi cizí, ale nikoli nelahodný, a dobře se od jiných tonů harmonických odlišuje. Když se pak uchu pomáhá resonatory, jak Helmholtzem k analysi zvuku byly sestrojeny, tu lze konstatovati tony harmonické ještě do výšek velmi značných. Zde tudíž provádíme *analysi* daného *zvuku*; můžeme však i opačně provésti *synthesi* jeho. K cíli tomu slouží zvláštní přístroj, obsahující jazýčkové tony bez ozvučníků, tak jak bývají u harmonia, při čemž jich výšky jsou tak upraveny, aby přesně souhlasily s výškami všech harmonických tonů onoho základního *C*. Přístroj takový ve spojení s onou jazýčkovou píšťalou koná pro studium zvuku velmi dobré služby. Co při píšťale ucho slyší v jediném plném akkordu všech tonů harmonických, to slyší zde jednotlivě, po sobě, anebo v libovolných kombinacích. Když pak se nechají zníti všechny tony harmonické současně, vznikne souzvuk, který činí dojem *jednotný*, velmi souhlasný s dojmem, jaký svým zvukem dává ona píšťala jazýčková, až na to, že ton základní v této silněji vyniká. Pokus předpokládá ovšem dokonalé ladění oněch jednotlivých tonů harmonických, kteréž však lze cvičeným sluchem provésti velmi přesně, poněvadž právě pro intervally v tonech harmonických zastoupené jest ucho velice citlivým.

Ale nejen v tom má dokonalost hlavního trojzvuku

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2}$$

svůj základ, že v tonech jeho poznáváme *části* harmonicky jednotného *celku*, nýbrž také v tom, že tony kombinační, tak zvané *differenční*, jsou v dokonalém souzvuku s tony, jimiž vznikají. Když totiž znějí intensitou dostatečnou dva tony, nižší N_1 a vyšší N_2, zaznívají, jak později vyložíme, současně jich tak zvané *tony kombinační*, totiž *summační* $N_2 + N_1$ a *differenční* $N_2 - N_1$. Prvý z obou jest slabý a bývá slyšitelným jen, když dané tony jsou zvláště intensivní; druhý však z obou, ton

differenční, vzniká i při tonech obyčejné intensity. Vizme nyní, jaké jsou tony differenční u velkého trojzvuku

$$1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2}.$$

Odčítajíce relativní tyto kmitočty, obdržíme:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4},\quad \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4},\quad \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Ve velkém trojzvuku znějí tudíž spolu obě dolejší oktavy $\left(\frac{1}{2} \text{ a } \frac{1}{4}\right)$ tonu základního, tudíž tony, kteréž s tímto základním jsou v konsonanci nejdokonalejší, s ostatními pak v konsonanci rovněž dokonalé, čímž harmonie tohoto akkordu ještě více se dotvrzuje. Proto lze plným právem říci, že tato harmonie velkého akkordu jest přírodou samou odůvodněna, tak že lze ladění, jak stupnicí diatonickou jest stanoveno, jakožto ladění *přirozené* označiti.

§ 48. **O tonech v hudbě užívaných.**

Úvahy předešlé týkaly se jediné vzájemného *poměru* výšek tonů, čili výšek *relativních*; o výškách *absolutních* nebylo při tom jednáno. Nechali jsme úplně nerozhodnuto, jak vysoký jest ton, který za *primu* volíme; vskutku může býti základním ton jakýkoli, na každém lze založiti stupnici diatonickou, durovou i mollovou, lze v ní zkoumati konsonance a dissonance, dvoj- neb trojzvuky a pod. Můžeme na př. upraviti dvojí sirenu Seebeckovu pro stupnici tvrdou a měkkou, každá má osm řad otvorů, jež jsou v kruzích soustředných aequidistantně vrtány, počet pak otvorů v jednotlivých řadách jest volen tak, jak to předpisují relativní výšky obou diatonických stupnic. Dle toho, jakou úhlovou rychlostí se na elektromotoru sirena otáčí, mění se *absolutní výška* jednotlivých tonů, ale jich *poměr* zůstává týž, jich postup jest v každé výškové poloze stejně charakteristickým, konsonance stejně dokonalé neb nedokonalé, dvoj- neb trojzvuky stejně význačné. Kdo má dobrý hlas a sluch a tolik hudebního vzdělání, aby poznal, co jest ve stupnici diatonické podstatného, dovede stupnici tuto zazpívati od jakéhokoli tonu, který by mu za základní byl dán.

Uvážíme-li, jak veliké jest množství tonů jen o intervall kommatu od sebe odlehlých, uvážíme-li, že již jeden kmit, ba přísně vzato i jen nějaká jeho část činí ve výšce tonu různost, snad subjektivně sotva znatelnou ale objektivně existující, pochopíme, že počet diatonických stupnic, jež by se daly tvořiti, jest ohromně veliký.

Tato theoretická volnost jest však skutečností značně omezena. Hlas lidský dovede v souvislosti tvořiti tony nejrozmanitější, ale jen v těch mezích, jež jsou přírodou určeny. U nástrojů smyčcových, violiny, violy, violoncella i kontrabassu lze rovněž nepřetržitě tvořiti tony, ale jen v mezích, jež jsou těmto nástrojům vlastní. Avšak omezení daleko větší nastává u těch nástrojů hudebních, u nichž ton se netvoří, nýbrž jest dán, jako u harfy, piana, varhan, nástrojů dechových a pod. Nemají-li nástroje tyto velikými rozměry státi se nemožnými, jest naprosto nutno, počet tonů, pro kteréž jsou zařízeny, omeziti na míru nejmenší. Těmto pak přizpůsobují se též ostatní nástroje hudební, přizpůsobuje se zpěv a vůbec celá hudba, tak že následkem toho *počet tonů v hudbě vskutku užívaných jest poměrně malý.*

Pokud tedy hledíme jen na *relativní* výšky tonů, absolutních si nevšímajíce, zůstáváme na stanovisku fysikalním. V hudbě však nutno zaujmouti stanovisko nové, nutno omeziti počet tonů a ustanoviti pro ně *určité výšky absolutní.* Tyto tony dostávají pak určitá *jména* a vyznačují se v písmě určitými značkami, tak zvanými *notami.*

Aby však počet jmen byl co možná nejmenší, rozdělují se všechny tony na několik *oktav*; rozumíme pak tímto slovem ne snad osmý stupeň, nýbrž celou řadu tonů mezi prvým a tímto osmým ve stupnici ležících; tony v jedné oktavě dostávají *určitá jména*, která se pak v různých oktavách *opakují.* Rozeznávání tonů po *různých* oktavách děje se nejjednodušeji indexy nebo čárkami.

§ 49. **Označení tonů slovem i písmem.**

Označování tonů notami jest nyní u všech národů souhlasné, nikoli však označování slovy. Základem jest pojmenování tonů, od primy počínajíc až do septimy, jak jest ve stupnici diatonické *durové.* Ve střední Evropě užívá se nyní pojmenování latinskými písmenami v pořádku tomto:

I	II	III	IV	V	VI	VII
c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*

Jak viděti, pořádek není abecední. Původně však jím byl Začínalo se tonem *a*, po něm následoval ton *b*, a po tomto tony ostatní *c, d, e, f, g.* Ono *b*, gotickým písmem psané (♮), slulo „*b* quadratum“; později k němu přistoupilo nové *b*, o půl tonu nižší, jež se psalo okrouhle (♭) a slulo „*b* rotundum“. Toto *b* (= *hes*) zůstalo po dnes, kdežto z onoho *b* transkripcí povstalo nynější *h*. V Anglii však a v Hollandu, kde se užívá též označení latinskými písmenami, zůstal pro naše *h* původní název *b* v platnosti, a to ve smyslu „*b* quadratum“. Na tento nesouhlas upozorňuje již *Chladni* ve své Akustice, správně podotýkaje, že by bylo výhodnější, kdyby původní pojmenování povšechně bylo přijato. Za *b* ve smyslu „*b* rotundum“ říkalo by se pak „bes“ podobně, jako se nyní říká „hes“. Za dnů našich jest však označení *h* již tak zakořeněné, že na změnu nelze u nás pomýšleti. Při studiu spisů anglických neb hollandských dlužno však na rozdíl tento pamatovati.

Zbývá ještě rozeznávati tony dle oktav. Zde jsou v platnosti označení různá. Někteří užívajíce stále týchž písmen, připojují indexy nullové, positivní a negativní. Jiní připojují indexy positivní pro oktavy vyšší, vynechávají indexy nullové, připojují pak dolní oktavu o velkých písmenách a teprve k těmto přidávají v oktavách ještě nižších indexy negativní. V dobách starších užívalo se nejvíce malých a velkých písmen, ale místo indexů čárek, a to čárek nahoře místo positivních indexů, a čárek dole místo negativních. Dle tohoto způsobu označování jest jako by v popředí *oktava velká* a *malá*; od malé vzhůru jest oktava *jedno-, dvoj-, tří-* atd. *čárkovaná*; od velké dolů jest oktava jednočárková dole, jež se zove *kontra-oktava* (spodní), a pak ještě dvojčárková dole, jež se zove *subkontraoktava* (podspodní). Pojmenování toto jest u nás ustálené, a budeme ho též užívati. Co se však označení týče, kolliduje označování ležatými čárkami s označením, jehož se dle Helmholtze užívá pro tony o komma zvýšené neb snížené; dle tohoto označení znamená $\bar{c}$ ton c o komma zvýšený, $\underline{c}$ ton c o komma snížený a podobně $\bar{\bar{c}}$ ton c o dvě kommata zvýšený, $\underline{\underline{c}}$ ton c o dvě kommata snížený, a pod. Vzhledem k této kollisi nelze označení ležatými čárkami užívati než jen v případech, kdy omyl jest vyloučen. Hudební theoretikové novější užívají indexů, jež píší dolů a nahoru místo čárek; dle toho znamená tedy a^3 ton a oktavy tříčárkované. Zde však jest zase kollise s označením v mathematice ustáleným, kde čísla nahoře psaná znamenají exponenty mocnosti. Proto bývá mnohdy užíváno označení v mathematice rovněž zavedeného, při němž se místo číslic, jež by s exponenty mohly býti zaměňovány, užívá čárek, jedné, dvou, tří (na př. c', c'', c''') a pak dále římských čísel (tedy c^{IV}, c^{V} . . .), tak že omyl jest zcela vyloučen. Vzhledem však k tomu, že označení předešlé, indexy psanými dole a nahoře, jest nyní fakticky nejvíce rozšířeno, budeme označení toho též v knize této z pravidla užívati.

Zvláštní označení pro ton o komma snížený neb zvýšený zavedl původně *A. v. Oettingen*, a to dle analogie písma notového; proto znamenalo označení $\underline{c}$ ton c o komma zvýšený, jako se nota píše nad čarou, když jest vyšší. *Helmholtz*, přijav čárku pro označení kommatu, změnil smysl (v. Lehre v. d. Tonempfindungen, IV. vyd. 1877 pag. 453). Nelze však ani jedno ani druhé označení pokládati za šťastné, poněvadž čárka „—“ má určitý ustálený smysl, jako znamení pro minus. Tak v logarithmech znamená čárka nad cifrou umístěná *vždy*, že cifru dlužno *zmenšiti* a to o půl jednotky tohoto místa. Píšeme tedy pětimístně na př.

$$log \frac{81}{80} = 0{\cdot}0054\bar{0}.$$

čímž naznačujeme, že číslo 40 má býti o půl jednotky zmenšeno; sedmimístně jest

$$log \frac{81}{80} = 0{\cdot}0053950.$$

Při označení Helmholtzově má však $\bar{c}$ znamenati ton c o komma zvýšený. Kollise, zde se jevící, dostavila se také v ohledu jiném, totiž při označení akkordů tonického (na př. c^{+}) a fonického (důsledně c^{-}), jak je navrhuje A. v. Oettingen. K věci této se ještě vrátíme.

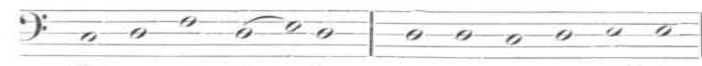
Národové romanští užívají označení, jež jest od našeho zcela odchylné. Označení toto, tak zvané francouzské, jest následující:

I	II	III	IV	V	VI	VII
ut	re	mi	fa	sol	la	si.

Jeho původcem jest pak mnich *Guido z Arezza*, epochalní zjev dějin hudebních.

Guido, zvaný Aretinus, též de Sancto Mauro, narodil se r. 995 v Arezzu v Apenninách, dle novějších údajů v okolí Paříže, stal se mnichem benediktinského kláštera v Pompose. Papežem Janem XIX. byl povolán do Říma, kdež nějaký čas dlel; zemřel r. 1050, jako převor přísné řehole Kamaldulských, v jichž refektáři zachoval se obraz s nápisem: Beatus Guido Aretinus, inventor musicae. Provedl záslužnou reformu písma notového a zvelebil techniku zpěvní.

Aby žákům svým usnadnil nacvičení postupu tonů ve stupnici a rozeznávání celých tonů i půltonů, užíval před cvičením zpěvným následujícího hymnu:



O hymnu praví Hermann Finck: „quem Paulum Diaconum composuisse ferunt; at si credimus Alberto Magno, in Lucam scribenti, divus Hieronymus eum composuit.“ Hymnus jest strofou sapphickou; v metrickém (přízvučném) překladu (Král) zní:

„Zbožní ctitelé aby mohli volným
hlasem zázračné tvoje skutky hlásat,
vinu hříšných rač jejich úst jim sníti,
ó svatý Jene!“

V hymně této, kterou tedy každý žák dokonale měl v paměti, *stojí počáteční slabiky* ut, re, mi, fa, sol, la *vždy o ton výše*, a to o *celý ton* (1), vyjímajíc intervall mi-fa, kde jest *půlton* ($\frac{1}{2}$). Řada těchto tonů, v určitém tom postupu intervallovém 1, 1, $\frac{1}{2}$, 1, 1, (v němž jest jistá souměrnost, půlton u prostřed), slula *hexachord*. Rozdělení celé soustavy tonové na hexachordy slulo *solmisací*; jména ut, re, mi,... se zachovávala i když hexachord se založil na tonu jiném než prvém (c). Proto značil název mi-fa vůbec půlton. Hexachord mohl se založiti na stupni pátém (g); pak bylo nutno připojiti za a ton o intervall celého tonu vyšší; to byl ton b. Hexachord mohl však začínati též na stupni čtvrtém (f); pak bylo nutno připojiti na a ton o intervall jen půltonu vyšší; tento zval se též b, ale dle psaní se oba tyto stejnojmenné tony rozeznávaly. Ono b slulo quadratum, též durum, dle psaní gotického, toto b rotundum též molle, dle psaní latinského. Tak byla veškerá soustava tonů rozdělena na hexachordy trojího druhu, vycházejícího buď z primy (c) neb kvarty (f) neb kvinty (g).

Tony této soustavy se zvaly *voces* nebo *claves*; poslední název upomínal na klavesy varhanové, na nichž jména tonů byla napsána. Rozeznávaly se pak: voces graves (*A . . . G*), voces acutae (*a . . . g*) a voces superacutae čili geminatae (*aa . . . gg*). Tonů ještě nižších než byly voces graves, neužíváno, jediný jen ton vyjímajíc, který jakožto ton *G* se označoval velkým řeckým gamma *Γ* a slul archoos gravis a byl přibrán pro začátek prvého hexachordu. Bylo tedy přehledně

$$\underset{\text{archoos gravis}}{\Gamma} \qquad \underbrace{A\ B\ C\ D\ E\ F\ G}_{\text{voces graves}} \qquad \underbrace{a\ \flat\ b\ c\ d\ e\ f\ g}_{\text{voces acutae}} \qquad \underbrace{aa\ \flat\flat\ bb\ cc\ dd\ ee}_{\text{voces superacutae.}}$$

Tonem *Γ* začínal prvý hexachord (na pátém stupni); *B* zde bylo „quadratum“: tonem *C* začínal druhý hexachord, tonem *F* třetí, při němž bylo nutno interpolovati *b* rotundum, tonem *G* čtvrtý, tonem *c* pátý, *f* šestý, kde opět bylo nutno interpolovati *b* rotundum, a tonem *g* sedmý. Hexachordy, v nichž užito *b* quadratum (= *h*), sluly tvrdé (hexachorda dura), v nichž pak přicházelo *b* rotundum (= hes čili naše nynější *b*) sluly měkké (hexachorda mollia); tyto byly tedy na stupni čtvrtém (*f*). Také zpěv se dle toho rozlišoval na cantus durus a mollis. Označení „*b* rotundum“ stalo se později značkou — dosud užívanou — pro snížení tonu jakéhokoli o půl tonu — a z toho pak vzniklo průběhem doby užívání názvů „dur“ a „moll“ ve smyslu našem, moll v té stupnici, kde jisté stupně byly o půl tonu sníženy. Z toho plyne, že označení dur a moll nikterak — dle svého vzniku — nemělo vztahu k hudebnímu charakteru příslušných akkordů.

Co se absolutní výšky týče, souhlasí „voces acutae“ od *c* počínajíc, s oktavou jednočárkovanou; celková pak soustava (dle našeho označení od velkého *G* do dvojčárkovaného $\bar{\bar{e}}$) souhlasí s rozsahem lidského hlasu (srovnej obrazec 73.).

Pomíjejíce vylíčení dalšího rozvoje*) poznamenáváme toliko, že pro nynější sedmý stupeň (naše *h*) teprve později (k návrhu Anselma Flanderského v 16. století) zavedeno jméno „si“ dle stažených začátečních písmen posledních slov „Sancte Joannes“.

Dosud nazývá se stupnice po francouzsku „la gamme“ (po anglicku „the gamut“) dle onoho *Γ*, začínajícího celou řadu tonů skutečně užívaných. Italsky zove se la solfa a stupnici zpívati solfeggiare. Místo „ut“ zpívá se pohodlněji „do“. V angličině se píše: doh, ray, me, fah, soh, lah, te; ve spisech novějších užívá se však též prostě označení italského bez transkripce.

*) Viz obšírný spis: Karel Stecker, Všeobecný dějepis hudby I. pag. 117 a násl., 1892.

Následující tabulka obsahuje přehledně tonové označení, jak se ho užívá; pokud se týče označování písmeny, není rozdílů značných — leda tam, kde se neupotřebuje písmen velkých nýbrž jen malých s indexy —1 až —3. Odchylnější jest užívání indexů při označení *francouzském*, nač zvlášť dlužno upozorniti.

Přehled označování oktav.

Oktava	Označení					Absol. výška
Subkontraoktava . .	$\underline{\underline{C}}$	C_2	C_2	c_{-3}	ut_{-1}	$16\frac{5}{16}$
Kontraoktava . . .	$\underline{C}$	C_1	C_1	c_{-2}	ut_0	$32\frac{5}{8}$
Velká oktava . . .	C	C	C	c_{-1}	ut_1	$65\frac{1}{4}$
Malá oktava	c	c	c	c_0	ut_2	$130\frac{1}{2}$
Jednočárkovaná oktava	$\bar{c}$	c'	c^1	c_1	ut_3	261
Dvojčárkovaná oktava	$\bar{\bar{c}}$	c''	c^2	c_2	ut_4	522
Tříčárkovaná oktava .	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	c'''	c^3	c_3	ut_5	1044
Čtyrčárkovaná oktava	$\overset{\equiv}{\bar{c}}$	c^{IV}	c^4	c_4	ut_6	2088
Pětičárkovaná oktava atd.	$\overset{\equiv}{\bar{\bar{c}}}$	c^{V}	c^5	c_5	ut_7	4176

Uvedenou soustavu tonů dlužno *laditi*. Základem tohoto ladění jest určitý ton, připadající do oktavy jednočárkované, na *šestý stupeň*, tak zvané komorní a^1 o 435 kmitech. Dle toho jest prima této oktavy $c^1 = 435 \cdot \frac{3}{5}$ čili 261; odtud pak se vypočítají základní tony ostatních oktav, jak v posledním sloupci tabulky již uvedeno. Volba tonu a^1 jest reminiscence toho, že původně řada tonů začínala touto první písmenou abecedy. Název „ton komorní“ označoval rozdíl od „tonu chorového“, dle něhož bývaly laděny varhany a kterýž byl o celý ton vyšší.

Nynější ladění dle komorního $a^1 \ldots 435$, spočívá na mezinárodní úmluvě vídeňské z roku 1885. Před tím bývalo ladění dle míst a dle doby velmi různé, více než bychom nyní za možné pokládali. Nejstarší určení výškové, jež nám známo, jest to, jež r. 1700 provedl Sauveur v Paříži; nalezl 405; ve století 18. stoupala výška až na 425; ve století 19. stoupla ještě dále; Lissajous nalezl v roce 1857 v opeře pařížské komorní a^1 o výšce až 448; proto ustanovena nedlouho po tom nařízením ze dne 16. února 1859 pro Francii výška normalní 435. V Německu užíváno na základě úmluvy Stuttgartské z roku 1834 komorního a^1 Scheiblerova o výšce 440; číslo není pohodlno, nejsouc třemi dělitelno.

Pozoruhodný návrh učinili své doby *Sauveur* a *Chladni*, aby základem ladění bylo c^1 o výšce $256 = 2^8$; dle toho by výška každé primy v soustavě oktav byla vyjádřena mocností čísla 2, tedy na př. $C_2 \ldots 16 = 2^4$, $C \ldots 64 = 2^6$, $c^1 \ldots 256 = 2^8$ atd. Z toho by pro a^1 plynula výška $256 \cdot \frac{5}{3} = 426\frac{2}{3}$. Ladění toto zove se často *fysikalním*; má rozhodně své výhody. Číselně jest:

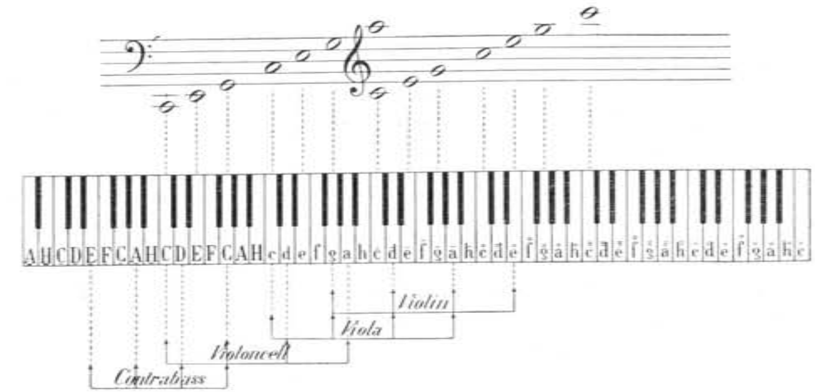
$$log\,\frac{435}{426\frac{2}{3}} = 0{\cdot}0084, \qquad log\,\frac{81}{80} = 0{\cdot}0054.$$

Komorní a^1 jest tedy při tomto ladění o půldruhého kommatu nižší; rozdíl není značný, a mohlo tudíž docela dobře ladění fysikalní býti v hudbě přijato. Znamenitý akustik, *R. Koenig* v Paříži, užívá dosud při svých akustických apparatech (ladičkách, píšťalách, resonatorech atd.) vždy ladění fysikalního. Aby vzhledem k úmluvám učiněným nevznikala v té příčině dvojakost, bude ovšem nutno ladění fysikalní vůbec opustiti a přijmouti všeobecně ladění francouzské, jež nyní se stalo mezinárodním.

Co se označení tonů písmem týče, byly užívány v dobách nejstarších zvláštní značky, neumy*), podobné skoro stenografickým znaménkům, bez jakýchkoli linií; za dob Guidonových byly tyto značky (tečky, háčky a pod.) psány na dvě linie, připomínající struny; jméno struny bylo naznačeno (na př. literkou) na začátku linie. Guido, pomíjeje původního významu linie jako struny, vedl čtyři linie a užíval značek nejen na liniích, nýbrž i v mezerách. Nyní užíváme linií pět, k nimž však připojujeme linie další (ve způsobu krátkých čárek) nahoře i dole. Kde by noty vyšly příliš nahoru neb příliš dolů, píšeme o oktavu níže, resp. výše, a připojujeme označení *8*————. Poněvadž by však ani takto linie pro všechny tony nevystačily a stěsnání všech by bylo na újmu přehlednosti, užíváme různých tak zvaných *klíčů*. Dříve se jich užívalo několik; byl klíč sopranový, altový, tenorový; nyní podržuje se hlavně klíč *violinový* a *bassový*.

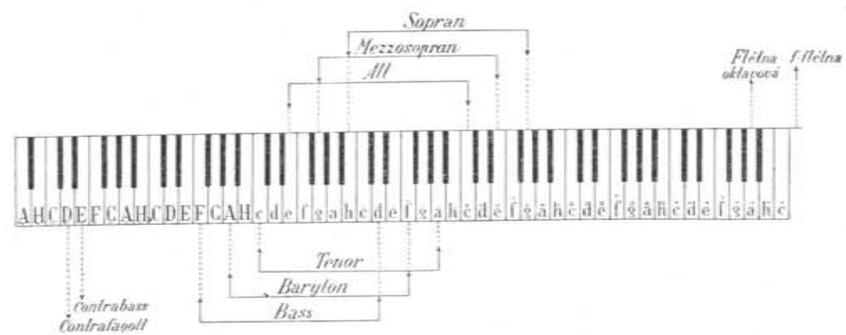
*) z řeckého νεύω (nuo) kývám, νεῦμα τό pokyn.

V obr. 72. znázorněno jest písmo notové v klíči bassovém a violinovém v souvislosti s příslušnými oktavami a to názorně ve spojení s klaviaturou piana; současně naznačeno, jaké struny



Obr. 72. Klaviatura a písmo notové ve spojení s označením tonů a jich zastoupením v nástrojích smyčcových.

mají přední nástroje hudební, totiž smyčcové. Struny violiny, violy a violoncella mají intervally kvintové, struny kontrabassu kvartové. Jak viděti, vyčerpává klíč bassový oktavu velkou a malou, klíč pak violinový oktavu jednu- a dvojčárkovanou, když totiž přestáváme na obyčejné poloze not. K doplnění obrazce



Obr. 73. Poloha hlasů v hudbě vokalní; tony nejhlubší a nejvyšší v hudbě orkestralní.

tohoto objasňuje obrazec 73. polohu hlasů lidských, mužských i ženských, a udává zároveň, jakých nejhlubších a nejvyšších tonů se vůbec v orkestralní hudbě užívá. Kontrabass a kontrafagott mají tony jdoucí ve hloubce do kontraoktavy až k tonu D_1; piana mívají jako nejhlubší ton A_2, varhany někdy až C_2. Ve výši jdou piana do c^5, nejvyšší flétna (f) má ještě d^5. Obsahuje tedy hudba, subkontraoktavu varhan spolu počítajíc, celkem na nejvýše 8 oktav, totiž

$$C_2 \;.\;.\;.\; d^5;$$

orkestralní hudba má však jen 7 oktav, totiž

$$D_1 \;.\;.\;.\; d^5.$$

Noty naznačují nejen dle své polohy výšku tonu, nýbrž též dle svého tvaru jeho trvání. Až do 12. století bylo užíváno not choralních, označujících tony stejného trvání. Z těchto not vznikly později noty mensuralní — kdež slovem „mensura“ označována byla časomíra. Tvary mensuralních not byly:

= duplex longa či maxima.

= longa, = brevis,

= semi brevis (naše),

= minima (naše),

= semiminima (naše),

= fusa . . (naše),

= semifusa . (naše).

Doba, kterou vyměřujeme každé z not těchto, stanovena jest taktem (franc. mesure, ital. tatto, misura), který lze přesně určiti na př. metronomem Mälzelovým*).

§ 50. Ladění přirozené.

Komorním a^1 o výšce 435 jest dán základ ladění; z něho vypočteme v téže oktavě primu c^1 dle poměru sexty $\frac{3}{5}$ na $435 \times \frac{3}{5} = 261$. Majíce takto prvý stupeň oktavy, počítáme všechny ostatní dle přesných výšek relativních.

*) K rychlé orientaci o mnohých hudebních pojmech a definicích slouží velmi dobře „Hudební slovník“, Jan Malát, 1891.

Pro stupnici durovou obdržíme:

$$\begin{array}{llcl}
c^1 & \dots\; 261 \times 1 & = & 261 \\
d^1 & \dots\; 261 \times \frac{9}{8} & = & 293\frac{5}{8} \\
e^1 & \dots\; 261 \times \frac{5}{4} & = & 326\frac{1}{4} \\
f^1 & \dots\; 261 \times \frac{4}{3} & = & 348 \\
g^1 & \dots\; 261 \times \frac{3}{2} & = & 391\frac{1}{2} \\
a^1 & \dots\; 261 \times \frac{5}{3} & = & 435 \\
h^1 & \dots\; 261 \times \frac{15}{8} & = & 489\frac{3}{8}.
\end{array}$$

Od čísel těchto přejdeme pak do oktav nižších neb vyšších dělíce neb násobíce postupně dvěma.

Podobným způsobem počítáme výšky absolutní pro stupnici mollovou. Snížení velké tercie, sexty a septimy na malou, t. j. o půl tonu $\frac{25}{24}$, označuje se v hudbě připojením slabiky *—es*, čímž vznikají tony *es*, *as*, *hes*. Tak obdržíme:

$$\begin{array}{llcl}
c^1 & \dots\; 261 \times 1 & = & 261 \\
d^1 & \dots\; 261 \times \frac{9}{8} & = & 293\frac{5}{8} \\
es^1 & \dots\; 261 \times \frac{6}{5} & = & 313\frac{1}{5} \\
f^1 & \dots\; 261 \times \frac{4}{3} & = & 348 \\
g^1 & \dots\; 261 \times \frac{3}{2} & = & 391\frac{1}{2} \\
as^1 & \dots\; 261 \times \frac{8}{5} & = & 417\frac{3}{5} \\
hes^1 & \dots\; 261 \times \frac{9}{5} & = & 469\frac{4}{5}.
\end{array}$$

Násobíce pak neb dělíce dvěma vypočítáme opět absolutní výšku pro oktavy ostatní.

V připojených zde tabulkách jest výsledek počtu pro obě diatonické stupnice přehledně sestaven.

Ladění, kteréž s těmito takto odvozenými čísly přesně souhlasí, zove se *ladění přirozené* (čisté), proto, poněvadž spočívá na základech, jež přírodou samou v tonech harmonických jsou položeny.

Ladění přirozené,

dle normalního $a^1 = 435 \frac{1}{sec}$.

Stupnice diatonická durová.

Oktava	c	d	e	f	g	a	h
	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
subkont.	16·31	18·35	20·39	21·75	24·47	27·19	30·59
kontra	32·63	36·70	40·78	43·5	48·94	54·38	61·17
velká	65·25	73·41	81·56	87	97·88	108·75	122·34
malá	130·5	146·81	163·13	174	195·75	217·5	244·69
1čárk.	261	293·63	326·25	348	391·5	435	489·38
2čárk.	522	587·25	652·5	696	783	870	978·75
3čárk.	1044	1174·5	1305	1392	1566	1740	1957·5
4čárk.	2088	2349	2610	2784	3132	3480	3915
5čárk.	4176	4698	5220	5568	6264	6960	7830
6čárk.	8352	9396	10440	11136	12528	13920	15660
7čárk.	16704	18792	20880	22272	25056	27840	31320
8čárk.	33408	37584	41760	44544	50112	55780	62640

Ladění přirozené,

dle normalního $a^1 = 435 \frac{1}{sec}$.

Stupnice diatonická mollová.

Oktava	c	d	es	f	g	as	hes
	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$
subkont.	16·31	18·35	19·58	21·75	24·47	26·1	29·36
kontra	32·63	36·70	39·15	43·5	48·94	52·2	58·73
velká	65·25	73·41	78·3	87	97·88	104·4	117·45
malá	130·5	146·81	156·6	174	195·75	208·8	234·9
1čárk.	261	293·63	313·2	348	391·5	417·6	469·8
2čárk.	522	587·25	626·4	696	783	835·2	939·6
3čárk.	1044	1174·5	1252·8	1392	1566	1670·4	1879·2
4čárk.	2088	2349	2505·6	2784	3132	3340·8	3758·4
5čárk.	4176	4698	5011·2	5568	6264	6681·6	7516·8
6čárk.	8352	9396	10022·4	11136	12528	13363·2	15033·6
7čárk.	16704	18792	20044·8	22272	25056	26726·4	30067·2
8čárk.	33408	37584	40089·6	44544	50112	53452·8	60134·4

§ 51. Stupnice chromatická.

Stupnice diatonická měkká vede již k malé tercii, malé sextě a malé septimě, tedy k tonům, jež jsou vloženy mezi stupeň druhý a třetí, pátý a šestý, šestý a sedmý. Takovéto vkládání tonů nových lze především všude tam provésti, kde intervall činí *celý ton*, ať velký nebo malý. Ton nový, vložený, obdržíme pak buď snižujíce (jako ve stupnici mollové) ton následující o půlton, anebo též zvyšujíce ton předcházející o půlton. V hudbě označuje se zvýšení tonu o půlton připojením slabiky *—is* (v písmě křížkem ♯ před notu psaným), a snížení tonu o půlton připojením slabiky *—es* (v písmě značkou ♭ před notu položenou).

Při francouzském způsobu pojmenování tonů připojuje se ke jménům ut, re, mi . . . slovo dièse (italsky diesi) při zvýšení, a slovo bémol (italsky bémolle) při snížení; tedy na př. sol dièse = *gis*, sol bémol = *ges*. Odtud ton o půl tonu zvýšiti = diéser, snížiti = bémoliser.

Při tomto zvyšování neb snižování tonů lze postupovati způsobem dvojím, buď dle staršího pravidla, jež se zove *Aristoxenovým*, nebo dle novějšího, jež se zove *Delezenne-ovým*.

Pravidlo *Aristoxenovo**) přijímá pro snížení a zvýšení tonů *malý půlton* $\frac{25}{24}$, týž, kterým se při přechodu ze stupnice diatonické durové do mollové tvoří malá tercie, malá sexta a malá septima. Doplníme-li tedy původní stupnici diatonickou novými tony vloženými, obdržíme tak zvanou stupnici *chromatickou*, a to durovou, když postupujeme po tonech zvýšených (*—is*) a mollovou, když postupujeme po tonech snížených (*—es*). Onen malý půlton, kterým se zvyšování a snižování děje, zove se *chromatickým*.

Jak se poloha nových těchto tonů ve stupnici utváří, rozhoduje počet; výsledek jeho podává tabulka následující. V prvém sloupci jest jméno tonu dle obvyklého v hudbě označení, v druhém sloupci jest udán způsob, jak se dle pravidla Aristoxenova ton tento určí; třetí a čtvrtý sloupec obsahuje relativní výšky, a to třetí výšky číselné, čtvrtý výšky logarithmické; odlehlosti tonů jsou přímo dány differencemi výšek logarithmických.

---

*) *Aristoxenos* Tarentský, žák Aristotelův, nejstarší spisovatel hudební, napsal velký spis „Základy harmonie" (Ἁρμονικὰ στοιχεῖα) a „Základy rhythmiky" (Ῥυθμικὰ στοιχεῖα), z prvého se nám zachovaly 3 knihy, z druhého jedna.

Stupnice chromatická dle pravidla Aristoxenova.

Ton		relativní výška	num.		log	
c		$1 = 1$	1		0	
	cis	$1 \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{24}$		1·0417		0·01773
	des	$\frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$		1·0800		0·03342
d		$\frac{9}{8} = \frac{9}{8}$	1·1250		0·05115	
	dis	$\frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64}$		1·1719		0·06888
	es	$\frac{5}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{6}{5}$		1·2000		0·07918
e		$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$	1·2500		0·09691	
f		$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$	1·3333		0·12494	
	fis	$\frac{4}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{18}$		1·3889		0·14267
	ges	$\frac{3}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{36}{25}$		1·4400		0·15836
g		$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	1·5000		0·17609	
	gis	$\frac{3}{2} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{16}$		1·5625		0·19382
	as	$\frac{5}{3} \cdot \frac{24}{25} = \frac{8}{5}$		1·6000		0·20412
a		$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$	1·6667		0·22185	
	ais	$\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$		1·7361		0·23958
	hes	$\frac{15}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{9}{5}$		1·8000		0·25527
h		$\frac{15}{8} = \frac{15}{8}$	1·8750		0·27300	
c		$2 = 2$	2·0000		0·30103	

Z tabulky této poznáváme: Tony zvýšené (*—is*) jsou *pod* tony sníženými (*—es*). Intervall mezi tonem zvýšeným a sníženým činí

$$\text{číselně} \ldots \begin{cases} \text{buď } \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80} = 1{\cdot}0368 \\ \text{nebo } \frac{128}{125} \quad = 1{\cdot}0240 \end{cases}$$

$$\text{logarithmicky} \begin{Bmatrix} \text{buď } 0{\cdot}01569 \\ \text{nebo } 0{\cdot}01030 \end{Bmatrix} \text{diff.} = 0{\cdot}0054\bar{0} = \text{komma},$$

dle toho, zda-li intervall, do něhož oba tyto nové tony vstoupily, byl celý ton velký nebo malý. To plyne též z identity:

$$\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{128}{125}$$

$$\frac{9}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80} = \frac{25}{24} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$$

Pravidlo Aristoxenovo, zde provedené, není od theoretiků hudebních všeobecně přijato. Jeho vadou jest, že ve stupnici přichází *dvojí* půlton, *malý* $\left(\frac{25}{24}\right)$ při zvyšování a snižování, tak zvaný chromatický, a *velký* $\left(\frac{16}{15}\right)$, který již ve stupnici diatonické jest, totiž mezi stupněm třetím a čtvrtým, sedmým a osmým, a který se zove diatonickým. Proto se dává přednost pravidlu *Delezenne-ově**). Dle tohoto děje se i zvyšování i snižování půltonem *velkým*. Avšak tím stane se, že ton zvýšený přijde *nad* ton snížený, opačně než u pravidla předešlého. Aby tudíž nevznikl mezi oběma pravidly velký rozdíl, přijímá se ton zvýšený na místě snížení tonu následujícího, a ton snížený na místě zvýšení tonu předcházejícího. Odtud pravidlo Delezenne-ovo, jež na první pohled se jeví býti zvláštním: Daný ton v diatonické stupnici se zvýší, když se *následující* o velký půlton *sníží* — a naopak, daný ton v diatonické stupnici se sníží, když se *předcházející* o velký půlton *zvýší*. Jak se dle tohoto pravidla tony zvýšené (*—is*) a snížené (*—es*) utváří, objasňuje následující tabulka, jejíž uspořádání jest totéž jako tabulky předešlé.

*) *Delezenne Charles* (1776—1866), učitel mathematiky, v mladém věku též učitel v rodině Beauharnais a Bonaparte, později na lyceu v Paříži a ve svém rodném městě Lille. Psal četná pojednání mathem. a fysikalní, mezi těmito mnohá akustická.

Stupnice chromatická dle principu Delezenne-ova.

Ton	relat. výška	num.	log
c	$1 = 1$	1	0
cis	$\frac{9}{8} \cdot \frac{15}{16} = \frac{135}{128}$	1·0547	0·02312
des	$1 \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15}$	1·0667	0·02803
d	$\frac{9}{8} = \frac{9}{8}$	1·1250	0·05115
dis	$\frac{5}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{75}{64}$	1·1719	0·06888
es	$\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5}$	1·2000	0·07918
e	$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$	1·2500	0·09691
f	$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$	1·3333	0·12494
fis	$\frac{3}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{32}$	1·4062	0·14806
ges	$\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} = \frac{64}{45}$	1·4222	0·15297
g	$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	1·5000	0·17609
gis	$\frac{5}{3} \cdot \frac{15}{16} = \frac{25}{16}$	1·5625	0·19382
as	$\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{5}$	1·6000	0·20412
a	$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$	1·6667	0·22185
ais	$\frac{15}{8} \cdot \frac{15}{16} = \frac{225}{128}$	1·7578	0·24497
hes	$\frac{5}{3} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{9}$	1·7778	0·24988
h	$\frac{15}{8} = \frac{15}{8}$	1·8750	0·27300
c	$2 = 2$	2·0000	0·30103

Z tabulky této plyne: Tony zvýšené (*—is*) jsou opět *pod* sníženými (*—es*), ovšem nikoli dle výsledku zvýšení a snížení, nýbrž dle dohody, jak se označují. Intervall mezi tonem zvýšeným a sníženým činí

$$\text{číselně} \ldots \begin{cases} \text{buď } \frac{128}{125} \cdot \frac{80}{81} = 1{\cdot}0114 \\ \text{nebo } \frac{128}{125} \qquad = 1{\cdot}0240 \end{cases}$$

$$\text{logarithmicky} \begin{Bmatrix} \text{buď } 0{\cdot}00491 \\ \text{nebo } 0{\cdot}01030 \end{Bmatrix} \text{diff.} = 0{\cdot}0054\bar{0} = \text{komma}$$

opět dle toho, zda-li intervall, do něhož oba tony vstoupily, byl celý ton velký nebo malý. To plyne též z identity

$$\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{125}{128}$$

$$\frac{9}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80} = \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{125}{128} \cdot \frac{81}{80}.$$

Jak viděti, při velkém celém tonu dává pravidlo druhé oba půltony těsněji u sebe (0·9 kommatu) než pravidlo prvé (2·9 kommatu); při malém celém tonu, jenž jest složen z půltonu velkého a malého, zůstává výsledek u obou pravidel týž.

§ 52. **Ladění Pythagorejské.**

Veliké zajímavosti a důležitosti jest princip ladění tak zvaný Pythagorejský. Při tomto klade se důraz na *dva nejdůležitější intervally* stupnice diatonické, totiž intervall *oktavy* $\left(\frac{2}{1}\right)$ a intervall *kvinty* $\left(\frac{3}{2}\right)$. Děje se tedy ladění tak, že se od tonu základního postupuje *jenom v kvintách* a *oktavách*, při čemž se obraty oktavovými zůstává v mezích, jež jsou dány tonem základním a jeho oktavou.

Toto postupování může se však díti *způsobem dvojím*; buď v kvintách v před a v oktavách zpět, anebo v oktavách v před a v kvintách zpět.

1. Proveďme ladění dle způsobu prvého. Krok v před o kvintu znamená násobení koefficientem $\frac{3}{2}$, krok zpět o oktavu násobení koefficientem $\frac{1}{2}$. V relativních výškách, jež tím způsobem vznikají, vystupují tedy zlomky, jichž čitatel a jmenovatel jsou mocnosti čísel 2 a 3. Výsledek objasňuje tabulka následující.

Ladění Pythagorejské.

Postup ve kvintách v před a v oktavách zpět.

Provedení číselné	Ton	num.	log
$1 = 1$	*c*	1	0
$1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	*g*	1·5000	0·17609
$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$	*d*	1·1250	0·05115
$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^4} = \frac{27}{16}$	*a*	1·6875	0·22724
$\frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$	*e*	1·2656	0·10231
$\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}$	*h*	1·8984	0·27840
$\frac{243}{128} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^6}{2^9} = \frac{729}{512}$	*fis*	1·4238	0·15346
$\frac{729}{512} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$	*cis*	1·0679	0·02852
$\frac{2187}{2048} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^8}{2^{12}} = \frac{6561}{4096}$	*gis*	1·6018	0·20461
$\frac{6561}{4096} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^9}{2^{14}} = \frac{19683}{16384}$	*dis*	1·2014	0·07967
$\frac{19683}{16384} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^{10}}{2^{15}} = \frac{59049}{32768}$	*ais*	1·8020	0·25576
$\frac{59049}{32768} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^{11}}{2^{17}} = \frac{177147}{131072}$	*eis*	1·3515	0·13082
$\frac{177147}{131072} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^{12}}{2^{18}} = \frac{531441}{262144}$	*his*	2·0273	0·30692
$\frac{531441}{262144} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$	*His*	1·0136	0·00589

Když tedy ladíme způsobem právě provedeným, že postupujeme v kvintách v před a v oktavách zpět, přicházíme konečně k témuž — téměř — tonu základnímu, od něhož jsme vyšli, ale ne přesně k témuž tonu, nýbrž k tonu o malý intervall *vyššímu*. Tento intervall činí

$$\text{číselně} \ldots \frac{3^{12}}{2^{19}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{1}\right)^{7} = 1{\cdot}0136$$

logarithmicky . . . $0{\cdot}0058\bar{9}$,

a nazývá se *kommatem Pythagorejským*.

Kdyby bylo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \doteq 1,$$

t. j. kdyby 12 kroků kvintových činilo tolik jako 7 kroků oktavových, zakončilo by ladění přesně týmž tonem, od něhož jako základního bylo začato.

2. Proveďme dále ladění dle způsobu druhého. Krok v před o oktavu znamená násobení koefficientem $\frac{2}{1}$, krok zpět o kvintu násobení koefficientem $\frac{2}{3}$. Opět jsou v relativních výškách tak obdržených obsaženy jen mocnosti čísel 2 a 3. Výsledek objasňuje tabulka následující.

Postup zde vylíčený, dle prvého i dle druhého způsobu, jest v obou tabulkách vyjádřen *v mluvě čísel*. Velmi dobře lze k doplnění toho užiti methody názorné, *grafické*, zejména při vyučování. K cíli tomu opíše se poloměrem dostatečně velkým kruh. Obvodem tohoto kruhu čili středovým úhlem 360^0 znázorňujeme intervall oktavový. Vypočítáme pak, jak veliký jest středový úhel, kterým se znázorňuje intervall kvintový. Logarithmické intervally jsou zde (§ 43.)

oktava . . úhel 360^0 1

kvinta . . úhel x . . . . . . $\dfrac{log\ \frac{3}{2}}{log\ 2} = 0{\cdot}58496$

tudíž $x = 360^0 \cdot 0{\cdot}58496 = 210{\cdot}586^0$.

Položíce tedy na nejvyšší bod kruhu ton *c*, umístíme tony další dle obou způsobů ladění, když o tento úhel (jehož tětivu si jednou pro vždy sestrojíme) na obvodu kruhovém pokračujeme a to dle prvého způsobu ladění v pravo, dle druhého způsobu ladění v levo. Velmi názorně ukáže se pak rozdíl obou způsobů ladění, vynikne Pythagorejské komma a objasní se mnohá jiná pěkná podrobnost.

Ladění Pythagorejské.

Postup v oktavách v před a v kvintách zpět.

Provedení číselné	Ton	num.	log
1	*c*	1	0
$1 \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$	c^1	2·0000	0·30103
$2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$	*f*	1·3333	0·12494
$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9}$	*hes*	1·7778	0·24988
$\frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^5}{3^3} = \frac{32}{27}$	*es*	1·1852	0·07379
$\frac{32}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^7}{3^4} = \frac{128}{81}$	*as*	1·5802	0·19873
$\frac{128}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$	*des*	1·0535	0·02263
$\frac{256}{243} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^{10}}{3^6} = \frac{1024}{729}$	*ges*	1·4047	0·14757
$\frac{1024}{729} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^{12}}{3^7} = \frac{4096}{2187}$	*ces*	1·8729	0·27251
$\frac{4096}{2187} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^{13}}{3^8} = \frac{8192}{6561}$	*fes*	1·2486	0·09642
$\frac{8192}{6561} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^{15}}{3^9} = \frac{32768}{19683}$	*heses*	1·6648	0·22136
$\frac{32768}{19683} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^{16}}{3^{10}} = \frac{65536}{59049}$	*eses*	1·1099	0·04527
$\frac{65536}{59049} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2^{18}}{3^{11}} = \frac{262144}{177147}$	*asas*	1·4798	0·17021
$\frac{262144}{177147} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{524288}{531441}$	*deses*	0·9865	— 0·00589

Výsledek ladění tohoto jest povšechně jiný než předešlého; v tom však jeví se souhlas, že se ladění vrací k témuž — téměř — tonu základnímu, od něhož vyšlo; úchylka jest stejná jako dříve, ale připadá na opačnou stranu; ton, k němuž se vracíme, jest o týž intervall *Pythagorejského kommatu* proti tonu základnímu *nižší*. Důvod jest týž, jako před tím, poněvadž rovnice

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} \doteq 1$$

platí jen přibližně; sedm kroků oktavových jest jen přibližně tolik, jako dvanáct kvintových, totiž až na *Pythagorejské komma.*

Srovnávajíce obyčejné komma, kteréž se často zove též *syntonickým* nebo *Didymickým* *), s kommatem Pythagorejským, obdržíme tyto vztahy:

$$\frac{81}{80} = 1{\cdot}0125, \qquad log\,\frac{81}{80} = 0{\cdot}0054\bar{0},$$

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{\cdot}0136, \qquad log\,\frac{3^{12}}{2^{19}} = 0{\cdot}0058\bar{9}.$$

Komma Pythagorejské jest tedy proti kommatu Didymickému o něco větší; v logarithmu činí rozdíl 0·00040, což jest asi 7% hodnoty průměrné 0·00564. Ještě lépe vynikne vztah obou kommat, když se vezme v počet intervall mezi velkým a malým půltonem

$$\frac{16}{15} : \frac{25}{24} = \frac{128}{125};$$

komma Pythagorejské činí tři kommata obyčejná, zmenšená o tento intervall, dle vztahu:

$$\left(\frac{81}{80}\right)^{3} : \frac{128}{125} = \frac{3^{12}}{2^{19}}.$$

Z obou provedených způsobů ladění obdržíme *stupnici Pythagorejskou*, v následující tabulce obsaženou, o tonech hlavních, zvýšených a snížených. Hraje-li se po tonech celých a zvýšených, zove se chromatickou dur; hraje-li se po tonech celých a snížených, chromatickou moll.

*) *Didymos,* narozen r. 63 před Kr. v Alexandrii, starořecký grammatik, žák Aristarchův, jako spisovatel neobyčejně činný; v díle svém o harmonice, jež se nám zachovalo jen v úryvcích, rozeznával — oproti Pythagorejskému ladění — velký a malý celý ton ($^9|_8$ a $^{10}|_9$); proto se komma, jakožto intervall obou, zove též Didymické.

Stupnice Pythagorejská na základě ladění vzestupného i sestupného.

Ton	relat. výška	num.	log
c	1	1	0
des	$2^8 : 3^5 = \frac{256}{243}$	1·0535	0·02263
cis	$3^7 : 2^{11} = \frac{2187}{2048}$	1·0679	0·02852
d	$3^2 : 2^3 = \frac{9}{8}$	1·1250	0·05115
es	$2^5 : 3^3 = \frac{32}{27}$	1·1852	0·07379
dis	$3^9 : 2^{14} = \frac{19683}{16384}$	1·2014	0·07967
e	$3^4 : 2^6 = \frac{81}{64}$	1·2656	0·10231
f	$2^2 : 3 = \frac{4}{3}$	1·3333	0·12494
ges	$2^{10} : 3^6 = \frac{1024}{729}$	1·4047	0·14757
fis	$3^6 : 2^9 = \frac{729}{512}$	1·4238	0·15346
g	$3 : 2 = \frac{3}{2}$	1·5000	0·17609
as	$2^7 : 3^4 = \frac{128}{81}$	1·5802	$0{\cdot}1987\bar{3}$
gis	$3^8 : 2^{12} = \frac{6561}{4096}$	1·6018	0·20461
a	$3^3 : 2^4 = \frac{27}{16}$	1·6875	0·22724
hes	$2^4 : 3^2 = \frac{16}{9}$	1·7778	0·24988
ais	$3^{10} : 2^{15} = \frac{59049}{32768}$	1·8020	0·25576
h	$3^5 : 2^7 = \frac{243}{128}$	1·8984	0·27840
c	2	2·0000	0·30103

Z tabulky poznáváme především, že tony zvýšené (*—is*) jsou *vyšší* než sousední tony snížené (*—es*). Výsledek tonto jest pozoruhodný; jím liší se ladění Pythagorejské od ladění dle pravidel — dříve uvedených — Aristoxenova a Delezenne-ova. Intervall mezi tonem zvýšeným a sousedním sníženým činí konstantně *Pythagorejské komma.* Také půlton, o který se jeví hlavní ton zvýšeným neb sníženým, jest konstantní, a činí

$$\text{číselně} \ \ldots \ \frac{256}{243} = 1{\cdot}0535,$$
$$\text{logarithmicky} \quad = 0{\cdot}02263;$$

nazývá se *půlton Pythagorejský.* Formalně jest zde souhlas s pravidlem Delezenne-ovým. Ton zvýšený (*—is*) se obdrží, když se *následující* o půlton $\frac{256}{243}$ *sníží*; a podobně ton snížený (*—es*) se obdrží, když se předcházející o půlton $\frac{256}{243}$ *zvýší.* Týž půlton jest též mezi *e—f* a *h—c.* Formalně jest souhlas, ale věcně jest rozdíl; neboť tony zvýšený a snížený *zamění svá místa.*

Důvod toho jest ihned patrný. Ve stupnici Pythagorejské přichází *jednotný* celý ton, totiž *velký* $\frac{9}{8}$; ale Pythagorejský půlton jest o komma *menší* než diatonický, dle relace

$$\text{číselné} \ \frac{256}{243} = \frac{16}{15} \cdot \frac{80}{81},$$

logarithmické $0{\cdot}02263 = 0{\cdot}02803 - 0{\cdot}00540$.

Proto zůstane na př. ton *cis* snížením tonu *d* vznikající *blíže* u tohoto *d* a ton *des* zvýšením tonu *c* vznikající *blíže* u tohoto *c*, tak že jest pořádek *c, des, cis, d*; u ladění dle pravidla Delezenne-ova jest však pořádek *c, cis, des, d.*

Číselné hodnoty relativních výšek objasní se ještě lépe úvahou následující. Vyjdeme-li od tonu základního 1 a pokročíme-li o dva kroky kvintové v před $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)$ a o krok oktavový zpět $\left(\frac{1}{2}\right)$, obdržíme *velkou sekundu* $\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}\right)$ onoho tonu základního. Poněvadž pak každé opakování tohoto způsobu dává opět sekundu tonu předešlého, obdržíme, takto ladíce, řadu *tonů aequidistantních,* jichž konstantní odlehlost činí *velký celý ton* $\frac{9}{8}$. A co tuto platí pro směr vzestupný, positivní, platí

právě tak pro sestupný, negativní, kde jdeme ve kvintách zpět $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$ a v oktavě v před $\left(\frac{2}{1}\right)$, obdržíme opět velkou sekundu $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{9}\right)$ ale spodní. Obě řady těchto tonů vyniknou ze sestavení následujícího.

$\xrightarrow{+}$

c	*d*	*e*	*fis*	*gis*	*ais*	*his*
1	$\frac{9}{8}$	$\left(\frac{9}{8}\right)^2$	$\left(\frac{9}{8}\right)^3$	$\left(\frac{9}{8}\right)^4$	$\left(\frac{9}{8}\right)^5$	$\left(\frac{9}{8}\right)^6$
g	*a*	*h*	*cis*^{1}	*dis*^{1}	*eis*^{1}	*fisis*^{1}
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8}$	$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2$	$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^3$	$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4$	$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^5$	$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^6$

$\xleftarrow{-}$

deses	*eses*	*fes*	*ges*	*as*	*hes*	*c*^{1}
$\left(\frac{8}{9}\right)^6 \cdot 2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^5 \cdot 2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^4 \cdot 2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot 2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot 2$	$\frac{8}{9} \cdot 2$	2
Geses	*Asas*	*Heses*	*Ces*	*des*	*es*	*f*
$\left(\frac{8}{9}\right)^6 \cdot \frac{4}{3}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^5 \cdot \frac{4}{3}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^4 \cdot \frac{4}{3}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{3}$	$\frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

Krajní tony každé řady mají intervall

$$\left(\frac{9}{8}\right)^6 = 2 \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7,$$

což jest oktava 2, o komma Pythagorejské zvětšená; šest kroků o velký celý ton vyplní tedy téměř oktavu, překročic ji o komma Pythagorejské. Týž intervall kommatu Pythagorejského ukazuje se u tonů korrespondujících, jako *ais, hes* nebo *gis, as* atd., při čemž jsou tony *—is* o toto komma výše než tony *—es.*

Vytkněme nyní ještě hlavní stupně (I—VIII) stupnice Pythagorejské; obdržíme pro relativní výšky a pro intervally stupnice durové i mollové výsledky následující.

Stupnice dur:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{256}{243}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{256}{243}\right)$	

anebo logarithmicky:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	0·05115	0·10231	0·12494	0·17609	0·22724	0·27840	0·30103

(0·05115) (0·05116) (0·02263) (0·05115) (0·05115) (0·05116) (0·02263).

Stupnice moll:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{16}{9}$	2

$\left(\frac{9}{8}\right)$ $\left(\frac{256}{243}\right)$ $\left(\frac{9}{8}\right)$ $\left(\frac{9}{8}\right)$ $\left(\frac{256}{243}\right)$ $\left(\frac{9}{8}\right)$ $\left(\frac{9}{8}\right)$

anebo logarithmicky:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	0·05115	0·07379	0·12494	0·17609	0·19873	0·24988	0·30103

(0·05115) (0·02264) (0·05115) (0·05115) (0·02264) (0·05115) (0·05115).

Srovnáme-li tedy stupnici diatonickou dur a moll dle ladění přirozeného a dle ladění Pythagorejského, vidíme úplný souhlas v těch tonech hlavních, jež jsou *společny stupnici durové a mollové*, totiž v primě, sekundě, kvartě, kvintě a oktavě. Ty tony, jež se v obou těch stupnicích mění, totiž tercie, sexta a septima, jsou ve stupnici Pythagorejské oproti ladění čistému o komma rozdílné, a to *vyšší* ve stupnici tvrdé, *nižší* ve stupnici měkké, dle vztahů:

$$\frac{81}{64}=\frac{5}{4}\cdot\frac{81}{80} \qquad \frac{32}{27}=\frac{6}{5}\cdot\frac{80}{81}$$
$$\frac{27}{16}=\frac{5}{3}\cdot\frac{81}{80} \qquad \frac{128}{81}=\frac{8}{5}\cdot\frac{80}{81}$$
$$\frac{243}{128}=\frac{15}{8}\cdot\frac{81}{80} \qquad \frac{16}{9}=\frac{9}{5}\cdot\frac{81}{80}$$

dur moll.

§ 53. **Ladění temperované.**

Rovnice, význačná pro ladění Pythagorejské,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\doteq 1$$

a vyjadřující, že 12 kroků kvintových činí jen přibližně tolik jako 7 kroků oktavových, vskutku však o komma Pythagorejské více, stane se přesnou, když se přiměřeně buď krok kvintový zmenší neb oktavový zvětší. Přijme-li se zásada, aby oktavy zůstaly čisté, nutno zmenšiti poněkud krok kvintový na

intervall x, tak aby bylo přesně

$$x^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=1 \qquad \text{čili} \qquad x=2^{\frac{7}{12}}.$$

Když tedy kroky kvintové činíme dle tohoto intervallu x, dojdeme *téhož tonu základního*, při čemž jest jednostejno, zda-li ladíme v těchto kvintách v před a v oktavách zpět anebo naopak. Kvinta x dle této zásady umenšená zove se *temperovaná*, a celé ladění, dle této kvinty a dle čisté oktavy prováděné, zove se *ladění temperované.*

Jednodušeji uvažujeme takto. Dvanáct kroků kvintových činí o Pythagorejské komma více než sedm kroků oktavových. Rovnosti docílíme, když kvintu zmenšíme o *dvanáctinu kommatu Pythagorejského.* Logarithmicky provedeme toto zmenšení velmi jednoduše, dle výšek logarithmických již častěji uváděných, rovnicí

$$0·17609 - \tfrac{1}{12} . 0·00589 = 0·17609 - 0·00049 = 0·17560.$$

Postupujíce tedy v před o tuto kvintu temperovanou 0·17560, a zpět o oktavu čistou 0·30103, obdržíme výsledek následující:

Ladění temperované ve kvintách a oktavách.

Postup ladění	log	num.	ton
0	0	1	*c*
0·00000 + 0·17560	0·17560	1·4983	*g*
0·17560 + 0·17560 — 0·30103	0·05017	1·1225	*d*
0·05017 + 0·17560	0·22577	1·6818	*a*
0·22577 + 0·17560 — 0·30103	0·10034	1·2599	*e*
0·10034 + 0·17560	0·27594	1·8877	*h*
0·27594 + 0·17560 — 0·30103	0·15051	1·4142	*fis* (*ges*)
0·15051 + 0·17560 — 0·30103	0·02508	1·0595	*cis* (*des*)
0·02509 + 0·17560	0·20069	1·5874	*gis* (*as*)
0·20069 + 0·17560 — 0·30103	0·07526	1·1892	*dis* (*es*)
0·07526 + 0·17560	0·25086	1·7818	*ais* (*hes*)
0·25086 + 0·17560 — 0·30103	0·12543	1·3348	*f*
0·12543 + 0·17560 — 0·30103	0	1	*c*

Sestavíme-li tony v přirozeném pořádku, obdržíme v rozsahu oktavy 13 tonů, poslední v to počítajíc, z nichž jest 8 hlavních, a 5 vedlejších; tyto jsou zároveň zvýšené hlavní předcházející i snížené hlavní následující. Intervally, počtem 12, jsou vesměs konstantní a mají hodnotu

číselně 1·05946, logarithmicky 0·25086.

Mezi primou a první kvintou jest sedm intervallů; odtud vysvětluje se význam rovnice

$$x = 2^{\frac{7}{12}} \text{ čili } x = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7.$$

Téhož výsledku dojdeme úvahou následující. Viděli jsme, že 6 kroků sekundových činí přibližně totéž jako jeden krok oktavový, vskutku však o komma Pythagorejské více. Jest tedy jen přibližně

$$\left(\frac{9}{8}\right)^6 \doteq 2.$$

Abychom dosáhli plné rovnosti, zmenšíme velkou sekundu na intervall y tak, aby bylo přesně

$$y^6 = 2,$$

tudíž

$$y = 2^{\frac{1}{6}}, \quad \text{čili} \quad y = \left(\sqrt[12]{2}\right)^2.$$

Jest pak intervall této *temperované sekundy* zmenšen o šestinu kommatu Pythagorejského. Opět se tu dostavuje intervall $\sqrt[12]{2}$, jenž jest v intervallu temperované sekundy obsažen dvakrát.

Vidíme již, že lze *početně* tuto hudební temperaturu též takto vyložiti. Celá oktava rozdělí se na dvanáct stejných intervallů půltonových po $\sqrt[12]{2}$ a počítá se, jak v následující tabulce udáno.

Ladění temperované.

Ton	Relat. výška	num.		log	
c	1	1		0	
cis-des	$2^{\frac{1}{12}} = 1·05946$		1·0595		0·02508
d	$2^{\frac{2}{12}} = 1·05946^2$	1·1225		0·05017	
dis-es	$2^{\frac{3}{12}} = 1·05946^3$		1·1892		0·07526
e	$2^{\frac{4}{12}} = 1·05946^4$	1·2599		0·10034	
f	$2^{\frac{5}{12}} = 1·05946^5$	1·3348		0·12543	
fis-ges	$2^{\frac{6}{12}} = 1·05946^6$		1·4142		0·15051
g	$2^{\frac{7}{12}} = 1·05946^7$	1·4983		0·17560	
gis-as	$2^{\frac{8}{12}} = 1·05946^8$		1·5874		0·20069
a	$2^{\frac{9}{12}} = 1·05946^9$	1·6818		0·22577	
ais-hes	$2^{\frac{10}{12}} = 1·05946^{10}$		1·7818		0·25086
h	$2^{\frac{11}{12}} = 1·05946^{11}$	1·8877		0·27594	
c[1]	2	2·0000		0·30103	

Vzhledem k tomu, že ve stupnici takto temperované jsou intervally sousedních tonů vesměs konstantní, zove se temperatura *stejnoměrná*, a stupnice *stejnoměrně temperovaná* (franc. la gamme temperée, angl. scale of equal temperament).

Dvanáctina kommatu Pythagorejského zove se *schisma*. V ladění temperovaném jest tedy kvinta o schisma menší proti kvintě přirozené. Šest temperovaných kroků sekundových jest o dvě schismata menší proti šesti sekundovým krokům velkým.

Dle udání, jež činí *Matheson* (Critica Musica 1725) a jež přijímá též *Helmholtz*, vynalezli ladění stejnoměrně temperované ve století 18tém *Neidhard* (kapelník) a *Werkmeister* (organist). V době novější reklamují fysikové hollandští (van *Schaik*) prioritu pro *S. Stevina* (1548—1620, viz Mechanika, pag. 197, 1901), uvádějíce jeho pojednání: „Van der Spiegeling der Singconst" (1608), kteréž ovšem zůstalo své doby v manuskriptu; přece však lze za to míti, že jeho obsah pronikl do mnohých kruhů hudebních, tak že dle toho ladění rovnoměrně temperované bylo známo již ve století 17tém.

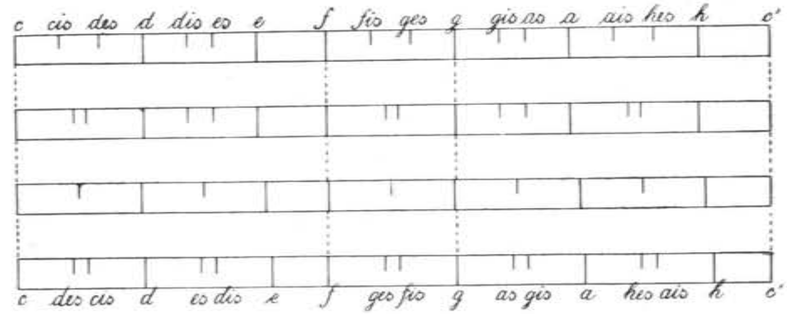
§ 54. Přehled různých druhů ladění.

Zbývá ještě podati přehled všech dosavad vykládaných způsobů ladění. K přehledu takovému hodí se méně výšky číselné, při nichž intervally se stanoví *poměry*, často složitými, za to hodí se velmi dobře výšky logarithmické, při nichž se intervally určují *rozdíly*. V tomto smyslu sestavena tabulka následující. Ladění temperovaná jsou v ní umístěna uprostřed, ladění Aristoxenovo a Delezenneovo na jednom, Pythagorovo na druhém kraji, z toho důvodu, že u poslední stupnice pořádek tonů zvýšených (—*is*) a snížených (—*es*) jest obrácený než u stupnic prvnějších. Při užívání tabulky jest dobře míti na paměti, že logarithmická výška kommatu Didymského činí $0{\cdot}0054\overline{0}$, Pythagorejského $0{\cdot}0058\overline{9}$. Všem stupnicím společné jsou tony krajní *c* a c^1.

Logarithmické výšky tonů stupnice chromatické.

Ton	Dle ladění: Aristoxenova	Delezenneova	temperovaného	Pythagorova	Ton
c	0	0	0	0	*c*
cis	0·01773	0·02312	0·02508	0·02263	*des*
des	0·03342	0·02803		0·02852	*cis*
d	0·05115	0·05115	0·05017	0·05115	*d*
dis	0·06888	0·06888	0·07526	0·07379	*es*
es	0·07918	0·07918		0·07967	*dis*
e	0·09691	0·09691	0·10034	0·10231	*e*
f	0·12494	0·12494	0·12543	0·12494	*f*
fis	0·14267	0·14806	0·15051	0·14757	*ges*
ges	0·15836	0·15297		0·15346	*fis*
g	0·17609	0·17609	0·17560	0·17609	*g*
gis	0·19382	0·19382	0·20069	0·19873	*as*
as	0·20412	0·20412		0·20461	*gis*
a	0·22185	0·22185	0·22577	0·22724	*a*
ais	0·23958	0·24497	0·25086	0·24988	*hes*
hes	0·25527	0·24988		0·25576	*ais*
h	0·27300	0·27300	0·27594	0·27840	*h*
c	0·30103	0·30103	0·30103	0·30103	*c*

Ještě lepší přehled než tato tabulka podává diagramm všech těchto stupnic, na základě výšek logarithmických v obr. 74. sestrojený. Diagramm představuje idealní umístění klavesů ve stupnicích, totiž takové, jež by přesně intervally výškové vyjadřovalo.



Obr. 74. Diagramm ladění Aristoxenova, Delezenneova, temperovaného a Pythagorova.

Jak se utváří vlastní kmitočty v těchto různých způsobech ladění, a to na základě buď normalního $a^1 = 435$ nebo fysikalního $c^1 = 256$, jest patrno z obšírných tabulek dílu tomuto na konci připojených.

§ 55. Poměr ladění temperovaného a přirozeného.

Otázka, jakou měrou jest ladění temperované vzhledem k zákonům harmonickým oprávněno a jaký jest jeho poměr k ladění přirozenému, byla předmětem četných úvah a diskussí*). Se stanoviska fysikalního a uměleckého jest odpověď, jakou na tuto otázku dlužno dáti, zcela jasná. Ladění temperované jest postulatem *hudební techniky*, a zároveň koncessí *hudebního umění*; jest výpomocí, kterou přijímáme, kde toho vyžadují důvody praktické, nemůže však býti cílem tam, kde mohou k platnosti přijíti požadavky umělecké. Zde jest na místě jediné ladění přirozené, kteréž hudebně cvičený sluch sám žádá. Vskutku zpěvák umělec anebo virtuos hudební, který ton sám tvoří, ani jinak nezpívá a jinak nehraje než dle *ladění přirozeného*. Jest ovšem

*) *H. Helmholtz*, v klassickém díle svém: „Lehre von den Tonempfindungen" (IV. vyd. r. 1877) věnuje otázce této celý oddíl XVI, pag. 501—533.

po dnes rozšířen názor, autoritou *Cornu-ho* a *Mercadiera**) podporovaný, jako by umělci v *melodii* užívali intervallů Pythagorejských a jen v *harmonii* přirozených, kterýmžto názorem byl konstruován dvojí hudební princip, melodický a harmonický. Avšak názor tento jeví se býti dle nejnovějších pozorování nesprávným. *G. Zambiazi* konstatoval**) způsobem objektivním, totiž grafickým měřením intervallů u zpívaných a a hraných melodií, že takový dualismus hudební neexistuje. Jestliže tu i tam vedle intervallů čistých se vyskytují též Pythagorejské, vysvětluje se odchylka tato nenuceně mimovolnou modulací v toninách příbuzných. Zpívá-li někdo na př. g, a, h, zpívá je mimovolně jako c, d, e, poněvadž g, a, h je týž postup v tonině g jako c, d, e v tonině c; v přirozeném ladění ovšem neplatí poměr $g : a : h = c : d : e$, platí však v ladění Pythagorejském. Zde by se tedy zdálo, že melodie postupuje Pythagorejsky, kdežto lze odchylku vysvětliti modulací toniny c a toniny g.

Jest tudíž v melodii i v harmonii *ladění přirozené* cílem uměleckého tvoření. Koncerty komorní, kde smyčcové nástroje umožňují hráti dle ladění přirozeného, prováděné dokonalými umělci, mají neobyčejný hudební půvab, ježto působí kouzlem čisté, žádnou hudební temperaturou nerušené harmonie. Kde jest hudební temperatura nezbytná, jako při hudbě orchestralní, při pianu, zejména však při harmoniu a varhanách, nemůže hudební dílo umělecké plnou svou krásou působiti.

Pravda jest ovšem, že v té příčině sluch náš jest poddajný, že za jistých podmínek *doplní*, co na čistotě akkordů schází, tak že nedokonalosti souzvuku v obyčejných případech ani neznamenáme. Že však nedokonalost tato existuje, vynikne ihned per contrarium, když se sestrojí na př. piano neb harmonium s laděním čistým. Takové harmonium dal na př. sestrojiti Helmholtz a popisuje výmluvně hudební krásy, jež jím přišly na jevo. V nejnovější době sestrojil S. A. *Hageman****) (Cincinnati) piano, na němž lze hráti v ladění temperovaném, ale též — na základě zvláštního mechanismu — v ladění přirozeném. Pod strunami, jak bývají též při obyčejném pianu, jsou totiž umístěny

*) Příslušné práce autorů těchto připadají do let 1869—1872 a jsou obsaženy v Compt. rend. de l'acad. des scienc. Paris.

**) G. Zambiazi, O měření melodických intervallů; Turin, Fratelli Bocca 1901. Beiblätter zu den Ann. der Physik 26, pag. 20, 1902.

***) Sill. Journ. (4) 11, pag. 224—229, 1901. Beiblätter zu den Ann. der Physik 26., pag. 21, 1902.

zvláštní můstky, kteréž lze levou nohou ovládati a kteréž se přiloží na struny tak, že se výška tonu přiměřeně zvýší neb sníží. Piano má 88 strun ($7\frac{1}{3}$ oktav), tolikéž jest můstků, každý má však několik pohyblivých částí, čímž lze obdržeti v jedné oktavě 156 tonů, v celé klaviatuře ($7\frac{1}{3}$ oktav) celkem 1144 tony. Stroj dává akkordy a melodie neobyčejně čistě a krásně. Výsledek tento jest tím přesvědčivější, poněvadž zde touž hudební skladbu lze hráti jak v ladění temperovaném tak i čistém.

Poměr ladění přirozeného a temperovaného vystižen jest odborným úsudkem následujícím, v němž se zároveň poukazuje k velmi pěkným analogiím v oboru jiném:

„Zkušenost učí nás, že sluch náš při vnímání útvarů hudebních nedbá skutečného ladění a jeho různých nesrovnalostí, t. j. on neřídí se těmi intervally, které mu vnucuje výkon hudební, co do ladění bez toho více méně nepřesný, nýbrž pouze těmi, jež souvislost melodická a harmonická, vůbec logika hudební na některém místě právě vyžaduje. Intervally a akkordy, jež slyšíme, vykládáme si ve smyslu harmonických poměrů čistých, přirozených, i když přítomné dojmy smyslové od těchto poměrů dosti povážlivě se liší, asi tak, jako tvary zobrazeného předmětu určitě poznáváme i tenkráte, když obraz z příčin technických a stilistických sebe více odchyluje se od jemných rysů svého vzoru, tedy na př. v mosaice, vyšívání, rytině, ba v kresbě vůbec, pokud totiž na místě barev a stínů plochy plně pokrývajících užívá pouhých linií a teček. Ba i ku karikatuře možno zde poukázati, v níž podobu karikovaného rozeznáváme i přes nejsmělejší zohyzdění její, jestliže jenom rysy ty nás poněkud k originálu odkazují. Vždyť víme, že harmonický význam intervallů a akkordů netrpí ani dosti značným rozladěním nástroje, že jím trpí toliko smyslová lahodnost dojmů sluchových . . . Sluch hudební netemperuje a ničím nedá se másti ve svém pojímání intervallů ve smyslu ladění čistého, přirozeného, a proto dle vnitřní harmonické souvislosti skladby činí rozdíl netoliko mezi tony enharmonickými, jež ostatně také písmem notovým rozeznáváme, nýbrž i mezi terciemi přirozenými a Pythagorejskými, vůbec mezi intervally určenými kroky terciovými a kvintovými . . . Proto vědecká nauka o harmonii musí míti za základ ladění čisté, přirozené a býti tak nezávislou na panujícím právě způsobu ladění. (Ot. Hostinský, Nové dráhy vědecké nauky o harmonii, 1887.)

Závady ladění temperovaného oproti přirozenému jest nejlépe viděti v tonech kombinačních velkého akkordu. Nahoře, v § 47. bylo poukázáno k tomu, jak při ladění přirozeném *bassové tony differenční* velkého akkordu *dotvrzují* dokonalost souzvuku. Vizme tedy, jak se věc má u ladění temperovaného. Relativní kmitočty primy, tercie a kvinty jsou zde (§ 53.)

1 1·2599 1·4983.

Odčítajíce obdržíme relativní kmitočty tonů differenčních

0·2599 0·2384 0·4983.

Při ladění přirozeném jsme měli

0·2500 0·2500 0·5000.

Abychom posoudili, jak se tyto differenční tony liší od oněch, počítejme dále logarithmicky. Vypišme tedy logarithmy těchto kmitočtů a utvořme logarithmické rozdíly. Tak obdržíme:

$$\begin{array}{rrr} 9{\cdot}41481 & 9{\cdot}37731 & 9{\cdot}69749 \\ 9{\cdot}39794 & 9{\cdot}39794 & 9{\cdot}69897 \\ \hline \underbrace{+\ 0{\cdot}01687 & -\ 0{\cdot}02063}_{0{\cdot}03750} & -\ 0{\cdot}00148 \end{array}$$

Vezmouce k rukám tabulku v § 43. uvedenou, která udává intervally stupnice diatonické, rozhodneme ihned, že jen třetí ton differenční jest laděním temperovaným málo pozměněn, jsa jen asi o 0·3 kommatu (0·00539) nižší než spodní oktava; naproti tomu jsou oba prvnější tony differenční od druhé spodní oktavy značně odchylné; prvý jest vyšší a druhý nižší přibližně o malý půlton (0·01773); mezi sebou pak se rozlišují logarithmicky o 0·03750, což činí více než velký půlton (0·02803) a méně než malý celý ton (0·04576). Dissonance obou těchto bassových tonů jest tudíž velmi značná, a jest zaviněna temperovanou *tercií*, kteráž, jak z tabulky § 54. jakož i z obrazce 74. dobře vysvítá, se od přirozené značně rozeznává, jsouc logarithmicky o 0·00343, čili téměř o 0·7 kommatu vyšší.

Měrou ještě větší ukazují se tyto dissonance v bassových tonech differenčních při ladění Pythagorejském. Relativní výšky primy, tercie a kvinty jsou zde

1, 1·2656, 1·5000,

tudíž tonů differenčních

0·2656, 1·2344, 0·5000,

kdežto při ladění přirozeném jsou tony differenční

0·2500, 0·2500, 0·5000.

Třetí ton differenční jest tedy identický, avšak prvý a druhý — následkem odchylné tercie — liší se od druhé dolejší oktavy ještě více než při ladění temperovaném. Logarithmické výšky a jich rozdíly jsou tu, jak následuje:

$$\begin{array}{rr} 9{\cdot}42423 & 9{\cdot}36996 \\ 9{\cdot}39794 & 9{\cdot}39794 \\ \hline \underbrace{+\ 0{\cdot}02629 & -\ 0{\cdot}02798}_{0{\cdot}05427} \end{array}$$

Od druhé spodní oktavy odchyluje se tedy ton prvý téměř a ton druhý plně o velký půlton (0·02803) a mezi sebou dissonují oba tony o více než velký celý ton (0·05115). Dissonance zaviněna jest opět tercií, kteráž při ladění Pythagorejském jest proti přirozené tercii logarithmicky o 0·00540, tedy o komma vyšší.

Dissonance tonů differenčních vystupují zvláště rušivě při harmoniu a při varhanách, poněvadž nástroje tyto vyžadují tempo volnější, akkordy *déle trvající, táhlejší*, kdežto u harfy a piana, kde tony trvají krátce a kde tempo bývá rychlejší a kde pak se tony rychle střídají, dissonance ty nepřicházejí tak na jevo. Co se nástrojů orchestralních týče, dovede ostatně hudebník-umělec ton poněkud ve smyslu ladění přirozeného pozměniti, tak že závada ladění pevného, jež jest temperované, se tím poněkud mírní.

„Špatné tony kombinační“ — praví Helmholtz — „byly mi v harmonii temperatury rovnoměrné vždy věcí nejtrapnější; zvláště když se v poloze vysoké hrají postupy terciové ne příliš rychlé, vytvořují k tomu odporný druh základního bassu, který jest tím nepříjemnější, že základnímu bassu správnému dosti se blíží a tak zní, jako by se nástrojem zcela rozladěným přednášel.“ (Lehre von den Tonempfindungen.)

Dissonance následkem ladění temperovaného vznikající nejeví se nikde tak zřetelně jako při mixturovém registru varhan. K dosažení plnosti zvuku má každá klavesa několik cínových píšťal, jež dávají oktavy a kvinty po sobě jdoucí, v počtu větším neb menším, dle toho, kolikanásobná mixtura jest; bývá troj-, čtyř- až pětinásobná. Tyto cínové píšťaly jsou laděny v přirozených kvintách, ale jinak zase píšťaly různých klaves jsou mezi sebou laděny temperovaně. V akkordech vznikají následkem toho dissonance zvláště v blízkosti (uvnitř varhan) velice značné, jež jenom v dálce působením hlubokých registrů se mírní.

§ 56. **Toniny a jejich příbuznost.**

Základní stupnice hudební jest diatonická *C-dur*. Na této jest založeno písmo notové, kterým se znázorňují nikoli intervally stupnice, nýbrž její *stupně*; proto jest krok od stupně třetího ke čtvrtému, nebo od sedmého k osmému, vyjádřen týmže způsobem, jako na př. od stupně prvého k druhému nebo šestého k sedmému, ač v intervallech jest rozdíl.

Týž postup tonů, pro diatonickou stupnici význačný, může býti založen na kterémkoli stupni jiném; ton, který jest základním, zove se *tonikou*; soustava tonů k tomuto základnímu náležející určuje *toninu*. Písmo notové se v podstatě své nemění; jím se vždy označují stupně, ale od jiného začátku čítané. Avšak postup tonů vyžaduje, aby jisté tony stupnice diatonické *C-dur* byly zvýšeny neb sníženy. Toto zvýšení neb snížení označuje se obvyklými znaménky (♯ a ♭) *hned za klíčem* a dle označení toho poznává se, pro jakou toninu jistý kus hudební jest psán.

Ve zpěvu a v hudbě komorní lze intervally jakékoli toniny přesně dle ladění přirozeného zachovávati. V hudbě orchestralní zavládlo ladění temperované, dle něhož se tony odvozením svým rozdílné — jako na př. půltony stupnice *c-dur* zvýšené a snížené — identifikují čili, jak pravíme, *enharmonicky zaměňují*, jako na klaviatuře piana, harmonia a varhan.

Při studiu rozmanitých tonin, jich vzájemných vztahů, jich příbuznosti atd. jest obyčejem užívati označení, kteréž jinak od obvyklého se liší. Toniny *tvrdé* označují se totiž písmenami *velkými*, stejnojmenné pak toniny *měkké* písmenami *malými*. Znamená tedy v tomto odstavci na př. tonina $A =$ toninu durovou tohoto tonu, a tonina $a =$ toninu mollovou tohoto tonu, při čemž nepomýšlíme na „velké *A*“ (ve velké oktavě) nebo na „malé *a*“ (v malé oktavě). Označení toto má pro účel, o který zde jde, výhodu stručnosti a přehlednosti.

Abychom získali přehled všech různých tonin, jich označování a jich záměn enharmonických, sestrojme diagramm a to na základě postupu kvintového. Opíšeme tři soustředné kruhy (obr. 75.); kruh poloměru největšího budeme zváti prvým, kruh poloměru středního druhým a poloměru nejmenšího třetím. Od společného středu vedeme 12 paprsků, jimiž se plný středový úhel dělí na 12 stejných dílů. Tak obdržíme na všech třech kruzích 12 bodů stejně odlehlých.

Položíce na nejvyšší bod kruhu prvého toninu *C* pokračujeme odtud po dělicích bodech jednak na pravo, dle ladění vzestupného, jednak na levo, dle ladění sestupného, po kvintách. Tak obdržíme na vnější straně kruhu prvého toniny

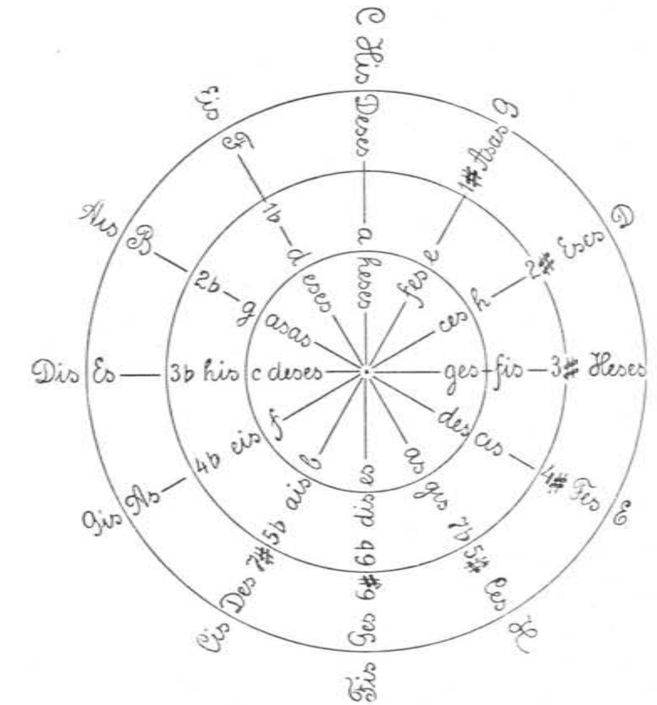
C, G, D, A, E, H, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, Eis, His

a na vnitřní straně téhož kruhu toniny

C, F, B, Es, As, Des, Ges, Ces, Fes, Heses, Eses, Asas, Deses.

Tyto kvintové kruhy jsou až na Pythagorejské komma uzavřeny. Rozdíl mezi tony, jež na týž dělicí bod prvého kruhu připadají, jeden vně, druhý do vnitř — jako na př. *D* a *Eses*, nebo *Cis* a *Des* atd. — činí konstantně rovněž Pythagorejské komma. Tony tyto splývají, když se kvinta temperuje. V hudbě orchestralní se *enharmonicky zaměňují.*

Kruh druhý objasňuje na bodech dělicích, jak se hudebně označují příslušné toniny na souhlasném dělicím bodu vně neb vnitř kruhu prvého udané. Toniny enharmonické mají označení stejné; toto psává se hned za klíčem na začátku hudební skladby. Označení děje se ve smyslu vzestupném křížky (♯), ve smyslu sestupném značkou b (♭); přísluší pak označení na vnější straně kruhu druhého uvedené toninám na vnější straně kruhu prvého vypsaným; podobně označení na vnitřní straně kruhu druhého uvedené toninám na vnitřní straně kruhu prvého vypsaným. Počet křížků a počet b doplňují se na 12. Enharmonicky jest však na př. tonina 5♯ identická s toninou 7♭, podobně tonina 9♭ identická s toninou 3♯. Aby tedy počet buď křížků neb b nestal se nepřehledným, nejde se dále než nejvýše na 7♯ nebo 7♭, jakož též v obrazci jest naznačeno.



Obr. 75. Kvintové kruhy a hudební označení tonin (dur i moll).

Kruh třetí obsahuje na souhlasných bodech dělicích toniny tak zvané *souběžné* čili *parallelní*, mollové, pro kteréž platí totéž hudební označení, jež jest na druhém kruhu udáno. Velká sexta stupnice durové jest základním tonem souběžné stupnice mollové, anebo naopak, malá tercie stupnice mollové jest základním tonem souběžné stupnice durové. Toniny souběžné na kruhu třetím, kteréž jsou jakožto mollové malými písmenami označené, pokračují opět po kvintách a to, podobně jako toniny tvrdé, jednak vzestupně, jednak sestupně, na vnější a vnitřní straně tohoto třetího kruhu.

Srovnávají-li se různé toniny vespolek, ukazuje se, že některé z nich mají větší počet *tonů společných*, jiné menší. Mluvíme pak o *příbuznosti* tonin, rozeznávajíce příbuznost *prvého*, *druhého* atd. stupně. Studujíce tuto příbuznost béřeme při tonině mollové za základ stupnici harmonickou, ve kteréž jest citlivý ton podržen ze stupnice tvrdé.

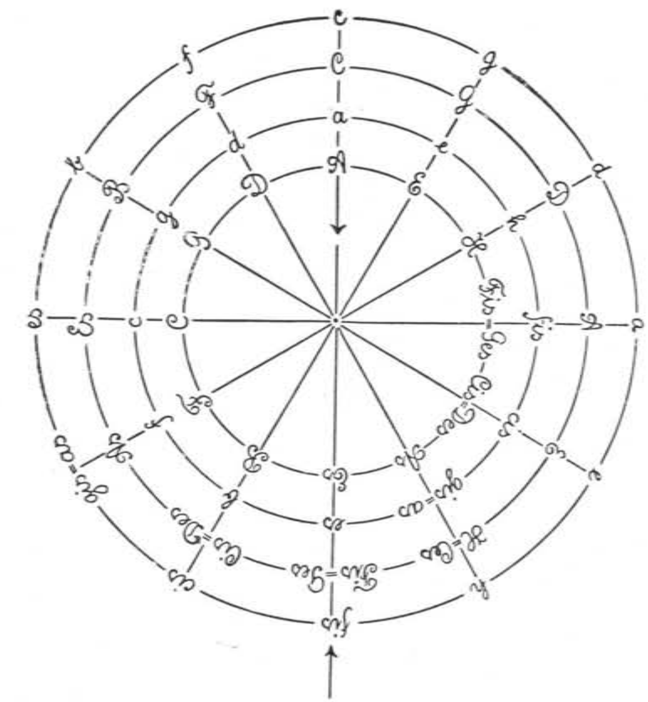
S jistou toninou, na př. *C* (*dur*) jest v prvém stupni příbuzna:

1. Tonina dominanty, tedy *G* (*dur*),
2. Tonina subdominanty, tedy *F* (*dur*).
3. Tonina souběžná, tedy *a* (*moll*).
4. Tonina stejnojmenná, tedy *c* (*moll*).

V obrazci 76., jenž jest podobně proveden, jako obr. 75., jest příbuznost tonin přehledně sestavena, a to pro toniny v hudbě fakticky užívané na základě postupu kvintového. Tento jest vyznačen na prvém kruhu pro toniny mollové, na druhém pro stejnojmenné s nimi durové, na třetím pro souběžné mollové a na čtvrtém pro stejnojmenné s těmito durové. Takto jsou ke každé tonině přidruženy, jako sousední, toniny v prvém stupni příbuzné, a to na pravo tonina dominanty, na levo subdominanty, nahoru a dolů pak tonina stejnojmenná a souběžná. Vidíme tedy, že každá tonina durová, na př *A*, má za příbuzné v prvém stupni dvě durové, *E*, *D*, a dvě mollové *fis*, *a*. Podobně každá mollová na př. *a* za příbuzné v prvém stupni dvě mollové *e*, *d* a dvě durové *C*, *A*. Postupujíce na témže kruhu o dva stupně, obdržíme toniny příbuzné ve stupni druhém; na př. s toninou *C* toniny *D*, *B*; anebo postupujíce od tonin dominanty a subdominanty *G*, *F* radialně dále obdržíme toniny k těmto parallelní *e*, *d*, jež jsou též příbuzny k tonině původní *C* v druhém stupni.

Toniny v prvém stupni příbuzné rozeznávají se jediným jen tonem (— ovšem stejnojmenné vyjímajíc). Toniny v druhém stupni příbuzné liší se dvěma tony (— opět stejnojmenné vyjímajíc jež se proto nečítají za příbuzné v druhém stupni, na na př. *C* a *f*, nebo *C* a *g*).

Od *příbuznosti tonin* dlužno rozeznávati *příbuznost akkordů*. Zde rozhodují jenom společné tony. Nejblíže příbuznými jsou takové, jež mají dva tony společné, nebo i jen jeden, poněvadž těmito tony souvisí. Příbuzností trojzvuku poznává se vnitřní jich vztah a určuje jich postup.



Obr. 76. Příbuznost tonin, v záměnách enharmonických.

Otázky, o nichž v tomto odstavci jednáno, zasahují již do speciálních partií theorie hudby, o nichž podávají výklad obšírný příslušné spisy odborné. V literatuře naší viz na př. vynikající spis: Jos. Foerster, Nauka o harmonii, II. vyd. 1902.

§ 57. Dualní soustava harmonie.

V úvahách předešlých seznali jsme, jakým způsobem určíme, od daného základního tonu vycházejíce, řadu tonů dalších tak, aby tvořily stupnici diatonickou; tony tyto přiřadili jsme k základnímu v jediném toliko směru, který za *positivní* pokládáme, totiž ve směru od tonů hlubších k tonům vyšším. Také výšky logarithmické, jimiž se rozestavení tonů určuje, počítali jsme v tomto smyslu za *positivní.*

Avšak theoreticky stejným právem můžeme též směr obrátiti, tedy logarithmické výšky počítati *negativně* a dle nich ve směru *k tonům hlubším* přiřaditi k tonu základnímu tony další, tvořící stupnici diatonickou ve směru *negativním.* Opačnost směru positivního a negativního jeví se bezprostředně ve výškách logarithmických *znamením.* Pro jistou od téhož tonu základního v opačných směrech počítanou výšku x máme polohy

$$-\log x \ldots + \log x.$$

Chceme-li však od logarithmů přejíti k číslům samým, vzpomeneme, že jest

$$-\log x = \log \frac{1}{x}.$$

Ona opačnost ve směru positivním a negativním jeví se tudíž, přejdeme-li od logarithmů *k číslům samým*, hodnotami *původními* a *převrácenými*, jako

$$\frac{1}{x} \ldots x.$$

Tak obdržíme následující dvě stupnice, kteréž jsouce v obou možných směrech, positivním a negativním, do výšky a do hloubky stejně tvořené, mohou se zváti stupnicemi *souměrnými* (symmetrickými).

Stupnice durová a její souměrný obraz.

$$\frac{1}{x} \xleftarrow{\quad - \quad} 1 \xrightarrow{\quad + \quad} \frac{x}{1}$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{8}{15},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{9}\ \ 1\ \ \frac{9}{8},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{15}{8},\ 2.$$

Jako pro stupnici durovou mohli bychom i pro stupnici mollovou sestaviti její souměrný obraz.

Vizme nyní, jak se v těchto stupnicích, vespolek souměrných, utváří *trojzvuky* rovněž *souměrně tvořené.* Na stupni prvém máme trojzvuk kvintový

směrem nahoru $\quad 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2},$

směrem dolů $\quad \frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ 1.$

Když v hladině klidného jezera vidíme souměrný obraz domu na břehu vystavěného a když studujeme výškové rozměry na

př. jednotlivých poschodí, nemáme dojmu, že by poměry tyto byly jiné při obrazu domu než jaké jsou při domu skutečném. Příčinou toho jest, že zde i tam poměry tyto posuzujeme od *základů* domu směrem k poschodím vyšším. Avšak dojmy zvukové liší se tu podstatně od dojmů světelných. Trojzvuk, nechť jej utvoříme jakkoli, posuzujeme *vždy* jenom *jednosměrně*, totiž od tonů *hlubších k vyšším.* Tak stává se, že v trojzvuku souměrném slyšíme něco zcela jiného než v původním, poněvadž trojzvuk souměrný neposuzujeme od tonu, od něhož *směrem dolů* jest tvořen, nýbrž od nejhlubšího tonu *vždy směrem k tonům vyšším.* Když však trojzvuk směrem dolů tvořený přepočítáme na nejhlubší ton jako základní, obdržíme $\left(\text{dělíce výškou } \frac{2}{3}\right)$

na místě $\quad \frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ 1$

přepočtením $\quad 1,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{2}.$

Pozorujíce výsledek tento, poznáváme, že původní trojzvuk *tvrdý* (dur) změnil se souměrným obrácením na trojzvuk *měkký* (moll).

Utvořme podobně trojzvuk na třetím stupni

směrem nahoru . . . . $\frac{5}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{15}{8},$

směrem dolů $\quad \frac{8}{15},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{5}.$

Přepočítajíce oba trojzvuky na hluboký ton jako základní, $\left(\text{dělíce výškou jednak } \frac{5}{4}, \text{ jednak } \frac{8}{15}\right)$, obdržíme

směrem nahoru . . . . $1,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{2}$

u souměrného též

směrem nahoru $\quad 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2}.$

Zde tedy naopak trojzvuk původní, kterýž byl měkký (moll), souměrným obrácením se změnil na tvrdý (dur).

K podobným výsledkům přijdeme, tvoříce trojzvuky ve stupnici mollové a jejím souměrném obrazu.

Můžeme tudíž říci všeobecně: Trojzvuky kvintové *mění* souměrným obrácením *svůj rod*, z tvrdých stávají se měkké, z měkkých tvrdé.

Co platí v ohledu harmonickém, platí též v melodickém; jakýkoli postup melodický pohybující se v tonině durové změní se v souměrném obrácení v postup melodický v tonině mollové.

Přihlédněme nyní blíže k souměrné stupnici diatonické nahoře vypsané, zkoumajíce ji nikoli v trojzvucích, nýbrž v jejím celku. Chtějíce ji charakterisovati dle způsobu obvyklého, totiž dle tonu základního *nejhlubšího*, shledáme, že tonina ta není mollovou *téže toniky*, nýbrž její *spodní dominanty*. Přesvědčíme se o tom postupujíce ve směru negativním ještě o oktávu níže, tak jak ukazují tyto výšky číselné:

I	II	III	IV	V	VI	VII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\frac{1}{4}$,	$\frac{8}{30}$,	$\frac{3}{10}$,	$\frac{2}{6}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{4}{10}$,	$\frac{8}{18}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{8}{9}$,	1
			↓							↓				
			1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{6}{5}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{8}{5}$,	$\frac{9}{5}$,	2.				

Přepočítáme-li tedy výšky na ton IV jako základní (dělíce výškou $\frac{2}{6}$), dostáváme diatonickou stupnici mollovou tohoto tonu, jenž jest subdominantou původního.

Hrajeme-li tedy na varhanách stupnici na př. *d-dur* souměrně směrem negativním, dolů, obdržíme postup tonů, který jest vlastní stupnici *g-moll*.

Tento nesouhlas v označení má však původ svůj opět jen v tom, že hrajíce neb zpívajíce stupnici tvrdou směrem k tonům hlubším, posuzujeme ji vlastně dle směru obráceného, od tonů hlubších k vyšším, jak jsme zvyklí stupně, jako primu, sekundu, tercii atd., označovati.

Souměrnost trojzvuku durového a mollového poznal již *Giuseppe Zarlino* (1517—1590), hudebník a skladatel, ředitel choru v chrámu sv. Marka v Benátkách, v kterémžto městě se narodil. Proslul jako hudební theoretik. On zavedl do stupnice čistou tercii, $\frac{5}{4}$, a přivedl tak vedle velkého celého tonu $\frac{9}{8}$ stupnice Pythagorejské k platnosti malý celý ton $\frac{10}{9}$, čímž vznikla diatonická stupnice přirozená, jak ji nyní vykládáme.

Jakmile sobě uvědomíme, že trojzvuk měkký jest souměrným obrazem tvrdého a že jsou oba stejně tvořeny od téhož

tonu jako hlavního vycházejíc, tvrdý ve směru positivním, měkký ve směru negativním, pak můžeme oba pokládati za trojzvuky *téhož tonu hlavního*, ovšem s takovým ještě bližším určením, které by *směr* tvoření naznačilo. Poněvadž pak slovo „měkký, moll" jest již ve smyslu jiném zadáno, užijme slov jiných, říkajíce na př. trojzvuk *tonický* a *fonický*. Dle toho bychom trojzvuk d, *fis*, a zvali tonický d, a trojzvuk *g-hes-d* (který se jinak zove *g-moll*), zvali bychom fonický d. V písmě bylo by nejvhodnějším psáti d^{+} a d^{-}, tak že by známkami $+$, $-$, jichž smysl každému jest běžný, byla opačnost obou směrů positivního a negativního a tím i souměrný poměr jasně označen.

Názvy „tonický" a „fonický" zavedl *A. v. Oettingen*. Označení $+$, $-$, jež jest jediné správné a jasné, souvisíc přímo s logarithmickými výškami, kteréž v jednom směru (nahoru) jsou positivní, v druhém (dolů) negativní, není zavedeno, poněvadž jest zde kollise s označením (zcela nevhodným) tonu o komma vyššího, jak dříve bylo již vyloženo. Užívá tedy *A. v. Oettingen* označení d^{+} a d^{0}, v kterémžto označení se proti *znamení* $+$ klade *index* 0, který nad to mathematicky zcela jiný má smysl (exponent nullový). Není pochybnosti, že by se pro zvýšení neb snížení tonu o jedno komma neb o dvě kommata atd. mělo zavésti označení nové; již také proto, poněvadž v označování dosavadním jest zmatek, tím vzniklý, že v. Oettingen a Helmholtz užívali označení opačného. Mohlo by se užiti na př. označení bodem; ton $\underset{.}{a}$ značil by ton a o komma snížený, $\dot{a}$, $\ddot{a}$ atd. ton a o jedno komma, dvě kommata atd. zvýšený. Pak by pro akkordy souměrně tvořené mohlo bez závady býti užíváno označení jediné význačného a odůvodněného, $+$ a $-$, tedy na př. d^{+} a d^{-} místo d^{+} a d^{0}.

Užívajíce tedy označení $+$ a $-$, můžeme výsledek formulovati takto: Rozeznáváme dva rody tonů, rod tonický $(+)$ a fonický $(-)$. Rod tonický jest určen trojzvuky *toniky*, *dominanty hořejší a dolejší*, tvořenými ve směru positivním. Právě tak jest určen rod fonický trojzvuky *toniky* a *regnanty dolejší* a *hořejší*, tvořenými ve směru souměrném, negativním. Tedy na př. tonorody d^{+} a d^{-} mají akkordy: d^{+}, a^{+}, g^{+} a souměrné d^{-}, a^{-}, g^{-}. Názvy regnanta a dominanta jsou analogické, ve smyslu souměrnosti: regnanta vyjadřuje týž ton ve smyslu negativním jako dominanta ve smyslu positivním. Akkordy, jež jsou mezi sebou buď tonické nebo fonické, zovou se *stejnojmenné* čili *homonomické*. Stupnice souměrné na př. od tonu základního d ve směrech souměrných, positivním a negativním, tvořené, označují se jako d^{τ} a d^{φ}; prvnější tonická jest obyčejná stupnice *d-dur*, poslednější fonická jest táž, která se jinak zove stupnicí dorickou.

Souměrnosti zde vyložené lze též ve smyslu *optickém* doplniti a objasniti. Souměrnou jest klaviatura piana, harmonia, varhan a to vzhledem ke klavese *d* (též *gis*) ve směru jednak v pravo, jednak v levo. Souměrným jest písmo notové, v *klíči bassovém*, ve směrech jednak nahoru, jednak dolů, poněvadž onen ton *d* má postavení v notách uprostřed soustavy liniové. Když se tedy na klaviatuře nějakého hudebního nástroje hrají akkordy v postupu jakémkoli a opakují se pak v poloze souměrné, změní se jich rod, z tonických stávají se fonické a naopak.

Podobně když se hraje písmo notové v souměrném obrácení, změní i harmonie i melodie svůj rod. Obrácení lze způsobiti na př. zrcadlem, tak položeným, aby, co je v notách nahoře, objevilo se dole; nebo též otočením not a čtením zpátečným. Ovšem nutno při tomto obrácení též znaménka ♯ a ♭ vespolek zaměniti, aby zvýšení o půl tonu přešlo ve snížení a naopak. Tak se obrátí celá skladba změníc svůj rod; konsonance zůstávají při tom konsonancemi, dissonance dissonancemi.

Nelze pochybovati, že vztahy zde vyložené mají velkou zajímavost zejména se stanoviska fysikalního a mathematického. Jiná jest otázka, jak se věc posuzuje se stanoviska hudebního, zda-li sluch náš vskutku jest pro souměrnost zde vylíčenou tak vnímavým jako oko pro souměrnosti podobné. Úplně tomu přisvědčiti nelze. Snad by sluch v tomto smyslu se dal vycvičiti. Vskutku nebylo by nemožno, aby sluch v akkordu mollovém na př. *a*, *c*, *e* si zvykal slyšeti ton *e* jako hlavní. Ale naprostou koordinaci soustavy tonické a fonické ve smyslu dualním připustiti jest nesnadno. Musila by býti dokázána koordinace *vnímavosti* tonické a fonické, jak v harmonii tak zvláště v melodii.

Názory své o otázkách zde vylíčených podal *A. v. Oettingen* nejnověji souborně v pojednání „Das duale System der Harmonie", uveřejněném v časopisu Annalen der Naturphilosophie, ročník I., 1902. (pag. 62) *).

V literatuře naší podal o těchto zajímavých otázkách obšírné pojednání *O. Hostinský* v „Daliboru" (ročník IX., 1887, čís. 1—7): „Nové dráhy vědecké nauky o harmonii". Spisem svým dřívějším, z roku 1879, „Die Lehre von den musikalischen Klängen", podal kritický výklad o celé otázce, v níž rozlišuje stanovisko psychologické od fysikalního a fysiologického:

„Vzpomeneme-li Oettingenovy dualní soustavy harmonie, řekneme že *fonicita*, t. j. poměr, v jakém jsou obapolné, částkové tony členů intervallových, může býti pojata jako by byla povahy fysiologické, když se, jak je správno a slušno, nezůstane státi při koincidenci tonů svrchních, nýbrž když se též jich záchvěje vezmou v úvahu, že naproti tomu *tonicita*, jakožto vlastnost intervallu, býti součástkou zvuku, znamená to, co jest aestheticky cenným při harmonii. Toto poslední jest ovšem něco stálého, nutného, ono prvnější něco měnlivého, nahodilého (poněvadž na barvitosti ve zvláštním případu závislého). Úplnou, rovnoprávnou paritu obou principů, jak ji v. Oettingen zastává, připustiti nemůžeme. Pro aesthetika může býti jen tonicita rozhodující — a ona též stačí, aby se nejdůležitější otázky nauky o harmonii zodpovídaly. Praktickému hudebníku nesmí přirozeně i čistě smyslný moment jeho umění zůstati lhostejným."

V nejnovějším pojednání, výše citovaném (v Annalen der Naturphilosophie 1901-2) *Arthur v. Oettingen* formuluje jaksi definitivně svůj dualní system harmonie. Hned v úvodu klade důraz největší na ladění čisté, přirozené. „Dlužno za základ theorie položiti material tonový ladění čistého. Hudební praxis užívá ladění temperovaného, kterým dobře vyjdeme, poněvadž ucho naše vše, čeho se do ladění čistého nedostává, doplňuje, což poznal již d'Alembert. Při tom získala technika velice na jednoduchosti. Při zpěvu však, bez průvodu, může jen v ladění čistém býti intonováno, též nástroje smyčcové, orchestr a kvartett, hrají čistě. V těchto případech rozhoduje jediné sluch a žádný byť sebe déle trvající cvik a obyčej neumožňuje nám, bez klavíru temperovaně intonovati. Z toho plyne, že jest ladění čisté podstatným substratem našich vyšších pocitů, psychických představ a hudebních dojmů." Na konci spisů uvádí dvanáct hlavních vět, v nichž shrnuje vše, čím se nová theorie hudby, na dualní soustavě harmonie založená, od dřívější odchyluje. Zároveň dává výraz své naději, že soustava harmonie, od něho zbudovaná, vzhledem k vnitřní důslednosti a vlastní kráse a plodnosti dnes příznivěji bude přijata a že nalezne půdu v ohledu filosofickém připravenější, než před 35 lety, kdy sice specialní obory povahy pokusné byly vzdělávány a pěstovány, kdy však filosofie byla zanedbávána.

*) Jinak buďtež uvedeny tyto spisy k zajímavým oněm otázkám se vztahující: *Moriz Hauptmann*, Natur der Harmonik und Metrik, 1853. Z jeho pozůstalosti vydal *O. Paul:* Die Lehre von der Harmonik 1868, spis, který užívá přístupnějšího označení notového než literního.

Arthur v. Oettingen, Harmoniesystem in dualer Entwickelung 1866.

Hugo Riemann, Skizze einer neuen Methode der Harmonielehre 1880; Elementarmusiklehre 1883.

§ 58. **Přehled intervallů akustických.**

Budiž ke konci oddílu tohoto podán ještě přehled všech intervallů akustických, jichž při výkladech hudebních stále se užívá, a to jednak dle jich odvození, jednak dle jich výšky číselné a konečně též dle jich výšky logarithmické. Z důvodů již dříve vyložených přestáváme ve výškách číselných na čtyřech a v logarithmických na pěti místech decimalních.

Přehled intervallů akustických.

Jméno		Odvození	Výška číselná	Výška logarithmická
Prima		1	1	0
Sekunda	temp.	$2^{\frac{2}{12}}$	1·1225	0·05017
	přiroz. a Pythag.	$\frac{9}{8}$	1·1250	0·05115
Tercie malá	Pythag.	$\frac{32}{27} = \frac{6}{5} \cdot \frac{80}{81}$	1·1852	0·07379
	temp.	$2^{\frac{3}{12}}$	1·1892	0·07526
	přiroz.	$\frac{6}{5}$	1·2000	0·07918
Tercie	přiroz.	$\frac{5}{4}$	1·2500	0·09691
	temp.	$2^{\frac{4}{12}}$	1·2599	0·10034
	Pythag.	$\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}$	1·2656	0·1023$\bar{1}$
Kvarta	přiroz. a Pythag.	$\frac{4}{3}$	1·3333	0·12494
	temp.	$2^{\frac{5}{12}}$	1·3348	0·12543
Kvinta	temp.	$2^{\frac{7}{12}}$	1·4983	0·17560
	přiroz. a Pythag.	$\frac{3}{2}$	1·5000	0·17609
Sexta malá	Pythag.	$\frac{128}{81} = \frac{8}{5} \cdot \frac{80}{81}$	1·5802	0·1987$\bar{3}$
	temp.	$2^{\frac{8}{12}}$	1·5874	0·20069
	přiroz.	$\frac{8}{5}$	1·6000	0·20412
Sexta	přiroz.	$\frac{5}{3}$	1·6667	0·22185
	temp.	$2^{\frac{9}{12}}$	1·6818	0·22577
	Pythag.	$\frac{27}{16}$	1·6875	0·22724

Jméno		Odvození	Výška číselná	Výška logarithmická
Septima malá	Pythag.	$\frac{16}{9} = \frac{9}{5} \cdot \frac{80}{81}$	1·7778	0·24988
	temp.	$2^{\frac{10}{12}}$	1·7818	0·25086
	přiroz.	$\frac{9}{5}$	1·8000	0·25527
Septima	přiroz.	$\frac{15}{8}$	1·8750	0·27300
	temp.	$2^{\frac{11}{12}}$	1·8877	0·27594
	Pythag.	$\frac{243}{128}$	1·8984	0·27840
Oktava		2	2	0·30103
Celý ton	velký (Pythag.)	$\frac{9}{8}$	1·1250	0·05115
	temp.	$2^{\frac{2}{12}}$	1·1225	0·05017
	malý	$\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$	1·1111	0·04576
Půlton	velký	$\frac{16}{15}$	1·0667	0·02803
	temp.	$2^{\frac{1}{12}}$	1·0595	0·02509
	Pythag.	$\frac{256}{243} = \frac{16}{15} \cdot \frac{80}{81}$	1·0535	0·02263
	malý	$\frac{25}{24}$	1·0417	0·01773
Komma Pythag.		$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	1·0136	0·0058$\bar{9}$
Komma (diaton.)		$\frac{81}{80}$	1·0125	0·0054$\bar{0}$
Intervall velk. a mal. půltonu		$\frac{128}{125}$	1·0240	0·01030
Intervall Aristoxenův		$\frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$	1·0368	0·01570
Intervall Delezenne-ův		$\frac{128}{125} \cdot \frac{80}{81}$	1·0114	0·00490

IV.

Šíření zvuku.

§ 59. **Rychlost zvuku ve vzduchu; pozorování nejstarší, kvalitativní.**

Vzduch, ve kterém žijeme, jest zároveň tím prostředím, jehož vlnivým pohybem dojmy zvukové z pravidla vznikají. Že pak tento vlnivý pohyb, aneb, jak zkrátka říkáme, že zvuk se nešíří vzduchem okamžitě, nýbrž v jisté době, větší neb menší, dle vzdálenosti pozorovatele od původu zvuku, o tom poučují zkušenosti života obecného, jež neujdou pozornosti žádného člověka.

Když dělník poráží strom nebo zatlouká kůl nebo štípá dříví, vidíme z dálky, jak sekera neb palice dopadá, ale náraz slyšíme později. Když se dá na lokomotivě rychlovlaku signal parní píšťalou, spatříme z daleka, jak bělavá vodní pára vyrazí do vzduchu, ale zapisknutí slyšíme až později. Podobně hukot hromu následuje po výboji bleskovém v době kratší neb delší dle vzdálenosti mračen. Pozorování tato a četná podobná vedla již v dobách nejstarších k přesvědčení, že rychlost, jakou se zvuk ve vzduchu šíří, jest konečnou a poměrně nikoli značnou.

Pěkné místo nalézáme v díle: „De rerum natura“, VI., 164 a násl., kteréž sepsal *Lucretius Carus* (98—55 před Kr.).

„Sed tonitrum fit uti post auribus accipiamus,
fulgere quam cernant oculi, quia semper ad auris
tardius adveniunt quam visum quae moveant res.
Id licet hinc etiam cognoscere. Caedere si quem
ancipiti ferro videas procul arboris auctum,
ante fit, ut cernas ictum quam plaga per auris
det sonitum: sic fulgorem quoque cernimus ante
quam tonitrum accipimus, pariter qui mittitur igni
e simili causa, concursu natus eodem.“ *)

*) Dříve postřehne blesk vždy naše oko než hřmění
k sluchu nám dojde; to z té se příčiny děje, že později
dojem proniká v sluch než v oko to co je dráždí.
Z toho to můžeš poznati též. Když spatříš, že někdo
dvojsečnou sekyrou strom kdes v dáli vysoký kácí
dříve zahlédneš ráz vždy sekyry nežli ti v uchu
rána zazní, jíž dala. Tak blesk též vidíme dříve,
nežli slyšíme hrom, jenž vzniká zároveň s bleskem
z příčin docela týchž; neb v tétéž rodí se srážce. (Král.)

Pravili jsme, že vzduch jest prostředím nejobyčejnějším, kterým se zvuk šíří; také jiným prostředím, jako na př. vodou, anebo látkami jinými šíří se zvuk, nikoli však prostorem, který prázdným zoveme, ač prostorem tímto světlo proniká. Důležitý rozdíl, jaký se tu jeví v postupu u světla a zvuku, dokázán byl hned po sestrojení vývěvy, kterou bylo možno prostor vzduchoprázdný obdržeti; pokus první provedl *Otto z Guericke* (1602—1686) týž, jenž sestrojil první vývěvu*).

Ve spise „Ottonis de Guericke, Experimenta Nova (ut vocantur) Magdeburgica de vacuo Spatio“ autor popisuje (Caput XV, de Sono in Vacuo) pokus, kterým se i nyní ještě ukazuje, že zvuk prostorem prázdným se nešíří. Guericke zavěsil do svého recipientu hodinový stroj, který tak zařídil, aby každé půl hodiny palička stroje na zvoneček bila; při vyčerpávání vzduchu bylo dobře slyšeti, jak zvuk zvonečku slábl, až konečně téměř ustal; ale, když se ucho přiložilo k recipientu, bylo přece tlukot kladívka slyšeti, jen že zvonek nezvučel, což činilo dojem takový, jako kdyby někdo zvoneček držel v rukou („strepitum, nequaquam vero tinnitum percipit“). Způsob, jak nyní lze pokus opakovati, objasňuje obr. 77. Pod recipient umístí se zvonek elektrický; experimentator ovládá zvonění proudem a může je dle libosti přerušiti a obnoviti. Také zde lze konstatovati značné seslabení zvuku; ale hlavní toho část připadá již na uzavření zvonku v recipientu; i když ještě vzduch není vyčerpán, zní zvonek pod recipientem slabě, ačkoli jinak ve volném vzduchu zní velmi mohutně; proto, když se vzduch vyčerpává, není další seslabení již tak frappantní. Ostatně úplného umlčení zvonku

Obr. 77. Zvuk se nešíří prostorem vzduchoprázdným.

*) Viz Mechanika, pag. 551, § 357. 1901.

dociliti nelze; zvon musí býti nějak zavěšen, závěsem však přenáší se zvuk na recipient samotný a proto slabounké znění jest slyšeti vždy. Znění toto se také sesílí, když se do recipientu vpustí jakýkoli plyn jiný, po případě když se recipient naplní parami nějaké kapaliny (aetheru) a pod. Jinak lze též do skleněné koule pověsiti malý zvonek na nitku, čímž isolace akustická jest poněkud lepší. Rozdíly v intensitě znění lze také tím způsobem ukázati, že se vzduch v ballonu stlačí (Hawksbee 1705).

§ 60. Pokračování; pozorování kvantitativní.

Pozorování, kteráž jsme popisovali v odstavci předešlém, sahající do nejstarších dob, mají povahu jen kvalitativní. První údaje *kvantitativní*, číselné, pocházejí až ze století 17. P. *Mersenne**) odhadl (1640) rychlost zvuku na 448 $\frac{m}{sec}$, kteréžto číslo udává též *Gassendi***). Později (1656) určili *Borelli* a *Viviani*, členové akademie del Cimento, pozorováním dosti přesným rychlost zvuku na 350 $\frac{m}{sec}$. Methoda, kteréž bylo užito při těchto prvních pokusech, zůstala základem celé řady měření dalších, jež byla konána ve stoletích následujících. Zvoleny dvě stanice *A*, *B*; pozorovatel na první stanici *A* dal v umluvenou dobu výstřel, pozorovatel na druhé stanici *B* určil dle chronometru okamžik, kdy spatřil záblesk a druhý okamžik, kdy zaslechl ránu; vzhledem k ohromné rychlosti světla jest okamžik záblesku zároveň okamžikem výstřelu; opozdění rány proti záblesku rovná se tudíž době, za kterou zvuk ze stanice *A* dojde do stanice *B*; když se tedy ještě určí odlehlost obou stanic, kteráž se volí vždy co možná velikou, lze rychlost šíření se zvuku ve vzduchu počítati. Při tom dlužno z důvodů samozřejmých voliti pro pozorování dobu takovou, kdy jest vzduch co možno klidným, kdy jest bezvětří; teplota i vlhkost vzduchu se pozoruje zároveň a zaznamená se též jeho tlak, ač tento na rychlost zvuku, jak theorie i empirie dokazují, má vliv jen podřízený.

*) *P. Marin Mersenne* (1588—1648), kněz řádu Minoritů, žil hlavně v Paříži zabývaje se pracemi mathematickými i fysikalními, proslul hlavně objemným spisem: Harmonicorum libri XII, in quibus agitur de sonorum natura, causis et effectibus etc. 1636. Vyšlo též francouzsky pod názvem: Harmonie universelle, Paris, 1636.

**) *Pierre Gassendi* (1592—1655), známý filosofický odpůrce Descartesův.

§ 61. Theoretický vzorec Newtonův.

Otázkou, kteráž těmito prvními pokusy měla býti empiricky řešena, zabýval se též *I. Newton*, a to s hlediska theoretického. Ve spise: „Philosophiae naturalis principia mathematica", předloženém Royal Society v Londýně v rukopisu dne 28. dubna 1686, pojednává (Tomus II, Sectio VIII) „De motu per fluida propagato"; zde pak Propositio XLVIII obsahuje větu následující: „Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis elasticae directa et subduplicata ratione densitatis inverse; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationis proportionalis esse supponatur."*) Motus pulsuum značí zde totéž co vlnivý pohyb. Newton počítá též dle své formule číselně rychlost *c*, konstatuje však neshodu s pozorováním a hledí neshodu tuto vysvětliti.

Nyní vyjadřujeme větu Newtonovu vzorcem

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}}; \qquad (1)$$

v tomto značí *E* (vis elastica) modul pružnosti objemové, *S* (densitas) specifickou hmotu látky. Modul *E* udává sílu, vztahovanou na jednotku povrchu; specifická hmota *S* hmotu, vztahovanou na jednotku objemu**). Proto jest rozměrově:

$$E \ldots \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{L}^2}, \quad S \ldots \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}, \qquad \varepsilon = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta v}{v}}$$

$$\frac{E}{S} \ldots \mathrm{F} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{T}^2} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2} \ldots c^2.$$

Modul objemový jest definován***) poměrem mezi přírůstkem tlaku a relativním umenšením objemu. Dle definice této a dle zákona Boyle-Mariottova lze snadno dokázati, že modul *E* v pří-

*) Rychlosti nárazů v prostředí pružném šířených jsou v poměru složeném z druhé odmocniny pružnosti přímém a z druhé odmocniny hustoty nepřímém, ač-li se předpokládá, že pružnost prostředí a jeho zhuštění jsou úměrny.

**) Nemá se tedy, přesně vzato, místo *S* zaváděti hustota *D*, ač-li se šetří rozdílu pojmového mezi těmito veličinami, třebas že se v soustavě metrické shodují číselně; viz Mechanika, § 64. pag. 95. O rozměrech vůbec viz odstavec IV; o rozměru síly F viz § 105., specifické hmoty a pružnosti § 76. a 379.

***) Viz Mechanika, § 379. pag. 593. V označení jest zde a tam rozdíl. Modul elasticity objemové jest tam označen písmenou *C*, zde pak písmenou *E*, kteréž se všeobecně užívá; může totiž (u linearních útvarů) místo modulu objemového nastoupiti ve formuli též modul linearní. Co se tlaku týče, značí tam *p* přírůstek tlakový, zde značí *p* tlak a Δp jeho přírůstek.

padu našem se rovná tlaku p vzduchu, na jednotku povrchovou vztahovanému.

Zákon Boyle-Mariottův *) stanoví relaci

$$pV = Const.$$

Změní-li se tlak o Δp, změní se objem o ΔV, i platí též pro poměry změněné

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = Const.$$

Dělíce rovnici tuto rovnicí předcházející obdržíme

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-1}$$

čili

$$\frac{\Delta p}{p} = -\frac{\Delta V}{V} + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 - \dots$$

Ztoho

$$\Delta p = -p\,\frac{\Delta V}{V} + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 p \dots$$

Relativní změna objemová $\frac{\Delta V}{V}$ bývá velmi malá; je-li positivní, t. j. roztáhne-li se plyn, jest relativní změna napjetí $\frac{\Delta p}{p}$ negativní, poněvadž na pravo poslední rovnice negativní člen převládá. Pak-li jest $\frac{\Delta V}{V}$ negativní, t. j. stlačuje-li se plyn, obdržíme, píšíce $-\frac{\Delta V}{V}$ za $+\frac{\Delta V}{V}$,

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta V}{V} + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \dots,$$

napjetí tedy vzroste, procentualně jest přírůstek $\frac{\Delta p}{p}$ téměř týž, jako úbytek $\frac{\Delta V}{V}$. Dle definice modulu objemového

$$E = \Delta p : \frac{\Delta V}{V}$$

obdržíme

$$E = p + p\,\frac{\Delta V}{V} + \dots$$

Poměr $\frac{\Delta V}{V}$ můžeme zkrátka jakožto přírůstek hustoty čili jakožto *zhuštění* označiti. Je-li toto velmi malé — což jest při zjevech akustických pravidlem — obdržíme jednoduše

$$E = p.$$

*) Mechanika, § 347. pag. 527, 1901.

Píšeme-li ještě σ pro specifickou hmotu vzduchu místo S, obdržíme pro rychlost zvuku ve vzduchu vzorec zvláštní:

$$v = \sqrt{\frac{p}{\sigma}}.$$

V absolutní soustavě *cm-g-sec* jest *)

$$\sigma = 0{\cdot}001276\,.\,10^{-6}\,.\,\frac{p}{1+\beta t},$$

z čehož plyne

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{1+\beta t}{0{\cdot}001276\,.\,10^{-6}}.$$

Poznáváme tudíž, že se tlak p ze vzorce pro v vyloučí. Věc jest pochopitelná; větším tlakem se zvětší v témže poměru jak pružnost E, tak specifická hmota σ vzduchu; proto na rychlost v, která jest určena poměrem obou, nemá tlak vzduchu účinku žádného. Číselně jest ještě

$$\sqrt{\frac{10^6}{0{\cdot}001276}} = 27995.$$

Jest tudíž rychlost c v jednotce $\frac{cm}{sec}$

$$c = 27995\sqrt{1+\beta t}$$

anebo v jednotce přehlednější $\frac{m}{sec}$

$$c = 280\sqrt{1+\beta t}$$

$$\beta = 0{\cdot}00367.$$

Číselný výpočet rychlosti c dle formule Newtonovy jest velmi jednoduchým, když se založí na soustavě absolutní, jakož se ve výpočtu právě provedeném stalo. Naproti tomu stává se velmi těžkopádným, když se užívá dat číselných dosud ještě na mnoze obvyklých.

Stanoví se totiž tlak p nikoli v jednotce absolutní, všeobecné, $\frac{dyna}{cm^2}$, nýbrž vahou sloupce rtuti nullstupňové, výšky b, při gravitační intensitě g toho místa, kde se pozorování děje, tudíž v jednotce lokalní; při tom běře se za tlak normalní (jedné atmosfery) tlak sloupce rtuti nullstupňové, výšky 76 *cm* při normalní intensitě gravitační g^*, jaká jest v geografické šířce 45° při hladině mořské. Dle toho jest **) tlak

*) Mechanika, § 351. pag. 535, 1901.

**) Mechanika, § 340. pag. 517, 1901. Dále § 351. pag. 533, kde poměr $\frac{g^*}{g}$ vyjádřen jak vzhledem ke geograf. šířce tak vzhledem k výšce nad hladinou mořskou příslušnými koefficienty.

a specifická hmota vzduchu, značí-li S specifickou hmotu rtuti nullstupňové,

$$p = bSg$$

$$\sigma = \frac{0\cdot001293}{1+\beta t}\,\frac{b}{76}\cdot\frac{g}{g^*};$$

koefficientem $\frac{g}{g^*}$ převádí se v rovnici druhé tlak b, určovaný v oné jednotce lokalní, na tlak, který by se pozoroval při normalní intensitě tíže. Z obou rovnic plyne

$$\frac{p}{\sigma} = \frac{76\,.\,S\,.\,g^*}{0\cdot001293}(1+\beta t)$$

Dosadíme-li sem číselné hodnoty

$$g^* = 980\cdot6\,\frac{cm}{sec^2},\quad S = 13\cdot5956\,\frac{g}{cm^3}$$

obdržíme

$$\sqrt{\frac{p}{\sigma}} = 27993\,\frac{cm}{sec}$$

tudíž

$$c = 27993\sqrt{1+\beta t}$$

výsledek, v mezích číselné přesnosti, s jakou konstanty jsou dány, s hořejším souhlasný.

Budiž ještě učiněno upozornění, že výsledek dle formule Newtonovy odvozený předpokládá vzduch suchý. Je-li vzduch vlhký, neplatí, přísně vzato, nezávislost rychlosti c na tlaku vzduchu. K otázce této se ještě vrátíme.

§ 62. Pozorování po Newtonovi a před Laplacem.

Theoretickým výkladem Newtonovým a neshodou, kteráž se objevila mezi výpočtem a pozorováním dosud vykonaným, byl dán popud k pracím novým, jež začátkem století 18tého provedeny byly v počtu dosti značném. Tak *R. Boyle* nalezl (kolem r. 1700) hodnotu $366\,\frac{m}{sec}$, *Cassini*, *Huygens*, *Picard*, *Römer* (kolem 1700) hodnotu $356\,\frac{m}{sec}$, později (1708 a 1709) *Flamstead* a *Halley* $348\,\frac{m}{sec}$, *Derham* (1708) hodnotu $348\,\frac{m}{sec}$.

Zkušeností, jichž při těchto pracích bylo nabyto a jimiž zejména na účinek větru bylo poukázáno, mohlo býti užito při

práci většího slohu, jež byla z uložení *Pařížské akademie věd* podniknuta roku 1738. V kommissi k cíli tomu zvolené byli *Cassini de Thury*, *Lacaille* a *Maraldi*. V Paříži a jeho okolí vybráno několik stanic pozorovacích; na dvou (pevnosti Montmartre a Monthléry) dávány střídavě v intervallech půlhodinových výstřely dělové; na ostatních (hvězdárna, mlýn Fontenay-aux-Roses, zámek Lay) konána pozorování časová; větší počet těchto stanic zvolen proto, aby se zjistilo, zda-li při různých odlehlostech vychází pro rychlost výsledek týž. Pozorování konána za klidných nocí březnových roku 1738, vítr byl slabý; jeho účinek měl býti eliminován střídáním směru, v němž se zvuk k pozorovacím stanicím šířil. Výsledek, na 0° přepočítaný, byl $332\cdot0\,\frac{m}{sec}$.

Příznivý výsledek těchto pozorování byl pobídkou, aby se opakovala na jiných místech, za poměrů tlakových a tepelných, jež se od obyčejných značněji odchylovaly. Tak nalezl v jižní Americe *De la Condamine* v Quito (1740) při tlaku barometrickém velmi malém (55 *cm*, ve výši 2850 *m*) výsledek $339\,\frac{m}{sec}$, a později (1744) v Cayenne na pobřeží mořském při vysoké teplotě výsledek $357\,\frac{m}{sec}$. Rovněž ke konci století 18tého a při začátku století 19tého konána četná pozorování, kteráž však nepřinesla dále nic nového.

V některých směrech byl theoretický výklad Newtonův úplně potvrzen; zejména, že jest rychlost zvuková na tlaku vzduchu nezávislá, že však jest podmíněna teplotou; také o účinku směru větru nebylo pochybnosti; nevysvětlenou zůstala však veliká odchylka mezi číselným výsledkem ze vzorce Newtonova plynoucím, který dával jen $280\,\frac{m}{sec}$, a mezi pozorováním, při němž i nejmenší hodnoty nešly pod $330\,\frac{m}{sec}$. Mnozí badatelé hleděli sice neshodu tuto vysvětliti (na př. Chladni ve své Akustice), avšak způsobem nikterak uspokojujícím.

§ 63. Theoretický vzorec Laplaceův.

Myšlenky nové, a jak se postupem doby ukázalo, zcela správné a otázku jasně vystihující, pronesl *Laplace.* Dne 23. prosince 1816 četl v akademii Pařížské pojednání*) „o rychlosti zvuku ve vzduchu a ve vodě", ve kterém poukázal na účinek oteplení a ochlazení, kteréž při vlnivém pohybu vzduchu nastává zhuštěním a zředěním; zhuštěním se vrstvy vzduchové oteplí; při špatné vodivosti tepelné vzduchu a při značné frekvenci kmitové zůstane toto teplo lokalisováno, nesdílíc se vrstvám dalším; následkem toho nelze zde předpokládati zákon *Boyle-Mariottův*, který se vztahuje na změny *isothermické*, nýbrž zákon *Poissonův*, platící pro změny *adiabatické*.

Zákon tento jest vyjádřen rovnicí

$$pV^{k} = Const. \quad k = \frac{C_p}{C_v}.$$

Vystupuje zde nová konstanta k, totiž poměr obou tepel specifických plynu (kapacit tepelných C), při konstantním tlaku C_p a při konstantním objemu C_v. Změní-li se tlak o Δp a následkem toho i objem o ΔV, platí rovněž pro poměry změněné

$$(p + \Delta p) \, . \, (V + \Delta V)^{k} = Const.$$

Dělením obou rovnic obdržíme

$$1 + \frac{\Delta p}{p} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{-k}$$

čili

$$\frac{\Delta p}{p} = -k \frac{\Delta V}{V} + \frac{k(k+1)}{1 \, . \, 2}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^{2} - \ldots$$

Poměrná změna objemu $\frac{\Delta V}{V}$ jest vždy malá. Je-li změna tato positivní, t. j. roztahuje-li se plyn, pak na pravo rovnice poslední převládá člen prvý negativní nad následující positivní a veličina $\frac{\Delta p}{p}$ jest negativní, t. j. napjetí klesne; pak-li jest $\frac{\Delta V}{V}$

*) Sur la vitesse du Son dans l'air et dans l'eau; vyšlo pak v Annales de chimie et physique, (2) III p. 238, 1816., později obšírně v Traité de mecanique céleste, V 1825.

negativní, t. j. stlačuje-li se plyn, obdržíme, píšíce $-\frac{\Delta V}{V}$ na místě $\frac{\Delta V}{V}$,

$$\frac{\Delta p}{p} = k\frac{\Delta V}{V} + \frac{k(k+1)}{1 \, . \, 2}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^{2} + \ldots,$$

napjetí tedy roste. Příbližně jest procentualní změna napjetí k-kráte větší než procentualní změna objemu. Vzhledem k definici modulu E objemové pružnosti

$$E = \Delta p : \frac{\Delta V}{V}$$

obdržíme

$$E = kp + \frac{k(k+1)}{1 \, . \, 2} p \frac{\Delta V}{V} + \ldots.$$

Při obyčejných úkazech akustických jest procentualní umenšení objemu $\frac{\Delta V}{V}$ čili, jak zkrátka pravíme, zhuštění, velmi malé; pak jest příbližně

$$E = kp$$ V. st. 203 (1)

a tudíž rychlost zvuku

$$c = \sqrt{k\frac{p}{\sigma}}$$

a to jest *vzorec Laplaceův.* Dlužno však upozorniti, že při explosivním porušení rovnováhy vzduchové vzniká zhuštění dosti značné, následkem čehož nelze ho zanedbávati, pak jest přesněji, když na prvním dalším členu přestáváme,

$$c = \sqrt{\frac{kp}{\sigma}\left[1 + \frac{1}{2}(k+1)\frac{\Delta V}{V}\right]}. \quad {}^{*)}$$

Rychlost, s jakou explosivní vlny vzduchem (a každým plynem) postupují, jest tedy větší; k otázce této se ještě vrátíme. st. 219

Chtějíce vzorec Laplaceův pro vzduch číselně propočítati, položíme

$$\sigma = 0{\cdot}001276 \, . \, 10^{-6} \, \frac{p}{1 + \beta t}$$

$$k = 1{\cdot}405.$$

Tím vyjde v jednotce $\frac{cm}{sec}$,

$$c = 33183 \, . \sqrt{1 + \beta t}$$

*) V [illegible] c [illegible] c [illegible] $\sqrt{1 - \frac{k+1}{\ldots}\frac{\Delta r}{\ldots}}$

anebo přehledněji, v jednotce $\frac{m}{sec}$,

$$c = 331{\cdot}8\ \sqrt{1+\beta t}.$$

Výsledek tento souhlasí s pozorováním velmi dobře: číselná konstanta tohoto vzorce udává rychlost c pro $t=0$; pro jiné teploty mění se c jako $\sqrt{1+\beta t} = \sqrt{\beta\left(\frac{1}{\beta}+t\right)} = \sqrt{\beta}\,.\,\sqrt{T}$, tudíž úměrně s druhou odmocninou absolutní teploty T. Chce-li se vzorec ihned pro tuto teplotu upraviti (což však není praktické), obdrží se $\left(\text{při } \frac{1}{\beta} = 273\right)$ v jednotce $\frac{m}{sec}$,

$$c = 20{\cdot}08\ \sqrt{T}.$$

Dlužno ke konci upozorniti, že v dobách, kdy Laplace vzorec svůj odvodil, nebyl číselný jeho výsledek tak přesný a neshodoval se tudíž tak dobře se skutečností, jak se jeví za dnů našich. Příčinou toho bylo, že hodnota k (při hořejším výpočtu dle Roentgena volená) nebyla než sotva hrubě příbližně známou. Tím se také vysvětluje, proč vzorec Laplaceův nebyl ihned uznán a proč naopak se stran mnohých proti němu činěny námitky.

Budiž v souvislosti s tímto výkladem ještě poznamenáno, jaký účinek má *vlhkost* vzduchu na výsledek. Při stejném tlaku a stejné teplotě jest specifická hmota σ' vzduchu vlhkého menší než specifická hmota σ vzduchu suchého, a sice jest*) při napjetí e vodních par ve vzduchu a tlaku barometrickém b

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{b-\frac{3}{8}e}{b} = 1-\frac{3}{8}\frac{e}{b}.$$

Značí-li tedy c' rychlost ve vzduchu vlhkém skutečně pozorovanou, c rychlost, jaká by se nalezla, kdyby vzduch při téže teplotě a při témže tlaku byl úplně suchým, jest

$$c' = \sqrt{\frac{p}{\sigma'}}, \qquad c = \sqrt{\frac{p}{\sigma}},$$

$$\frac{c}{c'} = \sqrt{\frac{\sigma'}{\sigma}} = \sqrt{1-\frac{3}{8}\frac{e}{b}}.$$

Provedeme-li na pravo odmocnění dle věty binomické, obdržíme řadu, v níž můžeme přestati na prvé mocnosti poměru $\frac{e}{b}$, kterýž

*) Mechanika § 351, pag. 534.

jest číslem tak malým, že vyšší jeho mocnosti mizí. Jest tudíž příbližně:

$$\frac{c}{c'} = 1-\frac{3}{16}\frac{e}{b}.$$

Dle tohoto vzorce lze tedy z pozorované rychlosti c' především počítati rychlost c, kteráž jest menší a pak teprve z této redukcí na 0^0 určiti

$$c_0 = \frac{c}{\sqrt{1+\beta t}},$$

kdež β znamená koefficient roztažlivosti vzduchu suchého ($= 0{\cdot}00367$). Rychlost ve vzduchu vlhkém není tedy v přísném slova smyslu nezávislou na tlaku barometrickém.

Srovnáváme-li podobně rychlost zvuku c_1 v libovolném plynu s rychlostí zvuku c v suchém vzduchu téže teploty a téhož tlaku, obdržíme

$$c_1 = \sqrt{k_1\frac{p}{\sigma_1}}, \qquad c = \sqrt{k\frac{p}{\sigma}},$$

$$\frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{k}{k_1}\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma}}.$$

Zavedeme-li hutnost plynu $\frac{\sigma_1}{\sigma} = D$, obdržíme

$$\frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{k}{k_1}\,.\,D}.$$

Co se týče poměru $k_1 = \frac{C_p}{C_v}$ ukazuje se, že pro plyny dokonalé jako vodík, kyslík, dusík, vzduch, kysličník uhelnatý a j. poměr tento jest téměř stejný, totiž $= 1{\cdot}4$. Jde-li tedy jen o hodnoty orientační, lze položiti $k_1 = k$ tudíž

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{D}}.$$

Jinak nutno však pro jiné plyny, jako kysličník uhličitý, ammoniak atd., uvésti správnou hodnotu k_1 v počet.

§ 64. Pozorování po Laplaceovi.

Jest pochopitelno, že Laplace, docíliv shody mezi výpočtem a pozorováním, měl zvláštní na tom zájem, aby novými pokusy otázka o rychlosti zvuku definitivně byla rozřešena. Z jeho iniciativy učinilo *„Bureau des Longitudes“ v Paříži* usnesení, aby nová pozorování dle methody v roce 1738 užité, ale se vší možnou přesností a vzhledem ke všem účinkům vedlejším (teplotě, vlhkosti, větru) byla provedena. Zvoleny pouze dvě stanice; Villejuif a Monthlery, jichž odlehlost Arago triangulací stanovil na 18612·5 *m*. Na stanici Villejuif pozorovali *Arago, Matthieu, De Prony*, v Monthlery pak *A. v. Humboldt, Gay-Lussac* a *Bouvard*. Plán pozorovací byl takový: v jistém umluveném okamžiku vypálí se na prvé stanici dělo, 5 minut na to odpoví se výstřelem na stanici druhé, 5 minut na to dá se výstřel opět na stanici prvé, 5 minut na to odpoví se opět na stanici druhé, a tak střídavě až do jistého umluveného počtu. Pozorování konána v noci dne 21. června 1822. Při tom se ukázalo, že na stanici Villejuif bylo slyšeti všechny výstřely ze stanice druhé, ale naopak na stanici Monthlery bylo slyšeti jen výstřelů sedm ze stanice prvé. Tyto byly kombinovány — aby se účinek větru vyloučil — s příslušnými, jež přišly ve směru opačném; průměrné opozdění signalu zvukového proti světelnému činilo 54·6 *sec*. Rychlost zvuku při pozorované teplotě 15·9° činila dle toho $340{\cdot}9\,\frac{m}{sec}$; po redukci na 0°, při čemž přihlíženo též k vlhkosti vzduchu, nalezen závěrečný výsledek

$$c_0 = 330{\cdot}8\,\frac{m}{sec}.$$

Přirovnáme-li pozorování právě popsaná k těm, jež pořádala akademie Pařížská, shledáme — nehledíc k větší dokonalosti strojů (chronometrů Breguetových) a větší přesnosti pozorování, což vše při rozdílu 84 let jest věcí samozřejmou — také methodický pokrok v tom, že se pokusy dály jenom v obou protivných směrech a v přestávkách časových daleko kratších: vskutku lze jen tak připustiti, že se tím účinek větru z počtu spíše vyloučí.

Přísně vzato nestačí však k tomu ani přestávky pětiminutové; i v této krátké době může se vítr měniti, a že se té noci vskutku měnil, tomu nasvědčuje okolnost, že některé výstřely na stanici Monthlery bylo slyšeti a některé nikoli. Proto značí další pokrok methoda, dle níž roku následujícího, 1823, pracovali *Moll* a *van Beck* a *Kuytenbrouwer* na pláni Utrechtské. Stanicemi byla dvě návrší, Zevenboompjes (sedmistromů) a Kooljesberg v odlehlosti 17669·3 *m*. Výstřely dály se co možno současně, tak že rozdíl časový činil jen 1 neb 2 sec. Počet pozorování byl též značný; večer dne 27. června 1823 vypáleny 22 rány z obou stanic, večer dne 28. června dokonce 40 ran. Rozdíl časový mezi signalem optickým a akustickým činil velmi blízce 52 sec. Výsledek ze všech pozorování, redukovaný na teplotu nullovou, byl $c_0 = 332{\cdot}05\,\frac{m}{sec}$, s korrekcemi pak, jež dodatečně v novějších letech (Jolly, Röber, van Rees, Schröder van der Kolk, Bravais a Martins) byly ještě připojeny,

$$c_0 = 332{\cdot}25 \pm 0{\cdot}093\,\frac{m}{sec}.$$

Pozorování tato byla asi nejdokonalejší ze všech, jež ve volném vzduchu byla provedena, a jest zajímavo, že se výsledek závěrečný v mezích pravděpodobné chyby shoduje s výsledkem theoretickým, dle nynějších dat ze vzorce Laplaceova vypočteným. Dodatečné korrekce, o nichž zmínka učiněna, vztahovaly se jednak k přesnější hodnotě koefficientu β při redukci na 0°, jednak k otázce, zda-li se i při současných výstřelech ve směrech protivných vyloučí účinek větru, když se z pozorovaných časových rozdílů mezi signalem optickým a akustickým, jak se stanovily ve směru jednom a pak opačném, vezme arithmetický průměr. Ukazuje se, že by se tak stalo jen, kdyby vítr vanul ve směru obě stanice spojujícím; vane-li však ve směru šikmém, dlužno výsledek počítati dle vzorce složitějšího (van Rees).

Značí-li $s = AB$ odlehlost stanic pozorovacích A a B, c rychlost zvuku při bezvětří, u rychlost větru ve směru AB, platí vzorce

$$s = ct = (c + u)\,t_1 = (c - u)\,t_2,$$

kdež jsou t_1 a t_2 doby, za které zvuk dojde ze stanice A do B (s větrem) a naopak z B do A (proti větru). Odtud plyne

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$$

čili

$$\frac{s}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}\right)$$

$$c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2).$$

Vane-li tudíž vítr ve směru od jedné stanice ke druhé a jsou-li výstřely současné, pak se v rychlosti průměrné, z obou pozorování vypočtené, účinek větru vskutku vymýtí.

Jinak má se však věc, když vítr vane ve směru, kterýž jest o úhel φ od směru AB odchylný (obr. 78.). Dráha zvuku $AB = s$ jest pak výslednicí z drah AC a CB zvuku a větru; podobně dráha zvuku BA jest výslednicí z drah BD a DA zvuku a větru. Platí pak rovnice

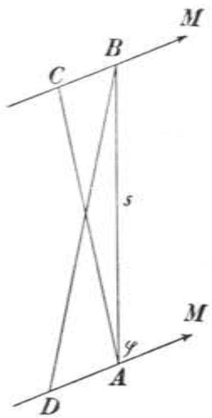
$$c^2t_1^2 = s^2 + u^2t_1^2 - 2sut_1 \cos\varphi,$$
$$c^2t_2^2 = s^2 + u^2t_2^2 + 2sut_2 \cos\varphi.$$

Násobíce hořejší rovnici t_2^2, dolejší t_1^2 a odečtouce hořejší od dolejší obdržíme zkrátíce

$$2u \cos\varphi = s\,\frac{t_2 - t_1}{t_2 t_1}.$$

Dosadíme-li pak hodnotu u do jedné z hořejších rovnic, obdržíme po krátké redukci vzorec

$$c = s\sqrt{\frac{1}{t_1t_2} + \left(\frac{t_2 - t_1}{2t_1t_2\cos\varphi}\right)^2}.$$



Obr. 78.

Je-li specialně $\varphi = 0$, obdrží se vzorec

$$c = s\,\frac{t_1 + t_2}{2t_1t_2}$$

již dříve odvozený.

Z dalších pozorování buďtež ještě uvedeny některé, při nichž poměry byly od obyčejných odchylné. Tak určil rychlost zvuku ve vzduchu v krajinách polarných za teploty velmi nízké kapitán *Parry* roku 1822 a 1824, *Kendall*, člen expedice Franklinovy, roku 1825; výsledek byl souhlasný s theorií. Nezávislost rychlosti zvuku ve vzduchu na tlaku osvědčila se při pokusech v horských krajinách, kde jedna stanice pozorovací byla hluboko v údolí (tlak barometrický vyšší), druhá na vysoké hoře (tlak barometrický nižší), tak že mezi oběma stanicemi byl jistý rozdíl výškový. Při pokusech, jež v Tyrolsku konali *Stampfer* a *Myrbach* (1823), činil rozdíl ten 1364 m, při pokusech jež ve Švýcarech

konali *Bravais* a *Martins* (1844) činil 2079 m; výsledek byl s theorií souhlasný; u prvnějších $332{\cdot}4\,\frac{m}{sec}$, u druhých náhodou též $332{\cdot}4\,\frac{m}{sec}$.

§ 65. Práce Régnaultovy.

Otázkou o šíření se zvuku ve vzduchu zabýval se též *Régnault* a práce jeho, na širokém základě, s pečlivostí a přesností tomuto genialnímu experimentatorovi vlastní, v letech 1862—1866 provedené značí v otázce této rozhodný pokrok. Régnault dobře rozpoznal, v čem záleží nedostatek měření dosavadních. Rychlost určuje se z dráhy a doby; dráha byla vždy poměrně s velikou přesností stanovena; avšak s touto nebyla přesnost měření časového v souhlasu. Měření časové provádělo na dané stanici vždy několik pozorovatelů — ke vzájemné kontrole — a to tím způsobem, že každý hleděl určiti dle chronometru okamžik, kdy zahlédl signal optický a kdy zaslechl signal akustický; desetiny sekundy byly při tom odhadovány. Ukázalo se však, že v odhadech těchto i mezi pozorovateli tak věhlasnými, jako byli členové „bureau des longitudes“, vznikly rozdíly dosti značné, nejenom dosahující ale někdy i přesahující půl sekundy. Ukázaly se tedy chyby osobní. Věc jest pochopitelnou; každý pozorovatel jest signalem, na který má napjatou pozornost, přece jen překvapen; organ pozorovací jest jednou oko, po druhé ucho; dojem zde vzniklý musí nejprve býti uvědoměn a pak teprve následuje činnost rozumová, dle uvědomění tohoto okamžik ustanoviti. Vzhledem k osobním odchylkám tak značným, jak zkušenost je ukázala, nelze za to míti, že by difference časová — jež činila méně než 1 minutu — byla přesněji určena než na nejvýše na desetinu sekundy; tato však činí více než $\frac{1}{6}\%$ celku, což při rychlosti zvuku činí přes půl metru; proto chyba ve výsledku zasahá velmi značně do desetin metru. Aby chyba tato se umenšila, bylo nutno celý způsob měření časového změniti, t. j. místo pozorování subjektivního zavésti měření objektivní. V tomto zdokonalení spočívá hlavní pokrok prací Régnaultových. Aby bylo lze i doby kratinké ještě s jistotou měřiti, zavedl Régnault ladičku na začazeném válci píšící jakožto chronografu; ve chvění svém udržovala se zařízením elektromagnetickým; kmitočet její byl kontrolován současnými značkami sekundovými od kyvadla hodinového*). Šlo nyní ještě o registraci začátku a konce doby, za jakou zvuk jistou drahou proběhl. Také zde užito registratoru elektromagnetického hned vedle ladičky na témže válci píšícího. Před začátkem pokusu uzavřel se proud elektromagnetem, tak že se registrující péro z rovnovážné polohy odchýlilo; proud se vedl mezi jiným též tenkým drátkem umístěným při ústí bambitky neb děla; při výstřelu se projektilem drátek přetrhl, čímž registrující péro z polohy uchýlené přešlo do rovnovážné; tak byl naznačen začátek. Aby se pak konec naznačil, byl na stanici druhé umístěn přístroj reagující na vlny zvukové, totiž kaučuková blána, ve svislé rovině napjatá; v prostřed měla malý platinový plíšek spojený s jedním polem batterie; proti plíšku v bezprostřední blízkosti — ale přece tak, aby nebylo žádného kontaktu — byl umístěn tupý platinový hrot, spojený s druhým polem batterie. Jakmile vlna došla, prohnula se poněkud jejím účinkem membrana, nastal dotek, uzavřel se proud, který zároveň oním elektromagnetickým registratorem byl veden a na válci učinila se krátká značka. Dlužno ovšem poznamenati, že jako při subjektivním způsobu, tak i při tomto objektivním nastává setrvačností hmoty při registrování v pohyb uváděné jakési třebas velmi nepatrné opozdění, jakožto nový zdroj chyby; avšak spíše lze zde očekávati, že v differenci časové, která se z obou registrací odvodila, chyba tato se eliminuje.

Jak řečeno, v této úpravě objektivního měření časového záležela hlavní přednost prací Régnaultových. Další předností byla rozmanitost podmínek, za jakých šíření se zvuku bylo pozorováno. Měření dosavadní konána ve volném vzduchu, způsobem v podstatě své vždy stejným. Také Régnault opakoval pokusy ve volném vzduchu; to však bylo jen jako doplňkem prací hlavních, při nichž zkoušel, jak se zvuk šíří ve válcových trubicích. Použil totiž doby, kdy se v Paříži kladly nové plynovody a vodovody. Při potrubí plynovodném mohl použiti trubic průměru 10·8 *cm* a 21·6 *cm*, při potrubí vodovodním trub průměru 30·0 *cm* a 110 *cm*. V délce mohl experimentovati při plynovodech až do dálky 3·625 *km*, při vodovodech až do dálky 4·900 *km*. Trubice plynovodní bylo možno naplniti též jinými plyny, jež lze v dostatečném množství snadno obdržeti a tak experimentem přímo určiti rychlost, s jakou se v nich zvuk šíří.

*) Mechanika § 52 a 53, pag. 76—78.

Další úprava experimentalní byla pak jednoduchá. Na začátek trubice nasazen byl železný plech, do něhož u prostřed upevněna pistole (isolovaná) a onen drátek před jejím ústím. Na konci trubice pak upevněna svisle ona kaučuková blána s plíškem a hrotem platinovým u prostřed. Registrace zjevů po výstřelu ukázala pak ten zajímavý zjev, že membrana reagovala nejen na zvuk původní, ale i na zvuk odražený. Vlna zvuková totiž přijdouc až k membraně, odráží se zpět, postoupí až k začátku, odráží se odtud od železného plechu v původní směr a přijde tak po druhé k membraně, a podobně ještě po třetí a tak i několikrát. Bylo tedy možno stanoviti rychlost hned po výstřelu při prvním proběhnutí vlny trubicí, ale pak též při proběhnutí druhém, třetím atd., okolnost, která pro výsledky ukázala se býti důležitou.

Výsledky tyto, jichž Régnault došel, lze shrnouti ve větách následujících. Intensita vlny zvukové postupující v trubici umenšuje se do dálky, zvuk slábne, ale v trubicích užších měrou větší než v širších; v těchto postupuje zvuk při malém seslabení do velmi značné dálky. Příčinou těchto rozdílů jest patrně tření na stěnách; proto také při hladkých stěnách zvuk slábne měrou menší než při drsných za poměrů jinak stejných. Při větší intensitě zvukové jest rychlost zvuku v trubicích větší, při umenšující se intensitě ubývá této rychlosti, ale vždy méně a méně až k jisté hodnotě mezní; tato hodnota mezní souvisí zase s průměrem trubice; jest menší u trubic úzkých, při širších pak se blíží hodnotě platící pro volný vzduch, dle Régnaulta hodnotě $330{\cdot}6\,\frac{m}{sec}$.

Způsob, jak zvuk vznikne, nezdá se míti pro rychlost postupu významu žádného. Régnault užíval výstřelu z pistole při měnlivém množství prachu, užíval též třaskavého plynu, komprimovaného vzduchu, který náhle do trubice vpustil, též nárazů pístem, ale také různých tonů a hlasu lidského. Nerozhodnutou zůstává otázka, zda-li výška tonu má pro rychlost v trubicích (nikoli pro volný vzduch) význam. Régnault soudil ze svých pokusů, že by tony vyšší se šířily volněji. Naopak soudil později *Helmholtz* (z důvodů theoretických), že tony vyšší by se šířily rychlostí větší. Okolnost tato měla by pro hudební zvuk — u něhož vedle základního tonu jest ještě řada dalších svrchních — ten význam, že by postupem takového hudebního zvuku barvitost jeho se pozměnila.

Při pokusech o šíření se zvuku v plynech osvědčil se především zákon, dle něhož rychlost v jistém plynu není závislou na jeho napjetí; pracováno ve vzduchu zředěném do tlaku 24·7 *cm* a zhuštěném do tlaku 126·7 *cm*, a nenalezeno v rychlostech rozdílu žádného. V jiných plynech ukázala se velmi přibližně rychlost býti obráceně úměrnou s druhou odmocninou z hutnosti, jak theoretický zákon Laplaceův naznačuje. Experimentováno s vodíkem, kysličníkem uhličitým, kysličníkem dusnatým a ammoniakem. Poměr mezi rychlostí c_1 v plynu a c ve vzduchu téže teploty a téhož tlaku vyšel následovně:

$$\begin{array}{lcccc} & H_2, & CO_2, & N_2O, & NH_3 \\ \frac{c_1}{c} = & 3{\cdot}801, & 0{\cdot}8009, & 0{\cdot}8007, & 1{\cdot}2279. \end{array}$$

Hutnost vodíku jest 0·06964. Počítáme-li hutnosti ostatních plynů dle atomových vah nyní přijímaných*), totiž $O = 16$, $C = 12$, $N = 14{\cdot}04$, $H = 1{\cdot}01$, obdržíme hodnoty:

$$\begin{array}{lccc} D = 0{\cdot}06964, & 1{\cdot}519, & 1{\cdot}520, & 0{\cdot}5871, \\ \sqrt{\frac{1}{D}} = 3{\cdot}7894, & 0{\cdot}8114, & 0{\cdot}8112, & 1{\cdot}3051. \end{array}$$

Souhlas pro vodík jest velmi dobrý; v ostatních jest méně dobrý proto, poněvadž jednak se předpokládá rovnost poměrů specifických tepel $k_1 = k$, a jednak poněvadž při tom rozsahu potrubí nelze garantovati naprostou čistotu plynu, k pokusu užitého.

Při pokusech, kteréž Régnault ve volném vzduchu konal, počínal si podobně jako pozorovatelé dřívější, jenom že užil své dokonalejší methody chronografické a registrační. Z velikého počtu pozorování (334 výstřelů na každé stanici) obdržel výsledek

$$c_0 = 330{\cdot}7 \frac{m}{sec},$$

tedy rychlost menší, než dosavad za pravděpodobnou se přijímala.

Vědecká diskusse, kteráž se ku pracím Régnaultovým připojila, týkala se hlavně té interpretace pokusů, dle nichž by

*) Viz na př. F. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Physik 1901. Tab. 42. V knihách uvádějí se k pozorováním Régnaultovým staré hodnoty pro $\sqrt{\frac{1}{D}}$, totiž 3·682, 0·8087, 0·8100, 1·3035. Hodnota novější pro vodík souhlasí s pozorováním daleko lépe.

zvuk silnější se měl šířiti rychleji než slabší. Poukazováno na to (H. J. Rink, 1873), že se při výstřelu vzduch uvádí nejen v pohyb vlnivý, ale též postupný, že se vrstvy vzduchové ženou explosí tak jako větrem. Proto větší rychlosti, k nimž pokus vedl, vysvětlují se tímto progressivním pohybem vzduchu, nikoli větší intensitou pohybu undulačního. Nelze pochybovati, že námitky tyto mají oprávněnost; ostatně Régnault, jak z jeho vlastních slov lze vyčísti, byl si tohoto pohybu progressivního dobře vědom. Jest ostatně nesnadno při akustickém vzrušení vzduchu tomuto progressivnímu pohybu se vyhnouti. Že při explosích na př. vznikajících při výboji elektrické batterie rána vzduchem v prvních okamžicích se šíří rychlostí daleko větší, ukázali pádně pokusy velmi důvtipně upravenými *E. Mach*, *Sommer*, *Tumlirz* a *Kögler* (1877). V odlehlostech 10 *cm* vycházela rychlost 750 $\frac{m}{sec}$, do 40 *cm* rychlost 416 $\frac{m}{sec}$, do 100 *cm* rychlost 370 $\frac{m}{sec}$, tak že jest viděti, jak teprve ve velkých odlehlostech se dostavuje rychlost normalní.

Dlužno však poznamenati, že i z důvodů theoretických při prudších nárazech vlnivých větší rychlost očekávati lze — i nehledíc k eventualnímu pohybu progressivnímu — poněvadž při větším zhuštění, jak v § 63. ukázáno, elasticita vzduchu jest větší.

§ 66. **Methoda koincidencí.**

Pracemi Régnaultovými byla otázka o rychlosti zvuku ve vzduchu, pokud se týče přímého jejího měření, zakončena; vskutku také nebylo by tak snadno jak co do slohu práce tak co do přesnosti pozorování něco dokonalejšího provésti. Zmínky zasluhuje — více zajímavostí základní myšlenky než vhodností její pro přesné měření — methoda, kterou navrhl *J. Bosscha**) již r. 1853 a která se vyznačuje tím, že lze dle ní rychlost zvuku i v menších prostorách, na př. v uzavřené síni stanoviti. Na dvou místech A a B jsou postaveny signalové zvonky (nebo jinaké přístroje signalové), které dávají pravidelné signaly vždy za dobu τ (na př. za 1, $^1|_2$, $^1|_3$ atd. *sec*) *přesně současně* (unisono). Pozorovatel, stojící na místě M, slyší signaly tyto

*) Jan Bosscha, * 1831, fysik hollandský, člen akademie Amsterodamské.

též současně, je-li $AM = BM$, jinak nikoli. Je-li na př. $BM < AM$, slyší signal od B dříve a po něm teprve signal od A. Časová retardace tohoto signalu roste dle dráhové difference $AM - BM$, může však konečně rovnati se přesně periodě signalové τ, je-li $AM - BM = c\tau$; v tom případě slyší pozorovatel signaly současně, ale nikoli tytéž, nýbrž signal n-tý od B se signalem $(n-1)$ od A. Kdyby bylo $AM - BM = 2c\tau, 3c\tau, 4c\tau \ldots$, nastala by opětně koincidence signalů, ale signal n-tý od B koinciduje tu s předešlým, t. j. $(n-2)$hým, $(n-3)$tím atd. od A. Třeba tedy měniti odlehlosti AM a BM až subjektivní koincidence nastane, načež z rozdílu odlehlostí $AM - BM$ lze rychlost c počítati. Nejjednodušším jest voliti pozorovací stanici M na přímce AB, pak jest $AM - BM = AB$, t. j. *koincidence subjektivní nastává na každém místě* M, tedy kdekoli ve směru AB *vně* odlehlosti AB. Rychlost zvuku jest pak dána výrazem

$$\frac{AB}{\tau},\quad \frac{1}{2}\frac{AB}{\tau},\quad \frac{1}{3}\frac{AB}{\tau}\ldots$$

dle toho, zda-li opozdění signalu A proti signalu B činí τ nebo 2τ, nebo 3τ atd.

Dle methody této pozoroval zejména *Akas Szathmari* (1878) v zahradě při vzduchu klidném; současnost signalů byla zaručena kyvadlem, uzavírajícím (při průchodu rovnovážnou polohou) na kratinkou dobu proud, který elektromagneticky paličky zvonku jednoho i druhého v témže okamžiku uvedl v pohyb proti zvonku. Doba kyvu kyvadla určena $\tau = 0{\cdot}2961$ *sec* (přibližně $\frac{1}{3}$ *sec*). Opozdění o jeden signal, tudíž koincidence signalu n-tého s $(n-1)$vým nastala při odlehlosti $AB = 99{\cdot}25\,m$. Z toho vyšlo $c = 335{\cdot}19\ \frac{m}{sec}$ při teplotě a vlhkosti dané, a po redukci na nullu a na suchý vzduch

$$c = 331{\cdot}57\ \frac{m}{sec}.$$

Hořejší hodnota AB jest střed odvozený celkem z 30 jednotlivých pozorování. Z těchto differují jednotlivé od tohoto středu až o $+0{\cdot}74\,m$ a $-0{\cdot}76\,m$, mezi sebou tedy o $1{\cdot}5\,m$, což pro rychlost zvuku — při $\tau = \frac{1}{3}\,sec$ — znamená odchylku $4{\cdot}5\,m$, tedy dosti značnou. Jest z toho patrno, že koincidence se také nedá uchem s tou jemností a přesností určiti, jak by se očekávalo, zajisté též proto, že oba signaly vzhledem k různé odlehlosti, nezní stejně silně, jeden jest značně slabším. Bosscha

odvodil též modifikaci methody pro případ, že by signaly nebyly přísně unisono, nýbrž že by jeden se opakoval v periodě τ, druhý v periodě $\tau + \Delta\tau$, kdež jest Δt velmi malé.

§ 67. Závěrečný výsledek pro rychlost zvuku ve vzduchu a její vztahy k délce vlny zvukové.

Nelze pochybovati, že pokusy Régnaultovy o rychlosti zvuku ve vzduchu byly ze všech nejdokonalejší a že tudíž výsledek jím nalezený má před jinými váhu daleko větší. Régnault přijal jakožto výsledek pravdě nejpodobnější hodnotu

$$c_0 = 330{\cdot}6\ \frac{m}{sec}.$$

Mnozí, majíce zřetel přece též k jiným výsledkům, jež vedly k hodnotám větším, přijímají*)

$$c_0 = 331\ \frac{m}{sec}.$$

Počítáme-li z hodnoty Régnaultovy dle koefficientu $\beta = 0{\cdot}00367$ rychlost c pro různé teploty suchého vzduchu, obdržíme tabellarně:

t^0	$c\ \frac{m}{sec}$	t	$c\ \frac{m}{sec}$
— 40	305·37	0	330·60
— 30	311·86	10	336·61
— 20	318·24	20	342·52
— 10	324·48	30	348·32
— 0	330·60	40	354·04.

Pro teplotu $t = 100$ vychází $c = 386{\cdot}5\ \frac{m}{sec}$. Nepřímou methodou určil *E. H. Stevens* pro tuto a i pro vyšší teplotu rychlost zvuku a vypočítal dle toho poměr k specifických tepel C_p a C_v následovně**):

t	c	k
0	331·3	1·4006
100	387·3	1·3993
300	480·2	1·389
500	557·8	1·376
750	641·8	1·358
1000	716·0	1·340.

*) Tak F. Kohlrausch, též Landolt a Börnstein.

**) Verh. der deutschen physik. Ges. 1901, pag. 54, Heft 5.

Pro suchý vzduch střední teploty 15° vychází

$$c = 339{\cdot}58.$$

Pro vlhký vzduch této teploty zvýší se hodnota dle poměru

$$\sqrt{\frac{b}{b - \frac{3}{8}e}} \doteq 1 + \frac{3}{16}\cdot\frac{e}{b}.$$

Přijměmež tlak barometrický $b = 750$ *mm* a relativní vlhkost 50%. Napjetí vodních par při 15° nasycených činí 12·8 *mm*, tudíž jest při vlhkosti 50% napjetí skutečné $e = 0{\cdot}50 . 12{\cdot}8 = 6{\cdot}4$ *mm*, a tím

$$\frac{3}{16}\cdot\frac{e}{b} = \frac{3}{16}\cdot\frac{6{\cdot}4}{750} = 0{\cdot}0016.$$

Ono číslo se tedy střední vlhkostí 50% zvýší o 0·16%; obdržíme pak

$$c = 340{\cdot}12\,\frac{m}{sec}.$$

Dle toho lze pro obyčejné poměry vzduchu co do teploty, tlaku a vlhkosti přijmouti číslo okrouhlé

$$c = 340\,\frac{m}{sec}.$$

Jakmile jest známa rychlost c, lze pro každý ton o periodě kmitové T anebo o kmitočtu N počítati příslušnou délku vlny λ dle vzorce

$$\lambda = cT \qquad \text{anebo} \qquad \lambda = \frac{c}{N},$$

$$c = 340\,\frac{m}{sec}.$$

Tak jest na př. pro normalní a^1

$$N = 435\,\frac{1}{sec}, \qquad T = 0{\cdot}00230\ sec,$$

$$\lambda = 0{\cdot}782\ m.$$

Přijmeme-li za nejhlubší ton subkontra C, obdržíme příslušnou délku vlny z čísel (v ladění přirozeném)

$$N = 16{\cdot}31\,\frac{1}{sec}, \qquad T = 0{\cdot}0613\ sec,$$

$$\lambda = 20{\cdot}8\ m.$$

Dvanáctá oktava tohoto nejhlubšího tonu, c devítičárkované, má (v témž ladění přirozeném) konstanty

$$N = 66816\,\frac{1}{sec}, \qquad T = 0{\cdot}00014967,$$

$$\lambda = 0{\cdot}00509\ m.$$

Tony zde za příklad zvolené udávají extremy ve směru do hloubky i do výšky; více než 12 oktav lidský sluch neobsáhne. Dle toho začínáme slyšeti, když délka vlny činí 20·8 metrů, a přestáváme slyšeti, když vlnky se umenšily na délku toliko 5 millimetrů. Čísly těmito jest veliký rozsah slyšení velmi dobře charakterisován.

§ 68. **Úkol Newtonův.**

Rychlost šíření se zvuku ve vzduchu vynikne kvantitativně velmi pěkně, když se srovnává s jinými známými rychlostmi, na př. s těmi, jichž nabývá těleso padající volně v gravitačním poli naší země (v prostředí neodporujícím). Tak jest tomu při známém (Newtonově) úkolu: Pusti-li se (ze stanice prvé) těleso dolů do hlubiny (propasti, studně atd.) a slyšíme-li za t *sec*, jak těleso (na stanici druhé) dopadne, vypočísti hloubku h (odlehlost stanic). Zde dlužno dobu t rozložiti ve dvě, totiž t_1, po jakou ono těleso padá, a t_2, za kterou akustický signal dojde nahoru k pozorovateli. Je-li c rychlost zvuku, g intensita gravitačního pole, platí rovnice:

$$t = t_1 + t_2,$$

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad h = ct_2.$$

Ze tří těchto rovnic lze počítati t_1, t_2, h. Jedná-li se jen o určení hloubky h, lze pro číselný výpočet upraviti vzorec nejvýhodněji ve formu následující:

$$\frac{h}{c} = t + \frac{c}{g} \pm \frac{c}{g}\sqrt{1 + \left(2t : \frac{c}{g}\right)}.$$

Číselně jest:

$$c = 331\,\frac{m}{sec},\ 0^0 \qquad g = 981\,\frac{m}{sec^2}\ \text{(Praha)}.$$

Odtud se vypočítá

$$\frac{c}{g} = 33{\cdot}741085\ sec.$$

$$\log\frac{c}{g} = 1{\cdot}5281590.$$

Hořejší vzorec připouští řešení dvoje. Jakožto řešení první, jež vlastně danému úkolu přísluší, označme to, kdy se volí pro veličinu kořenovou znamení záporné. Dlužno však počítati na mnoho decimalních míst, poněvadž v differenci přední místa decimalní se ruší. Proto jest také hodnota $\frac{c}{g}$ udána na mnoho míst decimalních. Výsledek počtu, pro hodnoty $t = 1 \ldots 10$ *sec*, obsahuje tabulka následující. Jest v ní udána pro každé t příslušná hodnota doby t_1 a t_2 a hloubky h. Ke srovnání jest vedle h položena dráha s, kterou by těleso proběhlo, kdyby pád trval celou dobu t, čili kdyby akustický signal se šířil rychlostí velmi velikou, (na př. jako signal světelný), tak že by bylo téměř $t_1 = 0$; z rozdílů $s - h$ jest viděti, mnoho-li z dráhy s odpadlo na účet rychlosti c zvuku. Z počátku jest difference $s - h$ nepatrná; později, kdy konečné rychlosti tělesa padajícího rostou, se zvětšuje.

Číselné řešení úkolu Newtonova.

t (*sec*)	t_1 (*sec*)	t_2 (*sec*)	h (*m*)	s (*m*)	$s - h$ (*m*)
1	0·9856	0·0144	4·77	4·91	0·14
2	1·9440	0·0560	18·54	19·62	1·08
3	2·8773	0·1227	40·61	44·15	3·54
4	3·7874	0·2126	70·36	78·48	8·12
5	4·6760	0·3240	107·24	122·63	15·39
6	5·5444	0·4556	150·79	176·58	25·79
7	6·3941	0·6059	200·55	240·35	39·80
8	7·2262	0·7738	256·13	313·92	57·79
9	8·0417	0·9583	317·21	397·31	80·10
10	8·8416	1·1584	383·44	490·50	107·06

Hloubka „Macochy" (u Blanska na Moravě) činí — od hořejšího gloriettu — 136 až 137 metrů*). Pozorovatel na tomto gloriettu, nechaje volně padati kámen do propasti, slyšel by jej dolů dopadnouti — jak z tabulky vychází — před udeřením 6. sekundy. Oproti tomu udává se, že „kámen do Macochy hozený dopadá na dno za 10 až 11 sekund" — což by dle tabulky poukazovalo k hloubce as 400 metrů. Jest pravda, že se odporem vzduchu pád poněkud opozdí, avšak tolik opozdění toto činiti nemůže. Různost teploty má účinek nepatrný a smyslem opačný. Nelze tedy jinak než za to míti, že pozorovatelé kámen házejí poněkud šikmo do výšky, čímž pak ovšem dopadnutí na dno se opozdí.

*) Dr. Kříž a Koudelka, Průvodce do Moravských jeskyň, pag. 11. a 14. 1900.

Řešení druhé obdržíme přijmouce pro veličinu kořenovou znamení positivní. Výsledek počtu obsahuje tabulka následující, jejíž úprava jest stejná jako tabulky předešlé.

Vedlejší řešení úkolu Newtonova.

t (*sec*)	t'_1 (*sec*)	t'_2 (*sec*)	h' *km*
1	67·468	68·468	22·994
2	69·426	71·426	23·642
3	70·359	73·359	24·282
4	71·270	75·270	24·914
5	72·158	77·158	25·539
6	73·027	79·027	26·158
7	73·876	80·876	26·770
8	74·708	82·708	27·377
9	75·524	84·524	27·977
10	76·324	86·324	28·573

Číselnými hodnotami v tabulce této obsaženými řeší se jiný úkol, který jest analogický s úkolem nahoře daným. Při tomto prvém úkolu signalisuje se akusticky *konec* volného pádu tělesa a signal postupuje směrem *zpátečním* od stanice druhé ke stanici prvé, odkud pád začal a kde se nalézá pozorovatel. Při analogickém úkolu druhém signalisuje se akusticky *začátek* volného pádu a signal postupuje směrem *souhlasným* od stanice prvé ke stanici druhé, kam těleso dopadlo a kde se nalézá pozorovatel. Čísla tabulky pro $t = 5$ *sec* udávají na př. výsledek tento. Kdyby padání (při konstantní intensitě gravitačního pole) pokračovalo až do hloubky 25·539 *km*, opozdil by se proti tělesu dopadšímu na stanici druhé o 5 sekund akustický signal, který byl dán při začátku pohybu na stanici prvé. Při $t = 10$ byla by hloubka 28·573 *km*. Doba t'_1 padání činila by tu ovšem přes minutu, konečná rychlost padání stávala by se větší než rychlost zvuku a proto by se proti tělesu padajícímu zvuk opozdil. Úkol má zájem toliko početní.

§ 69. Rychlost zvuku v kapalinách.

U kapalin dlužno rychlost c zvuku počítati dle téhož vzorce jako u plynů, totiž

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}},$$

kdež opět značí E modul pružnosti objemové, S specifickou hmotu. Zde však bývá modul E zřídka přímo dán; obyčejně se udává jeho převratná hodnota, totiž koefficient k stlačitelnosti. Je-li totiž jako dříve, ΔV zmenšení objemu V způsobené přírůstkem tlakovým Δp na jednotku plochy vztahovaným, jest*)

$$E = \Delta p : \frac{\Delta V}{V}, \qquad k = \frac{\Delta V}{V} : \Delta p$$

$$kE = 1.$$

Poněvadž relativní umenšení objemové $\frac{\Delta V}{V}$ jest číslo prosté, jest rozměr modulu E totožný a rozměr koefficientu k obrácený jako rozměr tlaku Δp na jednotku plošnou vztahovaného. Absolutní soustava měr vyžaduje pro tento tlak jednotky $\frac{dyna}{cm^2}$ (anebo přehledněji jednotky $\frac{megadyna}{cm^2}$). V tabulkách dosavadních užívá se však dosud starší jednotky a to buď $\frac{váha\ kg}{cm^2}$ nebo *atmosfery*. Přepočítání jest snadné**); platí tu číselné vztahy

$$\frac{váha\ kg}{cm^2} = 0{\cdot}980606\ \frac{megadyna}{cm^2} = 980606\ \frac{dyna}{cm^2}$$

$$atmosfera = 1{\cdot}01321\ \frac{megadyna}{cm^2} = 1013210\ \frac{dyna}{cm^2}.$$

Číselná data zde uvedená vztahují se na normalní intensitu tíže $g^* = 980{\cdot}606\ \frac{cm}{sec^2}$; jinak dlužno k přepočítání použiti hodnoty lokalní g, platící pro to místo, na kterém užíváno závaží anebo váhy sloupce rtuťového. Obyčejnější jest v tabulkách pro k jednotka atmosfera. Tak se udává na př. pro vodu teploty 0°

$$k = 0{\cdot}00005177\ \frac{1}{atmosfera}.$$

Počítajíce reciprokou hodnotu, obdržíme

$$E = 19543\ atmosfera,$$

tudíž v jednotce absolutní

$$E = 19543 \,.\, 1{\cdot}01321 = 19801\ \frac{megadyna}{cm^2}$$

*) Mechanika, § 397, pag. 619; tam se modul znamená C místo zde důsledně již podrženého E, a tlak se znamená p místo zde podrženého Δp, aby označení bylo podobné jako pro plyny.

**) Mechanika, § 106, pag. 137 a § 345, pag. 523.

čili konečně

$$E = 19801 \,.\, 10^6\ \frac{dyna}{cm^2}.$$

Připojíme-li k tomu hodnotu pro specifickou hmotu při teplotě 0°

$$S = 0{\cdot}99987\ \frac{g}{cm^3},$$

obdržíme

$$\sqrt{\frac{E}{S}} = 140730\ \frac{cm}{sec}$$

anebo přehledněji

$$c = 1407\ \frac{m}{sec}.$$

Zcela pochybený a duchu vzorců fysikalních nepřiměřený jest způsob, dosud všeobecně užívaný, dle něhož se do hlavního vzorce pro c vepisují všechny ty veličiny, kterých jest třeba pro číselné přepočítání jednotek tlakových; píše se tedy na př.

$$c = \sqrt{\frac{gmH}{kS}},$$

kde značí g urychlení tíže, m hustotu rtuti, H normalní tlak barometrický. Pak tedy *formalně* věc vypadá tak, jako by rychlost šíření se zvuku v kapalině také závisela na hustotě rtuti a na urychlení tíže, tak že by na př. pro vodu na Juppiteru byla jiná než pro vodu na naší zemi, což jest ovšem absurdní; neboť veličiny tyto mají význam nikoli pro c, nýbrž jen pro nahodilou volbu jednotky tlakové, dle níž koefficient stlačitelnosti se vyjadřuje. Přepočtení takovýchto (a podobných) koefficientů na jednotky absolutní jest jen otázkou času a bude jednou v tabulkách jistě všeobecně provedeno.

Vzhledem k tomu, že koefficient k a tudíž i modul E, jakož také specifická hmota S závisí na teplotě, vychází pro rychlost c rovněž hodnota různá dle teploty; vztah s teplotou není zde však tak jednoduchý, jako u plynů. Následující tabulka podává*) hodnoty c, jak se vypočítají pro *vodu* různé teploty; při tom jest k i E udáno v jednotkách dosud obyčejných a zároveň (dle způsobu nahoře vyloženého) přepočítáno na jednotky absolutní.

*) dle číselných dat, jak se nalézají v tabulkách Landolt a Börnstein, 1894, pag. 269 a 34.

Rychlost zvuku ve vodě různé teploty.

t	k	$\frac{1}{k}=E$	E	S	c
^0C	$\frac{1}{atmosf.}$	*atmosf.*	$\frac{megadyna}{cm^2}$	$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{m}{sec}$
	0·0000				
0°	5177	19543	19801	0·99987	1407
20	4609	21697	21984	0·99825	1484
40	4265	23447	23756	0·99233	1547
60	4115	24302	24622	0·98331	1582
80	4151	24090	24409	0·97191	1585
100	4300	23256	23563	0·95863	1568

Jako koefficient k tak ukazuje i rychlost c obrat, totiž hodnotu maximalní; z grafického znázornění (jehož zde neuvádíme) vysvítá, že nastává maximum 1587 $\frac{m}{sec}$ při teplotě 70°; věc souvisí s minimem stlačitelnosti, které nastává při teplotě 63°; pošinutí na oněch 70° jest způsobeno ubýváním specifické hmoty S.

K objasnění otázky, jakou rychlostí se zvuk šíří při téže teplotě — na př. nullové — v kapalinách různých, jsou v tabulce následující uvedeny výsledky příslušného počtu pro vodu, alkohol aethylnatý, ether a rtuť *).

*) Číselná data pro koefficienty stlačitelnosti vypsána z tabulek Landolt a Börnstein 1894 dle pozorování, jak je provedli pro alkohol Amaury a Descamp (pag. 266) a pro rtuť Amagat (pag. 268); pro vodu a ether Pagliani a Vicentini, Avenarius a Grimaldi (pag. 269). Mnohé údaje jiných autorů se dosti značně od těchto zde užitých liší.

Rychlost zvuku v různých kapalinách teploty nullové.

	k	$\frac{1}{k}=E$	E	S	c
Kapalina	$\frac{1}{atmosf.}$	*atmosf.*	$\frac{megadyna}{cm^2}$	$\frac{g}{cm^3}$	$\frac{m}{sec}$
	0·000				
voda	05177	19543	19801	0·99987	1407
alkohol	0835	11976	12134	0·806	1227
ether	1460	6849	6940	0·736	971
rtuť	003918	255230	258600	13·596	1379

Jest zajímavo, že pro kapaliny tak různé pružnosti — jako ether a rtuť — se výsledky pro rychlost c poměrně málo od sebe liší následkem kompensace hmotou specifickou.

Přímé měření rychlosti zvuku v kapalinách bylo provedeno z důvodů pochopitelných jenom pro vodu. Roku 1827 konali pečlivé pokusy *Colladon* a *Sturm**) na jezeře Lemanském (Genevském); pozorovací stanice byly na dvou lodích, zakotvených v přístavu jednak města Rolle (na severozápadním břehu jezera), jednak města Thonon (na břehu jižním); mezi těmito městy má jezero největší šířku, 13·487 *km*. Stanice prvá zařízena byla pro signaly; akustický byl dáván úderem na zvon do vody ponořený, optický zapálením střelného prachu; současnost obou zajištěna jednoduchým pákovým zařízením; v témže okamžiku, kdy kladivo udeřilo na zvon, zapálil lunt hromádku prachu a způsobil záblesk. Stanice druhá upravena pro pozorování; okamžik záblesku zjištěn přímo okem; okamžik, kdy došel zvuk, stanoven velkým naslouchátkem, jehožto široký otvor byl uzavřen membranou, úzký pak vložen do zvukovodu ucha; tím způsobem se zvuk z vody převedl do ucha vzduchem v naslouchátku uzavřeným. Opozdění signalu akustického proti opti-

*) V pojednání svém uvádějí též měření, které již roku 1820 vykonal *Beudant* v Marseillu pro vodu mořskou, naleznuv rychlost okrouhle 1500 $\frac{m}{sec}$. Viz Ann. de chim. et de phys. (2) 36, pag. 236, 1827.

ckému činilo průměrně 9·4 *sec*; z toho vypočten pro rychlost zvuku ve vodě teploty 8·1° výsledek

$$c = \frac{13{\cdot}487\ km}{9{\cdot}4\ sec} = 1435\ \frac{m}{sec}.$$

Interpolací (grafickou) z hodnot dříve v tabulce uvedených vychází pro teplotu 8·1° výsledek

$$c = 1438\ \frac{m}{sec}.$$

Shoda pozorování s výpočtem jest tudíž velmi dobrá.

§ 70. **Rychlost zvuku v tělesích tuhých.**

Budiž dáno těleso tuhé ve formě tyče neb drátu. Modulus E objemový lze tu nahraditi modulem E podélným dle rovnice (nehledíc ke kontrakci)

$$E = \Delta p : \frac{\Delta V}{V} \doteq \Delta p : \frac{\Delta l}{l}$$

a počítati opět dle vzorce

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Tabulky dosavadní udávají modul E vesměs v jednotce $\frac{váha\ kg}{mm^2}$; přepočtení na jednotku absolutní $\frac{dyna}{cm^2}$ nebo přehledněji $\frac{megadyna}{cm^2}$ děje se koefficientem (normalní intensitu tíže pro váhu předpokládajíc)

$$\frac{váha\ kg}{mm^2} = \frac{0{\cdot}9806\ .\ megadyna}{\frac{1}{100}\ cm^2} = 98{\cdot}06\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Tak na př. udává Wertheim pro platinu (tvrdou) teploty 15° hodnotu

$$E = 17044\ \frac{váha\ kg}{mm^2},$$

tedy přepočteno

$$E = 1671340\ \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Přijmeme-li tedy pro specifickou hmotu S hodnotu

$$S = 21{\cdot}4\ \frac{g}{cm^3},$$

obdržíme

$$c = \sqrt{\frac{10^6\ .\ 1671340}{21{\cdot}4}} = 279460\ \frac{cm}{sec}$$

anebo v jednotce přehlednější, okrouhle

$$c = 2800\ \frac{m}{sec}.$$

Aby výsledky takové byly na tolik míst správnými, kolik jich zde vypočteno, musily by hodnoty E i S býti stanoveny pro týž material a pro touž teplotu; toho však nebývá; poněvadž pak u těles tuhých, zejména u kovů, obě tyto veličiny, zvláště však E dle stupně tvrdosti a dle mechanického zpracování vycházejí různě veliké, mají hodnoty c z obyčejných dat vypočtené význam jen orientační. Tak se udává*) rychlost zvuku $\left(\frac{m}{sec}\right)$ pro kovy (v uspořádání vzestupném): olovo 1300, zlato 2100, cín 2500, stříbro 2700, kadmium 2800, platinu 2800, mosaz 3200, zinek 3600, měď 3700, argentan 3700, nikl 4700, magnesium 4800, aluminium 5000, železo 5000, ocel 5100. Sklo má 5000, dřevo 3000 až 4000. Pro ocel (5100) jest tedy rychlost zvuku $\left(\frac{5100}{340} =\right)$ 15kráte větší než pro vzduch obyčejné teploty.

Byly učiněny pokusy rychlost tuto též přímo stanoviti v těch případech, kde jest k disposici dlouhé vedení, na př. při vodovodech (Biot v Paříži r. 1809), na drátech telegrafických (Wertheim a Breguet r. 1851), ale výsledky neuspokojily.

Budiž dáno *prostředí* pevné pružné a isotropní. Otázka, jakou rychlostí šíří se vlnění v jistém středisku vzniklé, nedá se rozhodnouti experimentem, nýbrž jen theorií. Jak *Poisson* (1823, 1830) dokázal, rozloží se kmity libovolného směru, v jistém středu dané, ve kmity podélné, stejnosměrné se směrem postupu a kmity příčné, k tomuto směru kolmé**). Je-li c_1 rychlost, s jakou se šíří kmity podélné, c_2 rychlost, s jakou se šíří kmity příčné, a podržíme-li označení c pro rychlost, s jakou by se vlnění šířilo v tyčích neb drátech téhož materialu, platí relace

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}, \quad \frac{c_2}{c} = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}},$$

*) F. Kohlrausch, Praktische Physik 1901.

**) Koláček-Seydler, Základové theoretické fysiky, III, § 18, pag. 97 a § 33, pag. 275, 1895.

kdež μ znamená koefficient (Poissonův) příčné kontrakce*). Jest tedy c_1 a c_2 vždy různé. K číselnému posouzení této různosti přijmeme za μ hodnotu (Poissonovu)

$$\mu = \frac{1}{4};$$

pak obdržíme

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{6}{5}} = 1{\cdot}096, \quad \frac{c_2}{c} = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{\cdot}6325$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{3} = 1{\cdot}732.$$

Často přijímá se za μ též hodnota (Wertheimova)

$$\mu = \frac{1}{3};$$

pak obdržíme

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{\cdot}225, \quad \frac{c_2}{c} = \sqrt{\frac{3}{8}} = 0{\cdot}6124,$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{4} = 2.$$

Kmity podélné šíří se tedy rychlostí až 2-kráte větší než příčné. Jak řečeno, kontrola theoretických těchto výsledků jest velmi nesnadná. Při zemětřesení zdá se vskutku, že se šíří dvojí vlna, příčná a podélná (Wertheim).

§ 71. **Odraz zvuku.**

Vlny zvukové, šířice se všestranně daným prostředím isotropním, z pravidla vzduchem, postupují stále jenom v před, nevracejí se. Když však dorazí na pevné stěny nebo na hladinu vod, nebo když dojdou na vrstvy jiných plynů a par, ba i na vrstvy téhož prostředí, vzduchu, ale jiné teploty, nastávají povšechně úkazy nové, jednak odraz, jednak lom a ohyb vln. Pohyb vlnivý přechází z části na ony vrstvy vnikaje do prostředí nového v jiných směrech; z části se však vrací, odráží do prostředí původního.

Pokusy laboratorní o odrazu zvuku provádějí se dle optických analogií akustickými zrcadly. Tato zrcadla liší se ovšem od optických a rozdíl ten má základ svůj v různosti délek vln. Světelné vlnky jsou nesmírně kratinké; proto mohou zrcadla

*) Mechanika, § 378, pag. 591, 1901.

optická býti velmi malá, musí však býti, aby nastal odraz pravidelný, přesně geometricky broušená a hlazená. Vlny zvukové jsou však velmi dlouhé; proto musí zrcadla akustická býti plochou veliká, ale mohou býti i nehlazená, drsná. Povšechně platí zákon o rovnosti úhlu dopadu a odrazu jako v optice.

Postaví-li se proti sobě do téže osy dvě veliká zrcadla parabolická neb sferická třebas dosti daleko od sebe a vloží-li se do ohniska zrcadla prvého zdroj zvukový, slabé intensity, na př. hodinky, lze dokázati, že jich tikot jest zřetelně slyšeti v ohnisku druhého zrcadla, nikoli však mimo ohnisko, tak že se zdá, jako by tikot od tohoto druhého zrcadla vycházel. Pozorování lze provésti buď subjektivně, auskultací, nebo objektivně, na př. methodou plamének, kterouž později seznáme. Podobně působí zrcadla elliptická soustředná s oběma svými ohnisky. Pokusy takovéto, dle analogií optických uspořádané, daří se lépe tony vysokými, jako jsou na př. v tikotu hodinek obsažené, než tony hlubokými, čehož důvod jest patrný z výkladu, kterýž na základě principu Huygensova o odrazu vln byl podán; čím kratší jsou elementarní vlnky, tím spíše vzniká odraz v jediném směru určitém.

Soustředění vln zvukových od jistého místa vycházejících na místě jiném lze pozorovati v mnohých budovách, zejména v chrámech, v divadlech, museích, dosti často, je-li klenba nebo stěna přiměřené formy, na př. elliptické. Taková místa jsou známa ve chrámu sv. Pavla v Londýně, v divadle v Mohuči, v sále karyatid v Louvru v Paříži a dojista by se i v mnohých jiných budovách podobných dala místa taková nalézti. Pověstné jest též „ucho Dionisiovo“ v Syrakusách, vězení, jež dal Dionysios starší vystavěti dle vzoru ucha lidského, aby slyšel na vzdálených místech i šepoty a vzdechy uvězněných.

Vlny odražené působí v organu sluchovém dojmy zcela podobnými jako vlny původní. Jsou-li stěny odrážející velmi blízké tělesu zvučícímu, slyší pozorovatel vlny přímé a odražené, vzhledem k značné rychlosti postupu vln, současně tak, že je od sebe nerozeznává. Přece však jest účinek odražených vln patrný a to v sesílení zvuku. Jsou-li odrážející stěny vzdálenější nebo velmi daleké, rozlišuje se dojem vln odražených více méně zřetelně od dojmu vln původních, koincidence přestává, místo ní nastupuje retardace, vzniká dozvuk (pazvuk), po případě ohlas, ozvěna.

Rozdíl všech těchto sobě podobných zjevů vynikne, když zodpovíme otázku, za kterých podmínek zvuk odražený dovedeme již rozlišiti od původního. Je-li zvuk tento krátkého trvání, jako jest praskot elektrické jiskry, náraz kamene na kámen, tlesknutí, vykřiknutí a pod., postačí, když zvuk odražený přijde aspoň o 0·1 sekundy po zvuku původním. V té době proběhne zvuk dráhu

$$340 \frac{m}{sec} \cdot 0{\cdot}1\ sec = 34\ m,$$

tak že vzhledem k postupu zvuku sem a tam postačí, když jest stěna odrážející 17 metrů vzdálena. Vysloveni slabiky při mluvě vyžaduje již doby delší než 0·1 *sec*; sotva lze více než 5 slabik za vteřinu zřetelně vysloviti; dlužno tedy zde počítati s dobou a tudíž i vzdáleností dvojnásobnou, t. j. 34 metrů. Mají-li tedy stěny odrážející aspoň tuto nejmenší odlehlost anebo odlehlost ještě větší, rozeznáváme zvuk odražený od původního, nastává ohlas, ozvěna. Pak-li stěny jsou blíže, přichází zvuk odražený již co ještě trvá původní, kterýž se tím prodlužuje; nastává dozvuk (pazvuk).

Zkušenosti života obecného potvrzují tyto výklady v přečetných případech. Rachot jedoucího vlaku sesílí se ihned, když vlak vjede do podjezdu nebo do tunnelu; hukot vodopádu jest ohlušujícím mezi skalami podobně jako hukot pracujících strojů v místnostech továrních. V síních malých zní hlas řečníka nebo zpěváka silněji, nástroje hudební je slyšeti zvučněji, plněji nežli venku v širém prostoru; stěny zvuk odrážející jsou zde blízkými, koincidence vln původních a odražených jest úplná. V síních však velkých, ve chrámech, na náměstích uzavřených jest opozdění vln odražených velmi znatelné, hlas se prodlužuje, mluva se stěžuje, zpěv i hudba, je-li tempo volné, táhlé, protahuje se ještě více, je-li tempo rychlé, porušuje se, poněvadž zvuky odražené stihnou již zvuky nové, s nimiž se mísí a hudební harmonii kazí. V divadlech neb síních koncertních může toto rozléhání se hlasu i hudby býti účelu budov těch velice na závadu; dlužno proto již při stavbě toho pamatovati, aby budovy takové byly, jak říkáme, akustickými. Frappantní jest též rozdíl, který pozorujeme dle toho, jsou-li prostory takové prázdné nebo velkým počtem lidí naplněné. Varhany v chrámech prázdných mají hlas daleko mohutnější, než když jsou chrámy lidem naplněny, když na stěnách a oltářích jsou umístěny okrasy květinové, hořící světla, a pod.; neboť tím vším vlny zvukové se rozrážejí, vzniká odraz nepravidelný, rozptýlení zvuku. Podobný účinek mají v síních koncertních a divadlech sloupy, okrasy řezbářské, štukatérské, lustry a pod. Zdi veliké, rovné, zvláště pak zakřivené, odrážejí zvuk měrou značnou; proto jest lépe je rozčleniti, a kde toho nelze, rozvěsiti na ně látky, draperie, užívati záslon, portier; odraz zvuku na látkách takových jest slabší, ohlas se jimi tlumí. V malých síních tímto způsobem se ovšem zvuk sám tlumí, jakož výkonní umělci hudební velmi dobře znají. V salonech, v nichž na podlaze jsou rozestřeny koberce, na stěnách rozvěšeny obrazy, draperie, gobeliny, na dveřích portiery, kde je rozestaveno množství nábytku velkého i drobného, umělci neradi koncertují; neboť hlas zpěváka, zvuk houslí zní slabě, nezvučně, zejména v přítomnosti mnoha posluchačů; zde zase schází odraz k sesílení zvuku potřebný.

Rovněž četné jsou zkušenosti života obecného, hledíme-li ke stránce druhé odrazu zvuku, kdy vzniká ozvěna. Příkladem nejznámějším a velkolepým jest úkaz blesku a hromu; ostrý praskot s výbojem elektrickým spojený opakuje se odrazem mnoho a mnohokráte, čímž se onen ostrý zvuk proměňuje v rachot a prodlužuje v hukot a dunění. Jinak známé jsou ozvěny, jak vznikají na stěnách budov, na skalách téměř svislých, při čemž nic nevadí, jsou li skály tyto po případě křovinami neb stromky porostlé. V optice ovšem se vyžaduje pro odraz zrcadel hladkých; zde v akustice, vzhledem k velké délce vln zvukových, postačí stěny jakkoli drsné, ba ozvěnu lze pozorovati i na skupinách sloupů, stromů, zejména pěkně na okraji lesa. Pro ozvěnu jednoslabičnou vyžaduje se odlehlosti, jak nahoře vyloženo, 34 *m*. Je-li odlehlost stěny dvoj- i troj- atd. násobná, jest ozvěna dvoj-, troj- atd. slabičná. Často vzniká ozvěna mnohonásobná; je-li pozorovatel mezi dvěma rovnoběžnýma a na spojovací čáře kolmýma stěnama, odrážejí se vlny zvukové od stěny jedné, odtud postupující zpět odrážejí se od stěny druhé, odtud opět jdouce v původním směru od stěny prvé a tak mnohokráte, tak že zvuk původní opakuje se několikráte. Týž případ, ač věcně rozdílný, může nastati, když v okolí je několik odrážejících stěn v různých odlehlostech. Jsou mnohá místa, kde ozvěny takové jsou pověstné; uvádíme za příklad jeskyni u Viborgu v Dánsku, zámek Simonetta v Lombardii, skálu Loreley na Rýně; podobně ozvěny od skal na jezeře Královském, sv. Volfganga, v Čechách ozvěnu v Zámrsku, v Abrspachu a j. Ostatně v krajinách horských a lesnatých bývají podmínky mnohonásobných ozvěn velmi zhusta vyplněny. Výstřel současný cvičící se čety vojínův odráží se na kraji nejbližšího lesa, za krátko na to na kraji vzdálenějšího, potom následuje odraz od jiné kulissy lesní ještě vzdálenější atd., což se mnohdy opakuje velmi zřetelně pět- i vícekráte, vždy slaběji a zároveň táhleji, čímž vzniká akustický zjev veliké zajímavosti. Ale nejen na stěnách pevných, na hladině vodní, nýbrž též na vrstvách plynů a par, ba i na vrstvách téhož prostředí ale různé teploty odráží se zvuk. Vrstvy takové, jež Tyndall jakožto mračna akustická označuje, jsou oku neviditelnými, ale sluchu znatelnými a tvoří se ve vzduchu různým oteplením, různou vlhkostí, zejména ve dne, méně v noci. Tím se vysvětluje, že zvuk, jak již *A. Humboldt* pozoroval, za noci se mnohem dále šíří než za dne, při čemž nerozhoduje, že v noci bývá více ticho než ve dne; mnohdy, jako v pralesích, za skřekotu, křiku zvířat, bývá tomu naopak; ostatně na horách, v říši ledovců, kde i ve dne vládne ticho úplné, pozoruje se úkaz týž, poněvadž za noci jest vzduch *tepelně* klidnější. Tyndall, jenž se úkazy těmito zvláště zabýval, pozoroval na břehu moře ozvěny pocházející od vrstev par, jež se působením slunce nad mořem tvoří. Sestrojil též zvláštní apparat, kterým lze úkaz v laboratoři napodobiti. Déšť, kroupy, metelice sněhová, ba ani mlhy nepřekážejí šíření se zvuku; opticky jsou neprůhlednými, akusticky však prostupnými. Právě tak nepřekážejí postupu zvuku látky vlněné, bavlněné, hedvábné. Tyndall zavěsil několik, až 12, hedvábných šatů za sebou a nepozoroval zastavení zvuku; ale když se jediný z nich namočil, vznikla vrstva souvislá, kterou se zvuk zadržoval. Látky těžké, portiery, koberce, tlumí zvuk; patrně že vlnivý pohyb částeček vzduchových přenáší se i do částeček v mezerách tkaniva a pletiva, kde se třením záhy ruší. Z toho důvodu jsou také vatta, peří, sláma, a pod., tedy látky mnoho vzduchu v sobě obsahující, nejlepšími isolatory zvuku.

§ 72. Lom zvuku; totalní odraz.

Analogické zjevy, pozorované při odrazu světla a zvuku, vedly přirozeně k tomu, aby se zkoumaly též analogie lomu světla a zvuku. Byly tedy upraveny velké duté čočky z kollodia, které se vyplnily plynem, na př. kysličníkem uhličitým (*Sondhauss* 1852). Později byly zhotoveny velké duté hranoly, jež se vyplnily buď kapalinou neb plynem jakožto látkou lámavou (*Hájech* 1857). Celkem osvědčily se zákony Snelliovy též pro zvuk, aspoň v tom smyslu, že v jistých směrech, dle poměrů rychlostí z onoho zákona vypočtených, se jeví zvuk nejsilnější. Ale ovšem v jiných směrech jeví se též, ač ne v síle stejné, následkem ohybu, kterýžto zjev zde, při přechodu vlnění z prostředí jednoho do druhého, vystupuje v popředí. Týž zjev působí, že není úplného akustického stínu, ač jinak účinek stínícího tělesa jest vždy znatelný. S tím souvisí též, že lokalisace zvuku, t. j. rozhodnutí, odkud zvuk přichází, jest vždy velmi nesnadné.

Jeden pozoruhodný výsledek plyne však ze zákonů Snelliových, když se jich použije pro zvuk. Budiž c_1 a c_2 rychlost, s jakou se šíří zvuk v prostředí prvém a druhém. Pro přechod platí zákon vyjádřený rovnicí

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

kdež znamená α úhel dopadu, β úhel lomu paprsků zvukových. Budiž prostředí prvé vzduch; rychlost zvuku jest zde

$$c_1 = 340\,\frac{m}{sec}.$$

Prostředím druhým budiž kapalina anebo látka pevná. Avšak pro tyto jest rychlost c_2 daleko větší. Z toho plyne, že při přechodu vzniká vždy lom od kolmice, a to lom značný. Následkem toho jest pro malé úhly α úhel β již dosti velký, tak že záhy, při jistém úhlu dopadu, $\alpha = \alpha^*$, který zoveme krajním,

stane se úhel lomu $\beta = 90^0$. Počítejme tento úhel krajní pro některé prostředí. Tak obdržíme na př.

pro vodu $c_2 = 1435\,\frac{m}{sec}$, $\alpha^* = 13{\cdot}7^0$,

pro mosaz $c_2 = 3200$ „ $\alpha^* = 6{\cdot}1$,

pro sklo $c_2 = 5000$ „ $\alpha^* = 3{\cdot}9$.

Jest tedy úhel krajní α^* velmi malý. Když se při dopadu vlny překročí, nastává odraz totalní. Z toho tudíž plyne, že při obyčejném odrazu zvuku na hladinách vod, na pevných stěnách neb akustických zrcadlech, odraz vln šikmo dopadajících bývá z pravidla totalním. Tak se vysvětluje valnou měrou též koncentrační účinek zvukovodů, hlásných trub a pod., jakož i daleké postupování zvuku po vodě.

§ 73. Princip Dopplerův.

Jednajíce ve výkladech dosavadních o tonech periody T nebo kmitočtu N předpokládali jsme, že pozorovatel slyší týž ton, který zdroj zvukový vydává; předpokládali jsme tedy identitu ve výšce tonu subjektivního a objektivního. Avšak tato identita jest vázána na jistou podmínku, kteráž ovšem ve skutečnosti z pravidla dostatečně bývá splněna, že totiž *vzdálenost* mezi zdrojem tonu a pozorovatelem *se nemění*. Není-li však podmínka tato splněna, buď že pozorovatel se zdroji tonu blíží neb od něho vzdaluje, anebo že zdroj tonu se k pozorovateli blíží neb od něho vzdaluje, pak nelze říci, že ton, který pozorovatel slyší, jest identický s tonem, který zdroj tonu dává.

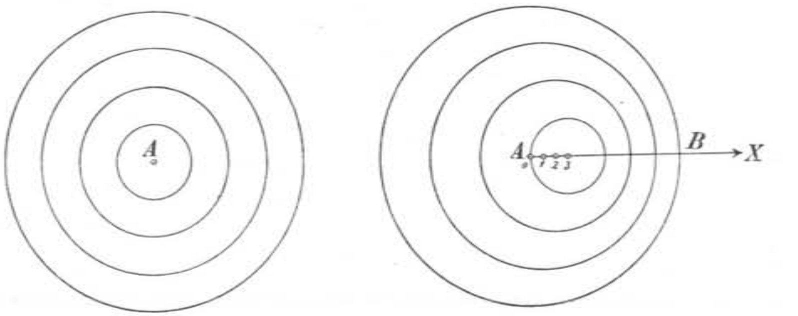
Zásluhu o rozvinutí otázky této má *Ch. Doppler* *). V pojednání svém: „O barevném světle dvojhvězd a některých jiných těles nebeských“ (v Praze 1843) vyslovil problem a pokusil se též o jeho řešení. Při tom vyšel od úkazů akustických, ale položil pak hlavní důraz na důsledky optické, dle nichž volil též nadpis své práce.

*) *Jan Christian Doppler*, narodil se $^{29}/_{11}$ 1803 v Solnohradě. Skončiv svá studia v Solnohradě a ve Vídni stal se r. 1833 assistentem a veřejným repetitorem vyšší mathematiky na polytechnickém ústavu ve Vídni. Pobyv pak krátce v Mnichově přesídlil r. 1835 do Prahy. Zde působil v prvních letech jako professor mathematiky na stavovské realce, roku 1837 jako supplent a od r. 1841 jako řádný professor mathematiky a praktické geometrie na technice. Roku 1847 jmenován byl báňskym radou a professorem mathematiky a mechaniky na c. k.

*) Obšírněji viz RF. 44 (1963) 4 s. 70 Mrázek: Doppler a Dopplerův efekt

Mějmež těleso A, jež dává ton periody T, kmitočtu N. Těleso budiž v prostředí, v němž se vlny šíří rychlostí v. Při zjevech akustických jest tímto prostředím vždy vzduch. Při analogických zjevech optických, kde A jest těleso svítící, světelný aether.

Rozeznávejme případ dvojí; buď jest A v klidu, nebo v rovnoměrném pohybu, kterým však postup fasový při kmitání se nikterak nemění.



Obr. 79. Šíření vln od tělesa zvučícího, je-li buď v klidu, buď v rovnoměrném postupném pohybu.

Je-li těleso A v klidu, vznikají ve všech směrech vlny o délce

$$\lambda = vT = \frac{v}{N}.$$

Pak-li jest těleso A v pohybu ve směru AX rychlostí a, změní se vlnivý stav prostředí (obr. 79.); neboť v tomto směru AX jsou vlny hustší, jako by sraženější, jich původní délka $\lambda = vT$ jest zkrácena o délku aT, o jakou se těleso zvučící za vlnami

---

hornické akademii ve Šťávnici; (r. 1848 byl Dr. K. rytíř *Kořistka* jeho assistentem). Odtud po dvou letech povolán byl r. 1849 do Vídně, kdež působil nejprve na polytechnice, od roku 1850 pak na universitě jako ředitel nově zřízeného ústavu fysikalního. Onemocněv chorobou plícní hledal zotavení na jihu, odkud se však již nevrátil; zemřel v Benátkách $^{17}/_{3}$ 1854.

Příslušné pojednání Dopplerovo má nadpis: Ueber das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels. (Versuch einer das Bradleysche Aberrationstheorem als integrirenden Theil in sich schliessenden allgemeinen Theorie.) Pojednání bylo uveřejněno ve Zprávách k. č. Společnosti nauk v Praze, (2) 5 p. 465—482, ročník 1841—42 (1843). Vyšlo též separatně, v Praze 1843. Vedle toho uveřejnil později k obhájení a doplnění svého principu ještě některá pojednání další.

v periodě T pošine, tak že jest délka vlny skutečné

$$\lambda' = vT - aT = (v - a)\,T = \frac{v - a}{N}.$$

Na jednotku délkovou připadal dříve počet vln

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{N}{v},$$

nyní jich ve směru AX připadá počet

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{N}{v - a}.$$

Tato změna vlnivého stavu prostředí nepředpokládá pozorovatele, jsouc povahy objektivní.

Pozorovatel B nechť se nalézá ve směru AX, v jakém zvučící těleso postupuje. Rozeznávejme opět případ dvojí; buď jest pozorovatel v klidu, anebo v rovnoměrném pohybu.

Budiž pozorovatel v klidu. Vlny postupují rychlostí v; za sekundu jich dojde k pozorovateli tolik, kolik se jich na této délce v nalézá. Na jednotce délkové jest jich $\frac{N}{v-a}$, tudiž na v jednotkách délkových $v\,\frac{N}{v-a}$.

Budiž pozorovatel v pohybu, rychlostí b ve směru AX. Uniká tedy vlnám, za každou sekundu o délku b; na tuto délku připadá vln $b\,\frac{N}{v-a}$; o tolik dostihne pozorovatele vln méně než v případě předešlém.

Značí-li tudíž N' počet vln, jež pozorovatele dostihnou, a tudíž také kmitočet tonu, který pozorovatel slyší, jest všeobecně

$$N' = v\,\frac{N}{v - a} - b\,\frac{N}{v - a}$$

čili

$$N' = N\,\frac{v - b}{v - a}.$$

Předpokládali jsme, odvozujíce tento vzorec, že rychlosti a, b jsou téhož směru AX, ve kterém je čítáme positivně. Kdyby pozorovatel se pohyboval vlnám vstříc, byla by jeho rychlost b negativní, tudíž by slyšel ton kmitočtu

$$N' = N\,\frac{v + b}{v - a}.$$

Podobně kdyby se při tom zdroj zvuku od pozorovatele vzdaloval ve směru XA, byla by též rychlost a negativní, a pozorovatel slyšel by ton kmitočtu

$$N' = N\frac{v+b}{v+a}.$$

Jest viděti, jsou-li a, b stejnoznačná, že při $a = b$ vychází $N' = N$. Ton se nemění, zůstává-li při pohybu tělesa zvučícího i pozorovatele vzdálenost obou AB konstantní.

Jinak se ton subjektivní N' a objektivní N od sebe různí; intervall obou vyjadřuje vzorec

$$\frac{N'}{N} = \frac{v-b}{v-a}.$$

Při určitých rychlostech v, a, b zůstává tento intervall pro všechny tony konstantním. Akkord několika tonů přišel by tedy měněním vzdálenosti AB celkově do polohy poněkud vyšší nebo nižší, avšak konsonance tonů v akkordu obsažených by tím nikterak netrpěla.

Vzorce zde uvedené odvodil též Ch. Doppler, ač v prvním svém pojednání způsobem poněkud nejasným, čímž zaviněno mnohé nedorozumění. Při tom měl na mysli analogii, kteráž nyní k objasnění jeho principu vždy bývá uváděna. Loďka na hladině vody rozvlněné, jde-li vlnám vstříc, dostává větší počet nárazů vln než když jest v klidu; „proč by nemohlo platiti totéž — s příslušnými modifikacemi — o vlnách vzduchových a aetherových?“

Přes mnohou nejasnost, jakáž ve výkladu principu Dopplerova zůstala, byla důležitost a významnost základní myšlenky každému nepředpojatému jasnou. Důkazem toho jsou nadšená slova, jimiž pojednání Dopplerovo uvítal*) slavný *Dr. Bernard Bolzano*:

„Kdežto tak mnohý spis ve svých výkonech daleko za tím zůstává, co na svém titulu slibuje, obsahuje pojednání p. prof. Dopplera značně více, než dle jeho nadpisu by bylo očekávati. Jedná totiž nikoli jenom o barevném světle některých hvězd; není také, jak její druhý v závorkách připojený titul praví, pouhým pokusem „všeobecnější theorie, jež by aberrační theorem Bradleyův v sobě jako integrující část obsahovala“, neboť i při těchto slovech pomýšlíme jen na nauku, kteráž obohacuje astronomii nebo na nejvýše vědy optické, kdežto se zde jedná o pravdu hledící k fysice všeobecné, zvláště k nauce o kapalinách aneb ještě přesněji k nauce o vlnění, a jest zásluhou Dopplerovou, že první obrátil pozornost naši na tuto pravdu a na její překvapující důležité upotřebení v akustice a optice . . . Čtenář a zejména astronom nalézá tu na dvou arších více látky k přemýšlení a k pozorováním, jež by mohl konati, než v mnohých objemných knihách.

*) Pogg. Ann. 60, pag. 83, 1843.

§ 74. Zkouška principu Dopplerova v oboru akustiky.

Záhy po tom, kdy pojednání Dopplerovo vešlo v obecnější známost, budíc všude neobyčejností základní myšlenky živý zájem, byly podniknuty pokusy, jimiž měla myšlenka tato v oboru akustiky, jakožto přístupnějším, býti zkoušena. Zahájil je *Buys-Ballot* (fysik, od r. 1854 ředitel meteorolog. observ. v Utrechtu, 1817—1890). Z jeho ustanovení jezdila (3. a 5. června 1845) na dráze Utrecht-Maarsen lokomotiva s otevřeným vozem. Pokusy dály se dvojím způsobem. Buď byli pozorovatelé na stanici a trubači na vlaku, anebo naopak pozorovatelé na vlaku a trubači na stanici. V obou případech pozorována změna ve výšce tonu, když vlak se stanici blížil a zase od ní vzdaloval. Brzy na to konali podobné pokusy *Montigny* na drahách belgických a *John Scott Russell* na drahách anglických (1849). Inženýr Russell užíval píšťaly parního stroje a první upozornil na zjev, kterým se princip Dopplerův nejjednodušeji objasňuje, a který lze na drahách velmi často pozorovati. Když totiž cestující na vlaku slyší signal parního stroje a po tom jeho ozvěnu, zpozoruje, že ozvěna je ve výšce jiná než původní ton, obyčejně vyšší, když se totiž vlak nějaké stěně odrážející, na př. vchodu do tunnelu, blíží. Konečně v novějších letech, 1876 zkoušel princip Dopplerův stejným způsobem též *H. C. Vogel* na dráze z Kolína n. R. do Mindenu.

Jaké změny tonu lze při jízdě na železnici očekávati, objasní tato úvaha. Ton původní má výšku N. Jede-li lokomotiva ke stanici rychlostí a, slyšíme ton vyšší N'. Jede-li od stanice touže rychlostí, slyšíme ton nižší N''. Jest pak

$$\frac{N}{N'} = \frac{v}{v-a}, \qquad \frac{N''}{N} = \frac{v}{v+a},$$

$$\frac{N'}{N''} = \frac{v+a}{v-a}.$$

Číselně jest

$$v = 340\,\frac{m}{sec}.$$

Rychlost lokomotivy budiž

$$a = 20\,\frac{m}{sec}.$$

Pak jest

$$\frac{N'}{N''} = \frac{340+20}{340-20} = \frac{9}{8}.$$

Při této rychlosti pohybu, kteréž snadno lze docíliti, činí tedy snížení tonu v okamžiku, kdy vlak přejede přes stanici, velký celý ton.

Povšimnutí zasluhuje, že zvýšení a snížení tonu není identické; neboť jest

$$\frac{N'}{N} > \frac{N}{N''}.$$

Intervall obou těchto relativních výšek jest určen rovnicí

$$\frac{N'}{N} : \frac{N}{N''} = \frac{v}{v-a} : \frac{v+a}{v} = \frac{v^2}{v^2-a^2}$$

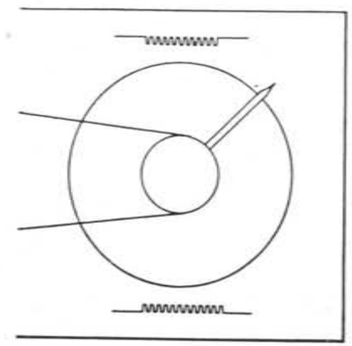
a jest při mírných rychlostech a ovšem velmi malý. Aby činil jedno komma $\frac{81}{80}$, musilo by býti $a = 38\,\frac{m}{sec}$. Při této rychlosti bylo by také snížení tonu velmi značné; činilo by

$$\frac{N'}{N''} = \frac{340+38}{340-38} = \frac{378}{302} \doteq \frac{5}{4},$$

tedy velkou tercii. Při pokusech, jež (za účastenství 14 osob) pořádal *Buys-Ballot*, pozorován byl ton signalové trubky a rohu, při rychlosti pohybu až $25\,\frac{m}{sec}$. Pokusy měly však více ráz orientační, kvalitativní. Hukot lokomotivy přehlušoval ton, který byl poměrně slabý, tak že ho bylo slyšeti jen do vzdálenosti asi 50 *m*. Následkem toho vlastní pozorování trvalo sotva 4 vteřiny. *H. C. Vogel* pozoroval intensivní ton parní píšťaly při rychlosti pohybu 7·5 až $19{\cdot}9\,\frac{m}{sec}$ a určoval přesně sonometrem pozorované snížení i zvýšení tonu. Jeho pokusy měly tudíž ráz kvantitativní, a jich výsledek potvrdil nejen správnost základní myšlenky, nýbrž též přesnost příslušných vzorců početních. Za dnů našich jezdí rychlíky na př. ve Francii rychlostí 93·5 kilometrů za hodinu; což přepočteno na sekundu dává $a = 26\,\frac{m}{sec}$. To však jest rychlost průměrná; rychlost maximalní jest dojista značně větší. Výdatné snížení tonu pozoroval již *Babinet*, později *Mach*, u projektilů, jichž fičící, hvízdavý ton při přelétnutí v blízkosti pozorovatele se značně sníží.

K akustickému zkoumání principu Dopplerova sestrojil *Fizeau* (1848) apparat, jehož základ spočívá na úvaze následující. Vedeme-li přes linearní pilku lístek kartonový dostatečnou konstantní rychlostí, vzniká ton, podobně jako při sireně Savartově. Poslouchají-li ve směru pilky dva pozorovatelé, slyší ten pozorovatel vyšší ton, kterémuž se lístek při svém pohybu přibližuje, kdežto pozorovatel druhý, od něhož se lístek při svém pohybu vzdaluje, slyší ton nižší. Kdybychom tedy touže rychlostí vedli lístek sem a tam, slyšeli by oba pozorovatelé, jak

ton je střídavě vyšší a nižší. Myšlenka je provedena tak, že lístek neb lamellka kovová jest na obvodu vertikalní desky, která se konstantní úhlovou rychlostí otáčí, a že jedna pilka jest nad deskou, druhá pod deskou. Proto přechází ona lamella přes pilku jednou sem, podruhé tam, jak obr. 80.*) schematicky vysvětluje, čímž pozorovatel v rovině desky stranou stojící slyší dva tony různé, vyšší a nižší, když lístek přejde přes jednu pilku směrem k němu a přes druhou směrem od něho.



Obr. 80. Schema přístroje, který k demonstraci principu Dopplerova sestrojil Fizeau.

Jednoduchým způsobem demonstroval (1860) princip Dopplerův *E. Mach*. Umístil píšťalku na konci tyče, kteráž byla dutá, aby se jí mohl vésti proud vzduchu k píšťalce; tyč pak uvedl příslušným přístrojem v rotaci tak, aby píšťalka opisovala kruh velkého poloměru. Pozorovatel v rovině tohoto kruhu slyší, jak ton píšťalky klesá a stoupá, když se píšťalka od něho vzdaluje a zase k němu přibližuje; v ose kruhu však neslyší ve výšce tonu variací žádných.

Pěkný a citlivý způsob demonstrace principu Dopplerova záleží v upotřebení rázů, vznikajících při současném znění dvou téměř stejně vysokých tonů, jakož o tom na příslušném místě pojednáme.

§ 75. **Význam principu Dopplerova v oboru optiky a astrofysiky.**

Co jest v akustice ton, vyšší neb nižší, to jest v optice jednoduchá, spektralní barva, kterou můžeme ve spektru analogicky zváti vyšší — směrem k fialové, a nižší — směrem k červené. Těleso A, svítící světlem homogenním, určité jednoduché barvy, jevilo by se tudíž pozorovateli B v barvě poněkud zvýšené neb snížené, dle toho, zda-li by se pohybem buď zdroje A nebo pozorovatele B neb obou zároveň odlehlost AB umenšovala nebo zvětšovala. Kdybychom pak znali původní barvu, mohli bychom z její změny souditi na měnu této odlehlosti.

*) Reprodukovaný dle Akustiky, kterou sepsal *J. Violle*.

V optice, kde rychlost světla v jest ohromně veliká zejména proti každé rychlosti b, kterou pozorovatel na zemi se může pohybovati, postačí úplně, když se přihlíží nikoli jednotlivě k rychlosti a neb b, nýbrž k rozdílu obou $a - b$, t. j. k rychlosti relativní čili ku měně vzdálenosti AB. Jest totiž

$$\frac{N}{N'} = \frac{v - a}{v - b} = 1 - \frac{a - b}{v - b}.$$

Ve vzorci tomto mizí rychlost b proti rychlosti v při daných poměrech terrestrických úplně. Můžeme tedy psáti

$$\frac{N}{N'} = 1 - \frac{a - b}{v}$$

anebo, když místo kmitočtů zavedeme délky vlny, jež jim jsou obráceně úměrny,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 - \frac{a - b}{v},$$

z čehož konečně plyne

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda} = \frac{a - b}{v},$$

kterýmžto velmi přibližným vzorcem jest relativní změna délky vlny vyjádřena změnou odlehlosti AB v každé sekundě vzhledem k rychlosti v. Toto stálé měnění se vzdálenosti AB může býti vydatným méně při zdrojích světla na zemi, více však v prostoru světovém, při pohybech stálic, dvojhvězd a j. Tím jest již naznačeno, že hlavní svůj optický význam má princip Dopplerův v astrofysice.

Avšak tělesa, homogenním světlem svítící, jsou v optice jen velice vzácnou výjimkou. Obyčejně svítí světlem složeným, zejména bílým. V takovémto však světle složeném nerozeznává oko jednoduché složky jeho, jichž změnu pohybem by mohlo zkoumati; změnu pak barvy složené pozorovati jest vzhledem k malé citlivosti velmi nesnadno a u bílého světla z důvodů zvláštních nemožno.

Proto jest nutno oku pomoci analysatorem světla, hranolem, t. j. pozorovati spektralně. Toto poukázání na *pozorování spektroskopická*, anebo, vzhledem k účelům kvantitativním, *spektrometrická*, znamenalo základní pokrok v použití principu Dopplerova v oboru optiky a astrofysiky.

Jak již nahoře řečeno, byl sobě Doppler optického významu svého principu plně vědom, ba kladl na něj zvláštní důraz. Podnětem byla mu známá zkušenost astrofysická. Pozorujíce totiž stálice na obloze nebeské, shledáváme, že mnohé z nich zejména dvojhvězdy, září světlem barevným *).

*) G. Gruss, Z říše hvězd, p. 643.

Doppler měl za to, že všechny hvězdy září světlem původně bílým, a že zabarvení, kde je pozorujeme, vzniká pohybem hvězd v přímce zorné. Soudil takto. Blíží-li se k nám hvězda, zvýší se všechny jednoduché barvy, světlo bílé tvořící, postupně tak, že konečně paprsky fialové, nejzazší ještě viditelné, přejdou v ultrafialové a stávají se neviditelnými. Naopak, vzdaluje-li se od nás hvězda, sníží se všechny jednoduché barvy, ve světle bílém zastoupené, postupně tak, že krajní paprsky červené, první, které vidíme, přejdou v infračervené, kdež se jako by ukryjí, stávajíce se neviditelnými. V prvém případě scházejí paprsky červené, v druhém fialové, proto se hvězda jeví onde zelenavou neb modravou, tuto červenavou. Avšak tento úsudek Dopplerův, jak záhy *Buys-Ballot* *) dokázal, byl pochybeným. Neboť hvězdy, bílým zářice světlem, vysílají také již paprsky jak ultrafialové tak infračervené, i bez pohybu; následkem toho nastává sice pohybem pošinutí barev směrem kladným nebo záporným, ale tak, že za barvy, jež na jednom konci světla přejitím v část neviditelnou oku mizí, na druhém konci světla jiné barvy z této části neviditelné oku vystupují a tím soubor barev bílé světlo tvořících zase doplňují.

Věc tato jeví se nám za dnů našich býti samozřejmou; avšak v dobách Dopplerových nebylo studium spektra tak pokročilé jako jest dnes. Nesmíme tudíž se diviti, že Doppler i přes ony oprávněné námitky přece mínění své i dále hájil. Podotčeno budiž, že Doppler při svých úvahách předpokládal dle analogií akustických vlnění světla podélné.

Pravdou bylo, že pohyb hvězd, bílým světlem zářících, přece jistým účinkem se jeví; ale nelze účinek tento hledati v *celkovém* dojmu světelném, jak Doppler učinil, nýbrž dlužno tento celek, bílou barvu, *rozebrati*, *analysovati*, aby se přišlo k spektralním *složkám*, jež pohybem vskutku pošinutí doznávají. Toto pošinutí lze pak měřiti na tmavých čarách (Fraunhoferových), jež ve spektru určitá naznačují místa.

Princip Dopplerův vyžaduje tudíž v optice měření *spektrometrických*. Tuto myšlenku prvý vyslovil *Hipp. L. Fizeau* a podal tím přesnou, pro měření vhodnou, formulaci principu Dopplerova pro obor optický. Stalo se tak v přednášce, dne $^{12}/_{12}$ 1848 v Société Philomathique v Paříži konané; krátký o přednášce referat vyšel r. 1850 v Repertoriu, jež vydával *F. Moigno*. Úplné pojednání vyšlo až r. 1870. Nezávisle naznačil r. 1860 touž správnou cestu *E. Mach*, jenž se principem Dopplerovým s největším zájmem zanášel a mnohými pokusy jakož i úvahami velmi platně k všeobecnému jeho uznání přispěl. Zejména poukázal na to, že ve spektru hvězd jsou dvojí čáry Fraunhoferovy, jedny původu stellarního, druhé původu tellurického, vznikající absorpcí v naší atmosféře. Pohybem hvězd pošinou se jenom

*) „Theoriam Doppleri probandam existimo; ad stellarum autem duplicium colores explicandos non sufficientem dico." Soudím, že theorii Dopplerovu dlužno schváliti; ale tvrdím, že k vysvětlení barev dvojhvězd nestačí.

ony čáry stellarní, kdežto tellurické zůstávají jako pevné pro měření indexy na svém místě. Prioritu však má *Fizeau*. Proto se princip Dopplerův označuje v astrofysice jako princip *Doppler-Fizeauův*.

Poukázáním na pozorování spektrometrická byl dán určitý a jasný směr pracím astrofysikalním, jimiž měl býti zkoumán pohyb těles nebeských v přímce zorné. Prvním úspěchem ve směru tomto vynikl *Huggins*, jemuž prací mnoha let se podařilo (r. 1868) zjistiti ve spektru Siria pošinutí čáry Fraunhoferovy *F*. Vzhledem k velikým obtížím přímých, subjektivních měření spektrometrických (neklid ve vzduchu, scintillace a j.) znamenala veliký pokrok methoda objektivní, *spektrofotografická*, kterou zavedl *H. C. Vogel* (1888). Dle methody této zjedná se v příznivé pro pozorování době *fotogramm spektra*, na němž lze pak dodatečně mikroskopicky*) případné pošinutí čar konstatovati. Častější fotogrammy téhož objektu nebeského umožňují zjistiti periodické změny v tomto pošinutí a z toho *periodické pohyby hvězdy*. Tím způsobem objevil *H. C. Vogel* r. 1889, že Algol jest dvojhvězdou a určil zároveň periodu jejího pohybu. Vzpomenuto budiž též, že *Lockyer* první užil (r. 1868) principu Dopplerova ke studiu erupcí vodíkových na slunci. Za dnů našich vzrostly práce na základě principu Doppler-Fizeauova vykonané měrou velikou, svědčící o tom, že princip ten pro četné úkoly astrofysické má ještě velikou budoucnost.

Co se výsledků dosavadních pozorování týče, jsou dřívější vesměs předstiženy těmi, jež dle své methody fotografické obdržel *H. C. Vogel*. Zprávy o jeho měřeních jsou obsaženy v publikacích astrofysikalní observatoře v Postupími. Při udávání výsledků číselných v jednotce *km/sec* značí + aneb —, že se vzdálenost hvězdy zvětšuje neb zmenšuje, čili že se hvězda od nás vzdaluje nebo k nám blíží. Za příklad buďtež uvedeny některé nejznámější a nejskvělejší hvězdy naší oblohy: α Aurigae (Capella) + 24, α Orionis (Beteigeuse) + 17, β Orionis (Rigel) + 16, α Canis maj. (Sirius) — 16, α Ursae maj. — 12, β Ursae maj. — 29, α Coronae bor. + 32, α Lyrae (Vega) — 15, α Aquilae (Atair) — 37 a j. Extremní hodnoty ukazují α Tauri (Aldebaran) + 49, γ Leonis — 39. Srovnávacím spektrem jest při těchto měřeních téměř vždy spektrum vodíka, někdy železa.

Zajímavé podrobnosti obsahuje článek „Dopplerův princip v astrofysice“ v Kosmických rozhledech, jež sepsal *F. J. Studnička*, 1896.

---

*) O jak jemná měření se zde jedná, dlužno posouditi z toho, že při relat. pohybu 75 *km/sec* hvězdy vzniká pošinutí čar činící asi $^1/_6$ vzdálenosti obou čar natriových.

V.

Vznik tonů chvěním příčným.

§ 76. Rozdělení úkolů.

Útvary pružné, jež lze ve chvění příčné uvésti, rozeznávají se jednak dle rozměrů, jednak dle pružnosti. Co se rozměrů týče, převládá ze tří nad ostatní buď rozměr jeden nebo rozměry dva; útvary jsou dle toho buď *podélné* nebo *plošné*. Co se pružnosti týče, mohou útvary dané býti buď zcela ohebnými a nabudou pak své, pro znění nutné, pružnosti *napjetím*; anebo mají, jsouce zcela tuhými, svou *pružnost vlastní*.

Pohlížejíce tedy na úkoly sem náležející s tohoto hlediska, budeme jednati nejprve o chvění útvarů takových, kteréž, nemajíce pružnosti vlastní, jí nabývají *napjetím*. Jsou to *struny* jakožto útvary podélné a *blány* jakožto útvary plošné. Dle povahy věci jsou struny vždy přímé, blány vždy rovinné. Potom jednati budeme o chvění útvarů, jež mají pružnost vlastní. Útvary *podélné* jsou tu buď přímé, *tyče*, nebo křivé, *ladičky* (kroužky); útvary plošné jsou podobně buď rovinné, *desky*, nebo křivé, *zvony*. Při tom jest vzhledem k četným analogiím výhodnější vykládati chvění útvarů podélných v souvislosti a rovněž tak chvění útvarů plošných.

Vyčtené zde úkoly jednotlivé jsou sice logicky, dle provedeného dělení, souřaděné, ale nikoli meritorně, dle své důležitosti hudební nebo fysikalní. V této příčině vynikají struny nade všechny útvary jiné, potom ještě, ač více fysikalně než hudebně, ladičky. Z útvarů plošných mají blány a desky důležitý význam fysikalní, podřízenější však hudební.

Struny.

§ 77. Skizza historická.

Užívání strun k účelům hudebním jest původu prastarého. Nástroje hudební toho druhu, jako lyry, harfy a pod., byly známy národům věků dávných, zejména Aegypťanům, Řekům a j. Není tedy pochybnosti, že zde hudební praxis od dob nepamětných svým způsobem se rozvíjela a zdokonalovala a že dostoupila stupně dosti vysokého, kdy hudební theorie své první nesmělé zkoušela kroky.

Počátek v tomto směru učinil *Pythagoras* v 6. stol. před Kr. Upraviv sobě zvláštní monochord, zkoumal, jak dlužno strunu zkrátiti, aby dala oktavu, kvintu nebo kvartu tonu původního; bylo již vylíčeno, jakým dojmem působil objev, že délky struny zkrácené jsou k délce původní v poměru nejjednodušších čísel 1, 2, 3, . . . Způsobem tímto byla *výška* tonu uvedena ve vztah s *délkou* struny určitého napjetí. První tento úspěch theoretický, kterým dojem sluchový převeden byl na pozorování zrakové, zůstal však v celém starověku i středověku osamoceným.

Důležitý pokrok další učinil P. *Marin Mersenne* (1588—1648), znamenitý na dobu svou experimentator, jenž připadl na myšlenku, *výšku* tonu uvésti ve spojení s *kmitočtem*. Pokusy, jež konal, popisuje v díle svém „Harmonicorum libri XVI, Parisiis 1636". Na struně 15 stop dlouhé, napjaté vahou $6\frac{5}{8}$ liber, počítal přímo kmity a nalezl, že jich počet za sekundu činí 10; z toho soudil, dle známého zákona délkového, že struna jenom 1·5 stopy dlouhá by vykonávala 100 kmitů za sekundu, a struna 0·75 stopy dlouhá 200 kmitů za sekundu; i navrhl, aby ton o tomto kmitočtu byl stanoven za základní celé soustavy hudební. Mersenne zkoumal též závislost kmitočtu na napjetí struny a nalezl, že nutno napjetí struny zvýšiti v poměru čísel čtvercových 1, 4, 9, . . ., aby kmitočty stoupaly v poměru čísel jednoduchých 1, 2, 3. . . . Konečně zkoumal i závislost kmitočtu na hmotě (váze) struny při určité délce, s výsledkem aspoň částečně správným.

Pracemi těmito byl problem kmitající struny methodou experimentalní řešen dosti šťastně, v tom smyslu, že kmitočet struny byl ve formě *úměrnosti* uveden ve vztah s veličinami jej podmiňujícími, délkou struny a napjetím. Scházelo ještě vystihnouti faktor proporcionality, v němž by konstanty struny —

průřez a specifická hmota — byly zároveň obsaženy, a tak položiti *rovnost* na místě *úměrnosti*, t. j. odvoditi vzorec, kterým by kmitočet struny mohl býti přímo vypočítán.

§ 78. Vzorec Taylorův.

Dovršiti řešení úkolu, jak posledními slovy odstavce předešlého bylo naznačeno, podařilo se asi o sto let později *Taylorovi* *) úvahami theoretickými. Propositio XXIII jeho spisu „Methodus incrementorum" zní takto: „Datis longitudine Nervi ejusdem pondere, et pondere tendente, invenire tempus periodicum **). Srovnává pak dobu kmitovou struny s dobou kyvu kyvadla určité délky a nalézá jisté vztahy. Zavedeme-li označení moderní, můžeme úkol daný takto parafrasovati.

Jest dána struna určitých *rozměrů*, délky L, konstantního průřezu q, a určitého *materialu*, stanoveného hmotou specifickou S. Struna jest napjata. Velikost tohoto napjetí vypočítá se nejsnáze, když jest struna zatížena vahou P jisté hmoty M na struně zavěšené. Značí-li g intensitu gravitačního pole, jest

$$P = Mg.$$

Doba kmitová T a kmitočet struny N jsou ve vztahu

$$N \,.\, T = 1.$$

Hledáme-li kmitočet N, kterýž jest akusticky význačnější, obdržíme vzorec Taylorův

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{qS}}.$$

Položíme-li

$$qS = m,$$

značí m hmotu, kterou má délková jednotka struny. Můžeme pak psáti

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{m}}.$$

V této úpravě jest vzorec Taylorův pro experimentování nej-

*) *Brook Taylor* (1685—1731), bohatý soukromník, žil v Londýně, zanášeje se mathematikou; od roku 1712 byl členem Royal Society. Hlavní jeho dílo jest „Methodus incrementorum directa et inversa" (London 1715); v tomto díle obsažena též známá každému mathematikovi „řada Taylorova".

**) Je-li dána délka struny a její váha i závaží napínací, nalézti dobu kmitovou.

jednodušší. Hmota m vypočítá se z úhrnné hmoty struny, kterou zvážíme, a z její délky. Napjetí P počítá se z hmoty M a intensity tíže g.

Původní vzorec Taylorův obsahoval váhu P vyjádřenou součinem hmoty, jež byla na struně zavěšena a zvala se „pondus tendens", a urychlení tíže; vedle toho byla do vzorce zavedena úhrnná hmota LqS struny jakožto pondus nervi; mimo to byly počítány polokmity struny. Proto zněl vzorec následovně

$$N = \sqrt{\frac{\text{pondus tendens} \,.\, g}{\text{pondus nervi} \,.\, L}}.$$

Uvažujíce o vzorci tomto dle názorů moderních poznáváme především, že urychlení g do vzorce nepatří; neboť kmitočet struny jistého napjetí nezávisí nikterak na urychlení tíže, nemá nic společného s polem gravitačním, byl by týž na měsíci, na Juppiteru, jako jest kdekoliv na zemi. Urychlení toto vystupuje jen okolností *nahodilou*, že napjetí měříme *vahou* hmoty; bylo by však možno napjetí měřiti i jinak, na př. dynamometrem, na pružnosti založeným a graduovaným. U příslušných nástrojů hudebních, houslí, harfy, piana a pod., udržuje se napjetí struny třením v kolíčkách, tedy způsobem, kterýž s urychlením tíže již dokonce nesouvisí. Rovněž není výhodné do vzorce zaváděti *úhrnnou* hmotu struny, poněvadž tím účinek materialu i rozměrů se kombinuje, kdežto jest výhodnějším, aby se účinek jeden od druhého rozlišoval, a zejména, aby rozměr délkový L nebyl ve vzorci obsažen jednou explicite jakožto činitel, jednou pak implicite jakožto spolupodmiňující úhrnnou hmotu struny.

Vzorcem Taylorovým

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{qS}}$$

můžeme ton struny, neslyšíce ho, výpočtem stanoviti. Význam vzorce vynikne lépe, když zavedeme napjetí na jednotku průřezu vztahované, dle definice

$$\frac{P}{q} = p.$$

Pak značí

$$\sqrt{\frac{p}{S}} = v$$

rychlost, s jakou vlna ve struně za daných poměrů postupuje (§ 61.). Máme pak jednoduše

$$N = \frac{v}{2L}, \qquad \frac{v}{N} = \lambda,$$

tudíž

$$L = \frac{\lambda}{2}.$$

Struna, kmitajíc jako celek, představuje délkou svou polovičku vlny, kteráž jejímu tonu přísluší. Na koncích struny jsou uzly, uprostřed pak jest vrchol vlny. Struna, takto kmitajíc, dává svůj *ton základní.*

§ 79. **Harmonické tony struny.**

Dle vzorce Taylorova lze stanoviti základní ton struny měřením délkovým a vážením, předpokládajíc, že struna jest napjata závažím, jež se nalézá v poli gravitačním známé intensity. Avšak již *P. Mersenne* a po něm *Noble* a *Pigott*, koncem století 17tého, určitěji pak *Sauveur**) poznali, že struna dává též tony vyšší, o kmitočtu dvoj, troj, čtyř, — vůbec k-násobném. V hudbě praktické jsou tony tyto známé jménem tonů flageoletových; první virtuos, jenž jich užíval, byl *Domenico Ferrari*, kterýž roku 1757 též v Německu koncertoval; zejména však byl to violinista *Niccolo Paganini* (1782—1840), jenž, ovládaje nástroj svůj technickou zručností vskutku neobyčejnou, dociloval právě oněmi tony (současně i na dvou strunách vyluzovanými) úspěchů stkvělých.

Ve fysice nazýváme tony, kteréž zvučící těleso mimo svůj ton *základní* dává, tony *svrchní.* Poněvadž pak tyto tony vystupují nejen isolovaně nýbrž *souborně*, když těleso, jsouc přiměřeně ve chvění uvedeno, dává *plný* svůj *zvuk*, můžeme, k tomuto *celku* přihlížejíce, všechny tony *jednotlivé*, tedy ton základní i jeho tony svrchní, označiti společným jménem tonů ***částkových*** čili *partialních.*

Při struně přichází ten případ *typický*, že kmitočty tonů částkových jsou v poměru přirozených čísel 1, 2, 3, ... Takové tony zoveme (§ 9.) tony *harmonické* (franc. sons harmoniques, it. suoni armonichi). Proto pravíme, že částkové tony struny jsou harmonickými.

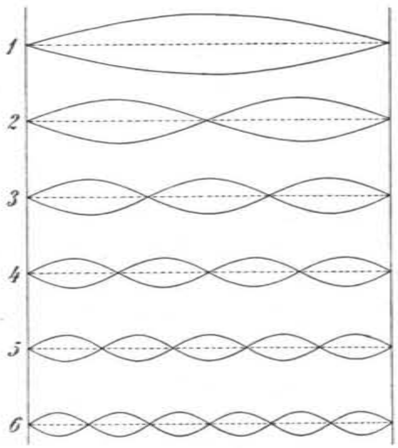
Je-li k číslo řadové 1, 2, 3, . . ., N_k kmitočet příslušného harmonického tonu struny, jest

$$N_k = kN_1,$$

*) *Joseph Sauveur*, (1653—1716), od r. 1686 prof. mathematiky na Collège Royal v Paříži, od r. 1696 člen akademie. Neměl hudebního sluchu a přece podal mnohé zajímavé práce akustické. Od něho pochází methoda, pomocí jezdců („petits cavaliers de papier") demonstrovati na struně místa v klidu a pohybu, pro něž zavedl jména noeud (uzel) a ventre (břicho, vrchol vlny, břicho jako tvar meziuzlí, vrchol jako určitý bod amplitudy největší).

kdež jest N_1 kmitočet tonu základního jakožto prvého harmonického. Vzhledem ke vzorci Taylorově máme tudíž vzorec obecnější

$$N_k = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{P}{m}}.$$



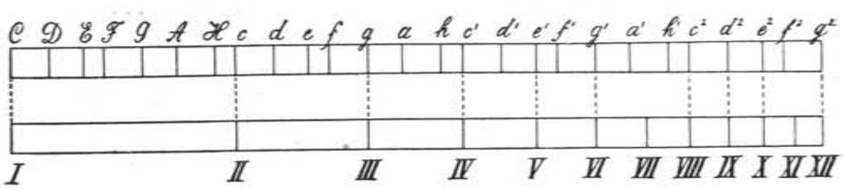
Obr. 81. Chvění struny při tonech harmonických.

Tony částkové seznáme u mnohých útvarů znějících; zřídka však jsou tyto částkové tony zároveň harmonickými. Právě tím vynikají nástroje strunové nade všechny jiné, poněvadž při nich tony svrchní zejména nižšího řádu, jež jsou též intensivnější, jsou vespolek i se základním v dokonalé *konsonanci*, dávajíce tak v současném znění plný a *dokonalý* zvuk. Způsob, jak struna kmitá, dávajíc postupně své tony partialní, objasňuje obr. 81.

V obrazci tomto jsou amplitudy tonů harmonických voleny dle relativních čísel

$$\frac{1}{\sqrt{1}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{4}},\ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ve shodě se zásadou v § 9. vyloženou.



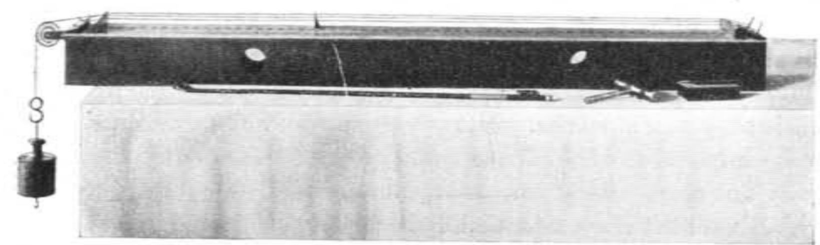
Obr. 82. Poloha tonů harmonických ve stupnici diatonické.

Polohu tonů harmonických ve stupnici diatonické objasňuje obr. 82. Stupnice diatonická jest rýsována přesně dle intervallů logarithmických v ladění přirozeném, podobně jako v obr. 63., jenom že v měřítku zmenšeném. Též poloha tonů harmonických jest přesně dle intervallů logarithmických udána. Dobře jest

viděti, jak při rostoucím čísle řadovém k intervall tonů sousedních $\frac{k+1}{k}$, logarithmicky $\log(k+1) - \log k$ se umenšuje, tak že tony postupně se řadí k sobě vždy těsněji.

§ 80. Pokusy polychordem horizontalním.

Kmitající strunou uvádí se ve chvění jen malé množství vzduchu; jestiť průřez strun poměrně velmi malý; nad to částečky vzduchu, jimž struna kmitajíc probíhá, snadno se pošinutí vyhnou, čímž vzniká zhuštění a zředění vzduchu jen nepatrné. Proto, napne-li se struna volně ve vzduchu anebo na kamenný stůl, k němuž se svěráky připevní, jest ji sotva slyšeti, i když se rozechví amplitudou dosti značnou. Vzhledem k tomu jest vždy nutno, zvuk strun sesíliti spoluzněním, resonancí. Proto se u všech nástrojů strunových napínají struny buď přes resonanční půdu nebo na resonanční skřínku, v níž jest vzduch.



Obr. 83. Polychord horizontalní.

Tak jest upraven též nejjednodušší a nejstarší akustický přístroj strunový, *monochord* anebo lépe *polychord horizontalní*, sloužící k základním pokusům o znění strun (obr. 83.). Podstatnou jeho částí jest podélná resonanční skříň s okénky; na této jsou mezi dvěma tvrdými hranoly dřevěnými napjaty struny, z pravidla tři, nejlépe kovové, ocelové nebo mosazné; prostřední z nich jde od pevného do dřeva zapuštěného železného kolíku přes hranu prvého hranolu na kladku ke skřínce přišroubovanou, a napíná se závažím. Obě krajní struny jsou vedeny od železných kolíků přes prvý hranol, pak přes druhý opět k železným kolíkům pevně do dřeva zapuštěným, jež lze klíčem otáčeti; tím způsobem se napjetí strun reguluje a při značném tření kolíků ve dřevě udržuje. Na skřínce podél strun jest stupnice na centimetry neb millimetry rozdělená. Délka strun, t. j. odlehlost hran obou krajních hranolů, volí se vhodně 120 *cm*, — lépe než 100 *cm*.

Obě struny krajní napnou se tak, aby byly přesně unisono. Při průměru strun 0·92 *mm*, jak jsou na polychordu v obr. 83. znázorněném, může býti základní ton obou na př. *C*. Závislost výšky tonu na délce struny lze pak jednoduše ukázati zkracováním jedné z obou strun, pomocí pošinovatelné nahoře v ostrou hranu končící kobylky. Zkracuje-li se struna na př. dle poměrných čísel diatonické stupnice, obdrží se zvuky *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *A*, *H*, *c*. Při tom se osvědčí vhodnost čísla 120, které jest dělitelno téměř všemi těmi čísly, jež jako jmenovatelé zlomků přicházejí v relativních výškách stupnice diatonické durové i mollové. Intervally lze srovnáváním s tonem *C* druhé struny dobře studovati. Ton se vzbudí smyčcem nebo lehkým dřevěným kladívkem podobné úpravy, jak bývají u piana. Ta část drátu, na kterou se nehraje, tlumí se rukou neb vhodným příklopem.

Velmi dobře lze polychordem horizontalním studovati *tony harmonické*. Struny kovové dávají jich celou řadu, struny menšího průměru hodí se lépe pro vyšší, většího průměru pro nižší tony harmonické. Jistý ton harmonický vznikne, když se ke struně přidrží lehce prst (nehet) nebo jiný ne právě tvrdý úzký předmět na tom místě, kde dle řadového čísla *k* má vzniknouti uzel, a když se smyčec vede přes místo, kde má vzniknouti vrchol vlny. Jest proto dobře, když se na stupnici přímo (na př. římskými čísly II, III, IV, . . .) označí místo, kde jest, od kraje počítajíc, prvý uzel, příslušící částkovému tonu druhému, třetímu atd.; polohu příslušného vrcholu lze pak snadno odhadnouti. Pak lze tony harmonické hráti rychle po sobě, čímž jich charakteristický postup dobře vynikne.

Jinak, když se struna nechá úplně volnou a tře na některém místě smyčcem, vznikne zvuk, v němž lze celou řadu tonů harmonických sluchem rozpoznati. Všeobecně nevzniknou všechny; neboť tony, jež by na místě třeném měly uzel, patrně, jak již *Young* poznal, vzniknouti nemohou. Tak na př. tře-li se struna uprostřed, nemohou z tonů harmonických vzniknouti druhý, čtvrtý, šestý, . . ., odpadnou tedy všechny sudé tony částkové. Podobně, tře-li se struna v jedné třetině své délky, odpadává ton částkový třetí, šestý, devátý atd. Vskutku lze na barvitosti

základního zvuku tak vznikajícího jisté rozdílnosti sluchem rozeznati. Tře-li se struna blíže kraje, vyniknou vysoké tony částkové, čímž zvuk dostane zvláštní ostrosti. Tak může i violinista měniti barvitost a výraznost zvuku houslí dle místa, po kterém vede smyčec a ovšem též dle způsobu smyku. Na struny houslí hrává se obyčejně asi v desetině délky. Podobně u piana lze dostati různou barvitost zvuků dle místa, na které naráží kladívko. V poloze střední bývá to v blízkosti $\frac{1}{7}$ až $\frac{1}{9}$, v poloze vyšší $\frac{1}{9}$ až $\frac{1}{10}$, v nejvyšší $\frac{1}{12}$ délky strun; dle toho řídí se pak tvar rámce, na němž struny jsou napjaty. Účelem toho zařízení jest, eliminovati z částkových tonů ty, jež jsou nekonsonantní, zejména ton 7mý, 11tý, 13tý a pod.

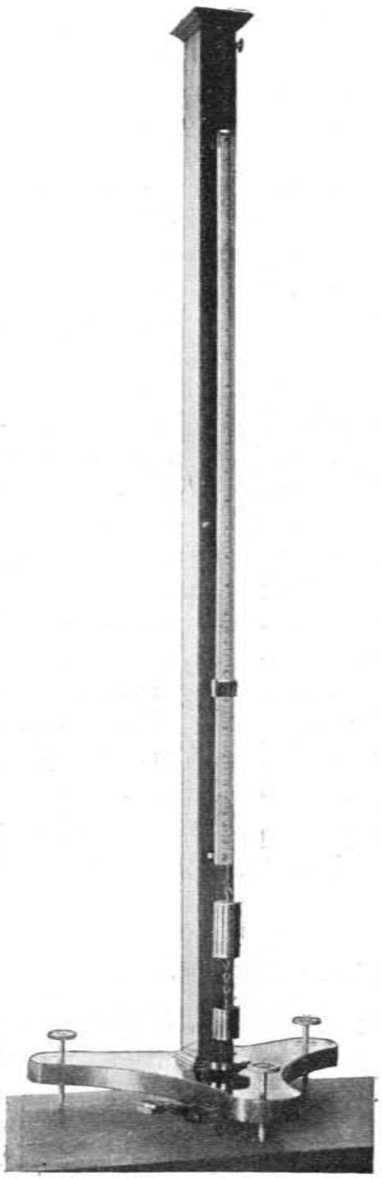
Piano jest též polychordem velkých rozměrů, na němž lze i přes nedokonalost ladění studovati vznikání tonů harmonických. Když se odstraní útlum struny na př. *C* a když se potom udeří a hned utlumí struna *c*, zní ton její na struně *C* dále, podobně když se udeří a hned utlumí struna *g*, c^1, e^1, . . . doznívá každý z jejich tonů dále na struně *C*. Tato struna rozechví se tedy resonancí tak, jak jest naznačeno v obr. 81., dávajíc své tony částečné, ovšem ne zcela isolovaně, poněvadž vznikají nikoli účinkem tonů, nýbrž vlastně zvuků.

Na střední struně polychordu (obr. 83.) mají se konati pokusy o účinku napjetí na výšku tonu. Kvalitativně lze dobře ukázati, zejména na strunách slabších, jak ton stoupá, když se napjetí zvětšuje; avšak kvantitativně experimentovati, na př. stanoviti dle formule Taylorovy napřed výšku tonu, není možno, poněvadž v kladce jest tření příliš veliké; k pokusům takovým hodí se jen monochord vertikalní.

§ 81. **Pokusy monochordem vertikalním.**

Výhoda monochordu vertikalního, který navrhl již *Savart* a provedl Vilém *Weber**), záleží v určitosti a stálosti napjetí struny. Tato se napíná závažím. Lze pak přímo ze vzorce Taylorova počítati kmitočet *N* základního tonu, který struna při jisté délce dává. Pošinováním příslušné kobylky, přes kterou struna jest vedena, dá se délka tato měniti a na měřítku odečísti.

*) *Wilhelm Eduard Weber*, Einrichtung und Gebrauch des Monochords, Pogg. Ann. XV, 1829. V pojednání tomto poukazuje již autor na důležitost jednotného ladění (jeho ladička a^1 měla kmitočet 432) a doporučuje monochord svůj zejména kruhům hudebním.


Obr. 84. Monochord vertikalní.

Obr. 84. ukazuje monochord vertikalní v provedení jednoduchém (*E. Mach*). Na struně jest zavěšeno závaží dvojí M_1 a M_2, druhé menší M_2 je na řetízku připojeno k většímu M_1 a dá se jednoduchým zařízením pedalovým, z obrazce patrným, nadzvednouti tak že pak nepůsobí. Hmoty obou závaží jsou voleny v poměru

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{16}{9},$$

tak že jest

$$\frac{M_1 + M_2}{M_1} = \frac{25}{16}.$$

Když se tedy — při jakékoli délce struny — závaží M_1 nechá viseti stále a při tom když se závaží M_2 jednou nadzvedne, po druhé spustí, dává struna tony ponejprv N_1, po druhé N_2, jichž intervall jest

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{M_1}},$$

číselně

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{5}{4},$$

tedy velká tercie. Pokusem dá se výsledek tento snadno verifikovati, poněvadž pro přesnost intervallu velké tercie je sluch citlivým.

Velmi úspěšně lze monochordu vertikalního užívati jako *sonometru* k určování absolutní výšky tonů na základě unisonity. Když se předběžně určí délka L_0 struny pro normalní $a^1 = 435$ a když se pro jakýkoli

daný ton N nalezne délka L, jest jednoduše

$$N = 435 \, . \frac{L_0}{L}.$$

Jde-li specialně o tyto účely sonometrické, bývá kobylka pošinovatelná mikrometrickým šroubem podél přesně provedeného měřítka, tak že lze ton N plynule měniti; odčítání délky děje se noniem. Určení čísla N jest ovšem vázáno na jisté meze, kteréž však lze volbou průřezu struny a závaží napínacího vhodně upraviti, buď pro tony vysoké nebo nízké.

Pro týž účel sonometrický lze užívati též monochordu horizontalního, ale jest nutno délku L_0 čas od času kontrolovati, zda-li napjetí struny nepovolilo.

Hlavním však účelem monochordu vertikalního jest zkoušeti zákon Taylorův. K tomu hodí se nejlépe forma

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{m}},$$

$$P = Mg.$$

Před pokusem se tedy struna pro monochord vybraná zváží a vypočítá se z její úhrnné délky hmota m jednotky délkové. Pak se struna do monochordu zapne a vhodným závažím M zatíží. Ton N, který struna při jisté délce L dává, anebo naopak délka L pro jistý ton N, dá se napřed vypočísti.

K objasnění budiž uveden příklad následující. Pro monochord vertikalní vybrala se bezvadná ocelová struna délky 461·7 *cm*, která vážila 2·2493 grammů. Z toho se vypočítá hmota jednotky délkové

$$m = \frac{2{\cdot}2493}{461{\cdot}7} \, \frac{g}{cm},$$

což dává

$$m = 0{\cdot}0048718 \, \frac{g}{cm}.$$

Struna se zatíží závažím 5 *kg*; jest tedy

$$M = 5000 \; g.$$

Intensita gravitačního pole (Praha, Clementinum) činí

$$g = 981{\cdot}0 \, \frac{cm}{sec^2}.$$

Součinem obou těchto veličin M a g jest určena síla strunu napínající

$$P = 4905000 \, \frac{cm \, . \, g}{sec^2}.$$

Z těchto dat počítá se rychlost v, jakou se ve struně vlnění šíří,

$$v = \sqrt{4905000 \frac{cm \cdot g}{sec^2} : 0\cdot0048718 \frac{g}{cm}} = 31730 \frac{cm}{sec}.$$

Tím jest stanovena vlastní *konstanta monochordu*. Pro absolutní výšku N tonu základního máme pak vzorec

$$N = \frac{31730}{2L} \frac{1}{sec},$$

z kteréhož pro počítání plyne

$$N = \frac{15865}{L} \cdot \frac{1}{sec}, \quad \text{nebo} \quad L = \frac{15865}{N} cm.$$

Tážeme-li se na př. na délku struny, jež by dávala normalní a^1, obdržíme

$$N = 435 \frac{1}{sec}, \qquad L = 36\cdot472 \ cm.$$

Konstantu monochordu v takto vypočtenou dlužno při počítání přesném dodatečně korrigovati. Značí totiž m hmotu jednotky délkové *drátu napjatého*. Poněvadž se však napjetím drát poněkud *prodlouží*, jest hmota m takto míněná poněkud menší než jak se vypočítala z předběžného vážení. Korrekci výsledku nutno provésti počtem.

Ze hmoty m předběžným vážením určené vypočteme průřez q drátu, přijmouce za specifickou hmotu oceli $7\cdot8 \frac{g}{cm^3}$, dle známé relace

$$q = \frac{0\cdot0048718}{7\cdot8} cm^2$$
$$= 0\cdot0006246 \ cm^2.$$

Průměr drátu se z toho udá na

$$2r = 0\cdot0282 \ cm.$$

Drát je tedy o něco silnější než $^1/_4$ *mm*. Z úhrnného zatížení P počítáme pak zatížení na jednotku průřezu připadající čili napjetí p dle vzorce

$$p = \frac{P}{q}$$
$$= \frac{4905000}{0\cdot0006246} \cdot \frac{dyna}{cm^2}$$
$$= 7853200000 \frac{dyna}{cm^2}$$

čili v jednotce přehlednější

$$P = 4\cdot905 \ megadyna,$$
$$p = 7853 \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Modul elasticity oceli jest*)

$$E = 2060000 \frac{váha \ kg}{cm^2}.$$

Modul jest zde udán v jednotce starší, technické; poněvadž však váha kilogrammu jest o $2^0/_0$ menší než megadyna, přepočítáme ono číslo na jednotku absolutní — v níž jest též p vypočteno — když číslo hořejší o $2^0/_0$ zmenšíme. Jest tedy

$$E = 2020000 \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Z obou čísel, p a E, obdržíme relativní prodloužení drátu

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}$$
$$= \frac{7853}{2020000}$$
$$= 0\cdot00389.$$

Prodloužení činí tedy na 100 *cm* bez mála 4 *mm*, přesně $0\cdot389^0/_0$, o tolikéž zmenší se hmota m jednotky délkové struny. Ve vzorci

$$v = \sqrt{\frac{P}{m}}$$

dlužno tedy klásti, dle známých vzorců přibližných,

za	m	hodnotu	$m\,(1 - 0\cdot00389)$
za	$\frac{1}{m}$	„	$\frac{1}{m}(1 + 0\cdot00389)$
za	$\sqrt{\frac{1}{m}}$	„	$\sqrt{\frac{1}{m}}.(1 + 0\cdot00194)$
čili za	v	„	$v\,(1 + 0\cdot00194)$.

Dle toho jest správně

$$v = 31730 + 0\cdot00194 \cdot 31730$$
$$= 31730 + 62$$
$$= 31792 \frac{cm}{sec}.$$

*) Viz Mechanika, pag. 590 a 597, 1901. Modul oceli udává *F. Kohlrausch* (1901) povšechně na 21000 $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$; *W. Voigt* (1893) pro ocel určitou na 20400 $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$. Zde vzata hodnota 20600 $\frac{\text{váha } kg}{mm^2}$.

Máme tudíž následující vzorce opravené:

$$N = \frac{15896}{L} \frac{1}{sec}, \qquad L = \frac{15896}{N} cm.$$

Pro normalní a^1 vychází nyní

$$N = 435 \frac{1}{sec}, \qquad L = 36\cdot543 \; cm,$$

o 0·7 *mm* více než dříve. Naopak pro délku L bez korrekce dříve vypočtenou vyšlo by

$$L = 36\cdot472, \qquad N = 435\cdot84,$$

o 0·84 kmitů více než dříve předpokládáno.

Sem náleží ještě poznámka následující. Číslo m značí hmotu jednotky délkové *drátu napjatého*. Často bývá drát takový opředený, na př. u strun pro piano jemným drátkem měděným; tím se hmota m zveličí, ton struny sníží, ale nikoli tou měrou, jak by se vzorce Taylorova následovalo, nýbrž vydatněji. Vzorec Taylorův zde platnosti nemá, poněvadž hmota m není cele napjatá; opředení působí spíše jako hmotný přívažek ke struně dané.

§ 82. Jak lze kmitání struny napodobiti.

Tvary kmitové, jak jsou v obr. 81 znázorněny, lze foronomicky ukázati a tak kmitání struny napodobiti jednoduchým způsobem následujícím. Kovová, těsně (v malém průměru) vinutá spirala, z mosazi neb argentanu, anebo ještě jednodušeji kaučuková trubice nebo provazec menší tloušťky, upevní se na jednom svém konci svěrákem k experim. stolu, a na druhém konci drží se v rukou volně ve vzduchu, při čemž se horizontalně mírně napíná. Když pak ruka vykonává malé příčné kmity, uvede se za jistých podmínek celý provazec ve chvění stojaté, při čemž se utvoří jistý počet uzlů. Jest totiž jeden uzel tam, kde je trubice neb spirala upevněná, druhý pak uzel tam, kde se drží v rukou; malé pohyby rukou, mající chvění struny vzbuditi, vadí jen nepatrně. Vedle toho jest mezi těmito krajními uzly větší neb menší počet uzlů, nebo uzel žádný. V posledním případě jest napodobeno kmitání struny při tonu základním, jinak při tonech svrchních.

Jaká jest podmínka, aby stojaté chvění vzniklo, seznáme z této úvahy. Provazec má délku L. Nárazy se šíří rychlostí v. Od ruky k pevnému bodu dojdou tedy za čas $\frac{L}{v}$, zde se odrazí a

vrátí se k ruce, s fasí opačnou, opět za dobu $\frac{L}{v}$, zde se po druhé odrazí s fasí opačnou — čímž se dostaví *fase původní*; a nyní mají se klásti souhlasně na další nárazy rukou způsobené a je sesíliti. Je-li T perioda těchto nárazů, N kmitočet, nastane sesílení, je-li

$$\frac{L}{v} + \frac{L}{v} = kT,$$

kdež jest k číslo řadové 1, 2, 3, ... Odtud plyne, poněvadž T a N jsou veličiny reciproké,

$$\frac{2L}{v} = \frac{k}{N}$$

čili

$$N = k \frac{v}{2L},$$

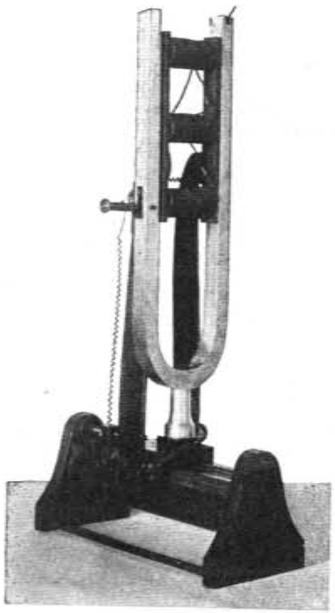
což jest vzorec Taylorův.

Vhodnou volbou jednak kmitočtu N, jednak rychlosti v, která se reguluje napjetím, lze velmi dobře obdržeti různé formy kmitové pro různé hodnoty čísla k, na př. $k = 1, 2, 3, 4$ i 5. Pokus jest svou jednoduchostí poučný a dobře vysvětluje, jak vlnění stojaté vzniká (§ 28.).

§ 83. Pokus Meldeův.

Při pokusech v odstavci předešlém popsaných vykonávala anebo spíše napodobovala kmity ruka experimentatora. Daleko pravidelněji vykonává však kmity takové těleso pevné zvučící, na př. ladička. Myšlenku, upraviti pokus s použitím ladičky, pojal *F. Melde* v letech 1859 a 1860 a zavedl tak do akustiky jednu z nejpěknějších method studovati názorně chvění strun, a jeho zákony.

K pokusu hodí se dobře ladička větších rozměrů a menšího kmitočtu, na př. taková, jako jest v obr. 85. znázorněna. Délka ramen činí 48·5 *cm*, tloušťka 1·9 *cm*, šířka 2·5 *cm*. Ladička má kmitočet 74·6 $\frac{1}{sec}$; dává tedy ton blízce D. Jest montována na stojanu tak, aby se dala buď postaviti, rameny vertikalně, nebo položiti, rameny horizontalně. Ve chvění se udržuje elektromagneticky. Na hořejším konci jednoho ramene jest upevněno očko; od tohoto vede se drátek neb hedvábná *e*-struna houslová vodorovně přes experimentalní stůl, v délce 4 *m*, ke kladce, na sloupu experimentalního stolu upevněné, a přes kladku k pružné kovové spirale (z drátu ocelového neb argentanového); tato jest druhým koncem připojena k tyčince se šroubovým závitem, která se dá maticí šroubovou podélně pošinovati. Zařízením tímto lze napjetí struny ponenáhlu řiditi. Jinak lze užiti též napínajících závaží. Za bílou strunu dá se černé sukno jakožto pozadí, na němž lze pak kmitání struny dobře pozorovati.



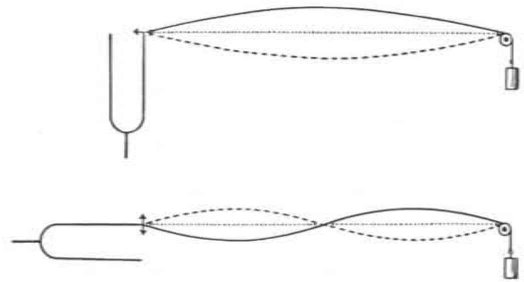
Obr. 85. Velká ladička k pokusu Meldeově.

Dle způsobu, jak jest ladička zařízena, dlužno zde rozeznávati případy dva. Kmity ladičky mohou se totiž díti buď *rovnoběžně* se strunou anebo *napříč* struny. Melde označuje zkrátka prvé zařízení ladičky jakožto *rovnoběžné, parallelní*, druhé pak jakožto *příčné, transversalní*. Budiž struna napjata vodorovně. Pro pozorování jest pak nejvhodnější, aby kmitala *v rovině svislé*. Za těchto podmínek nastává případ prvý, je-li ladička *postavena*, t. j. jsou-li její ramena vertikalně, a případ druhý, je-li ladička *položena*, t. j. jsou-li její ramena horizontalně; v obou případech jest struna v téže rovině svislé jako ramena ladičky. Schematicky znázorňuje oba případy obr. 86.

Mezi oběma případy jest důležitý rozdíl. Při zařízení příčném jest kmitočet struny $= N$, stejný s kmitočtem ladičky; při zařízení rovnoběžném jest však kmitočet struny $= \frac{1}{2} N$, poloviční kmitočtu ladičky. V případě tomto, když ladička vykoná polokmit z prava na levo, vykoná struna čtvrtkmit, totiž z nejzazší své polohy do polohy rovnovážné, kde struna jest přímou; když pak ladička jde zpět, z leva na pravo, postupuje struna dále z této své rovnovážné polohy do druhé souměrné polohy

nejzazší, tak že vykoná svůj *polokmit*, co zatím ladička vykonala svůj *kmit úplný*.

Je-li tedy *napjetí struny* v obou případech *totéž*, pak při zařízení *podélném* kmitá struna ve tvaru tonu *základního*, při zařízení však *příčném* ve tvaru *oktavy* (obr. 81.). Kdyby v tomto zařízení příčném měla struna kmitati též ve tvaru tonu základního, musilo by její napjetí býti 4-kráte větší.



Obr. 86. Podélné a příčné postavení ladičky při pokusu Meldeově.

Jinak platí pro postavení podélné i příčné pravidlo, že nutno napjetí zmenšiti na $\frac{1}{k^2}$, když struna má dávati tvar kmitavý příslušný k-tému tonu harmonickému. Neboť ve vzorci

$$N = \frac{k}{2L}\sqrt{\frac{P}{m}}$$

čili

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{k^2 P}{m}}$$

zůstává, při daných veličinách m a L, číslo N konstantním, poněvadž ladička dává vždy týž kmitočet; musí proto býti též součin k^2P konstantní.

Kdyby se však zákon tento měl zkoumati pokusem kvantitativně, musila by se struna zavěsiti svisle, a pak přímo závažím zatížiti; neboť vede-li se přes kladku, vzniká zde značnější tření. Věc se má zde podobně jako při monochordu horizontalním.

Mění-li se při pokusu Meldeově napjetí *spojitě*, což lze pružnou spiralou velmi dobře provésti, vyniknou velmi pěkně *přechodní tvary*, kteréž struna zaujme, když není vyplněna podmínka v předešlém odstavci odvozená, když tedy jest

$$\frac{v}{L} + \frac{v}{L} \gtrless kT.$$

Místo hedvábné struny užíval Tyndall při svých popularních přednáškách drátu platinového, který rozžhavil proudem. Když se drát ladičkou uvede ve chvění, chladí se prudkým pohybem vibračním drát v meziuzlí, tak že pak svítí jen v místech uzlových. Pokus jest effektní, ale pro studium vibrace jím mnoho získáno není, poněvadž vlastní chvění drátu (zejména tvar základní) není viděti. Kde pak Tyndall volil hedvábnou strunu, natíral ji roztokem síranu chininového a osvětlil světlem elektrickým; svítila pak pěkným světlem modravým. Je-li struna pěkně bílá a je-li pozadí její černé, lze pokus i z daleka dobře pozorovati bez zvláštních takových opatření při obyčejném světle denním. Když je struna, jak bylo popsáno, 4 metry dlouhá, a když se užije oné silné elektromagnetické ladičky, vznikají vibrace, kteréž — při tvaru základním — mají amplitudu až 5 *cm*, tak že vyniknou neobyčejně krásně a zřetelně. Jinak lze pokusy tyto ještě měniti rozmanitým způsobem. Tak lze strunu vésti k jiné ladičce a tuto též rozzvučeti. Struna kmitá pak, jsouc ovládána oběma ladičkami současně. Jsou-li kmitočty obou ladiček v jednoduchém poměru, na př. prima a oktava, prima a kvinta, vznikají při vhodném napjetí struny kmitové tvary, kteréž se jeví tak, jako by oba příslušné tvary, jež by u jedné ladičky vznikly, byly na sebe položeny.

§ 84. **Úvahy theoretické.**

Seznavše způsob chvění struny po stránce experimentalní, přejděme již k úkolu, odvoditi základní vztahy mathematické pro struny úvahami theoretickými. Jest dána na monochordu horizontalním struna; její délka budiž L, hmota jednotky délkové m. Struna jest napjata silou P mezi dvěma body pevnými; jeden z nich, na př. na levo ležící, volme (obr. 87.) za počátek souřadnic O; osu OX položme v rovnovážný směr struny, osu OY pak ke směru tomu kolmo. Vyjmeme-li v myšlenkách element délkový dx struny v její poloze rovnovážné, působí na obou jeho koncích síly $-P$ a $+P$ ve směrech opačných. Když se struna v rovině os souřadnicových vyšine velmi málo ze své polohy rovnovážné, čímž její tvar přímkový přejde v zakřivený, stane se element dx elementem obloukovým, na jehož koncích působí tytéž síly, jako dříve, ale již ne ve směrech opačných; ta, jež dříve byla $-P$, svírá s osou úseček úhel α, a jež byla dříve $+P$, úhel $\alpha + d\alpha$. Rozložíme-li síly tyto ve složky podél os souřadnicových OX a OY, obdržíme

$$-P\cos\alpha, \qquad P\cos(\alpha + d\alpha),$$
$$-P\sin\alpha, \qquad P\sin(\alpha + d\alpha).$$

Předpokládejme vyšinutí tak velice malé, aby elementy dx a ds se sobě rovnaly, t. j. aby úhel α byl velice malý; položíce pak za cosinus malého úhlu 1, za sinus oblouk, obdržíme pro ony složky výrazy

$$-P, \qquad P,$$
$$-P\,.\,\alpha, \qquad P\alpha + Pd\alpha.$$

Vznikají tu dvojice sil; a sice působí

dvojice $-P$, $+P$ na rameni dy momentem Pdy,

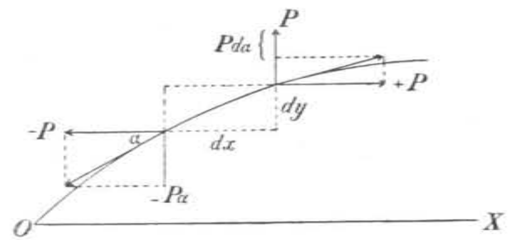
„ $-P\alpha$, $+P\alpha$ „ „ dx „ $P\alpha\,.\,dx$.

Jest však přibližně, je-li α úhel velice malý,

$$\alpha = tg\,\alpha = \frac{dy}{dx},$$

z čehož pak plyne rovnost

$$P\alpha\,.\,dx = P\,.\,dy\,.$$



Obr. 87.

Obě dvojice, působíce momentem *rovným* a jak z obrazce 87. ihned patrno, *opačným*, ruší se, a zbývá pouze síla

$$P\,.\,d\alpha,$$

jež jest fakticky negativní, poněvadž $d\alpha$ jest negativní. Touto silou pohání se element struny ds do rovnovážné polohy zpět. Při tom jest, opět přibližně,

$$d\alpha = d\,tg\alpha = d\,\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx,$$

tudíž ona síla, vyjádřená *staticky*,

$$P\,\frac{d^2y}{dx^2}\,.\,dx.$$

Touž sílu vyjádříme *dynamicky*, součinem z hmoty $m\,.\,ds$ čili $m\,.\,dx$ a urychlení $\frac{d^2y}{dt^2}$ jakožto

$$m\,.\,\frac{d^2y}{dt^2}\,dx.$$

Kladouce oba výrazy sobě rovnými a krátíce obdržíme

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{P}{m}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Zaveďme zde ještě ke zkrácení

$$\frac{P}{m} = c^2;$$

obdržíme tedy differencialní rovnici kmitající struny ve formě definitivní

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Jest to tatáž rovnice, kterou jsme měli pro vlnění postupné. Již tehda jsme naznačili, že rovnice ta má význam *všeobecnější*, že vyjadřuje pohyb vlnivý *jakýkoli*, postupný i stojatý; vskutku platí i pro vlnu původní i pro odraženou, tudíž i pro obě zároveň a pro výsledek superposice obou, t. j. pro vlnu stojatou. Věc rozhodne se teprve bližšími podmínkami.

Víme již, že oné rovnici differencialní vyhovuje jakožto partikularní integral funkce

$$y = r \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right),$$

když v ní vzhledem k proměnné x pokládáme r za stálé a ε za měnlivé, jak přísluší vlnění postupnému. Při vlnění stojatém jest naopak r měnlivé, ε stálé. Poněvadž se zde o vlnění stojaté jedná, dosaďme onu funkci do rovnice differencialní a pokládejme r za proměnné od místa k místu, tedy za proměnné dle x, ale ε za stálé. Tak obdržíme:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} r \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2r}{dx^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right).$$

Majíce tedy zřetel k differencialní rovnici

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

obdržíme podmínku

$$\frac{d^2r}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{c^2T^2} \cdot r.$$

Zavedeme-li sem délku vlny

$$cT = \lambda,$$

obdržíme

$$\frac{d^2r}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cdot r.$$

Integral této rovnice jest, dle § 4.,

$$r = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x + b \cos \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

kdež jsou a, b integrační stálé.

Poněvadž struna v bodech $x = 0$ a $x = L$ má uzly, musí zde býti $r = 0$ pro každou dobu t.

Z podmínky $x = 0$, $r = 0$ plyne $b = 0$.

Z podmínky $x = L$, $r = 0$ plyne $0 = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} L$,

tudíž

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = k\pi \quad \text{aneb} \quad 2L = k \cdot \lambda,$$

odtud dále

$$2L = kcT_k, \quad \text{z čehož} \quad T_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{2L}{c}.$$

Tím způsobem obdržíme jakožto partikularní integral dané differencialní rovnice

$$y = a_k \sin \frac{k\pi}{L} x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varepsilon\right),$$

kdež jest $k = 1, 2, 3, \ldots$ Všeobecný integral obdržíme tudíž, sečítajíce všechny partikularní,

$$y = \sum_1^k a_k \sin \frac{k\pi}{L} x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_k} t + \varepsilon_k\right).$$

Struna vykonává tudíž pohyb, kterýž lze pokládati za *superposici jednoduchých vln stojatých*, z nichž každá má amplitudy dle výrazu

$$a_k \sin \frac{k\pi}{L} x$$

od místa k místu ($x = 0 \ldots L$) měnlivé, a periodu T_k čili kmitočet $N_k = \frac{1}{T_k}$. Poloha uzlů jest určena podmínkou

$$a_k \sin \frac{k\pi}{L} x = 0, \qquad \frac{k\pi}{L} x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi,$$

$$x = 0, \frac{L}{k}, \frac{2L}{k}, \frac{3L}{k}, \ldots$$

od 0 do L.

Specialně máme:

$k = 1$, ton základní, $N_1 = \frac{c}{2L}$, uzly 0, L

$k = 2$, oktava, $N_2 = 2 \cdot \frac{c}{2L}$, uzly 0, $\frac{L}{2}$, L

$k = 3$, duodecima, $N_3 = 3 \cdot \frac{c}{2L}$, uzly 0, $\frac{L}{3}$, $\frac{2L}{3}$, L

$k = 4$, druhá oktava, $N_4 = 4 \cdot \frac{c}{2L}$, uzly 0, $\frac{L}{4}$, $\frac{2L}{4}$, $\frac{3L}{4}$, L

atd.

Úkol vyšetřiti pohyb kmitající struny za podmínek nejrozmanitějších, zaměstnával vynikající mathematiky všech věků a byl řešen při vzmáhajícím se rozvoji počtu differencialního a integralního způsobem věc úplně vyčerpávajícím. Buďtež zde uvedena jména *Jan Bernoulli*, *d'Alembert*, *Euler*, *Daniel Bernoulli*, *Lagrange*, *Petzval*, a j. V literatuře naší jest problem strun řešen v plné všeobecnosti, obšírně a obsažně, v III. díle Theoretické Fysiky, Akustika, Koláček-Seydler pag. 310—337, 1895.

§ 85. Oprava vzorce Taylorova vzhledem k tuhosti struny.

Pokusy vertikalním monochordem na strunách kovových prováděné ukazují, že ton pozorovaný vždy jest vyšší než počítaný. Příčinou toho jest vlastní tuhost struny. Kmitočet N vypočtený z formule Taylorovy předpokládá strunu nekonečně ohebnou; kmitočet N^* pozorovaný na struně skutečné jest vyšší, poněvadž struna jest více méně tuhou. Dlužno tudíž kmitočet N vzhledem k okolnosti této *korrigovati*, aby se výpočet převedl na skutečnost.

Existují dva způsoby, jimiž korrekci takovou lze provésti; jeden starší nalezl empiricky *Savart* a odůvodnil theoreticky *Duhamel*, druhý stanovil *Seebeck*.

1. Ve smyslu *Duhamelově* můžeme uvažovati takto. Mějmež na vertikalním monochordu strunu určitých rozměrů (q, L) a určitého materialu (S, $qS = m$). O tonu rozhoduje pak napjetí. Je-li P váha hmoty na struně zavěšené, jest kmitočet N dle vzorce Taylorova počítaný určen vztahem

$$N^2 = \text{Const.}\ P.$$

Skutečný kmitočet N^* jest však větší, jako by příslušel většímu napjetí P^* dle vztahu

$$N^{*2} = \text{Const.}\ P^*.$$

Z obou rovnic plyne

$$N^{*2} - N^2 = \text{Const.}\ (P^* - P).$$

Duhamel předpokládá, že rozdíl $P^* - P$ pochodící z vlastní tuhosti struny, jest *konstantní*, t. j. nezávislý na kmitočtu, čili, což jest totéž, na délce struny, poněvadž při určitém průřezu a materialu struny dané lze jenom délkou měniti ton. Položíme-li tedy

$$P^* - P = P_0$$

a souhlasně

$$N^{*2} - N^2 = N_0^{\,2},$$

působí dle Duhamela tuhost struny tak, jako by struna byla

konstantní vahou P_0 napínána; dávala by pak ton následkem vlastní své tuhosti, určený rovnicí

$$N_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P_0}{m}}.$$

Kdyby se dle vzorce tohoto (při struně volně visící) dalo P_0 stanoviti, byl by vzhledem k formuli Taylorově

$$N = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{m}}$$

pro jakýkoli případ kmitočet N^* tonu skutečného určen vzorcem

$$N^* = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P + P_0}{m}}.$$

Přímo určiti P_0 lze ovšem jen v případech řídkých; vždy však lze N_0 počítati dle hodnoty $\sqrt{N^{*2} - N^2}$ z určitého případu odvozené, když se N určí výpočtem a N^* pozorováním.

Pro relativní výšku obdržíme jednoduše

$$\frac{N^*}{N} = \sqrt{1 + \frac{P_0}{P}}$$

nezávisle na délce L struny.

Vzorce tyto nalezl *Savart* empiricky v dobrém souhlasu se skutečností. Dle toho by se účinek tuhosti struny dal jednoduše formulovati. Kdyby v jistém případě, následkem této tuhosti, ton skutečný byl o komma neb o půl tonu atd. vyšší než počítaný, *byl by o tolik vyšší též v každém případě jiném*, kdyby se struna učinila delší neb kratší, a kdyby se tak pozorování dálo při tonu hlubším neb vyšším.

2. Oproti tomu nalezl *Seebeck*, že tento intervall $\frac{N^*}{N}$ *není konstantním*, nýbrž že se umenšuje s přibývající délkou L struny; souhlasí tedy skutečný ton s počítaným relativně lépe, když je struna delší, ton hlubší. Proti formuli Savartově nalézá pro struny průřezu kruhového o poloměru r tento vzorec empirický:

$$\frac{N^*}{N} = 1 + \frac{r}{L}\sqrt{\frac{E}{p}},$$

$$p = \frac{P}{q}.$$

Na místo napjetí P_0 vstupuje tedy do vzorce modulus pružnosti E materialu struny v poměru s napjetím p struny, t. j. zatížením P přepočítaným na jednotku průřezu q.

Počítáme-li z hořejšího vzorce absolutní rozdíl $N^* - N$, obdržíme

$$N^* - N = N \cdot \frac{r}{L} \sqrt{\frac{E}{p}},$$

a dosadíme-li na pravo ze vzorce Taylorova

$$N = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{p}{S}},$$

obdržíme

$$N^* - N = \frac{r}{2L^2} \sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Zde značí

$$\sqrt{\frac{E}{S}} = c$$

rychlost, s jakou se zvuk šíří v materialu struny samé. Pozoruhodno jest, že ve výrazu pro $N^* - N$ není napjetí P struny obsaženo; rozdíl kmitočtů čili korrekce kmitočtu počítaného na kmitočet skutečný jest tudíž dána jenom materialem struny a jejími rozměry a *nemění se větším napjetím*; ale ovšem tatáž korrekce má při větším napjetí *relativně* význam menší, poněvadž jest kmitočet N větší.

Vzorec Seebeckův má pro praxi ten význam, že lze účinek tuhosti při dané struně jistého průměru dle modulu pružnosti E a specifické hmoty S materialu již napřed počítati.

Abychom dovedli posouditi, jak se vzorce tyto v daných případech utváří číselně, propočítejmež je pro týž příklad, který jsme měli při monochordu vertikalním (§ 81.). Drát, kterého jsme tam užívali, byl ocelový, průměru něco více než $\frac{1}{4}$ *mm*; přesně byl poloměr

$$r = 0{\cdot}0141 \; cm.$$

Drát byl napjat vahou 5 *kg*. Napjetí, přepočítané na jednotku průřezu, činilo

$$p = 7853 \, \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Modul elastičnosti oceli jest

$$E = 2020000 \, \frac{megadyna}{cm^2}$$

a její specifická hmota

$$S = 7{\cdot}8 \, \frac{g}{cm^3}.$$

Odtud se vypočítá:

$$\sqrt{\frac{E}{p}} = 16{\cdot}04$$

$$\sqrt{\frac{E}{S}} = 508900 \, \frac{cm}{sec}$$

a dalším postupem počtu

$$\frac{N^*}{N} = 1 + \frac{0{\cdot}2261}{L},$$

$$N^* - N = \frac{3588}{L^2}.$$

Tím jsou vzorce pro daný drát určitého materialu a průřezu připraveny. Vzorec prvý platí pro to určité napjetí, jehož bylo užito; vzorec druhý platí pro napjetí jakékoli. Pro ton a^1 bylo nalezeno

$$L = 36{\cdot}543 \; cm.$$

Počítejme tedy účinek vlastní tuhosti drátu pro ton a^1 a jeho dolejší oktavy a a A. Pak obdržíme:
Relativně

$$\frac{N^*}{N} = \frac{36{\cdot}769}{36{\cdot}543}, \quad \frac{73{\cdot}312}{73{\cdot}086}, \quad \frac{146{\cdot}40}{146{\cdot}17},$$

$$\log \frac{N^*}{N} = 0{\cdot}00268, \quad 0{\cdot}00134, \quad 0{\cdot}00068,$$

$$\frac{N^*}{N} = 1{\cdot}0062, \quad 1{\cdot}0031, \quad 1{\cdot}0016.$$

Absolutně

$$N^* - N = \frac{3588}{(36{\cdot}54)^2}, \quad \frac{3588}{(73{\cdot}09)^2}, \quad \frac{3588}{(146{\cdot}17)^2},$$

$$N^* - N = 2{\cdot}69, \quad 0{\cdot}67, \quad 0{\cdot}17.$$

Příklad tento ukazuje velmi poučně, jak účinek vlastní pružnosti struny s přibývající její délkou relativně i absolutně se umenšuje, anebo, když raději v opačném smyslu pozorujeme, jak účinek ten s ubývající délkou struny se zvětšuje. Při číslech relativních mějme na zřeteli, že logarithmický intervall kommatu jest 0·00540. Můžeme tedy výsledek takto shrnouti. Účinek tuhosti struny činí

při tonech	a^1,	a,	A
při délce struny	36·5,	73,	146 *cm*
v kommatu	0·50,	0·25	0·13
v kmitech	2·69,	0·67	0·17.

Při tom byla struna dosti tenká a byla napjata závažím dosti značným. A přece i zde jest účinek toho řádu, že ho nelze zanedbávati.

Pokusem byla pro normalní a^1 nalezena délka

$$L = 36{\cdot}64 \; cm.$$

Desetiny millimetru pokusem již zaručiti nelze.

Otázka, jaký účinek má vlastní pružnost struny, jest veliké důležitosti, když se užívá monochordu jakožto *sonometru*. Jest viděti, že nelze bez dalšího vyšetření *obrácenou úměrnost délky struny a kmitočtu předpokládati*, zejména když se pokračuje k tonům vyšším, kdy délka struny jest menší a menší. Jest tudíž třeba způsobem zde vylíčeným o účinku vlastní pružnosti kovové struny dle daných poměrů počtem vždy dobře se orientovati.

§ 86. **Tony třecí.**

Jednajíce o monochordu horizontalním vylíčili jsme, jakým způsobem lze harmonické tony na struně *jednotlivě* obdržeti. Způsob ten není dokonalý, vzhledem k tomu, že isolace tonů není úplná; vždy zaznívají s tonem, který experimentator chce vzbuditi, některé harmonické tony jiné, jichž vznik se srovnává s danými podmínkami pokusu.

Jest však jiný způsob, jakým lze jednotlivé tony harmonické na dané struně obdržeti a to v isolaci dokonalé. Způsob tento má základ svůj v *tonech třecích*.

Proudí-li vzduch konstantní rychlostí v proti napjatému drátu, kolmo na jeho délku, anebo pohybuje-li se drát ve vzduchu konstantní rychlostí v určitým k délce kolmým směrem, vzniká ton jisté výšky; zoveme jej *tonem třecím*. Kmitočet N tohoto tonu závisí jednak na rychlosti v translačního pohybu, jednak na průměru D drátu. Přibližně platí vzorec*)

$$N = C \cdot \frac{v}{D}.$$

Kmitočet N jest tedy úměrný rychlosti v translačního pohybu přímo a průměru D drátu obráceně. C jest konstanta úměrnosti, kterou dlužno stanoviti pokusy. Na volbě jednotek číselná její hodnota nezávisí, ale ovšem se předpokládá, že při rychlosti v a průměru D se užívá téže jednotky délkové. Pak vychází

$$C = 0{\cdot}185.$$

Pohodlnější jest určovati rychlost v v jednotce $\frac{m}{sec}$, průměr pak D v jednotce mm; pak jest

$$C = 185.$$

*) Dr. *V. Strouhal*, Ueber eine besondere Art der Tonerregung; Habilitationsschrift, Würzburg, 1878.

Jiří mný zajímavě 2 22. IV. 58. Matem. IV.

Meze pokusné, pro které tato hodnota byla nalezena, činí v rychlosti pohybu

$$v = 4\,\frac{m}{sec} \ldots 12\,\frac{m}{sec},$$

a v průměru drátu

$$D = 3{\cdot}3\ mm \ldots 0{\cdot}18\ mm.$$

Případ drátu jest jen specialisací fysikalně nejjednodušší případu všeobecného, kdy tělesem, proti němuž vzduch proudí anebo které ve vzduchu se pohybuje, jest podélný útvar konstantního průřezu jakéhokoli.

Tony třecí pozorujeme velice zřetelně při větrech a bouřích, když vzduch proudí proti napjatým drátům telegrafickým neb telefonickým, proti branám domů, komínů, proti tyčím a stožárům, skrze otvory a skuliny a pod. Tak vzniká ono svištění, fičení, hvízdání větru, při němž tony spojitě se mění, stoupají a opět klesají, naznačujíce tak, jak rychlost proudění vzduchu nenáhle vzrůstá a zase klesá; na tonech takových jest slyšeti, jak vítr proudí mohutněji a zase slaběji, na nich lze nejlépe posouditi, jak velice se údaje o *průměrné* rychlosti větru (zjednané na př. anemometrem *Robinsonovým*) liší od rychlostí *největších*, jež při nárazech vzduchových přicházívají. (Anemometr *Strouhal-Barus*.) Tytéž tony vznikají při švihnutí bičem neb prutem, při letu projektilů vzduchem, při parní píšťale lokomotivy a v četných případech jiných, o nichž pojednáme níže zvlášť. Název „*tonů třecích*“ volen byl vzhledem k tomu, že základem tonů těch jest tření vznikající při relativním pohybu oněch těles pevných a vzduchu. Název ovšem nevystihuje zjev, o který zde jde, úplně, poněvadž také jiné tony u tyčí, strun atd. vznikají třením, ačkoli jest toto jiné povahy než při zjevu, o němž jednáme.

Jaký může býti původ těchto zjevů, poznáme uvažujíce takto.

Drát postupuje vzduchem; před drátem (ve smyslu pohybu) vzniká zhuštění, za drátem zředění vzduchu, tudíž mezi oběma místy rozdíl tlakový. Tím jest dán popud k pohybu vzduchu, kterým by rozdíl tento se vyrovnával. Tření brání však, že vyrovnání nenastává plynule, nýbrž náhle; jinými slovy, nenastává trvalé proudění vzduchu, nýbrž pulsační, vrstvy se odtrhují periodicky, až když rozdíl tlakový jisté dostoupí výše.

V přírodě pozorujeme některé zjevy analogické. Stromy se větrem klátí; vykonávají pohyby periodické. Vanoucí vzduch je uchyluje z polohy rovnovážné, tím budí se síly, jež je uvádějí do polohy rovnovážné zpět, návrat nastává však náhle, a pohyb jde pak přes polohu rovnovážnou, když při vzrůstajícím uchýlení tyto síly dosáhnou jisté velikosti. Totéž pozorujeme při struně, kterou třeme smyčcem; tento třením bere strunu s sebou, tím budí se v napjaté struně síly opačně působící, návrat struny do polohy rovnovážné nastává však, až když síly tyto jisté dosáhnou velikosti.

Pravděpodobnost názoru výše uvedeného dotvrzuje se zkušenostmi při pokusech učiněnými. Napjetí drátu nemá na výšku tonu třecího účinku žádného. Také material drátu nemá žádného významu. Vskutku lne vzduch ke každému tělesu na povrchu jeho tak těsně, že tření, kteréž dle onoho názoru jest základem tonů, není třením mezi vzduchem a tělesem pevným, nýbrž mezi vrstvami vzduchu vnějšími a vrstvou k tělesu lnoucí, tedy třením vnitřním. Při tomto jest pak ovšem i napjetí drátu i jeho material bez významu. Že pulsace souvisí s rychlostí pohybu, jest jasno, poněvadž určitá difference tlaková při větší rychlosti v době kratší se dostavuje. Že pak rozhoduje průměr čili obvod drátu, jest rovněž pochopitelno, poněvadž s průměrem vzrůstá plocha, vzrůstá tudíž i tření, k jehož překonání jest pak třeba větší tlakové difference, tato dostavuje se při téže rychlosti pohybu až za dobu delší, následkem čehož pulsace při větším průměru drátu jsou volnější.

§ 87. **Harmonické tony struny vzbuzené tony třecími.**

Pokusy o tonech třecích lze prováděti jednoduchým přístrojem v obr. 88. znázorněným. Translační pohyb drátu nahrazuje se tu pohybem rotačním. Do osy centrifugalního stroje postaví se dřevěný, vzhledem k žádoucí resonanci dutý sloup, se dvěma příčnými rameny, na něž se v jisté vzdálenosti přes malé hranoly mosazné napne s osou rotační rovnoběžně drát k pozorování určený. Z počtu otoček sloupu, indikovaných za jistou dobu počítacím zařízením stroje centrifugalního, a z odlehlosti drátu od osy lze rychlost pohybu drátu jednoduše počítati. Výška tonu určuje se monochordem jako sonometr upraveným.

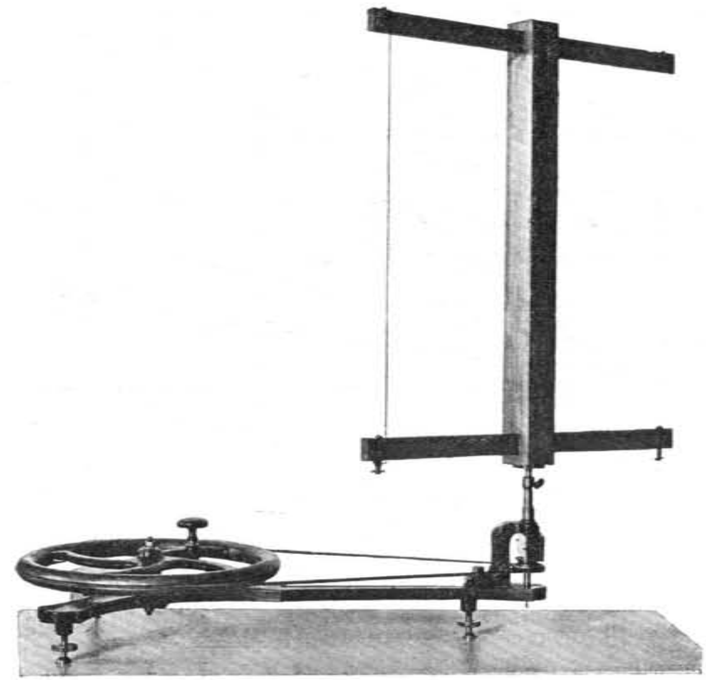
Při těchto pokusech vzniká úkaz, kterýž k nejzajímavějším a nejdůležitějším akustickým zjevům čítati lze. Otáčí-li se přístroj určitou rychlostí, je slyšeti hvízdavý ton třecí, jisté výšky N. Když se zvenáhla rychlost otáčení zvyšuje, pozoruje se, jak ton třecí též ve výšce stoupá; zároveň však jest po případě slyšeti, jak při určité výšce začíná se síliti, mohutněti, až zaznívá zvučně, jasně. Sesílení toto nastává spoluzněním. Ton třecí, výšky N, přiblížil se některému partialnímu tonu N_k napjatého drátu; následkem toho vzbudí se třecím tonem vlastní ton drátu, který zaznívá nejmohutněji, když jest v obou tonech unisonita, t. j. když

$$N = N_k.$$

Zvětšuje-li se rychlost otáčecí ještě dále, začíná se ton třecí zase rozlišovati od tonu drátu, stává se $N > N_k$, ton třecí před-

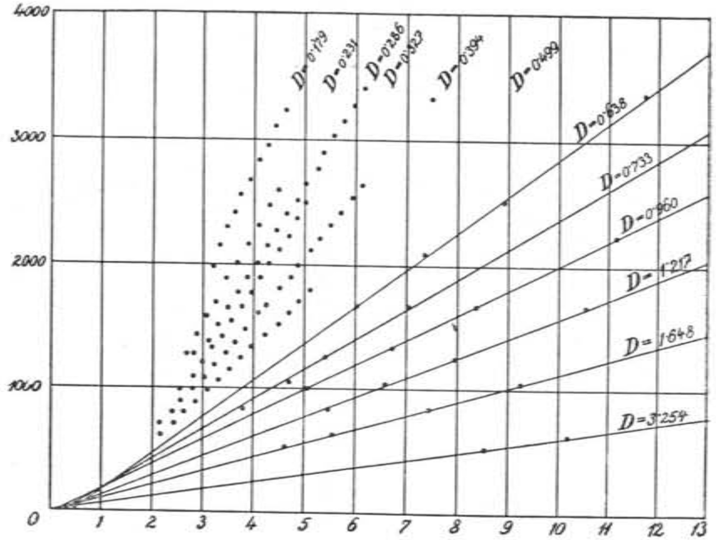
bíhá, ton drátu slábne, až utichne úplně; když se však rychlost otáčecí zvětšuje dále, začne ton, nyní již vyšší, opět mohutněti, ozývá se vlastní ton drátu, N_{k+1}, jenž v řadě tonů následuje, až opět plně a jasně zaznívá, je-li

$$N = N_{k+1}.$$



Obr. 88. Jak vznikají tony třecí a spoluzněním tony strun.

Způsobem tímto lze vzbuditi tony částkové napjatého drátu v počtu značném, a to již při rychlostech malých, kdy ton třecí sotva jest slyšeti; tím více překvapuje, jak se znenáhla rozezvučí drát tonem jasným, a jak ton mohutní a zase slábne, a jak při vyšší rychlosti pohybu přechází v ton následující. Mnohdy leží dva konsekutivní tony partialní N_k a N_{k+1} sobě velmi blízko; i stává se, že při stoupající rychlosti pohybu nižší ještě nedozněl a již vyšší se ozývá, tak že oba tony znějí současně, a teprve při správné rychlosti pohybu se od sebe odloučí. Vidíme tedy, že *tony třecími lze vzbuditi partialní tony drátů a strun*, a to přesně *jednotlivě*, isolovaně, při čemž mohou tony zníti *stejnoměrně po dobu libovolnou*, čehož žádným způsobem jiným docíliti nelze.



Obr. 89. Diagramm tonů třecích a současných strunových.

Diagramm*) v obr. 89. podává jasný názor o tonech částkových a o poměru těchto tonů ke třecím. V grafickém znázornění jest jako úsečka nanášena rychlost v pohybu v jednotce *m*/*sec*, jako pořadnice výška tonu N. Čáry vytažené zjednány pozorováním tonů třecích, při drátech, jichž průměr D v millimetrech jest připsán; *jednotlivé* body znázorňují tony partialní příslušného drátu; bylo jich pozorováno v témž drátu až 20. Velmi dobře vyniká závislost jich výšek na rychlosti pohybu, a přibližná úměrnost obou; dobře jest též viděti, jak při drátech tenkých *malým* zvýšením rychlosti některý částkový ton drátu již přechází v jiný, jenž v řadě následuje.

Zjevy zde popsané, vzbuzení tonů partialních u drátů tony třecími, lze pozorovati často na napjatých drátech telegrafických. Jest známo, že mnohdy zvučí velmi sonorně, ale rovněž jest známo, že úkaz tento nenastává při větrech silných, prudkých, nýbrž při mírném proudění vzduchu, kteréž mnohdy sotva jako vítr pociťujeme. Vskutku při prudkém větru mění se rychlost proudění příliš často a značně, jak na tonech hvízdavých slyšeti

*) Reprodukovaný z pojednání výše citovaného.

lze; následkem toho není vyplněna podmínka pro vzbuzení vlastních tonů drátových, aby totiž rychlost proudění byla aspoň *přibližně konstantní*. Jiný příklad dává *harfa Aeolova*, jejíž struny zaznívají též nejlépe vánkem slabým, průvanem, zanikajíce a zas vznikajíce, po případě přecházejíce v tony jiné, dle toho, jak se rychlost proudění vzduchu mění.

Vzbuzení tonů částkových v napjatých drátech a strunách jest nejzajímavějším příkladem o spoluznění v akustice. Periodickým odtrhováním se vrstev vzduchových v pravém tempu rozechvívá se drát a zní tonem svým vlastním. V jiném způsobu shledáme se s týmž zjevem spoluznění u píšťal labialních, o nichž jednáme v oddílu nejbližším.

Tyče.

§ 88. Úvodní poznámky všeobecné.

Budiž dána tyč, určitého materialu a určitých rozměrů. Material jest stanoven specifickou hmotou S a modulem pružnosti E. Z obou těchto veličin počítáme rychlost

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}},$$

jakou se vlnění v tyči šíří. Rozměry tyče buďtež délka L a průřez, po celé délce konstantní, q.

Aby představy se staly určitými, mysleme si, že tyč jest po délce L položena horizontalně a že kmitá ve směru vertikalním; ohýbá se tudíž kolem osy, jejíž směr v průřezu q jest horizontalní. Je-li průřez tyče *kruhový*, jest touto osou vodorovný průměr kruhu; je-li průřez *pravoúhlý*, orientovaný dle obou stran vertikalně a horizontalně, jest touto osou vodorovná střední přímka tohoto průřezu. Ve výkladu dalším omezíme se jen na tyto dva zvláštní tvary průřezové.

Při tomto výkladu, pokud se děje všeobecně, pro libovolný tvar průřezu q, vstupuje do vzorců poloměr setrvačnosti (gyrační radius) $\varkappa$ průřezu q, a to vzhledem k ose ohybové. Budiž M hmota na tomto průřezu v tloušťce nesmírně malé rovnoměrně rozdělená, K moment setrvačnosti vzhledem k ose ohybové. Má tedy býti

$$K = M \,.\, \varkappa^2.$$

Stanovme hodnoty $\varkappa$ pro ony dva zvláštní tvary průřezu q, ke kterým budeme v dalším výkladu přihlížeti.

Budiž průřez q kruhem o poloměru r, čili o tloušťce (průměru), kterou označíme*) písmenou h. Pak jest

$$\varkappa^2 = \frac{K}{M} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4} = \frac{h^2}{16},$$

tudíž

$$\varkappa = \frac{h}{4}.$$

Budiž průřez q pravoúhelníkem, jehož horizontalní stranu a označujeme jako *šířku* tyče, vertikalní b jako *tloušťku* tyče. Pak jest

$$\varkappa^2 = \frac{K}{M} = \frac{\frac{1}{12}ab^3}{ab} = \frac{b^2}{12},$$

tudíž

$$\varkappa = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Tloušťka b v tomto případě a průměr h v onom jsou analogické. Aby se obdržel gyrační radius $\varkappa$, dlužno průměr děliti číslem 4, tloušťku však číslem $2\sqrt{3} = 3\cdot4641$, tedy poněkud menším**).

Theorie o tyčích příčně kmitajících dává pro kmitočet N povšechný výraz

$$N = m^2 \cdot \frac{\varkappa}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{E}{S}}$$

čili

$$N = m^2 \cdot \frac{\varkappa c}{2\pi L^2}.$$

Vzorec tento, který v hlavní věci je shodný pro všechny případy zvláštní, o nichž dále jednáme, obsahuje následující důležité zákony pro tyče příčně chvějící:

*) Obvyklému označení průměru (diametru) písmenou d se vyhýbáme, poněvadž kolliduje s označením differentialu všeobecně ustáleným. Zde pak jest výhodnější podržeti ve vzorcích pro tyče kruhové *průměr* a nikoli poloměr, poněvadž průměr tyče kruhové jest analogický s *tloušťkou* tyče pravoúhlé. Označení D v § 86. převzato z pojednání původního, tam citovaného.

**) Viz Mechanika, pag. 376, § 250, 1901. Pro průřez kruhový obdrží se hodnota $\varkappa$, když se v obr. 180. položí $l = 0$. Pro průřez pravoúhlý podobně, když se v obr. 178. položí $a = 0$, a když se píše $b/2$ místo b.

Kmitočet jest přímo úměrný rychlosti c, tudíž té veličině, kterou se charakterisuje material tyče. V této závislosti pozorujeme shodu se strunami.

Kmitočet jest přímo úměrný poloměru setrvačnosti $\varkappa$ průřezu q vzhledem k ose ohybové. Tento poloměr setrvačnosti $\varkappa$ jest jistá délka, úměrná tomu rozměru tyče, který bychom mohli povšechně jakožto *tloušťku* tyče označiti. *Šířka* tyče nemá na výšku tonu účinku žádného.

Kmitočet jest obráceně úměrný *čtverci délky* tyče. Tato závislost jest pro tyče *charakteristická*; jí rozeznávají se tyče podstatně od strun, při nichž jest kmitočet obráceně úměrný délce struny. Zde rozhoduje tedy prvá, onde však druhá mocnost délky. Tím se vysvětluje, proč tony, jež tyče vydávají, při stoupající délce rychle klesají, tak že se již při mírné délce tyče stávají velmi hlubokými.

Rozdílnosti v kmitočtech, způsobené *bližšími podmínkami*, týkají se jenom čísla m. Toto jest různé především dle toho, *zda-li a jak jest tyč upevněna*; při určitém pak způsobu upevnění nabývá m řady hodnot zvláštních, dle toho, jak se tyč ve chvění uvede. Vznikají tedy též u tyčí příčně se chvějících, podobně jako u strun, tony *částkové*, *partialní*, vedle tonu *základního* ještě tony *svrchní*; avšak v tom jest proti strunám veliký rozdíl, že tyto svrchní tony *nejsou* se základním *konsonantní*.

Při výkladu o výšce těchto částkových tonů, jak při daném upevnění tyče vznikají, jest nejvýhodnějším určovati *základní* ton *absolutně*, tony *svrchní* pak *relativně*. Je-li tedy k číslo řadové tonů částkových, určíme pro základní ton jeho výšku N_1 a pro tony svrchní intervall

$$\text{číselný } \frac{N_k}{N_1}, \quad \text{logarithmický} \quad \log N_k - \log N_1.$$

Co se úpravy vzorce pro kmitočet N_1 tonu základního tyče, budiž ještě toto podotčeno. Za m se dosadí určité číslo. Toto se dá spojiti s jinými číselnými konstantami, také s těmi, jež se dostaví, když místo $\varkappa$ v obou oněch případech (průřezu kruhového a pravoúhlého) nastoupí průměr tyče nebo její tloušťka. Proto mají vzorce pro kmitočet N_1 formu následující:

$$N_1 = \text{const.}\ \frac{h}{L^2}\sqrt{\frac{E}{S}} \quad \text{pro průřez } q \text{ kruhový},$$

$$N_1 = \text{Const.}\ \frac{b}{L^2}\sqrt{\frac{E}{S}} \quad \text{pro průřez } q \text{ pravoúhlý}.$$

Ve spisech i nejnovějšího data píše se ve vzorcích zde uvedených

$$\sqrt{\frac{Eg}{S}},$$

čímž se činí koncesse starší jednotce síly = váha kg, v níž údaje o modulu E bývají vyjádřeny. O nevhodnosti vzorců takových bylo již v § 70. promluveno.

Při číselném počítání dlužno rozměry tyče vyjádřiti touže jednotkou, v jaké jest stanovena rychlost c; kterou jednotku volíme, jest jednostejno; číselná konstanta závisí jen na jednotce času, majíc rozměr $\frac{1}{T}$ všeobecně, $\frac{1}{sec}$ zvlášť.

Budiž na tomto již místě učiněna poznámka o intervallu, kterým se liší tony, jež při témže způsobu upevnění a při *jinak stejných poměrech* dává tyč kruhová (N') a tyč pravoúhlá (N''), je-li *průměr* h týž jako *tloušťka* b, tedy jsou-li, jak říkáme, obě tyče stejně silné. Poněvadž kmitočty jsou úměrny poloměrům setrvačnosti $\varkappa'$ a $\varkappa''$, máme vztahy

$$\varkappa' = \frac{h}{4}, \qquad \varkappa'' = \frac{b}{2\sqrt{3}},$$

$$h = b,$$

$$\frac{N''}{N'} = \frac{\varkappa''}{\varkappa'} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

což dává číselně a logarithmicky

$$\frac{N''}{N'} = 1\cdot1547, \qquad \log\frac{N''}{N'} = 0\cdot06246.$$

Intervall tento jest téměř *sekunda* ($^9/_8$) *o malý půlton* ($\frac{25}{24}$) *zvýšená*, dle vztahu (§ 58.)

$$0\cdot06246 = 0\cdot05115 + 0\cdot01773 - 0\cdot00642,$$

tedy, přesně vzato, o 1·2 kommatu méně. Dává-li tedy kruhová tyč na př. c, dává — *caeteris paribus* — tyč pravoúhlá $\underline{dis}$.

Problem tyčí příčně kmitajících má svůj theoretický základ v nauce o elasticitě ohybové. Mezi těmi, kteří se problemem tímto zabývali, vynikají *Dan. Bernoulli*, *Euler*, *Poisson*, *Cauchy* a *Ludvík Seebeck*. V literatuře naší obsahuje theorii o tyčích příčně kmitajících *Koláček-Seydler*, Theoret. Fysika III., pag. 342 a násl. 1895.

O příčném chvění tyčí jistou hmotou zatížených podal obšírnou monografii *Ferd. Lippich**); v této jest popsán a vyložen též onen přístroj, podobný universalnímu kaleidofonu, kterýž Melde (jak pag. 62. bylo udáno) současně sestrojil. Pojednání obsahuje též diskussi o křivkách Lissajousových.

*) *Ferd. Lippich*, Ueber die transversalen Schwingungen belasteter Stäbe. Verh. der kais. Akad. Wien, 1863.

Dosavadní výklady předběžné měly orientovati o tom, co jest všem případům zvláštním společné a co se tudíž vždy opakuje. Přecházejíce již k těmto případům, budeme jednati o příčném chvění tyče, především, je-li buď úplně volnou nebo je-li na obou koncích upevněnou; oba tyto případy mají mnoho společného. Potom pojednáme o příčném chvění tyče, která jest na jednom konci volná, na druhém upevněná; tento případ bývá fysikalně nejobyčejnější. Konečně vyložíme příčné chvění tyče, která jest na obou koncích podepřená; případ tento vyznačuje se největší pravidelností a upomíná na chvění strun. V těchto třech případech hlavních jsou pak obsaženy některé jiné vedlejší, jež se dají na ony hlavní snadno převésti. Pokaždé pojednáme jednak o kmitočtech tonů, jednak o rozdělení uzlů, jak se při těchto jednotlivých tonech utváří.

§ 89. **Tyč úplně volná.**

Kmitočet tonů částkových jest stanoven vzorcem

$$N = m^2 \cdot \frac{\varkappa c}{2\pi L^2}.$$

Je-li tyč úplně volnou, dává theorie pro čísla m relaci

$$\frac{1}{2}(e^m + e^{-m}) \cdot \cos m = 1,$$

kterouž píšeme jednodušeji, zavedouce hyperbolický cosinus,

$$K(m) \cdot \cos m = 1.$$

Rovnicí touto určena jest řada číselných hodnot m, jak následuje:

$$m_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\cdot0176518 = 4\cdot7300408$$

$$m_2 = 5 \cdot \frac{\pi}{2} - 0\cdot0007770 = 7\cdot8532046$$

$$m_3 = 7 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\cdot0000336 = 10\cdot9956078$$

$$m_4 = 9 \cdot \frac{\pi}{2} - 0\cdot0000014 = 14\cdot1371655$$

$$m_5 = 11 \cdot \frac{\pi}{2} \qquad\qquad = 17\cdot2787595$$

$$\vdots$$

$$m_k = (2k+1)\,\frac{\pi}{2}.$$

Čísla m oscillují tudíž kolem lichých násobků $\frac{\pi}{2}$, jsouce střídavě větší a menší, ale tak, že se jim zároveň vždy více blíží a konečně s nimi téměř splývají. Odchylka od těchto násobků vynikne lépe, procentualně, když ona čísla m píšeme ve formě následující:

$$m_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{2}\,(1 + 0{\cdot}003746)$$

$$m_2 = 5 \cdot \frac{\pi}{2}\,(1 - 0{\cdot}000099)$$

$$m_3 = 7 \cdot \frac{\pi}{2}\,(1 + 0{\cdot}000003)$$

$$m_4 = 9 \cdot \frac{\pi}{2}\,(1 - 0{\cdot}000000)$$

$$m_5 = 11 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\vdots$$

$$m_k = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}.$$

Ve vzorci pro kmitočet N přichází čtverec těchto čísel m^2. Povýšíce tedy na druhou mocnost obdržíme (na 5 decim. míst)

$$m_1^2 = \left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 + 0{\cdot}00751)$$

$$m_2^2 = \left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - 0{\cdot}00020)$$

$$m_3^2 = \left(7 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 + 0{\cdot}00001)$$

$$m_4^2 = \left(9 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$m_5^2 = \left(11 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$m_k^2 = \left[(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right]^2.$$

Z těchto číselných výsledků usuzujeme, jak následuje. Tyč, úplně volná, ve příčné chvění uvedená, dává *řadu tonů částkových*. *Vyšší* z nich mají kmitočet, jenž jest *velmi přibližně* určen vzorcem

$$N_k = (2k + 1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\varkappa c}{2\pi L^2}$$

čili

$$N_k = (2k + 1)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa c}{4 L^2}.$$

Nižší ukazují však od tohoto vzorce *odchylku*; tato činí u tonu třetího jen $+ 0{\cdot}001\%$, u druhého $- 0{\cdot}02\%$, u prvého konečně $+ 0{\cdot}75\%$. Odchylky nejsou tedy značné. Můžeme tudíž relativní výšky tonů částkových vyjádřiti *provisorně* poměrem čtverců lichých čísel, od 3 počínajíc, t. j.

$$9 : 25 : 49 : 81 : 121 : \ldots : (2k + 1)^2$$

a pak *dodatečně* tato čísla *korrigovati*. Počítajíce intervally logarithmické, obdržíme:

$$\log 1{\cdot}00751 = 0{\cdot}00325$$
$$\log 0{\cdot}99980 = - 0{\cdot}00009$$
$$\log 1{\cdot}00001 = 0{\cdot}00000.$$

Přihlížíme-li k logarithmické výšce kommatu

$$\log \frac{81}{80} = 0{\cdot}0054\bar{0},$$

poznáváme, že i ony největší korrekce činí hudebně u základního tonu jen $+ 0{\cdot}6$ kommatu, a u prvého svrchního již jen $- 0{\cdot}02$ kommatu.

Přesné relativní výšky (na 4 místa decimalní) jsou:

$$9{\cdot}0676 : 24{\cdot}9950 : 49{\cdot}0005 : 81 : 121 \ldots (2k + 1)^2.$$

Obyčejně se přepočítávají na ton prvý jako základní, čímž ovšem jednoduchost těchto vztahů se zakryje; vychází pak číselně

$$1 : 2{\cdot}7565 : 5{\cdot}4039 : 8{\cdot}9330 : 13{\cdot}3443 \ldots$$

logarithmicky

$$0,\ 0{\cdot}44036,\ 0{\cdot}73271,\ 0{\cdot}95100,\ 1{\cdot}12530 \ldots.$$

Jest výhodno, pořad těchto tonů vyjádřiti též způsobem hudebním. Provedeme výpočet, abychom na tomto zajímavém případě ukázali, jak se dle intervallů logarithmických rychle a pohodlně počítá. Při tom budeme počítati dle ladění temperovaného (§ 53., tabulka), aby bylo lze onen postup tonů zahráti na varhanách neb na pianu. Kde jest ton o jednu neb dvě kommata nižší neb vyšší, tam naznačíme odchylku dle způsobu Helmholtzova dosud nejvíce užívaného (§ 49.). Logarithmicky jest oktava $= 0{\cdot}30103$, komma $= 0{\cdot}00540$. Méně než půl kommatu netřeba označovati. Ostatně lze ze zbývajícího logarithmu, positivního neb negativního, i desetiny kommatu rychle stanoviti. Ton základní nazveme C. Průběh a výsledek počtu lze z následujícího sestavení rychle přehlédnouti.

$k = 1$, $N_1 \ldots C$

$k = 2$, $N_2 \ldots$	$0{\cdot}44036$	$k = 4$, $N_4 \ldots$	$0{\cdot}95100$
c	$0{\cdot}30103$	c^2	$0{\cdot}90309$
	$0{\cdot}13933$		$0{\cdot}04791$
$fis \ldots$	$0{\cdot}15051$	$d^2 \ldots$	$0{\cdot}05017$
$\underline{\underline{fis}}$	$-0{\cdot}01118$		$-0{\cdot}00226$
$k = 3$, $N_3 \ldots$	$0{\cdot}73271$	$k = 5$, $N_5 \ldots$	$1{\cdot}12530$
$c^1 \ldots$	$0{\cdot}60206$	$c^2 \ldots$	$0{\cdot}90309$
	$0{\cdot}13065$		$0{\cdot}22221$
$f^1 \ldots$	$0{\cdot}12543$	$a^2 \ldots$	$0{\cdot}22577$
$\overline{f}^1$	$0{\cdot}00522$	$\underline{a}^2 \ldots$	$-0{\cdot}00356$

V kommatech by se ukázaly ovšem výsledky jiné, kdyby se počet prováděl v ladění jiném, na př. Pythagorejském nebo přirozeném (dle Aristoxena nebo Delezenne-a).

Hudebně v ladění temperovaném, jest tedy pořad tonů následující:

$$C,\ \underline{\underline{fis}},\ \overline{f}^1,\ d^2,\ \underline{a}^2.$$

Co se ještě tyče *absolutní výšky tonu základního*, vychází ze vzorce

$$N_1 = 9{\cdot}0676 \,.\, \frac{\pi}{8} \,.\, \frac{\varkappa c}{L^2}$$

pro tyč kruhovou, $\varkappa = \frac{h}{4}$,

$$N_1 = 9{\cdot}0676 \,.\, \frac{\pi}{32} \,.\, \frac{hc}{L^2} = 0{\cdot}8902 \,\frac{hc}{L^2}$$

a pro tyč pravoúhlou, $\varkappa = \frac{b}{2\sqrt{3}}$;

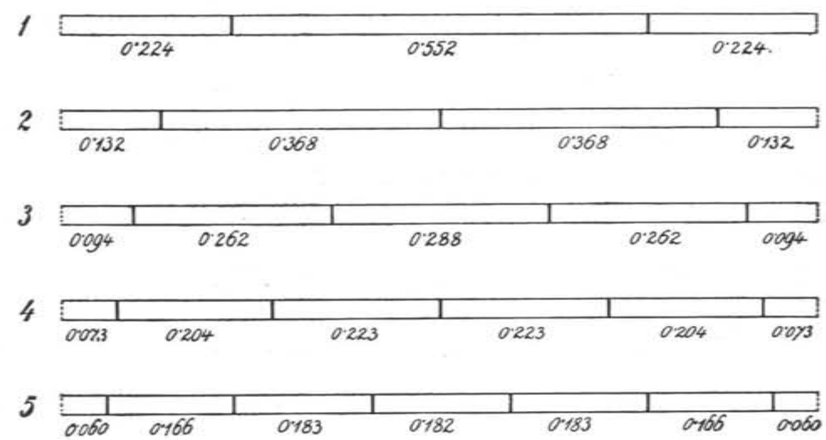
$$N_1 = 9{\cdot}0676 \,.\, \frac{\pi}{16\sqrt{3}} \,.\, \frac{bc}{L^2} = 1{\cdot}0279 \,.\, \frac{bc}{L^2}.$$

§ 90. **Rozdělení uzlů.**

Rozdělení uzlů na tyči příčně se chvějící, úplně volné, při různých tonech částkových, objasňuje názorně obrazec 90.; jest nakreslen dle výsledků, jak je odvodil theoreticky *L. Seebeck*. V obrazci jest též udána theoretická délka meziuzlí, při čemž je délka celé tyče (v obrazci 100 *mm*) vzata za jedničku. Rozdělení uzlů jest ovšem od obou krajů souměrné. Meziuzlí jest však v prostřední části tyče poměrně větší, zejména při částkových tonech nižších; při vyšších stávají se rozdílnosti tím menšími, čím více se řadové číslo k tonu částkového zvětšuje; délka meziuzlí l blíží se při tom hodnotě

$$l = \frac{2L}{2k+1},$$

a rozdělení uzlů v prostřední části tyče stává se pravidelnějším.



Obr. 90. Rozdělení uzlů u tyče úplně volné a příčně se chvějící.

Odlehlosti uzlů od krajů při vyšších číslech k udává *L. Seebeck* (pro $L = 1$) takto:

$$\frac{1{\cdot}322}{4k+2},\quad \frac{4{\cdot}982}{4k+2},\quad \frac{9{\cdot}001}{4k+2},\quad \frac{13{\cdot}000}{4k+2}\ \ldots,$$

tedy v prostřední části tyče vždy dále o $\frac{4}{4k+2}$, což jest ono hořejší l.

Z obrazce jest též viděti, že případ s jedním uzlem uprostřed není zastoupen. Vskutku není případ takový možný, poněvadž by pak při kmitání tyče těžiště spolu kmitalo. Při experimentování opírá se tyč tam, kde jsou čáry uzlové.

§ 91. Tyč na obou koncích upevněná.

Kmitočet tyče jest určen vzorcem

$$N = m^2 \cdot \frac{\varkappa c}{2\pi L^2}.$$

Ke stanovení čísla m udává theorie rovnici

$$\frac{1}{2}(e^m + e^{-m}) \cdot \cos m = 1,$$

čili

$$K(m) \cdot \cos m = 1,$$

což jest tatáž rovnice jako v případě předešlém. Tyč na obou koncích upevněná dává *tytéž tony částkové* jako tyč úplně volná.

Opakujíce tudíž výsledky v předešlém § sjednané, řekněme takto:

Tyč na obou koncích upevněná dává základní ton výšky, všeobecně

$$N_1 = 9{\cdot}0676 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2},$$

ve zvláštním pak případě

$$\text{tyč kruhová} \quad N_1 = 0{\cdot}8902 \cdot \frac{hc}{L^2},$$

$$\text{tyč pravoúhlá} \quad N_1 = 1{\cdot}0279 \cdot \frac{bc}{L^2}.$$

Tony svrchní mají vzhledem k základnímu relativní výšky vyjádřené čísly

$$9{\cdot}0676 : 24{\cdot}9950 : 49{\cdot}0005 : 81 : 121 : \ldots : (2k+1)^2.$$

Jich výška stoupá tedy tak, jako čtverce lichých čísel, od 3 počínajíc; jen první a druhý ton uchyluje se, ač sotva znatelně od tohoto zákona, tak že prvý ton jest o 0·6 kommatu vyšší, druhý jen o 0·02 kommatu nižší. Vzhledem k tonu základnímu jsou relativní výšky tonů částkových dány číselně

$$1,\ 2{\cdot}7565,\ 5{\cdot}4039,\ 8{\cdot}9330,\ 13{\cdot}3443,\ \ldots,$$

logarithmicky

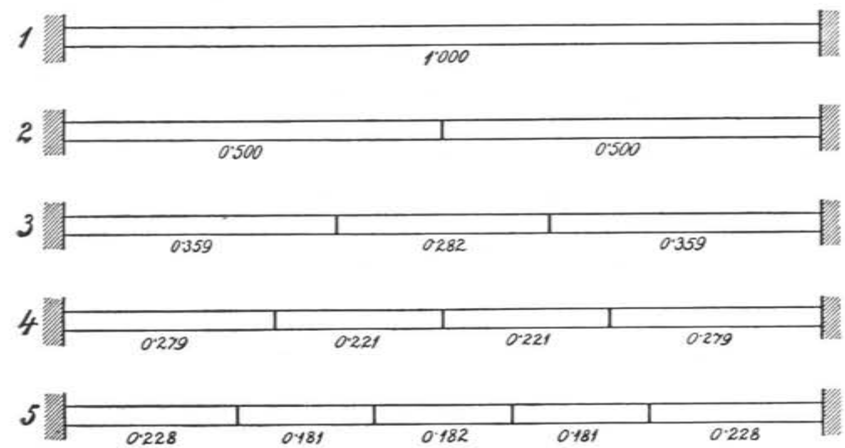
$$0,\ 0{\cdot}44036,\ 0{\cdot}73271,\ 0{\cdot}95100,\ 1{\cdot}12530,\ \ldots.$$

§ 92. Rozdělení uzlů.

Rozdělení uzlů na tyči příčně se chvějící, která jest na obou koncích upevněna, objasňuje názorně obrazec 91., provedený dle theoretických výsledků, jak je obdržel *L. Seebeck*. Délka meziuzlí jest číselně udána, a to v délce celkové jako jedničce. Od obou krajů čítajíc jsou uzly rozděleny souměrně. Účinkem však upevnění konců stává se, že uzly jsou od krajů odděleny, tak že meziuzlí jest v prostřední části tyče nejmenší, — tedy opačně než když jest tyč úplně volnou. Při vysokých tonech částkových dostavuje se v prostřední části tyče pravidelnější rozdělení uzlů, při čemž meziuzlí se blíží vždy víc a více hodnotě

$$l = \frac{2L}{2k+1}$$

jako v případu tyče úplně volné.



Obr. 91. Rozdělení uzlů u tyče na obou koncích upevněné a příčně se chvějící.

Pro odlehlost uzlů od obou krajů při vyšším řádovém čísle tonů částkových udává *L. Seebeck* hodnoty

$$\frac{5{\cdot}018}{4k+2},\ \frac{8{\cdot}999}{4k+2},\ \frac{13{\cdot}000}{4k+2},\ \ldots$$

v prostřední části vždy dále o $\frac{4}{4k+2}$, což jest ono hořejší l.

§ 93. Tyč na jednom konci upevněná.

Mějmež tyč, kterouž na jednom konci upevníme, tedy, na př. zapneme do pevného svěráku, stativu a pod. Kmitočet jest dán vzorcem

$$N = m^2 \cdot \frac{\varkappa c}{2\pi L^2}.$$

Čísla m jsou v případě tomto určena relací

$$\frac{1}{2}(e^{m} + e^{-m}) \cdot \cos m = -1$$

čili zavedeme-li opět hyperbolický cosinus,

$$K(m) \cdot \cos m = -1.$$

Relace tato dává pro m řadu číselných hodnot následujících:

$$m_1 = \frac{\pi}{2} + 0{\cdot}3043077 = 1{\cdot}8751040$$

$$m_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - 0{\cdot}0176518 = 4{\cdot}6947372$$

$$m_3 = 5 \cdot \frac{\pi}{2} + 0{\cdot}0007770 = 7{\cdot}8547586$$

$$m_4 = 7 \cdot \frac{\pi}{2} - 0{\cdot}0000336 = 10{\cdot}9955407$$

$$m_5 = 9 \cdot \frac{\pi}{2} = 14{\cdot}1371669$$

$$\vdots$$

$$m_k = (2k - 1)\frac{\pi}{2}.$$

Jest viděti, že i zde čísla m oscillují kolem lichých násobků $\frac{\pi}{2}$, jsouce střídavě větší a menší; u hodnoty m_1 jest odchylka velmi značná, také u hodnoty m_2 jest ještě dosti značná, jsouc opačného smyslu; v dalším však postupu umenšují se odchylky velmi rychle až konečně mizí. Aby odchylky tyto vynikly procentualně, pišme hodnoty m v tomto tvaru:

$$m_1 = \frac{\pi}{2}(1 + 0{\cdot}193728)$$

$$m_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{2}(1 - 0{\cdot}003746)$$

$$m_3 = 5 \cdot \frac{\pi}{2}(1 + 0{\cdot}000099)$$

$$m_4 = 7 \cdot \frac{\pi}{2}(1 - 0{\cdot}000003)$$

$$m_5 = 9 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\vdots$$

$$m_k = (2k - 1)\frac{\pi}{2}.$$

Poněvadž pak ve vzorci pro N vystupují čtverce m^2 těchto čísel, povyšme rovnice tyto na druhou mocnost. Tak obdržíme:

$$m_1^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (1 + 0{\cdot}42499)$$

$$m_2^2 = \left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - 0{\cdot}00748)$$

$$m_3^2 = \left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 + 0{\cdot}00020)$$

$$m_4^2 = \left(7 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - 0{\cdot}00001)$$

$$m_5^2 = \left(9 \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$m_k^2 = \left[(2k - 1)\frac{\pi}{2}\right]^2.$$

Z těchto číselných výsledků soudíme následovně. Tyč dává *řadu tonů částkových*. *Vyšší* z nich mají kmitočet, který jest *velmi přibližně* stanoven vzorcem

$$N_k \doteq (2k - 1)^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\varkappa c}{2\pi L^2},$$

čili

$$N_k = (2k - 1)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa c}{4L^2},$$

tím více přibližně, čím jest řadové číslo k větší. Ale pro *tony začáteční* vzorce toho užiti *nelze*, poněvadž zde jsou odchylky procentualní *velmi značné*.

Když tedy *provisorně* relativní výšky tonů částkových vyjádříme čtverci lichých čísel, od 1 počínajíc, tedy

$$1 : 9 : 25 : 49 : 81 : \ldots : (2k - 1)^2,$$

musíme v této řadě *dodatečně* prvý ton zvýšiti o $42{\cdot}5\%$, tedy velmi značně, druhý snížiti o $0{\cdot}75\%$, třetí ještě zvýšiti o $0{\cdot}02\%$

— u ostatních korrekce již mizí. Opravené relativní kmitočty tonů částkových (na 4 místa decimalní) jsou tudíž

$$1{\cdot}4250 : 8{\cdot}9327 : 25{\cdot}0049 : 48{\cdot}9994 : 81 : \ldots : (2k-1)^2.$$

Logarithmicky obdržíme:

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}42499 &= 0{\cdot}15381 \\ \log 0{\cdot}99252 &= -\,0{\cdot}00326 \\ \log 1{\cdot}00020 &= 0{\cdot}0000\bar{9}. \end{aligned}$$

První korrekce, velmi značná, činí kvartu ($\frac{4}{3}$) zvýšenou o velký půlton ($\frac{16}{15}$) dle vztahu (§ 58.)

$$0{\cdot}15381 = 0{\cdot}12494 + 0{\cdot}02803 + 0{\cdot}00084.$$

Druhá korrekce činí již jen 0·6 kommatu, ve smyslu opačném; třetí a ostatní mizí.

Obyčejně se též zde přepočítávají výšky tonů částkových na ton prvý jako základní; tím se ovšem jednoduchý zákon o relativních výškách vysokých tonů částkových zakryje úplně. Vychází číselně

$$1,\ 6{\cdot}2686,\ 17{\cdot}5475,\ 34{\cdot}3861,\ 56{\cdot}8426, \ldots$$

logarithmicky

$$0,\ 0{\cdot}79717,\ 1{\cdot}24422,\ 1{\cdot}53638,\ 1{\cdot}75467, \ldots.$$

Stanovme na základě výšek logarithmických tento postup tonů v nomenklatuře hudební, a to v ladění temperovaném, aby bylo lze postup tonů na varhanách neb pianu ukázati. Počet provedený dle týchž pravidel jako v § 89. ukazuje se takto:

$k=1$,	$N_1 \ldots$	C			
$k=2$,	$N_2 \ldots$	0·79717	$k=4$,	$N_4 \ldots$	1·53638
	c^1	0·60206		$c^4 \ldots$	1·50515
		0·19511			0·03123
	$gis^1 \ldots$	0·20069		$cis^4 \ldots$	0·02508
	$\underline{gis}^1 \ldots$	− 0·00558		$\overline{cis}^4 \ldots$	0·00615
$k=3$,	$N_3 \ldots$	1·24422	$k=5$,	$N_5 \ldots$	1·75467
	$c^3 \ldots$	1·20412		$c^4 \ldots$	1·50515
		0·04010			0·24952
	$d^3 \ldots$	0·05017		$ais^4 \ldots$	0·25086
	$\underline{\underline{d}}^3 \ldots$	− 0·01007			0·00134.

Co se kommat týče, byl by výsledek poněkud jiný, kdyby se počet provedl dle jiného ladění než temperovaného.

Hudební pořad tonů jest tedy následující:

$$C,\ \underline{gis}^1,\ \underline{\underline{d}}^3,\ \overline{\overline{cis}}^4,\ ais^4, \ldots$$

Co se konečně týče *absolutní výšky tonu základního*, vychází ze vzorce

$$N_1 = 1{\cdot}4250 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2},$$

pro tyč kruhovou, $\varkappa = \frac{h}{4}$,

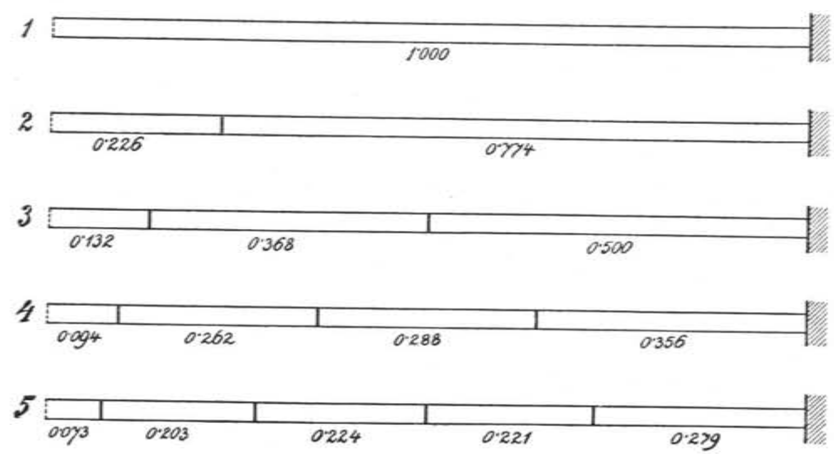
$$N_1 = 1{\cdot}4250 \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{hc}{L^2} = 0{\cdot}1399 \cdot \frac{hc}{L^2}$$

a pro tyč pravoúhlou, $\varkappa = \frac{b}{2\sqrt{3}}$,

$$N_1 = 1{\cdot}4250 \cdot \frac{\pi}{16\sqrt{3}} \cdot \frac{bc}{L^2} = 0{\cdot}1615 \cdot \frac{bc}{L^2}.$$

§ 94. **Rozdělení uzlů.**

Jak jsou uzly a vrcholy u tyče jednostranně upevněné rozděleny, poznáváme jediným pohledem z obrazce 92. rýsova-



Obr. 92. Rozdělení uzlů u tyče na jednom konci upevněné, na druhém volné a příčně se chvějící.

ného dle theoretických výsledků, jež obdržel *L. Seebeck*. Délka meziuzlí jest číselně udána, při čemž délka tyče vzata za jedničku. Velmi dobře jest viděti, jak účinkem upevnění uzly jsou od pevného konce poměrně oddálenější; proto jest rozdělení uzlů u začátečních tonů částkových dosti nepravidelné; teprve při vysokých tonech částkových dostavuje se v prostřední části tyče pravidelnější rozdělení uzlů, kdež délka meziuzlí se blíží hodnotě

$$l = \frac{2L}{2k - 1}$$

a to tím více, čím vyšší jest číslo řadové k.

Pro vysoké k udává *L. Seebeck* tyto odlehlosti uzlů, a to od konce volného

$$\frac{1{\cdot}332}{4k - 2},\quad \frac{4{\cdot}982}{4k - 2},\quad \frac{9{\cdot}001}{4k - 2},\quad \frac{13}{4k - 2},\ \ldots$$

a od konce pevného

$$\frac{5{\cdot}018}{4k - 2},\quad \frac{8{\cdot}999}{4k - 2},\quad \frac{13}{4k - 2},\quad \frac{17}{4k - 2},\ \ldots$$

směrem k prostřední části tyče vždy o $\frac{4}{4k - 2}$ více, což jest ono hořejší l.

§ 95. Tyč na obou koncích podepřená.

Je-li tyč na obou koncích upevněna, jest na místech těchto výchylkám bráněno v obou směrech kmitání, nahoru i dolů. Je-li však tyč na obou koncích podepřena, jest výchylkám bráněno pouze ve směru jednom, dolů, kdežto ve směru druhém, nahoru, jest tyč volnou. Ukazuje se, že případ tento vyniká nade všechny jiné svou jednoduchostí. Tyč dává též *řadu tonů částkových*; jich kmitočet jest však určen výrazem velmi jednoduchým,

$$N_k = k^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2},$$

ze kterého vychází, že *relativní výšky* těchto tonů jsou stanoveny *čtverci k^2 řadových čísel k*, tudíž čísly

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ k^2.$$

Abychom tuto řadu tonů vyjádřili způsobem hudebním, provedeme počet, opět v ladění temperovaném, jako v § 89. a § 93., a určíme intervally, označíce, kde třeba, odchylky v kommatech dle způsobu Helmholtzova. Základní ton nazýváme, jako dříve, C.

Počet, jehož zde neuvádíme, dává postup tonů následující:

$$C,\ c^1,\ d^2,\ c^3,\ \underline{gis}^3,\ d^4,\ \overline{\overline{g}}^4,\ c^5\ \ldots$$

Co se pak týče *absolutní výšky tonu základního*, jest dána vzorcem

$$N_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2},$$

tudíž pro tyč kruhovou, $\varkappa = \frac{h}{4}$,

$$N_1 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{hc}{L^2} = 0{\cdot}3927 \cdot \frac{hc}{L^2}$$

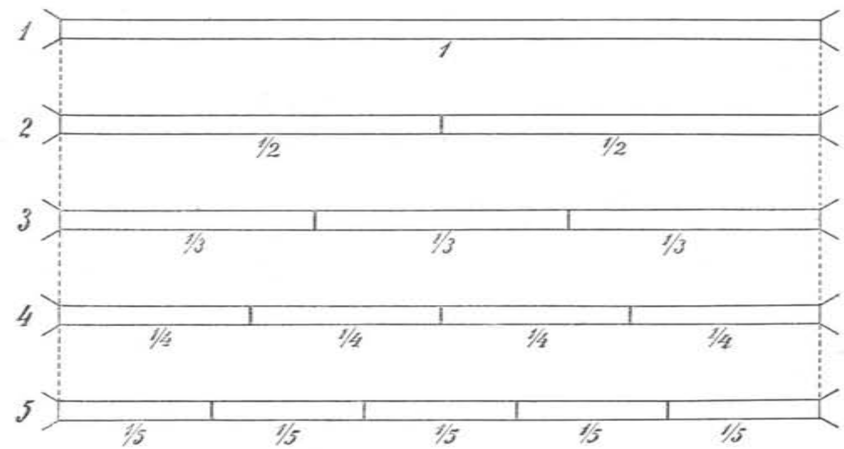
a pro tyč pravoúhlou, $\varkappa = \frac{b}{2\sqrt{3}}$

$$N_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{bc}{L^2} = 0{\cdot}4535 \cdot \frac{bc}{L^2}.$$

§ 96. Rozdělení uzlů a vrcholů u tyče na obou koncích podepřené.

Je-li tyč na obou koncích podepřena, utváří se rozdělení uzlů velmi pravidelně; *meziuzlí l* jest *konstantní* a činí při k-tém tonu částkovém

$$l = \frac{L}{k}.$$



Obr. 93. Rozdělení uzlů u tyče na obou koncích podepřené a příčně se chvějící.

Přehledně znázorňuje rozdělení uzlů obrazec 93.; souhlasí úplně s obrazcem 81., který znázorňuje rozdělení uzlů při struně. Oproti tomuto souhlasu dlužno ovšem tím důrazněji poukázati na rozdíl mezi tyčemi a strunami, který se jeví v kmitočtu tonů částkových; u strun roste jako číslo řadové k, u tyčí však jako čtverec k^2 tohoto čísla. U strun jsou částkové tony harmonické a sobě blízké, u tyčí jsou neharmonické a od sebe vzdálené, jak ukazují čísla

$$1\ 2\ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \ldots k,$$
$$1\ 4\ 9\ 16\ 25\ 36\ 49 \ldots k^2.$$

§ 97. Tyč na jednom konci volná, na druhém podepřená.

Případ, kdy jest daná tyč na jednom konci volná a na druhém podepřená, převedeme na případ již projednávaný, kdy jest tyč úplně volná, a to úvahou následující. Tyč úplně volná dává řadu tonů částkových. Rozdělení uzlů znázorňuje obr. 90. Když tyč takovou uprostřed podepřeme, nemůže zde vzniknouti vrchol vlny, nýbrž jen uzel. Proto podepřením vyloučíme všechny ty tony, při nichž je uprostřed vrchol, a připustíme jen ty, při nichž jest uprostřed uzel. Pohled na obr. 90. poučuje nás, že vyloučíme *liché* $k = 1, 3, 5, \ldots$ a podržíme *sudé* $k = 2, 4, 6, \ldots$ tony částkové. Dává tedy taková tyč tony o relativních výškách

$$24\cdot999,\ 81,\ 169, \ldots$$

Na výšce tonů nemění se ničeho, když tyč uprostřed přeřízneme. Pak máme tyč danou, jež jest na jednom konci volná na druhém podepřená. Používajíce však pro kmitočet příslušných vzorců, uvedených pro tyč úplně volnou, musíme míti na paměti, že co zde je $\frac{L}{2}$, v daném případě jest L, tak že za L ve vzorci musíme psáti $2L$. Obdržíme tedy vzorec

$$N = 9\cdot0676 \,.\, 2\cdot7565 \,.\, \frac{\pi}{8} \,.\, \frac{\varkappa c}{(2L)^2}.$$

Ze vzorce toho pak soudíme: Při *stejné délce* tyčí jest základní ton, který dává tyč na jednom konci volná a na druhém podepřená, druhou spodní oktavou tonu, který jakožto druhý částkový dává tyč na obou koncích volná. Když by se — v myšlenkách — ona přeříznutá tyč přivedla na dvojnásobnou délku, snížily by se všechny její tony o dvě oktavy.

Provedouce číselný počet obdržíme z posledního vzorce

$$N_1 = 6\cdot2487 \,.\, \frac{\pi}{8} \,.\, \frac{\varkappa c}{L^2}$$

jakožto kmitočet tonu základního. Tony ostatní počítají se dle relativních kmitočtů dříve uvedených.

§ 98. Tyč na jednom konci upevněná a na druhém podepřená.

Případ, kdy daná tyč jest na jednom konci upevněna a na druhém podepřena, převedeme podobnou úvahou, jako v odstavci předešlém, na případ, kdy jest tyč na obou koncích upevněna. Rozdělení uzlů na tyči dané jest totéž, jako rozdělení uzlů na polovičce tyče na obou koncích upevněné, jak jest v obrazci 91. znázorněno, je-li uprostřed uzel. Tomu jest tak pro částkové tony *sudé.* Má tudíž daná tyč částkové tony o relativních výškách (§ 91.)

$$24\cdot990,\ 81,\ 169, \ldots.$$

Absolutně jsou však tyto tony 4 kráte hlubší z týchž důvodů, jež byly v odstavci předešlém uvedeny. Vzorce pro kmitočty tonů částkových jsou zde tytéž jako v předešlém odstavci. Ale ovšem v rozdělení uzlů jest týž rozdíl, jako v obrazcích 90. a 91., kde jest souhlas ve výšce tonů, ale nikoli v rozdělení uzlů.

§ 99. Výsledky závěrečné.

Přehlížíme-li výsledky, jichž jsme nabyli v hlavních případech v § 89., 91., 93. a 95. projednávaných, shledáme v částkových tonech *vysokých* souhlas velmi pozoruhodný. Tento vynikne, když vedle vzorců pro kmitočet N_k položíme též výrazy pro délku meziuzlí l. Tak obdržíme:

Tyč úplně volná:

$$N_k = (2k+1)^2 \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{\varkappa c}{4L^2}, \qquad l = \frac{2L}{2k+1}.$$

Tyč na obou koncích upevněná:

$$N_k = (2k+1)^2 \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{\varkappa c}{4L^2}, \qquad l = \frac{2L}{2k+1}.$$

Tyč na jednom konci upevněná:

$$N_k = (2k-1)^2 \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{\varkappa c}{4L^2}, \qquad l = \frac{2L}{2k-1}.$$

Tyč na obou koncích podepřená:

$$N_k = k^2 \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{\varkappa c}{L^2}, \qquad l = \frac{L}{k}.$$

Všechny tyto vzorce splynou v jediný, když zavedeme do výrazu pro N_k meziuzlí l na místo délky úhrnné L. Obdržíme tak

$$N_k = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa c}{l^2},$$

jakožto vzorec všeobecný platící pro všechny ony případy zvláštní, nahoře uvedené. Poněvadž jsme pak na tyto případy převedli též ty, o nichž v odstavcích 97. a 98. bylo jednáno, můžeme říci, že vzorec platí vůbec pro tyč, příčně se chvějící, a na koncích volnou neb jakkoli upevněnou nebo podepřenou. Formalně shoduje se vzorec onen se vzorcem

$$N_k = k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2},$$

platným pro tyč na obou koncích podepřenou, když v něm položíme $k = 1$, t. j. když pozorujeme základní ton tyče takové. Tak docházíme závěrečného výsledku následujícího: Tyč příčně se chvějící, na koncích volná neb jakkoli upevněná nebo podepřená, má při vysokých tonech částkových kmitočet jako tyč, jejíž délka se rovná meziuzlí, a jejíž konce jsou podepřené. (Zákon *Lissajous-ův.*) Můžeme tudíž při vysokých tonech částkových přihlížeti jen k prostřední části tyče, jinak délky tyče, jich krajů a jich případného upevnění nebo podepření si nevšímajíce, uprostřed pak změřiti meziuzlí l a počítati dále tak, jako by jen tato část tyče kmitala, jsouc na koncích podepřená a dávajíc ton základní.

Věc stává se názornou zejména tehdáž, když se poloha uzlů pískem učiní znatelnou — dle methody, jaké Chladni pro desky s velikým úspěchem užíval. Zároveň jest patrna analogie se strunami. Také zde jest při vyšších tonech harmonických kmitočet struny takový, jako výška základního tonu, který by dávala část struny mezi sousedními uzly jako pevnými body napjatá.

Co se *základních tonů* tyče, měli jsme vzorce následující:

Tyč úplně volná nebo na obou koncích upevněná

$$N_1 = 9{\cdot}0676 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2}.$$

Tyč na jednom konci volná a na druhém upevněná

$$N_1 = 1{\cdot}4250 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2}.$$

Tyč na obou koncích podepřená

$$N_1 = 4 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2}.$$

Tyč na jednom konci volná a na druhém podepřená, anebo tyč na jednom konci upevněná a na druhém podepřená

$$N_1 = 6{\cdot}2487 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{\varkappa c}{L^2}.$$

Nejhlubší ton (1·4250) dává tedy tyč na jednom konci upevněná a na druhém volná. Ton nejblíže vyšší (4) dává tyč na obou koncích podepřená. Potom následuje (6·2487) tyč na jednom konci upevněná a na druhém podepřená, nebo na jednom konci volná a na druhém podepřená. Nejvyšší ton (9·0676) dává tyč úplně volná nebo na obou koncích upevněná. K docílení lepšího přehledu sestavíme ona čísla

1·4250, 4, 6·2487, 9·0676

vypíšeme k nim logarithmy

0·15381, 0·60206, 0·79579 0·95749

a přepočteme, jak to *Chladni* učinil, všechny tony na nejhlubší jako základní odčítajíce vesměs 0·15381:

0, 0·44825 0·64198 0·80368.

K logarithmům těmto náleží čísla

1, 2·807$\overline{1}$, 4·3851, 6·3633.

Podržíce však raději výšky logarithmické, stanovme postup těchto tonů, hudebně dle ladění temperovaného, nazývajíce ton nejhlubší v souhlasu s Chladnim C_1 (contra-C). Počet jest následující:

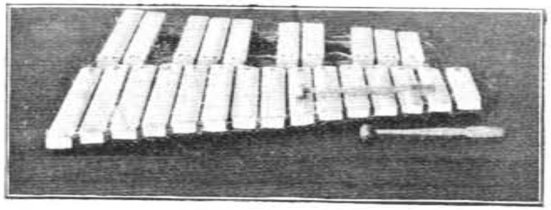
	0·44825		0·64198		0·80368
C . . .	0·30103	c . . .	0·60206	c . . .	0·60206
	0·14722		0·03992		0·20162
Fis . . .	0·15051	d . . .	0·05017	gis . . .	0·20069
$\underline{Fis}$ . . .	— 0·00329	$\underline{\underline{d}}$	— 0·01025		0·00093

Tyče dávají tedy postupně tony základní

$$C_1, \quad \underline{Fis}, \quad \underline{\underline{d}}, \quad gis.$$

§ 100. Pokusy.

Zvuky tyčí, vzbuzené chvěním příčným, jsou již slyšitelné, když se na př. podélné kusy dřeva, pravoúhle řezané, hodí na podlahu; že zvuk tím vznikající má jistou výšku, ukáže se ihned, když se několik podobných kusů různých rozměrů hodí po sobě; snadno lze rozměry tyto upraviti tak, aby vznikly zvuky velkého akkordu. Jinak vystoupí zvuky ty čistěji, když se na tyč klepne kladívkem neb paličkou. Obr. 94. znázorňuje přístroj (xylofon) sestávající z celé řady takových kousků dřev na slaměných proužcích položených, a tak laděných, že dávají paličkou zvuky dle stupnice temperované.



Obr. 94. Xylofon.

Xylofonu užil *St. Saëns* k účelům uměleckým ve svém „Danse macabre" (tanec mrtvých).

K účelům vědeckým budí se zvuky tyčí obyčejně třením smyčcem; pravda, že povaha chvění je poněkud složitější, poněvadž se tření děje od osy tyče stranou, tak že se tyč rozechví kolem dvou os na sobě kolmých (chvění torsionalní); ovšem že chvění kolem osy hlavní převládá. Proto jest k účelům vědeckým lépe použiti pro tyče, jež se mají v příčné chvění uvésti, úpravy elektromagnetické.

Vědecké pokusy o tyčích konali mnozí badatelé (*Chladni, Savart, Lissajous, Strehlke, L. Seebeck* a j.). Pokusy těmito byly výsledky theoretické, v předběžných odstavcích podrobně vyložené, potvrzeny, a to přes mnohé obtíže, jež vznikají při otázce, jak tyč upevniti neb jak ji podepříti, aby předpokladům theorie bylo platně vyhověno.

Zákony, nalezené pro tyče příčně chvějící nejsou tak jednoduché jako pro struny. Příčinou toho jest ta okolnost zvláštní,

že rychlost, jakou se vlnění příčné v tyčích šíří, není pro všechny tony konstantní, jako u strun, nýbrž že závisí na jich kmitočtu. Položíme-li, jako dříve

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}},$$

jest rychlost tato v dána výrazem

$$v = 2\pi \cdot \frac{\varkappa c}{\lambda},$$

při čemž má $\varkappa$ týž význam, jako dříve (§ 88.). Zároveň jest

$$\lambda = vT = \frac{v}{N},$$

tudíž

$$v^2 = 2\pi \frac{\varkappa c}{T} = 2\pi \cdot \varkappa c N.$$

Jest tedy pro tony

o relativním kmitočtu	1, 2, 3, 4, . . .
rychlost postupu	$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

Při směsi tonů, t. j. při zvuku, jsou zde tedy poměry podobné jako v optice, existuje disperse zvuku.

Struny následkem své tuhosti mají něco s tyčemi společného; korrekce Seebeckova (§ 85.)

$$N^* - N = \frac{r}{2L^2}\sqrt{\frac{E}{S}} = \frac{rc}{2L^2}$$

obsahuje týž výraz, kterým se stanoví kmitočet tyčí, a to kruhových, kde jest $\varkappa = \frac{r}{2}$.

Vzhledem k tomu, že částkové tony tyčí nejsou konsonantní, nebylo by vhodné užívati pro hudební nástroje strun, které by přílišnou svou tuhostí harmonické tony rušily. Kde tedy jest potřebí strun o velké hmotě, pro tony hluboké, jako u harfy, piana a j., tam se raději tenčí struna ocelová ovinuje jemným drátkem měděným, čímž se zvětšuje hmota struny, ale nikoli její tuhost.

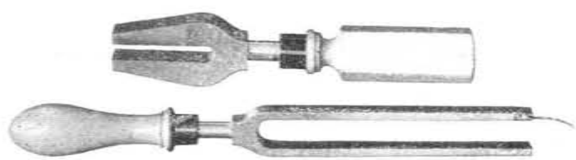
V jeskyních Sloupských vydávají mnohé krápníky, když se paličkou na ně tluče, tony, jichž čistotou a zvučností bývá každý návštěvník překvapen. V jeskyni krápníkové mají některé ze stěn krápníkových hlas jako zvonky; v jeskyni varhanové jest řada krápníků dávajících zvuky různé výšky, tak že lze na těchto „varhanách" i některé nápěvy hráti.

Budiž vzpomenuto též zajímavého zjevu, který pozoroval *Foucault*; tenká homogenní tyč průřezu přesně kruhového, zapjatá do soustruhu tak, aby se kolem vlastní osy dala otáčeti, zachovává směr příčných vibrací i když se soustruhem uvede v rotaci. Analogie s kyvadlem, rovinu kývání zachovávajícím, jest zde patrna.

Ladičky.

§ 101. Úprava ladiček.

Ladičky, hudebně málo důležité, nabývají velkého významu jako přístroje metronomické, jako akustické étalony, družíce se k étalonům délky a hmoty. Ladičkami jest dán ton určitého kmitočtu, kterýž může býti základem ladění hudebního; odtud též jich jméno. Jejich úpravu objasňuje na dvou ladičkách příručních obrazec 95. Na první pohled vypadá ladička jako



Obr. 95. Ladičky příruční.

vidlicovitě ohnutá, jinak volná tyč; její průřez bývá pravoúhlý, někdy kruhový. Obě vidlicovitá ramena ladičky jsou vespolek rovnoběžná; v části ohnuté připojuje se k nim násadec průřezu obyčejně kruhového, sloužící za rukovět. Má tedy ladička dobře pracovaná dvě roviny souměrnosti, jednu podélnou, druhou příčnou; v průsečné přímce obou rovin, splývající s osou rukověti, leží těžiště ladičky. Materialem ladiček jest vždy ocel napouštěná, tvrdosti mírné, za to pružnosti dokonalé. Nesmí se však ramena pracovati zvlášť a k nim pak snad přišroubovati rukovět, nýbrž dlužno ladičku jako celek z jediného kusu oceli zhotoviti. Ve chvění se uvádí buď paličkou (zhruba též udeřením konce vidlicového na dřevo), anebo nejlépe smyčcem.

Co se způsobu chvění tyče, měl Chladni za to, že se ladička chvěje podobně jako tyč na obou koncích volná. Vskutku dlužno však v ladičce viděti dvě rovnoběžné tyče, kteréž jsou na jednom konci volné, na druhém v zakřivené části k sobě a k rukověti připojené. Když ladička zvučí, chvějí se volné

konce střídavě k sobě a od sebe, čímž těžiště zůstává v průsečné přímce obou rovin souměrnosti. Dává-li ladička svůj ton základní, má každé z obou ramen jediný uzel; při tonech svrchních pak každé rameno dva neb tři uzly neb i více. Polohy uzlů znázorňuje schematicky obr. 96.

Z obrazce tohoto jest viděti, že počet uzlů u ladičky a tyče úplně volné (§ 90., obr. 90.) souhlasí sice při tonu základním, ale nikoli při prvém a druhém tonu svrchním; případ, kdy tyč volná má uzlů 3, 5, 7 . . . , u ladičky není možný. Proto bylo řečeno, že v ladičce viděti dlužno jako *dvě* vespolek spojené tyče na jednom konci volné a na druhém upevněné.

Obr. 96.
Polohy uzlů u ladičky při tonu základním a prvních dvou tonech svrchních.

Pozorujíce obrazec 96. poznáváme, že rukovět znějící ladičky vykonává jako celek kmity podélné, podél vlastní osy. Když se tedy rukovět drží vertikalně dolů a když se konec přibližuje opatrně stolu experimentalnímu, naráží tento konec na stůl v témže tempu, v jakém ladička kmitá a způsobuje ton. Drží-li se však *volně* v ruce, pak odskakuje poněkud a opět přiskakuje ke stolu, a mezi tím pokaždé jeden i dva kmity vynechává. Následkem toho zaznívá nikoli vlastní ton ladičky, nýbrž jeho *dolní oktava* neb *dolní duodecima*. Úkaz jest podoben tomu, který jsme popsali při sireně Savartově (§ 44.). V tomto smyslu mluvívá se někdy o *spodních harmonických tonech ladičky*.

§ 102. Kmitočet ladiček.

Zákony kmitočtu souhlasí povšechně se zákony, jež jsme seznali pro tyče na jednom konci volné, na druhém upevněné (§ 93.). Platí tedy i zde vzorec

$$N = 0{\cdot}1615\,\frac{b}{L^2}\sqrt{\frac{E}{S}}$$

čili

$$N = 0{\cdot}1615\,.\,\frac{bc}{L^2},$$

kdež značí c rychlost šíření se vln v materialu, z něhož ladička jest pracována, b tloušťku, L délku ramen. Pro ocel jsme vypočítali v § 87. hodnotu

$$\sqrt{\frac{E}{S}} = 508900 \frac{cm}{sec}.$$

Násobíce obě konstanty číselné obdržíme vzorec

$$N = 82200 \cdot \frac{b}{L^2}.$$

Obtíže činí otázka, jak měřiti délku L ramen. *Mercadier* (1874) počítá tuto délku z projekce L_0 medianové čáry ladičky na příčnou rovinu souměrnosti, dle empirického vztahu

$$L = 1{\cdot}012\ L_0.$$

Zavedeme-li tedy do hořejšího vzorce tuto projekci L_0, obdržíme

$$L = 80200 \cdot \frac{b}{L_0^2}.$$

Vzorce uvedené jsou jen orientační vzhledem k tomu, že data všeobecná, z nichž jsou počítány, mohou býti v konkretních případech rozdílná. Mnohdy jest nesouhlas větší než by se očekávalo, jak seznáme z příkladu následujícího. Ladička a^1, první v obrazci 97. níže položeném, má rozměry $b = 0{\cdot}55\ cm$, $L_0 = 9{\cdot}8\ cm$. Výpočet dle formule Marcadierovy dává $N = 460$. Skutečný kmitočet jest $N = 435$. Příčiny nesouhlasu dlužno v tom hledati, že tloušťka b není v celé délce ramena konstantní, což zase souvisí se způsobem, jak ladička sama byla laděna. O této otázce jednáme níže.

§ 103. **Účinek teploty.**

Teplota má na ladičku účinek dvojí. Především mění se rozměry ladičky a tím i specifická hmota; avšak změny tyto, samy o sobě velmi malé, kompensují se částečně vespolek, tak že jich účinek na kmitočet jest nepatrný. Důležitější jest však *změna pružnosti.* Při stoupající teplotě se pružnost umenšuje a následkem toho klesá též kmitočet ladičky.

Změny kmitočtu teplotou vyjadřují se vzorcem empirickým. Dle usnesení mezinárodní konference ve Vídni ze dne 18. listopadu 1885 má býti normalní ladička a^1 tak pracována, aby kmitočet $435 \frac{1}{sec}$ dávala při $15^0\ C$. Proto se za normalní teplotu pro ladičky vůbec béře $15^0\ C$, a onen vzorec empirický

se píše ve tvaru

$$N_t = N_{15}\,[1 - \alpha\,(t - 15)],$$

kdež značí α koefficient temperaturní. *Koenig* nalezl methodou velmi přesnou pro tento koefficient hodnotu

$$\alpha = \frac{1}{8943}.$$

Počítejme dle toho, jak se změní kmitočet normalní ladičky a^1 při vzrůstu teploty o 10^0, tedy z 15^0 na 25^0. Obdržíme

$$N_{25} = 435 - 435 \cdot \frac{10}{8943}$$

čili

$$N_{25} = 435 - 0{\cdot}486.$$

Ladička vykonává tudíž na 10^0 rozdílu teploty asi o $\frac{1}{2}$ kmitu méně.

Co se *intervallu* týče, jest povšechně

$$\frac{N_t}{N_{15}} = 1 - \alpha\,(t - 15),$$

tedy při vzrůstu kmitočtu, když teploty t o 10^0 ubude, z 15^0 na 5^0,

$$\frac{N_5}{N_{15}} = 1 + \frac{10}{8943},$$

což činí číselně

$$\frac{N_5}{N_{15}} = 1{\cdot}001118,$$

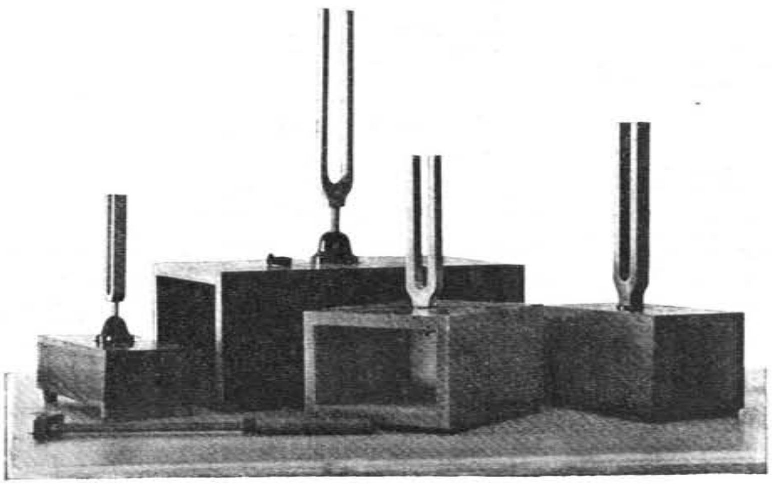
logarithmicky

$$log\ N_5 - log\ N_{15} = 0{\cdot}00049.$$

Logarithmický intervall kommatu jest $0{\cdot}00540$. Dle toho mění se ton ladiček pouze o $\frac{1}{10}$ kommatu, když se teplota změní o 10 stupňů. Rozladění ladiček teplotou jest tudíž velmi nepatrné. Vlastnost tato jest velmi cenná vzhledem k tomu, že ladička má býti akustickým étalonem, a že jest tudíž žádoucno, aby její kmitočet, pokud možno, nepodléhal žádným změnám.

§ 104. **Sesílení tonu ladičky resonancí.**

Příruční ladičky, jak jsou v obr. 95. znázorněny, jsouce nárazem nebo třením ve chvění uvedeny, drží-li se v ruce, zní velmi slabě, slyšitelně jenom v blízkosti ucha. Důvod toho jest týž, jaký jsme uvedli u strun. Šířka vidlice jest malá; ladička kmitajíc oběma rameny ve smyslu opačném, uvádí ve chvění jen malé množství vzduchu, jehož částečky nad to, po kraji vidlice se pošinujíce, značnější zhuštění a zředění vzduchu nepřipouštějí. Ton se poněkud sesílí, když se na ramena ladičky kolmo ke směru kmitovému upevní kartonové desky. Výdatněji sesílí se ton, když se ladička dolejším koncem postaví na stůl; přímým stykem s ladičkou uvede se deska stolu ve spoluchvění a deskou pak značnější množství vzduchu. Nejvýdatněji působí však montování ladičky na ozvučnou resonanční skřínku (obr. 97.). Rozměry této skřínky mají býti voleny tak, aby vzduch v ní uzavřený, který se chvěje podobně jako v píšťale kryté, dával ton blízký tonu ladičky. Délka píšťaly kryté, jejíž rozměry průřezové jsou velmi malé, činí, jak později vyložíme, čtvrt té vlny vzduchové, jež tonu danému přísluší (§ 67.). Jsou-li průřezové rozměry větší, jest délka píšťaly menší. Právě tak u skřínek ozvučných. Ostatně úplná koincidence tonů není v jistém ohledu žádoucí. Jsou-li tony shodné, zaznívá ladička velmi mohutně, ale ton rychle slábne. Je-li mezi tony malý rozdíl, zní ladička déle a při tom též dosti zvučně. Také ton dřeva má býti tonu ladičky blízký.



Obr. 97. Ladičky na skřínkách ozvučných.

Z ladiček v obr. 97. znázorněných dává první a třetí, od levé strany počínajíc, normalní a^1. Skřínka první má průřezové rozměry menší (4 *cm*, 8 *cm*) a délku větší (18 *cm*); třetí má průřezové rozměry větší (7 *cm*, 12 *cm*) a délku menší ($16\frac{1}{2}$ *cm*). Čtvrtvlna vzduchová tonu a^1

(§ 67.) má délku 0·782 *m*: 4 = 0·195 *m* čili $19\frac{1}{2}$ *cm*. Když se přes kraj skřínky foukne, ozve se ton sloupce vzduchového; jest téměř o půl tonu nižší.

Velká ladička, v obrazci 97., jež dává *a*, má skřínku o rozměrech $9\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$ a $30\frac{1}{2}$. Čtvrtvlna vzduchová tonu *a* činí 39 *cm*; velkými rozměry průřezu jest tedy délka skřínky proti čtvrtvlně značně zmenšena.

Účinek resonance vzduchu ukazuje se velmi dobře, když se do skřínky vloží vatta anebo i když se otvor skřínky šatem uzavře; ton ladičky, smyčcem třené, zní daleko slaběji. Dají-li se skřínky dvou zcela stejných ladiček těsně k sobě a to stranami otevřenými, nemůže vzduch ani v jedné ani v druhé skřínce zvučeti a tony obou ladiček zaznívají slabě; když se však skřínky od sebe oddalují, zazní ton obou náhle silně, jakmile oddálení jest dostatečné. Když se ladička odšroubuje a rozezvučí sama, ozve se ton její hned mohutněji, dá-li se rameny svými před otvor skřínky.

§ 105. Ladění ladiček a jeho účinek na tony svrchní.

Má-li se ladička hotoviti, bývá z pravidla určeno napřed, jaký má míti kmitočet. Dle vzorců nahoře uvedených počítají se pak rozměry ladičky předběžně. Velmi zřídka shoduje se však kmitočet ladičky hotové s tím, který byl žádán; proto jest nutno dodatečně kmitočet pozměniti, tedy ladičku samu laditi.

K účelu tomu připilují se ramena ladičky a to buď blíže konců nebo blízko bodů uzlových, příslušných tonu základnímu. V prvém případě ubéře se hmoty na místech, kde se ladička neohýbá; tudíž se připilováním nemění síly elastické, ale zmenšuje se hmota v pohyb uváděná; proto se zvětší kmitočet, ton ladičky se zvýší. V případě druhém naopak ubráním tloušťky zmenší se síly elastické větší měrou než hmota, proto kmitočtu ubude, ton se sníží. Upilováním stává se změna kmitočtu ovšem permanentní.

Toto dodatečné zpracování ladiček jeví se pak dvojím účinkem. Především nesouhlasí kmitočet dle vzorců hořejších počítaný s pozorovaným. Vedle toho jsou *tony svrchní* pozměněné. Dle § 93. jest řada tonů částkových u ladiček dána relativně čísly (zkráceně na 2 decimaly)

$$1,\ 6{\cdot}27,\ 17{\cdot}55,\ 34{\cdot}39, \ldots$$

anebo hudebně, když základní ton zoveme *C*,

$$C,\ gis^1,\ d^3,\ cis^4, \ldots$$

Jak se ladička při těchto svrchních tonech chvěje, objasňuje obr. 96. Velmi zvučně a jasně lze obdržeti zejména *prvý ton svrchní*, když se ladička na místě, kde má vzniknouti vrchol, nejlépe přímo na ploše průřezové volného konce, smyčcem tře a při tom na místě, kde má vzniknouti uzel, malounko přidrží. Učiní-li se pokus u dvou ladiček dávajících týž základní ton na př. a^1, shledává se velmi zřídka, že by v prvých tonech svrchních byl souhlas; rozdíl činí i více než půlton. Tak jest tomu na př. u prvé a třetí ladičky v obr. 97., jichž první tony svrchní zaznívají zvučně, pronikavě, ale mezi sebou se liší téměř o půl tonu. U dvou ladiček téhož druhu, jako jest třetí v obr. 97., činí rozdíl celý ton. Ještě větší rozdíly pozorují se u ladiček, jichž tony základní jsou v jednoduchém intervallu, na př. oktavy a^1 a a; v témž intervallu měly by pak býti i tony svrchní téhož řádu. To však velmi zřídka souhlasí. Tak na př. u ladiček v obr. 97., z nichž veliká dává a a obě nejmenší a^1, činí rozdíly u prvého tonu svrchního více než celý ton.

Helmholtz udává pro prvý ton svrchní meze 5·8 . . . 6·2, tedy menší než nahoře pozorováno. Průměrné číslo 6·0 by dávalo intervall konsonantní, totiž kvintu ke druhé oktavě základního tonu.

Často však zaznívá zřetelně — proti dosavadní theorii — též oktava tonu základního (na př. u ladičky v obr. 85. znázorněné). Vznik tohoto tonu vysvětluje *Helmholtz* jednostranností působících sil, jak bývá zejména u ladiček elektromagnetických.

Změna tonu, připilováním ramen vznikajících, jest ovšem permanentní. Dočasně lze kmitočet snížiti, když se na vidlice (nejlépe na obě) upevní šroubkem malé závažíčko (lépe než kousky vosku a pod.). Snížení jest nejvýdatnější, když jsou závažíčka až na konci ramen; naproti tomu jest sotva znatelné, když se závažíčka sešinou dolů až tam, kde jsou uzly. Tím způsobem jest možna v jistých mezích jemná regulace.

§ 106. Ladička elektromagnetická.

Obyčejné ladičky, jak jsou v obr. 95. a 97. znázorněny, jsouce rozezvučeny ponenáhlu v tonu slábnou a konečně zníti přestávají. Energie pohybová ladičky sdělí se vzduchu, v němž se ladička nalézá, skřínce, na níž jest postavena, stolu, na němž stojí, a pod. Mnohdy jest však žádoucno, aby zněla bez ustání. Toho se docílí zařízením elektromagnetickým, tomu podobným,

jehož se užívá při zvoncích signalových. K ladičce jest připojen elektromagnet, obyčejně jednoduchý neb dvojitý, buď uvnitř ramen, nebo vně. Velká ladička v obr. 85. znázorněná má uvnitř ramen elektromagnet trojitý. Proud několika akkumulatorů vede se závity elektromagnetu a pak k interruptoru. Nyní užívá se téměř výhradně zařízení takového, kdy tímto interruptorem jest ladička sama; kmitajíc uzavírá a přerušuje jistý kontakt, rtuťový nebo platinový, v téže periodě, jak sama kmitá. Je-li elektromagnet umístěn uvnitř ramen (jakož jest pohodlnější), jest kontakt na jejich vnější straně; když při kmitání jsou ramena nejdále od sebe, jest kontakt uzavřen, elektromagnet působí, ramena se sbližují; tím se zase kontakt přeruší, elektromagnet nepůsobí, ramena se zase od sebe oddálí co nejvíce, načež se celý pochod opakuje.

Pro udržení celého pochodu má však, jak *Rayleigh* ukázal, podstatný význam *samoindukce*. Následkem extraproudu udržuje se působení magnetu v okamžiku, kdy proud se přerušuje, poněkud *déle*, než když zase proud se uzavírá; tím jeví se v působení magnetickém jistá asymmetrie. Urychlení vznikající, když se ramena k elektromagnetu přibližují, jest větší, než když se od elektromagnetu oddalují; neboť při tomto přibližování — kdy se kontakt přerušuje — *prodlouží* se působení proudu hlavního extraproudem souhlasného směru. Tento přebytek práce magnetické v určitém smyslu jest aequivalentem práce, jíž jest třeba na překonávání odporu.

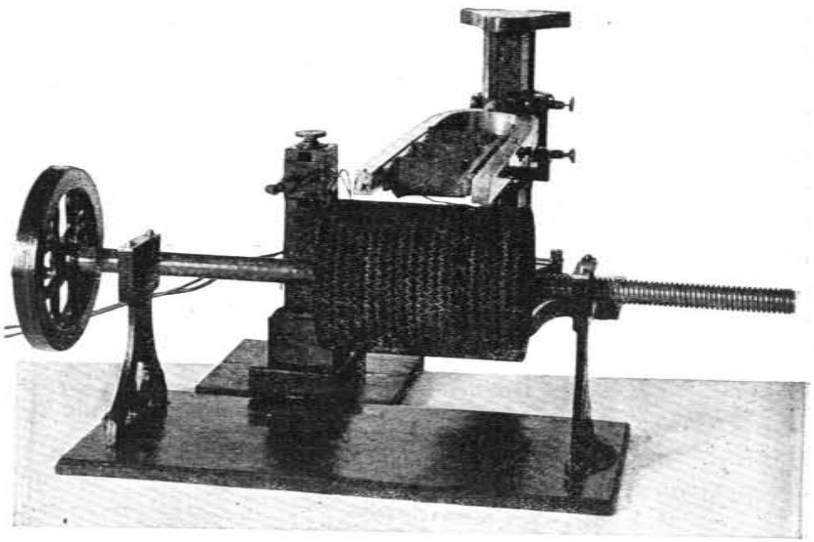
Přerušováním proudu vzniká jistý šumot, který čistotě tonu dosti značně vadí. Proto, kde jest třeba při jemných pokusech akustických tonu čistého, lze užiti ladičky — jinde, ve vedlejší síni postavené — jejíž kmitočet jest co možno stejný, jakožto *samostatného interruptoru* pro ladičku, kterou se má experimentovati.

§ 107. Stanovení kmitočtu ladičky.

Úkol, stanoviti výšku tonu ladičky, jest dvojí. Buď jde o stanovení výšky absolutní neb relativní.

Určování *výšky absolutní, kmitočtu* ladičky, děje se nejjednodušeji methodou autografickou. Příslušné uspořádání znázorňuje obr. 98. Základem jeho jest časové rozvinutí kmitavého pohybu ladičky, jak bylo popsáno v § 5. Ladička píše své kmity na papíru, jenž jest na válec navinut a sazemi počazen. Současně se zaznamenávají sekundy registratorem časovým. Válec se otáčí a šroubem na ose současně pošinuje*).

V obrazci jest znázorněno, jak se určil kmitočet téže ladičky, kteréž užito při pokusu *Meldeově* (§ 83.); pozorování trvalo 12 sekund, nalezen kmitočet 74·6 při teplotě 18° *C.*



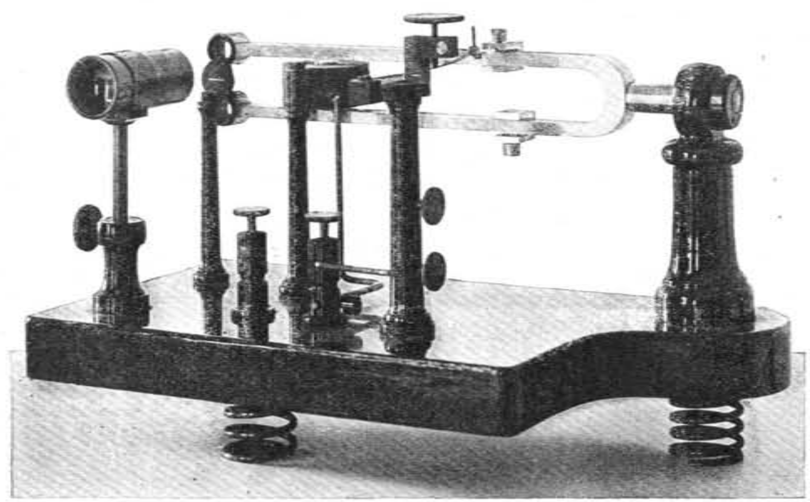
Obr. 98. Jak se určuje kmitočet ladičky methodou grafickou.

Určování *výšky relativní* čili *intervallu* vyžaduje ke srovnání druhé ladičky, jejíž kmitočet jest znám a jest tak veliký, aby intervall obou ladiček byl jednoduchý, na př. unisono, oktava, kvinta a pod. Srovnávání děje se velmi přesně dle obrazců *Lissajousových.*

Aby se pozorování mohlo díti subjektivně, bez zrcátek, i při malých amplitudách, upravil *Lissajous* zvláštní komparator. Jest to ladička, na jejíž jednom ramenu jest upevněn slabý objektiv mikroskopu; okular k němu příslušný jest umístěn na stativu ladičky a dá se ve svém pouzdru pošinovati. Zařídí-li se mikroskop na jistý bod, zobrazí se tento objektivem realně; kmitá-li ladička, kmitá i objektiv, tudíž i onen realný obraz bodu; pozorovatel vidí pak, zíraje okulárem, místo bodu přímku, následkem trvání dojmu zrakového. Onim bodem může však

*) Srovnej Mechanika, § 52. a 53., pag. 76., 1901.

býti bod na jednom rameni jiné ladičky, jejíž kmity jsou ke kmitům komparatoru kolmé. Když tato druhá ladička též kmitá, vidí pozorovatel některý obrazec Lissajousův. Kdyby pak kmitání onoho bodu nebylo jednoduché harmonické nýbrž složité, změnil by se obrazec a z jeho tvaru bylo by možno souditi na způsob kmitání tohoto bodu druhého; neboť jest znám výsledný pohyb, totiž obrazec, a jedna jeho komponenta, totiž vibrace komparatoru. V obrazci, který se pozoruje mikroskopem, dlužno viděti také jakési rozvinutí časové pohybu, který studujeme, ale nikoli dle rovnoměrného pohybu — jak to bývá při autogrammech pravidlem — nýbrž dle jednoduchého pohybu harmonického.



Obr. 99. Vibrační mikroskop.

Helmholtz upravil komparator Lissajousův elektromagneticky, aby se udržoval ve chvění po dobu libovolnou. Tak vznikl stroj pro zkoumání vibrací velice důležitý, tak zvaný *vibrační mikroskop.* Úpravu jeho znázorňuje obr. 99. Objektiv mikroskopu jest připevněn na hořejším ramenu ladičky; jest slabý, má dálku ohniskovou 3 *cm.* Elektromagnet jest uvnitř ramen. Kontakt jest platinový; reguluje se jemně pomocí delšího ocelového péra, které se šroubem přiměřeně napne. Malými přívažky, jež jsou na ramenech pošinovatelny a šroubem upevněny, regulován jest (§ 105.) kmitočet přesně na 128 kmitů, což jest c dle ladění fysikalního. Dvě malá diafragmata linearní, jež jsou upevněna přes sebe na obou ramenech ladičky, mají účel zvláštní, o němž pojednáme později.

Vibrační mikroskop *Helmholtzův* jest přístrojem praecisním pro pozorování relativní. Podobně sestrojil *Koenig* pro absolutní pozorování přístroj ladičkový veliké praecisnosti, v němž ladička jest regulatorem chodu hodin. Kmitočet této ladičky v přístroji původním*) byl $N = 64$, dle ladění fysikalního $ut_1 = C$. Jako kyvadlo u hodin astronomických, tak zde ladička reguluje chod hodin a zároveň pružností péra hodinového dostává malé nárazy, jimiž se ve chvění udržuje tak dlouho, pokud péro jest nataženo. Hodiny udávají pak, mnoho-li kmitů za určitou dobu ladička vykonala. Srovnají-li se tedy s hodinami kyvadlovými, správný čas dávajícími, lze z obou údajů počítati kmitočet čili absolutní výšku ladičky. Zároveň jest ladička upravena jako *Lissajousův komparator*, tak že jest možno, přístroje toho užiti i pro měření relativní. Absolutní kmitočet ladičky hodinové, přesně určený a snadno mezi prací kontrolovaný, jest při relativních měřeních pevným základem.

Ladičkové hodiny Koenigovy reagují na *teplotu* tak, jako kyvadlové hodiny s kyvadlem nekompensovaným; při vyšší teplotě stává se kmit ladičky delším jako kyv kyvadla; hodiny se zpozdívají, retardují. Lze tudíž účinek teploty na ladičku studovati hodinami Koenigovými velmi přesně, předpokládajíc, že lze teplotu udržeti konstantní. Způsobem tímto určil Koenig temperaturní koefficient a nalezl číslo

$$\alpha = \frac{1}{8943} \quad \text{čili} \quad \alpha = 0{\cdot}0001118.$$

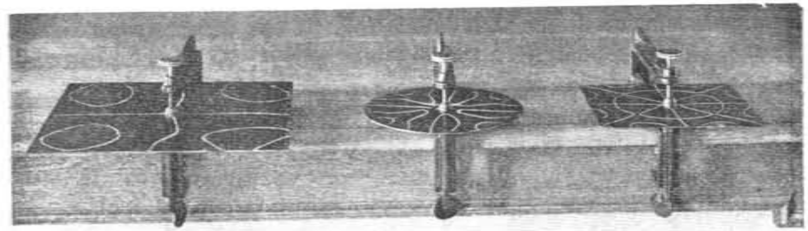
Výsledek tento má význam ovšem jen individualný, platný pro určitou ladičku, anebo také pro určitý material, jehož Koenig k hotovení svých ladiček užívá. Nicméně můžeme výsledek ten i ve smyslu obecnějším posuzovati, k orientaci o tom, do jakých mezí účinek teploty vůbec sahá. Proto jsme tohoto koefficientu užili nahoře při výpočtech o rozladění ladiček teplotou.

*) *R. Koenig*, Quelques expériences d'acoustique; pag. 172, 1882. Zde se udává $N = 128$, což jsou polokmity, čítané dle způsobu francouzského.

Desky.

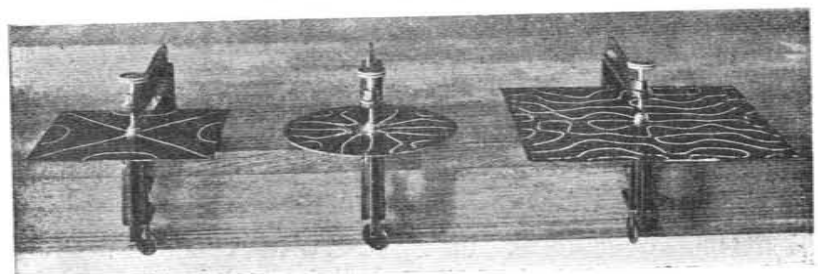
§ 108. Úprava pokusná.

Desky vyznačují se, oproti tyčím, velikou, přímo nevyčerpatelnou rozmanitostí tonů, kteréž mohou vydávati. Původ svůj má tato rozmanitost ve způsobu, jak se deska upevní a jak se ve chvění uvádí. K pokusům užívá se desek skleněných nebo



Obr. 100. Zařízení pokusné pro obrazce zvukové.

kovových, obyčejně mosazných, též dřevěných a j. Desky se zapínají vodorovně do zvláštních železných svěráků, jichž zařízení jest z obr. 100. a 101. patrné. Forma jejich jest volena tak, aby se dal svěrák nejprve šroubem připevniti ke stolu



Obr. 101. Zařízení pokusné pro obrazce zvukové.

experimentalnímu, k němuž rovinnou plochou dobře dolehne, a pak aby se deska dala na některém místě šroubem sevříti mezi dvě malé kruhové plošky, obyčejně korkové, mosazným kroužkem obepjaté. Nejjednodušším jest upevniti desku v těžišti; ale jest možno upevniti ji též stranou od těžiště. Právě pro tento obecnější případ jest nutno, aby svírací plošky byly poněkud větší, ježto by jinak deska nezaujala polohu vodorovnou. *Melde* namítal proti sevření desek, že se tím způsobí v desce napjetí, kterým se homogenita v pružnosti ruší; proto kladl desky volně na nožičky mosazné přiměřené formy, nahoře v malou plošku korkovou končící, tak že byla deska v několika bodech podepřena.

Tvar desek může býti velmi rozmanitý. Nejjednodušší jsou desky pravoúhlé, specialně čtverečné, nebo kruhové; ale mohou býti též mnohouhelníkové, elliptické a j. Aby se deska rozzvučela, nestačí ji na některé místě smyčcem tříti; vznikla by nahodilá směsice tonů. Nutno tedy jistý ton vybrati, určiti, což se děje tím, že se deska na některém místě přidrží, aby zde vznikl uzel, anebo, lépe řečeno, aby tudy procházela uzlová čára. Deska se tedy buď drží prsty rukou, anebo se zdola opře na př. tyčinkou dřevěnou neb kovovou na konci hrotem neb krátkou hranou končící. Na jiném místě, na kraji desky, tře se shora dolů smyčcem. Při nahodilé volbě obou míst se ovšem neozve hned ton čistý; jest třeba obě místa účelně hledati. Při způsobu Meldeově jsou opory dány v počtu větším; proto jest zde úloha, tyto opory přiměřeně rozestaviti, obtížnější. Místo smyčce užíval Melde malých tyčinek skleněných, které na určitém místě k desce přitmelil a jež podélným třením rozezvučel; jich chvění podélné přenášelo se pak příčně na desku. Tím způsobem bylo určitě dáno místo, kde při chvění desky měl vzniknouti vrchol; opory se pak rozestavily tak, aby padly do uzlových čar, jež při daném tom chvění vznikají.

§ 109. **Obrazce Chladniho.**

O tom, jak se deska, jsouc rozzvučena, chvěje, nabudeme názoru způsobem rovněž tak jednoduchým jako překvapujícím, kterýž objevil *Chladni*. Když se totiž na desku sype pozvolna suchý mořský písek, jest viděti, jak na některých místech zrnečka písečná živě odskakují a jak se hromadí na místech jiných, kde zůstávají ležeti. Tak vzniká soustava zvláštních čar. Jest patrno, že zrnka odskakují na místech, kde se deska nejživěji chvěje, a že zůstávají ležeti na místech, kde jest v klidu; čáry tak se tvořící jsou tudíž čáry *uzlové*. Jimi vznikají na

desce zajímavé obrazce, jež zoveme obrazce *zvukové* čili též *Chladniho* *).

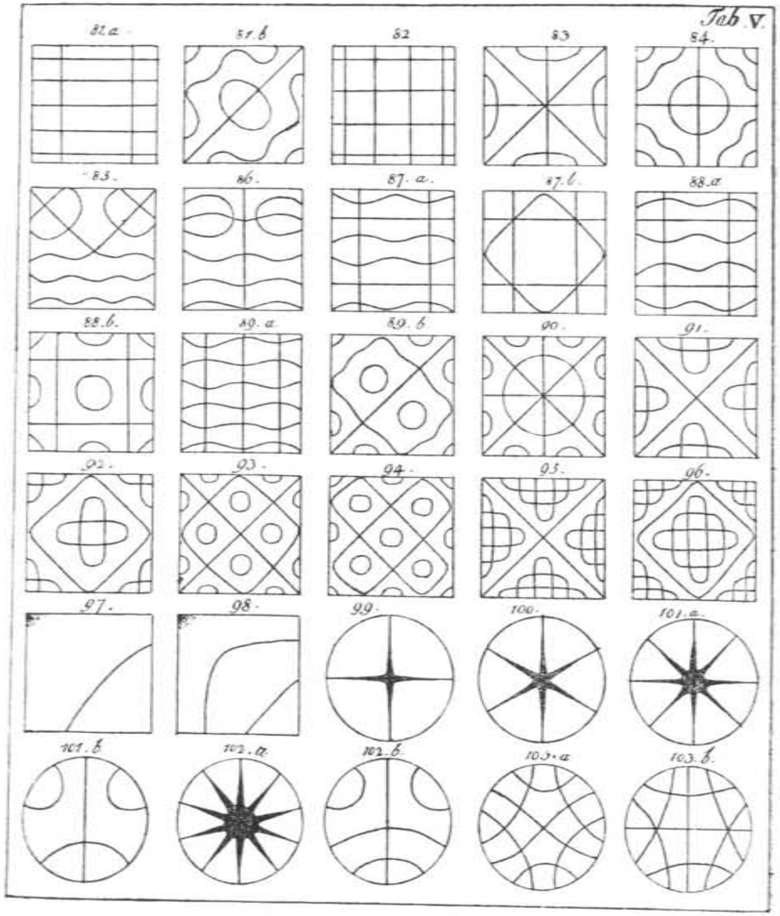
Množství písku dlužno voliti přiměřeně, ne mnoho, jen tolik, aby čáry uzlové právě vynikly. Sype-li se písek přiměřeně, objeví se čáry tyto mnohdy — ne vždy — velice ostře; snadno se pozná, že jest to tehda, kdy ton desky jest čistý; jakmile vedle jistého tonu zaznívá — třebas slabě — jiný, nevytvoří se čáry ostře. Je-li deska formy pravidelné a při tom vhodně upevněná, na př. v geometrickém středu, vynikají čáry ty velkou pravidelností, majíce průběh úplně neb aspoň velmi přibližně souměrný. To souvisí s větší neb menší homogenitou materialu, pro kterou průběh čar jest zkoumadlem velice citlivým. Pravidelnost čar, jich rozmanitost, jich vznikání a přeměna, jakmile ton, jak říkáme, přeskočí, vše to působí dojmem velice poutavým a není divu, že objev Chladniho učinil své doby velikou sensaci. Pokusy jeho byly opakovány v četných variacích, obrazce kresleny a srovnávány, studován jich průběh a pravidelnost a činěny pokusy, ač ne s velkým zdarem, zjevy ty také theoreticky vyložiti. Chladni za svého pobytu v Paříži (1809) ukazoval obrazce ty v akademii Pařížské mnohým vynikajícím osobnostem**), což mělo ten účinek, že vypsána byla cenná úloha***) na theoretické vysvětlení těchto obrazců zvu-

*) *Arnošt Florens Chladni,* narodil se r. 1756 ve Vittemberce; pocházel z rodiny, kteráž v dobách dřívějších sídlila na Slovensku; předkové jeho vystěhovali se do Saska pro útisky náboženské. Studoval ve Vittemberce a v Lipsku práva, později věnoval se studiím přírodovědeckým, zejména akustickým. Sestrojil zvláštní nástroje hudební, 1790 eufon a 1800 klavicylindr, jež na svých rozsáhlých cestách ukazoval. Elektrické obrazce Lichtenbergovy přivedly ho na myšlenku obrazců zvukových. Největší jeho dílo jest *Akustika,* jež vyšla německy r. 1802, v druhém vydání (s autobiografií) r. 1830 v Lipsku, a francouzsky (Traité d'Acoustique) r. 1809 v Paříži. O svých obrazcích zvukových podal zprávu r. 1787 (Entdeckungen über die Theorie des Klanges, Leipzig). Chladni první vyslovil myšlenku — kteráž od jeho vrstevníků za absurdní byla pokládána — že povětroně jsou původu kosmického. Zemřel ve Vratislavi 1827. Co se týče jeho jména, čistě českého, podržen v knize této (jako též ve Slovníku Ottově) způsob, jakým on sám se podepisoval, ač by snad bylo lépe, vzhledem k měkké výslovnosti našeho *i* psáti Chladný.

**) Císař *Napoleon,* jemuž Chladni zvukové obrazce demonstroval, jevil největší o věc zájem, což osvědčil prakticky i tím, že dal Chladnimu na francouzské vydání jeho akustiky subvenci 6000 franků.

***) Cenu obdržela 1816 *Sophie Germain* (1776—1831) za spis „Recherches sur la théorie des surfaces élastiques"; avšak spisem tím problem daný úplně rozřešen nebyl.

kových. Ve své Akustice uvádí Chladni mnoho tabulek s podrobným popisem obrazců zvukových. Jedna z těchto tabulek v měřítku zmenšeném jest v obr. 102. reprodukována.



Obr. 102. Obrazce zvukové; tabulka reprodukovaná z Akustiky Chladniho.

Velmi pěkné obrazce zvukové, dle skutečnosti fotografované, jednoduché i velmi složité, jest viděti v obr. 100. a 101., na dvou deskách čtvercových a na desce kruhové. Ukazuje se, že obrazce, jak se pokusem zjednají, nesouhlasí vždy s těmi, jak se kreslívají. Kreslič má vždy tendenci, podati obrazec zcela pravidelný — vskutku ve výkresu byla by nepravidelnost,

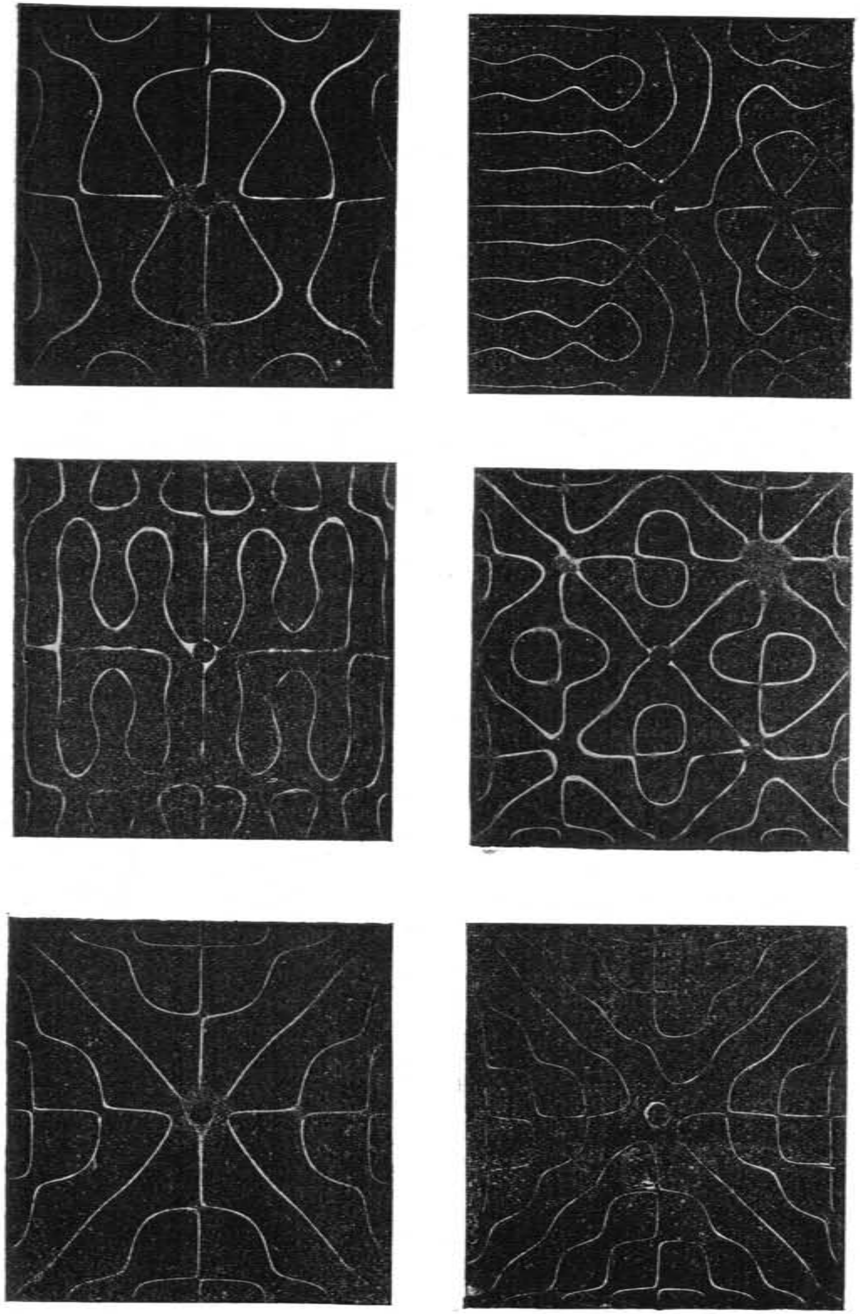
nesouměrnost bez motivace, a rušila by úhrnný dojem. Ve skutečnosti však jsou právě i odchylky od schematických takových obrazců zajímavými a neruší nikterak, poněvadž nepravidelnost jest vysvětlena; poukazuje vždy buď na nějakou nesouměrnost při upevnění desky, anebo častěji na nepravidelnosti ve struktuře desek, v jich pružnosti a pod. Desky, jež by dávaly obrazce naprosto pravidelné, jsou vzácností. Dokladem toho jsou obrazce zvukové v obr. 103., dle skutečnosti (v pohledu přímém) fotografované, z nichž některé jsou jednoduché a souměrné, jiné však, složitější, ukazují průběh, v němž souměrnost jen dle jedné osy jest poněkud zachována.

Čtvercová deska mosazná, firmou *R. Koenig* v Paříži dodaná, na níž obrazce tyto byly pozorovány, jest ovšem větších rozměrů; strana její má délku 30 *cm*. Malé mosazné desky, na př. o straně 20 *cm*, bývají lépe homogenními, jakož jest pochopitelno. Deska byla stejnoměrně šellakem natřena; žlutý nátěr vyjde ve fotografii černě.

Poměrně nejjednodušší dle tvaru svého jsou obrazce na deskách kruhových. Možno zde dva typy rozeznávati, obrazce hvězdovité (radialní) a obrazce soustředné (koncentrické). Obrazce typu prvého vzniknou velmi snadně, když se deska uprostřed upevní a na obvodu smyčcem tře. Obrazce typu druhého vyžadují, aby deska uprostřed měla vrchol vlny, upevnění musí býti mimo střed. Nutno tudíž desku uprostřed provrtati a otvorem vésti smyčec.

Daleko pohodlněji docílí se však tohoto typu obrazců, když se k desce uprostřed přitmelí kolmo tyč ocelová nebo skleněná. Zapne-li se pak tyč tato na vhodném místě do svěráku, tak aby zde vznikl uzel, a tře-li se podélně na místě, kde vzniká vrchol, rozezvučí se chvěním podélným, následkem toho vykonává konec tyče, kde souvisí s deskou, též kmity podélné, kteréž k desce jsou příčné; tím se rozechví deska příčně a vzniknou obrazce typu druhého, o kruzích soustředných. Počet těchto kruhů souvisí s tonem tyče, nižším nebo vyšším, a tento ton zase souvisí s místem, kde sevřením tyče se dá podmínka ke vzniku uzlu. Toto místo nutno pokusem zjistiti - počet zde málo pomůže, poněvadž tyč jest jednostranně hmotou desky zatížena.

Tento způsob, vytvořiti obrazce Chladniho, osvědčuje se nejen pro desky kruhové, nýbrž i pravoúhlé anebo formy ještě složitější; podaří-li se dostati čistý zvučný ton tyče, vytvoří



Obr. 103. Obrazce zvukové dle skutečnosti fotografované.

se obrazce velice ostře, v typech jinakých, než jak se obdrží při sevření desky do svěráku.

Desky kruhové dávají obrazce hvězdovité, dosti pravidelné, ač směrem ke středu, kde deska je sevřena, ostrost čar se ztrácí. Obrazce soustředné bývají velmi zřídka pravidelné kruhy. Lze též, ač méně snadno, obdržeti obrazce smíšené. U desek pravoúhlých vznikají obrazce, v nichž lze rozeznati čáry orientované jednak dle směru stran, jednak dle směru úhlopříčen. Dle toho lze obrazce u desek takových též roztříditi v jisté typy, čímž lze nabýti lepšího v nich přehledu.

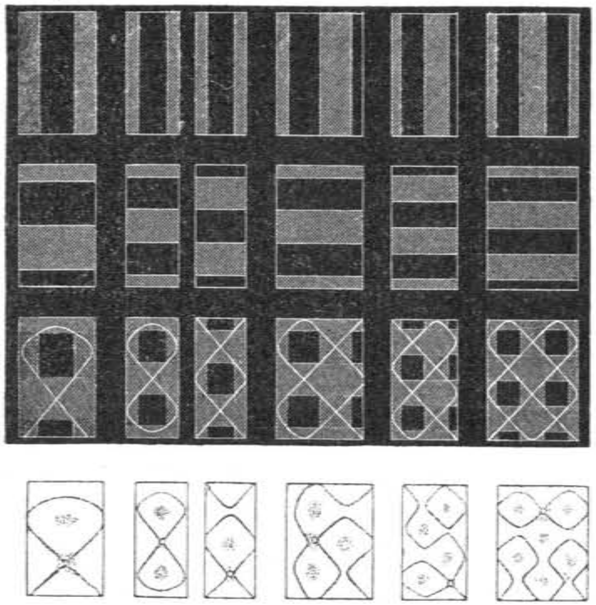
Povšechně dlužno ještě poznamenati, že určitý obrazec předpokládá vždy týž ton, ale naopak určitý ton může způsobiti různé obrazce.

O vzniku obrazců zvukových podal obšírný výklad *Ch. Wheatstone* (ve Philosophical Transactions, 1833). Dle toho vznikají obrazce tyto dvěma současnými vibracemi desky dle dvou různých směrů. Tak na př. je-li deska pravoúhlá, můžeme si představiti, jako by současně kmitala podobně jako kmitají tyče, jednak podél jedné, jednak podél druhé strany. Při kmitání jednom by vznikaly uzlové přímky, na př. po délce desky, při kmitání druhém pak po šířce desky. Poloha těchto uzlových přímek byla by táž, jak jsme ji seznali u tyčí (v obr. 90.—93.). Při současném kmitání zůstaly by v klidu jenom ty body desky, pro něž by výchylky, z oněch dvou vibrací plynoucí, byly stejné a opačné. Stanoviti tyto body jest pak úlohou geometrické konstrukce.

Otázkou touto zanášel se též *R. Koenig**); na základě theorie Wheatstoneovy podařilo se mu na deskách vhodně volených docíliti souhlasu velmi pěkného mezi obrazci, jak je udává geometrická konstrukce, a mezi obrazci, jak je dává skutečnost. Diagramm v obr. 104. jest toho dokladem. Desky jeho byly měděné, poměrně malé, o délce 20 *cm*; šířka byla různá, a tak volená, aby při jistém počtu uzlových čar v jednom i druhém směru oba tony byly přibližně stejné. Při rozměru menším docíleno stejné výšky volbou tonu vyššího řádu. V obr. 104. znázorňuje prvá řada polohu přímek uzlových, rovnoběžných s délkou desky; jich počet (od levé k pravé straně) jest 2, (2, 2), 3, 3, 4; druhá řada podobně polohu přímek uzlových

*) *R. Koenig*, Quelques expériences d'acoustique, 1882, pag. 32. Obrazec 104. jest reprodukcí z tohoto pojednání.

rovnoběžných se šířkou desky; jich počet jest 3, (4, 4), 4, 5, 5. Poloha těchto uzlových přímek souhlasí s polohou uzlů, jak byla pro tyč úplně volnou určena, a to pro různé částkové tony, jež z obr. 90. lze srovnáním poznati. Čárkováním jest naznačen současný pohyb v určitém směru, na př. positivním, nahoru. Třetí řada znázorňuje situaci při kmitání desky současném, simultanním, dle obou oněch směrů zároveň. Kde padnou místa čárkovaná na sebe, anebo, kde padnou místa nečárkovaná na sebe,



Obr. 104. Vznik obrazců zvukových dle theorie Wheatstoneovy.

tam jest pohyb souhlasný; uzlové body mohou vzniknouti jen v těch polích, kde padne místo čárkované na nečárkované, kde tedy výchylky jsou opačné; vzniknou pak v těch místech, kde výchylky opačné jsou zároveň stejně veliké. Dle toho jsou v třetí řadě uzlové čáry rýsovány. Řada čtvrtá ukazuje, jaké zvukové obrazce vskutku byly pozorovány. Shoda jest velmi dobrá. K docílení shody této přispělo dojista nemálo, že Koenig polohu uzlových přímek stanovil konkretně, pokusem, na proužcích téhož materialu a téhož rozměru, jako byly desky, jenom ovšem zkrácených ve směru uzlových přímek.

Záhadným zůstává úkaz, kterýž *M. Terquem* pozoroval a Koenig potvrdil, že ostré obrazce vznikají tehda, kdy unisonita dle obou směrů není dokonalá — kdy jest různost až o celý ton. Jiná záhada hledí k otázce již uvedené, zda-li se čáry uzlové protínají čili nic. Skutečné obrazce velmi zřídka ukazují průseky takové; a kde by vzniknouti měly, tam písek zůstává neurčitě rozsypaný, tak že ostrost čar přestává. Dokladem toho, že čáry uzlové se neprotínají, jsou obrazce 103. dle skutečnosti fotografované. *Strehlke*, jenž se (1825) obrazci zvukovými zabýval, tvrdí, že se čáry uzlové nemohou protínati a že také nejsou nikdy přímočaré; tam, kde se tak zdá, jedná se o hyperbolické větve. *Wheatstone* soudil, že protínání jest možné, a kde se nejeví, že jest to nedostatkem homogenity desky. *Koenig* poukazuje na variace obrazců, jež i při témže tonu desky vznikají dle toho, na kterém bodě se deska přidržuje nebo podpírá. Tyto variace lze vskutku pozorovati a lze tak zjistiti, jak mnohdy průseky čar se tím oddálí anebo přiblíží; ale přece ostrost čar blíže míst, kde by se průseky očekávaly, se tak, jak by se očekávalo, nedostavuje. V novější době vyšetřoval takovéto cyklické záměny obrazců zvukových při témže tonu *Shohé Tanaka* (1887). Pro desky kvadratické nalézá při tom zákon, kterým se řídí výška tonu desky. Je-li m počet uzlových čar v jednom, n počet v druhém směru, jest výška tonu u téže desky úměrnou součtu čtverců těchto čísel,

$$N = \text{const.}\ (m^2 + n^2).$$

Přes mnohý souhlas se skutečností dlužno přece theorii Wheatstoneovu jen za approximační pokládati; není zajisté pochybnosti, že kmity, dle dvou hlavních směrů předpokládané, se vzájemně modifikují, tak že jest nesnadno prostou superposici kmitů nerušených připustiti.

§ 110. **Zákony o chvění desek.**

Kmitočet tonu vznikajícího příčným chvěním tyčí, byl vyjádřen vzorcem

$$N = const.\ \frac{b}{L^2}\sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Číselná konstanta byla podmíněna způsobem upevnění neb podepření tyče a pak řadovým číslem tonu. Za stejných těchto okolností platí pro tyče vztahy následující:

Při témž materialu a různých rozměrech jest

$$\frac{N}{N'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{L'^2}{L^2}$$

a při různém materialu a týchž rozměrech jest

$$\frac{N}{N'} = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \sqrt{\frac{S'}{S}}.$$

Vzhledem k tomu, že se u desek jedná též o chvění příčné, dle dvou na sobě kolmých rozměrů linearních, lze pro desky očekávati vztahy podobné.

Již *Chladni* nalezl, že ton homogenních desek téhož materialu jest přímo úměrný tloušťce desky a obráceně úměrný její ploše, ovšem že za poměrů jinak stejných, t. j. při stejném tvaru desek a při stejném řadovém čísle tonu, kteréž se charakterisuje obrazcem. Tento zákon jest identický s oním prvým zákonem pro tyče, vzhledem k tomu, že čtverec délky má význam plochy.

Je-li material desek různý, jest výška tonu — caeteris paribus — úměrna druhé odmocnině z modulu elastičnosti přímo a druhé odmocnině z hmoty specifické obráceně.

Tyto zákony Chladniho zkoumal *Mercadier* (1885) na deskách kruhových a nalezl souhlas velmi dobrý.

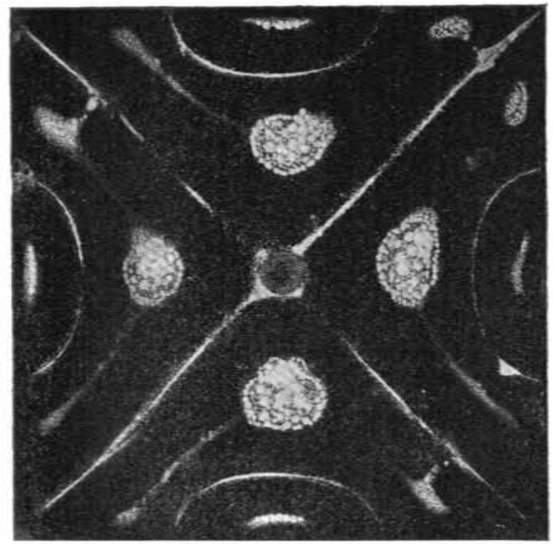
§ 111. **Obrazce Savartovy.**

Průběh pokusů, v předešlém odstavci popsaných, změní se úplně, nasype-li se na desku místo písku lykopodium, tedy prášek zcela jemný a lehounký. Když se deska rozezvučí, pozoruje se, jak se prášek žene na místa nikoli klidu, nýbrž největšího pohybu, kdež se zvedá jako mráček a vykonává živé vířivé pohyby; přichází-li pak deska v klid, usazuje se v hromádkách a proužcích, čímž vznikají též obrazce zvukové, zvané *Savartovy**). Příkladem jest obr. 105., ukazující desku, na níž jest zároveň zvukový obraz *Chladniho* i *Savartův*.

Oba obrazce mohli bychom zváti *komplementarnými* vzhledem k tomu, že jeden ukazuje průběh čar uzlových, druhý pak naznačuje polohu vrcholů. Vlastně jsou však opačné povahy,

*) *Savart* učinil své pozorování v roce 1827; zdá se však, že již *Chladni* pohyby lehkých prášků při vzniku obrazců zvukových pozoroval. Vysvětlení Savartovo, jež bylo nesprávné, opravil *Faraday* roku 1831.

totiž obrazec Chladniho *statické*, Savartův *kinetické*; tento se má pozorovati, když deska zvučí, onen, když dozvučela. Rozdíl tento jeví se při experimentování dosti zřetelně, zvláště chce-li se jeden i druhý obrazec obdržeti současně. Obrazec Chladniho vytvoří se velmi ostře, když se deska smyčcem rozezvučí a pak nechá volně doznívati. Obrazec Savartův naproti tomu vytvoří se způsobem zvláště charakteristickým, když se deska smyčcem prudce rozezvučí a pak náhle utlumí; v tom případě usadí se prášek v tom způsobu, který nejlépe naznačuje, jak byla asi jeho poloha při vířivém pohybu.



Obr. 105. Zvukový obrazec Chladniho a Savartův.

Původ obrazců Savartových spočívá v proudění částeček vzduchových na místech, kde deska nejprudčeji kmitá. Když se pokus provádí pod recipientem vývěvy, pomocí dlouhé skleněné tyče, na níž jest deska upevněna a která neprodyšně nahoře kováním recipientu prochází, a když se vzduch vyčerpá, neukazují se obrazce Savartovy žádné (Faraday); prášek usazuje se jen na čarách uzlových. Dlužno tedy za to míti, že na místech, kde deska jest v pohybu nejprudším, částečky vzduchové rychlou a prudkou vibrací desky se odhánějí, čímž zde vzniká zředění vzduchu; následkem toho tlačí se sem vzduch z míst okolních, čímž vznikají ony vířivé pohyby vzduchu, jimiž se prášek zvedá a v pohyby podobné přivádí.

Zajímavé zjevy lze též pozorovati, když se na desku opatrně dá větší kapka rtuti nebo vody, a když se pak deska rozezvučí. Na vodu lze též nasypati lykopodium (obrazce *Strehlkeho*). Též lze celou desku přesně horizontalně položenou potříti vrstvou kapaliny (vody, alkoholu) a pozorovati při rozechvění desky, jak se částečky kapaliny pohybují (obrazce *Faradayovy*).

Zvony. x)

§ 112. **Chvění zvonů.**

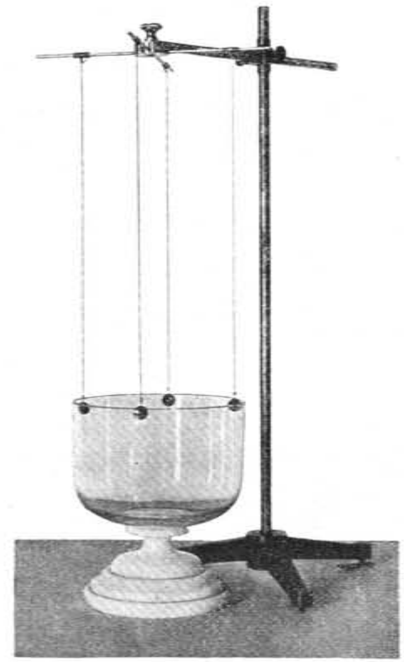
Zvony jsou tělesa rotační, na jedné straně otevřená, na druhé uzavřená a v ose upevněná. Mají se tedy k deskám podobně jako ladičky k tyčím. Ve chvění uvádějí se obyčejně nárazem, jako zvony věžní; zvony účelům akustickým sloužící uvádějí se ve chvění nejlépe jako desky, totiž třením smyčcem. Jsouce rozezvučené mají čáry uzlové analogické těm, jež jsme seznali u desek kruhových. Co u těchto jsou čáry paprskovité a soustředné, to jsou u zvonů čáry poledníkové a rovnoběžné, jak je dle známé analogie označujeme. Geometricky vznikají čáry tyto rovinnými řezy, vedenými jednak osou, jednak kolmo k ose. Čáry poledníkové rozdělují plochu zvonu na výseky, jichž počet nemůže býti jiný než sudý, vzhledem k tomu, že ve výsecích sousedních dějí se kmity ve směru opačném.

Ke studiu polohy čar uzlových a míst vrcholových lze užívati malých, lehkých kuliček dřevěných, jež jsou zavěšené na nitkách ve způsobu v obr. 106. znázorněném. Na čarách uzlových zůstávají kuličky v klidu, kdežto v meziuzlí prudce odskakují.

Také zvony dávají tonů několik, podobně jako desky, třebas ne v rozmanitosti tak veliké. Poučný jest v té příčině pokus následující. Čtyři lehké kuličky rozestaví se ve způsobu z obr. 106. znatelném na vnitřním kraji skleněného zvonu do stejných odlehlostí. Tře-li se kraj zvonu smyčcem uprostřed mezi dvěma kuličkami sousedními, ozve se základní ton zvonu a kuličky zůstanou úplně nebo téměř v klidu. Tře-li se však smyčcem v jedné třetině vzdálenosti obou kuliček, při čemž se to místo, kde je bližší kulička, prstem přidrží, ozve se nejbližší ton svrchní; tu pak tato bližší kulička a její protější zůstanou

x) Č. p. m. a f. XXXVII (1907) II. st. 207. Strouhal:

v klidu, dvě druhé se však velmi živě odrážejí. V prvém případě vznikly čtyři uzlové čáry meridianové, v druhém případě vznikne jich šest, a ony dvě kuličky odskakují živě, poněvadž na místa, kde jsou, připadají v meziuzlí právě vrcholy.

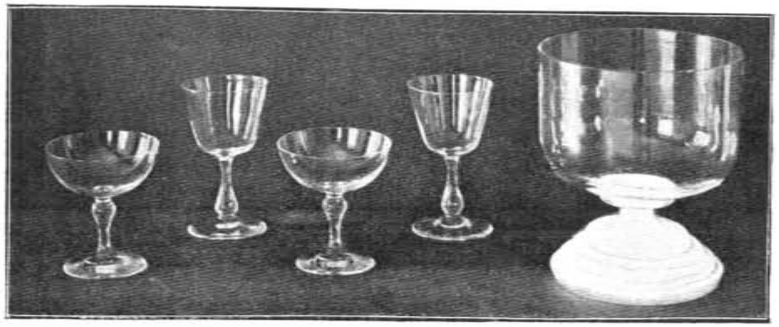


Obr. 106. Zkoumání uzlových čar u zvonů.

Jinak, jedná-li se nikoli o *původní* zvuk zvonu, nýbrž o některý jeho zvuk vůbec, lze chvění zvonů velmi pěkně studovati způsobem, který udal *Melde*. Do zvonu naleje se voda neb alkohol, a zvon se smyčcem rozezvučí; jako ony kuličky v obr. 106. tak odskakují nyní při živějším chvění zvonu kapky od meziuzlí, tvoříce sudý počet kaskad od kraje zvonu do vnitř vytryskujících, při čemž se zároveň kapalina zčeří velmi jemnými vlnkami. Počet kaskad souhlasí s počtem výseků; u tonu základního jsou 4, u dalších tonů částkových 6, 8, atd. Kdyby tloušťka zvonů byla všude stejná, byl by relativní kmitočet tonů částkových dán čtverci čísel 2, 3, 4, .. Případ tento však bývá vzácným. Zejména u zvonů věžních přibývá tloušťky směrem k obvodu, na obvodu pak samém, kde bije srdce zvonu, jest tloušťka značná, tak jako by zde byl hmotný znějící prsténec. Tím změní se postup tonů částkových úplně; lze pak docíliti — a v tom právě spočívá umění zvonařství — aby tony částkové, aspoň začáteční, byly harmonické; hlas zvonu stává se tak plným a hudebně dokonalým.

Za příklad uvádí Helmholtz veliký, v roce 1477 litý zvon dómu Erfurtského, dávající — dle pozorování organisty *Gleitze* — tony částkové *E*, *e*, *gis*, *h*, e^1, gis^1, h^1, cis^2. Proslulý zvonař *Hemony*, jenž žil ve století 17tém v Zütphenu, stanovil, aby dobrý zvon dával tři oktávy, dvě kvinty, velkou a malou tercii.

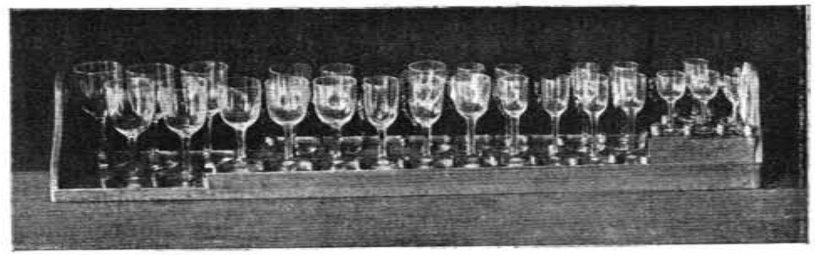
Mnohdy nebývá hmota zvonu kol jeho osy zcela stejnoměrně rozdělena; zvon dává pak povšechně dva tony základní, sobě blízké; při doznívání zvonu bývá často slyšeti záchvěje, jež současným zněním obou tonů těchto vznikají. Vhodnou volbou místa, kde by srdce zvonu bilo, lze oba tony od sebe odloučiti.



Obr. 107. Kalíšky ke studiu uzlových čar rozčeřením povrchu vodního.

S chvěním transversalným u zvonů jest spojeno též chvění tangentialné, při němž částečky kmitají podél obvodu. Na místech, kde pro transversalné kmity jest uzel, vzniká pro tangentialné vrchol. S tím souvisí zajímavý zjev následující. Tře-li se kalíšek skleněný toho tvaru, jako jsou menší v obr. 107. po kraji do kola, nejlépe prstem v octu namočeným, vzbudí se třením kmity tangentialné a s nimi zároveň transversalné, vzniká ton, týž, jako kdyby se sklenička třela smyčcem. Na místě, kde se při pohybu tomto nalézá prst, vzniká vrchol pro kmity podélné, a uzel pro příčné. To se ihned ukáže, když se do kalíšku na-

leje něco vody. Ton se sníží; hladina vodní se rozčeří jemnými vlnkami, vycházejícími od míst vrcholových vlnění příčného; utvoří se na povrchu vody jako kříž uzlových přímek, z nichž jedna míří k místu, kde jest právě prst. Proto, když prstem se jde po kraji, pohybuje se celá soustava uzlových těch přímek s prstem zároveň do kola, čímž vzniká zjev velmi zajímavý.



Obr. 108. Verrofon.

Ton kalíšku závisí na jeho velikosti, tloušťce skla a pod.; naleje-li se něco vody, sníží se ton. Lze tudíž vybrati mnoho kalíšků vhodných rozměrů, sestaviti je dle výšky tonu v řadu, a přiléváním vody je laditi tak, aby dávaly řadu tonů v ladění temperovaném. Tím vzniká akustický nástroj, *verrofon* (obr. 108.) hudebně ovšem bezvýznamný, ale fysikalně velmi zajímavý. Tony vyznačují se zvláštní měkkostí, jemností, upomínajíce na čistý hlas sopranový; proto melodie na stroj ten hrané zaznívají jako zpěv.

Blány.

§ 113. **Chvění blan.**

Blány (membrany) jsou k deskám v podobném poměru jako struny k tyčím; nemajíce z pravidla pružnosti vlastní, nabývají jí napjetím; toto předpokládá se — podobně jako u strun — za tak značné, aby se chvěním neměnilo. Blány mydlinové mají své vlastní napjetí povrchové. Jinak bývá materialem papír, který se poněkud navlhčený přilepí na dřevěný rámec, aby se vyschnutím napjal; též pergament, kaučuk a j.

Ve chvění lze membranu uvésti způsobem několikerým. Především krátkým nárazem na př. paličkou; avšak chvění takto vzbuzené rychle se tlumí. Ve chvění stálé uvedou se membrany buď proudem vzduchovým, který se trubicí žene zdola proti membraně vodorovně položené — způsob, jehož užíval *Marx*; anebo vhodněji způsobem, kterým *Savart* experimentoval, zněním píšťal, jimiž se u membrany způsobí spoluznění. K cíli tomu lze užívati píšťaly otevřené i kryté. Pohodlnější jest píšťala krytá, poněvadž se při ní — pošinováním pístu — jednoduše dá ton měniti. Píšťala otevřená postaví se pod membranu vodorovnou a to otevřeným koncem proti membraně. Píšťala krytá položí se pod membranu a to ústy proti membraně. Jest výhodno, aby píšťala měla základní ton aspoň o jednu oktavu vyšší, než jest základní ton membrany, který jest obyčejně hluboký. Když se ton píšťaly zvyšuje, uvádí se membrana ve spoluchvění, kdykoli ton píšťaly jest blízký některému ze svrchních tonů membrany. Tyto druží se ovšem k sobě při vyšších číslech řadových vždy těsněji; tím stává se pak, že membrany reagují často na ton jakýkoli, když jest dostatečně vysoký. Spoluchvění membrany zjistí se, když se na ni nasype něco mořského písku; zrnéčka odskakují a hromadí se podobně jako u desek, na čarách uzlových. Vznikají tedy i u membran obrazce zvukové; ovšem že čáry uzlové nevytvoří se tak ostře a určitě jako u desek.

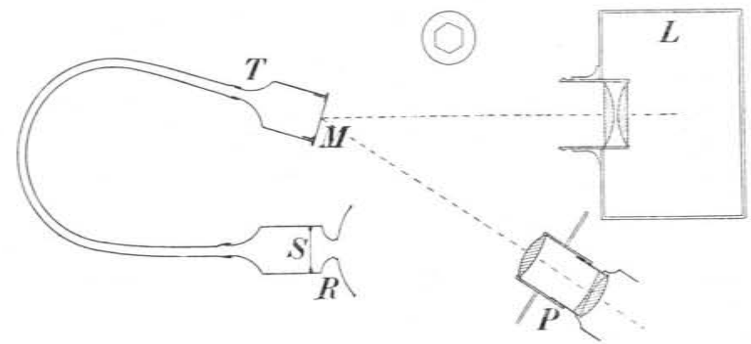
Podrobně studovali chvění membran kvadratických a kruhových *Bourget* a *Bernard* (1860). Tvary tyto jsou nejjednodušší ze všech, jež membrany mohou míti. Lze pak obrazce zvukové roztříditi dle jistých základních typů. Zejména u membran kruhových lze toto roztřídění přehledně zaříditi, poněvadž uzlové čáry nemohou býti jiné než průměry a soustředné kruhy. Tony částkové dají se pak dle počtu průměrů a dle počtu soustředných kruhů uvésti v jednoduchou soustavu. U membran kvadratických nelze jednoduchosti takové očekávati, poněvadž počet možných obrazců jest zde velmi veliký.

Dávají-li dvě různé membrany stejného tvaru týž obrazec zvukový, tudíž ton částkový téhož řádu, platí o kmitočtu tohoto tonu u jedné a u druhé membrany zákon podobný jako u desek:

$$N : N' = \sqrt{\frac{E}{M}} : \sqrt{\frac{E'}{M'}}.$$

Zde značí E, E' napjetí, M, M' úhrnnou hmotu membran. Je-li látka obou membran stejná, lze poměr hmot nahraditi poměrem objemů, kteréž se zase vypočítají z plochy membrany a její tloušťky. Řekne-li se, že jest látka stejná, bývá tím míněno,

že jest i tloušťka stejná; na př. se užije téhož druhu papíru neb pergamentu a pod. Pak lze obrácenou úměrnost s druhou odmocninou ze hmoty nahraditi obrácenou úměrností se stranou u membran kvadratických a s průměrem u membran kruhových.



Obr. 109. Chvění blány mydlinové v projekci.

Neobyčejně krásně lze chvění membran studovati a objektivně ukázati na blanách mydlinových (z kapaliny Terquemovy) způsobem v obr. 109. vysvětleným. Celý přístroj k tomu určený skládá se ze dvou částí; jsou to receptor R a transmittor T. Receptor obsahuje násadu tvaru nálevkového, která se přiloží k ústům; po případě se proti ní postaví píšťala anebo jakýkoli nástroj hudební. Proti násadě jest tenká deska slídová, která se danými zvuky uvádí ve chvění. Receptor je kaučukem (širším než bývá obyčejný) spojen s transmittorem; do tohoto zasadí se volně (aby vzduch stranou mohl unikati) kovové vložky, na něž se před tím vytvoří blána mydlinová; tvar blány může býti buď kruhový nebo pravoúhlý nebo pravidelně šestiúhelníkový a pod. Blána se osvětlí světlem elektrickým mírně konvergentním z lampy L a promítne projekční čočkou P na bílou stěnu. Obraz jeví se v barvách, jaké ukazují tenké vrstvy. Chvění slídové desky S přenáší se vzduchem na membranu M, která ukazuje na stinítku nad míru rozmanité tvary kmitové, dle toho, jak se do receptoru mluví, zpívá, hraje, jakým tonem, jakými hláskami, atd. Pozorovatel sledující tyto přečetné obrazce kmitové okem a zároveň příslušné zvuky sluchem jak vznikají, jak se střídají v rozmanitosti nevyčerpatelné, mohl by větším právem než řekl *Leconte* o zpívavých plamenech tvrditi, že by hluchý mohl na oněch obrazcích řeč, zpěv, hudbu, atd. viděti.

Pokus je velice poučný také z toho důvodu, že jest jím působnost telefonické desky objasněna, neboť jako blána mydlinová, ve své struktuře ovšem nejjemnější ze všech, jež vytvořiti dovedeme, tak kmitá i destička slídová, kteráž ony kmity vlastně vzbuzuje; proto můžeme si představiti, že podobně i tenká destička železná rozmanitými zvuky ve chvění každému zvuku význačná se uvádí.

Co se týče užívání útvarů, o nichž v posledních odstavcích jednáno, tedy desek, zvonů a membran, v hudbě, dlužno uznati, že jich význam jest skrovný. Tam, kde jde o účely čistě umělecké, nelze jich již proto užívati, poněvadž jich zvuky obsahují svrchní tony neharmonické. Přece však konají služby k některým účelům zvláštním. Co se desek týče, užívá se v divadlech nástroje, zvaného tamtam čili gong neb kumpul, obvyklého v Číně, Indii; jest to veliká měděná deska, uprostřed konkavní, na krajích ohnutá; údery slabými i silnými lze jí docíliti effektů symbolicko-dekorativních. V orchestru užívá se talířů (cymbalů, cinellů), kovových kruhových desek, které se bijí při hře jeden o druhý, obyčejně aby se jimi sesilovaly údery na bubny. Oba jmenované nástroje mají velice četné tony svrchní. Zvonů užívá se v hudbě zřídka, nejspíše v hudbě divadelní k docílení jisté nálady neb dramatického effektu.

Membrany jsou v hudbě zastoupeny při kotlích a bubnech. Užívá se při nich vydělané kůže. Výšku tonu, který dávají, lze napjetím měniti; avšak ladí se jen k tomu cíli, aby hudební souzvuk jiných nástrojů nerušily; působnost jejich jest k určitému označování více v rázech, rythmu, k symbolisování některých dějů, k akcentování jistých momentů hudební skladby a pod.

VI.

Vznik tonů chvěním podélným.

§ 114. Přehled úkolů.

Chvění podélné vzniká při útvarech podélných, linearních, jako jsou tyče, struny, hlavně však sloupce vzduchové. Tony tyčí neb strun, podélným chvěním vznikající, nemají hudebního významu, jsouce jen fysikalně důležitými; naproti tomu tony sloupců vzduchových u píšťal a hudebních nástrojů dechových mají velikou důležitost hudební a fysikalní zároveň. Dle úpravy rozeznáváme píšťaly retné čili labialní, a píšťaly jazýčkové čili lingualní. Hudební nástroje dechové druží se dle svého zařízení buď k píšťalám retným, jako flétna, anebo k píšťalám jazýčkovým, jako klarinet, fagot, dechové nástroje plechové, kde rty hrajícího zastupují jazýček, a j.

Fysikalní zajímavost mají znějící plaménky, chemická harmonika, kde sloupec vzduchový se rozezvučí účinkem plaménku vodíkového nebo plynového. V souvislosti s tím jsou též plameny citlivé. Píšťaly jsou známy od dob pradávných. Podobně trouby rozmanité úpravy a velikosti. Rozvoj hudebních nástrojů dechových připadá až na konec středověku a počátek věku nového. Tony strun vznikající chvěním podélným objevil *Chladni* (1787), jenž se též studiem podélného chvění tyčí podrobněji zabýval.

Tyče.

§ 115. Výklad úvodní.

K pokusům o podélném chvění tyčí brávají se tyče dřevěné, skleněné, kovové, zejména mosazné a ocelové, obyčejně průřezu kruhového po celé délce stejného, jehož rozměry proti délce jsou malé. Místo tyčí lze též užívati trubic; zejména trubice skleněné hodí se svou průhledností velmi dobře k některým studiím zvláštním. Ve chvění uvedou se třením podélným; tyče skleněné dlužno tříti šatem neb flanellem ve vodě, v octu nebo v alkoholu namočeným; tyče dřevěné neb kovové nejlépe koží neb plstí, na kterou jest nasypáno prášku kolofonia. U tyčí kovových stačí též poklepnouti kladívkem na plochy koncové ve směru délkovém, aby se ve chvění podélné uvedly. Při tom se tyč buď volně v ruce drží, nebo vhodně upevní, buď na obou koncích, nebo na jednom konci, nebo uprostřed. Dle toho řídí se rozdělení uzlů a vrcholů stojaté vlny podélné. Na uzlech střídá se zhuštění a zředění; na vrcholech zůstává hustota nezměněnou. Při studiu těchto změn, kteréž se nejlépe přehlédnou graficky, znázorňujeme obyčejně vlnu podélnou týmže způsobem jako vlnu příčnou, t. j. rýsujeme křivku, při níž výchylky (ovšem velmi zvětšené) jsou nanášeny kolmo na délku tyče; poloha uzlů a vrcholů vynikne tak nejlépe. Ale ovšem třeba při tom míti na paměti, že výchylky tyto se mají přeložiti ze směru příčného do směru podélného, dle zásady, o níž jsme již v § 25. (obr. 36. a 37.) jednali. K foronomickému znázornění (§ 31.) chvění podélného hodí se vlnostroj *Wheatstoneův*, nejlépe však vlnostroj *Weinholdův*, proto, poněvadž na tomto dobře lze studovati změny, jež nastávají různým způsobem upevnění tyče.

§ 116. Kmitočet a rozdělení uzlů.

Kmitočet tyčí jakož i rozdělení uzlů při podélném chvění závisí, jak již řečeno, na tom, zda-li tyč jest volná nebo jak jest upevněna. Věc se má podobně, jako při chvění tyčí příčném. Zachovávajíce tedy týž postup zde jako tam, budeme jednotlivé případy projednávati v pořádku tomto: 1) Tyč úplně volná. 2) Tyč na obou koncích upevněná. 3) Tyč na jednom konci upevněná. 4) Tyč uprostřed upevněná. Poslední případ dá se sice převésti na předcházející, ale jednáme proto o něm zvlášť, poněvadž pro experimentování jest právě tento způsob upevnění tyče nejpohodlnější a nejužívanější.

Material tyče určen jest modulem pružnosti E a specifickou hmotou S. Z obou veličin počítáme rychlost c, s jakou se vlna v tyčích šíří, dle vzorce již častěji užívaného

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Kmitočet N a délka vlny λ souvisí vespolek relací

$$\lambda = \frac{c}{N}, \qquad N = \frac{c}{\lambda}.$$

Délka tyče budiž L. Tyč dává řadu tonů částkových; jich číslo řadové označme k, kmitočet N, jako při chvění příčném.

1. Budiž tyč úplně volná. Rozdělení uzlů a vrcholů, jak se při jednotlivých částkových tonech ve shodě s podmínkou volnosti utváří, znázorňuje obr. 110. Patrně jest

$$L = 1 . \frac{\lambda}{2}, \quad 2 . \frac{\lambda}{2}, \quad 3 . \frac{\lambda}{2}, \ldots, \quad k . \frac{\lambda}{2},$$

tudíž kmitočet tonů částkových

$$N = 1 . \frac{c}{2L}, \quad 2 . \frac{c}{2L}, \quad 3 . \frac{c}{2L}, \ldots, \quad k . \frac{c}{2L}.$$

2. Budiž tyč na obou koncích upevněna. Rozdělení uzlů a vrcholů při jednotlivých tonech částkových ve shodě s danou podmínkou znázorňuje obr. 111. Patrně jest opět

$$L = 1 . \frac{\lambda}{2}, \quad 2 . \frac{\lambda}{2}, \quad 3 . \frac{\lambda}{2}, \ldots, \quad k . \frac{\lambda}{2},$$

tudíž kmitočet tonů částkových

$$N = 1 . \frac{c}{2L}, \quad 2 . \frac{c}{2L}, \quad 3 . \frac{c}{2L}, \ldots, \quad k . \frac{c}{2L}.$$

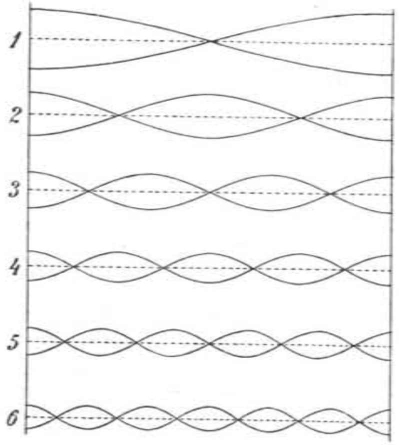
Oba případy 1. a 2., různící se rozdělením uzlů, jsou v kmitočtech tonů částkových úplně shodné. Jest zde souhlas se chvěním příčným v případech analogických; (§ 89. a 91.); při těchto byla v rozdělení uzlů a vrcholů různost, ale v kmitočtech tonů byla shoda.

Z uvedených vztahů jest viděti, že při tyči úplně volné nebo na obou koncích upevněné jsou částkové tony zároveň *harmonickými*.

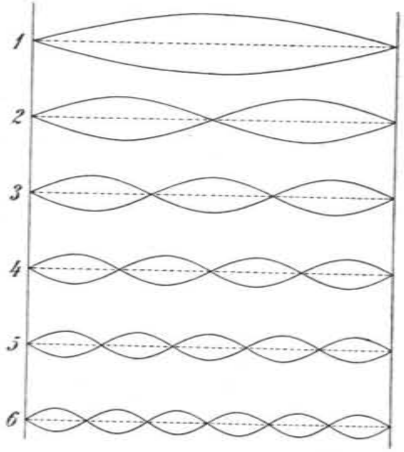
V této příčině jest tedy úplná shoda se strunami. Proto jsme též užili obrazce 110. pro struny; co u strun platí ve směru příčném, to u tyče stejně upevněné platí ve směru podélném.

3. Budiž tyč na jednom konci upevněna, na druhém volná. Ve shodě s touto podmínkou jeví se rozdělení uzlů a vrcholů tak, jak v obr. 112. znázorněno. Patrně jest

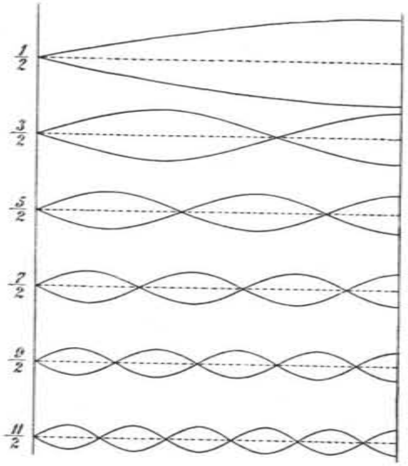
$$L = 1 . \frac{\lambda}{4}, \quad 3 . \frac{\lambda}{4}, \quad 5 . \frac{\lambda}{4}, \ldots, \quad (2k-1) . \frac{\lambda}{4},$$



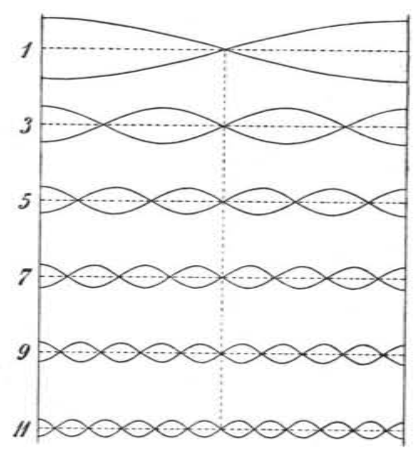
Obr. 110. Podélné chvění tyče úplně volné.



Obr. 111. Podélné chvění tyče na obou koncích upevněné.



Obr. 112. Podélné chvění tyče na jednom konci upevněné, na druhém volné.



Obr. 113. Podélné chvění tyče uprostřed upevněné.

tudíž kmitočet tonů částkových

$$N = 1 \cdot \frac{c}{4L}, \quad 3 \cdot \frac{c}{4L}, \quad 5 \cdot \frac{c}{4L}, \ldots, \quad (2k-1) \cdot \frac{c}{4L}.$$

4. Budiž tyč uprostřed upevněna, jinak volná. Touto podmínkou určeno jest rozdělení uzlů a vrcholů a utváří se tak, jak v obr. 113. znázorněno. Patrně jest

$$L = 1 \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad 3 \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad 5 \cdot \frac{\lambda}{2}, \ldots, \quad (2k-1) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

tudíž kmitočet tonů částkových

$$N = 1 \cdot \frac{c}{2L}, \quad 3 \cdot \frac{c}{2L}, \quad 5 \cdot \frac{c}{2L}, \ldots, \quad (2k-1) \cdot \frac{c}{2L}.$$

Opět shodují se oba případy 3. a 4. Jsou jako by jediným případem, lišíce se jen tím, že tyč uprostřed upevněná jeví se jako dvojitou tyčí na konci upevněnou. Při stejné úhrnné délce jest pak v případě 4. patrně $\frac{L}{2}$, co je v 3. případě L; proto když ve vzorcích 3. položíme $\frac{L}{2}$ za L, obdržíme vzorce 4. Tím jest též jasno, že tyč v případě 4. dává — caeteris paribus — ton o oktavu vyšší, poněvadž jest její délka vlastně poloviční.

Důležitý rozdíl proti případům 1. a 2. jeví se však v tom, že tyč dává jen *liché* tony *harmonické*; způsobem upevnění jsou *sudé* tony harmonické *vyloučeny*.

Všeobecně platí úměrnost kmitočtu N, a to přímá s rychlostí c, obrácená s délkou L. V této úměrnosti jest úplná shoda se strunami. Důležitý však rozdíl jest v tom, že průřez tyčí nemá na výšku tonu účinku žádného. Za jinak stejných poměrů dávají stejně dlouhé z téhož materialu pracované tyče tytéž tony, byť i tloušťka jejich byla různou, pokud jest jen malou proti délce.

§ 117. **Intervall základních tonů u tyčí podélně a příčně se chvějících.**

Jest zajímavo srovnávati u téže tyče za jinak stejných poměrů kmitočty N_l a N_t základních tonů při chvění longitudinalném a transversalném.

Budiž tyč buď úplně volnou nebo na obou koncích upevněnou.

Pak platí vzorce:

$$N_l = \frac{c}{2L},$$

pro tyč kruhovou $\qquad N_t = 0{\cdot}8902 \,.\, \frac{hc}{L^2},$

pro tyč pravoúhlou $\qquad N_t = 1{\cdot}0279 \,.\, \frac{bc}{L^2}.$

Ze vzorců těchto počítáme intervall obou tonů

pro tyč kruhovou $\qquad \frac{N_l}{N_t} = 0{\cdot}5617 \,.\, \frac{L}{h},$

pro tyč pravoúhlou $\qquad \frac{N_l}{N_t} = 0{\cdot}4864 \,.\, \frac{L}{b}.$

Délka tyčí L jest vždy větší než dvojnásobná tloušťka $2h$ neb $2b$; proto jest vždy

$$N_l > N_t,$$

proto jsme též počítali intervall $N_l : N_t$ a nikoli naopak, aby vyšlo číslo větší než jednička, čili, aby logarithmický intervall vyšel positivní. Jest patrno, že intervall tento jest v případech, jak obyčejně při experimentování bývají, velmi veliký. Je-li na př. tyč metrová tloušťky jednoho centimetru, činí intervall 56·2, a 48·6, což jsou tony v páté oktavě. Kdyby transversalný ton byl C, byl by longitudinalný u tyče kruhové téměř malá septima *hes*⁴, u tyče pravoúhlé téměř kvinta g^4 vzhledem k páté oktavě c^4 původního tonu C. Tony transversalné jsou tedy hluboké, longitudinalné vysoké. Okolnost tato stěžuje zkoušku uvedených vzorců pokusem, poněvadž výška tonů hlubokých nejeví se dosti určitě, aby intervall mohl s plnou jistotou býti stanoven. *Savart* vyhnul se obtíži této způsobem následujícím. Počítal N_l pro některé tyče, jichž délka byla přibližně 1 m, a počítal též — dle vzorců posledních — N_t; aby pak toto číslo mohl pokusem kontrolovati, zkrátil tyče na $\frac{1}{8}$ délky a pozoroval N_t' u těchto tyčí krátkých. Patrně jest $N_t' = 64\, N_t$; zkrácením délky na $\frac{1}{8}$ přivedl ton N_t na šestou oktavu, kterou mohl sonometricky přesněji určiti. Shoda výšky takto pokusem stanovené a počtem určené byla zcela dobrou.

Budiž tyč na jednom konci upevněna. Pak platí vzorce:

$$N_l = \frac{c}{4L},$$

pro tyč kruhovou $\qquad N_t = 0{\cdot}1399 \,.\, \frac{hc}{L^2},$

pro tyč pravoúhlou $\qquad N_t = 0{\cdot}1615 \,.\, \frac{bc}{L^2}.$

Intervall obou tonů jest tudíž

pro tyč kruhovou $\qquad \frac{N_l}{N_t} = 1{\cdot}7870 \,.\, \frac{L}{h},$

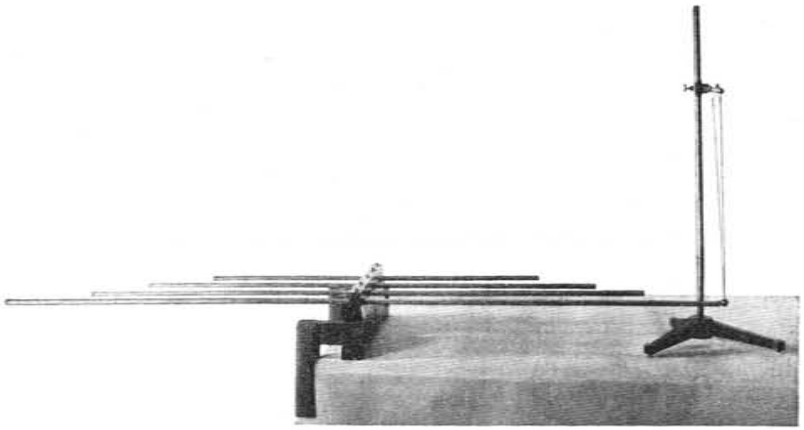
pro tyč pravoúhlou $\qquad \frac{N_l}{N_t} = 1{\cdot}5485 \,.\, \frac{L}{b}.$

Zde jest tedy intervall ještě značně větší. V příkladě dříve voleném byl by intervall 178·7 a 154·8, což jde do tonů osmé oktavy, přibližně do kvinty a velké tercie, g^7 a e^7, byl-li příčný ton C.

§ 118. **Pokusy.**

Pokusy o podélném chvění tyčí lze prováděti velmi snadno. Každá skleněná tyč neb trubice, uprostřed volně v ruce držená, tře-li se na konci, vydává ton základní; k němu lze snadno obdržeti oktavu i duodecimu, když se tyč drží v rukou na místě, kde má vzniknouti uzel a když se přiměřeně prudčeji na konci tře. Z tyčí dřevěných (na př. ze suchého dříví jedlového) do velkého špalíku dřevěného pevně vertikalně zasazených lze sestaviti jako dřevěnou harfu, dávající několik oktav tonů v ladění temperovaném. Tony jsou zvučné a dosti silné. Nejpohodlněji upevňují se však tyče uprostřed, t. j. v těžišti, způsobem, jak v obr. 114. znázorněno. Snadno lze ukázati zákon obrácené úměrnosti kmitočtu a délky tyče. Malou kuličkou dřevěnou bifilarně zavěšenou a lehce ke konci tyče doléhající lze ukázati vibrace podélné tohoto konce; zvučí-li tyč, odskakuje kulička velmi prudce. Zvučné tony dávají tyče ocelové; též, ač méně, tyče mosazné; jsou-li krátké, obdrží se ton jednoduše klepnutím kladívkem na plochu konečnou.

Pokusem velmi poučným ukázal *Biot* (1820), jak tyč skleněná v uzlech anebo v blízkosti uzlů stává se opticky anisotropní následkem zhuštění a zředění, jež zde podélným chvěním vzniká. Stlačuje-li se sklo, stává se opticky jednoosým negativním, roztahuje-li se, stává se opticky jednoosým, positivním. Směr optické osy jest dán směrem, ve kterémž působí tlak nebo tah. Když se tedy lamella, z tabule zrcadlového skla vyříznutá, uvede třením ve chvění podélné, nastává v uzlech zhuštění a zředění jako by zde působil ve směru délkovém tlak nebo tah. Skleněná lamella chová se tudíž v uzlech jako destička jednoosého krystallu, rovnoběžně s optickou osou broušená, která jest střídavě negativní a positivní. Když se destička taková vloží mezi dva skřížené nikoly, a to osou svou souměrně (v úhlu 45°) k rovinám polarisačním obou nikolů, pak se optické pole před tím tmavé vyjasní a při světle bílém zabarví. Je-li destička málo dvojlomná, anebo tenká, vystupuje zabarvení



Obr. 114. Pokusná úprava pro podélné chvění tyče.

velmi slabě, zřetelně však vyjasnění pole. A právě toto vyjasnění ukázal Biot, vloživ lamellu skleněnou v blízkosti uzlu mezi skřížené nikoly, jichž roviny polarisační byly k délce lamelly souměrné. *Kundt* (1864) vedl světlo nikoly propuštěné k analysačnímu zrcátku a otáčeje tímto rozvinul děj časově (§ 7.). Světelný pás, který tak obdržel, byl protkán četnými tmavými pruhy. Vskutku jedná se o děj *periodický, intermittující*; neboť v uzlu *střídá se* zhuštění a zředění, *přechod* děje se hustotou *normalní*, při kteréž sklo *není* dvojlomným; při těchto přechodech zůstává tedy pole tmavé; proto vystupují tmavé proužky v onom pásu světelném. Světlé proužky — mezi těmito tmavými — jsou, jak již řečeno, vlastně barevné, jen že zabarvení jest velmi slabé. *Mach* (1872) sledoval úkaz ještě dále a užil rozboru spektralního. Ve spektru se objevují tmavé, neurčitě ohraničené čáry, které při znění tyče se pošinují, kmi-

tajíce v tempu, jak výšce tonu přísluší. Toto kmitání lze sledovati v analysujícím zrcadle. Mach zkoumal zjev též kvantitativně. Pošinování pruhů a čar ve spektru jest značné; svědčí o velmi značných změnách hustoty, jež by jinak jen velkým tlakem neb tahem bylo možno obdržeti. Tím jest pochopitelno, že skleněná tyč, jsouc prudce rozezvučena, může se na kusy roztrhati. Na tento účinek periodických podélných vibrací dlužno však též u tyčí na př. železných pamatovati, kde se jedná o otázky pevnosti (na př. při železných mostech). Tyč, jsouc zatížena břemenem konstantně působícím, unese mnoho, ale může se přetrhnouti, když břemeno toto se octne v periodických pohybech (na př. na mostech chůzí), čímž se způsobují v tyči podélné vibrace. *Savart* (1824) měřil sférometrem pošinutí konečných ploch u tyče podélně se chvějící a konstatoval rovněž, že jest tak veliké, jako by tyč vahou velmi značnou — kterou v určitých případech lze počítati — byla zatížena.

§ 119. **Měření rychlosti zvuku a modulu pružnosti.**

Jednoduchost vzorců v § 116. odvozených

$$N = \frac{c}{2L}, \quad \text{resp.} \quad N = \frac{c}{4L}$$

vybízí přímo určovati rychlost c z délky tyče L a z kmitočtu N tonu základního. Vzhledem ke vztahu

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}}$$

lze pak z rychlosti c počítati též modul pružnosti E, je-li specifická hmota S látky známa. Tato methoda stanovení modulu E zove se *akustickou*, oproti methodám jiným, jež jsou *mechanické*. Počet dlužno provésti dle jednotek cm-g-sec; modul E vyjde pak v jednotce $\frac{dyna}{cm^2}$, a dá se snadno na jiné jednotky přepočísti (§ 69.). Tony N jsou velmi vysoké, tak že určení polohy oktavové bývá nejistým. Nesnáze však tím vzniknouti nemohou; neboť chyba v určení tonu N o jednu oktavu vede k modulu čtyřikráte většímu neb menšímu; a poněvadž přibližná hodnota modulu bývá známa, není možno, aby chyba nebyla dodatečně zpozorována. Rychlost c určil touto methodou pro mnohé látky *Chladni*. Methodu zdokonalil *Kundt* (1866) způsobem, o němž níže pojednáme.

Struny.

§ 120. **Poměr kmitočtů při chvění příčném a podélném.**

Struny lze uvésti ve chvění podélné, jak ponejprv *Chladni* zpozoroval, když se smyčec vede k délce struny velmi šikmo; struny kovové též tak, že se po délce trou papírem, který se navlhčí terpentinem; u strun kovových silnějších docílí se tonu zvučného, když se tření děje plstí, na kterou se nasype prášek kolofonia. Struna dává ton jako tyč na obou koncích upevněná.

Zajímavo jest srovnati výšku N_l tohoto tonu (základního) s výškou tonu N_t (rovněž základního) při chvění příčném. Máme zde vzorce (§ 116. a § 78.) formalně stejné

$$N_l = \frac{c}{2L}, \qquad N_t = \frac{v}{2L}.$$

Při tom jsou c a v rychlosti, jakými se kmity podélné a příčné ve struně šíří; určeny jsou výrazy formalně též stejnými

$$c = \sqrt{\frac{E}{S}}, \qquad v = \sqrt{\frac{p}{S}},$$

v nichž znamená E modul elastičnosti, $p = \frac{P}{q}$ napjetí struny, t. j. zatížení na jednotku průřezu vztahované, S hmotu specifickou. Dle toho jest jednoduše:

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{E}{p}}.$$

Jinou formu rovnice této obdržíme, když dle definice*) modulu E zavedeme prodloužení $\varDelta L$ struny o délce L při napjetí p. Jest totiž

$$\frac{p}{E} = \frac{\varDelta L}{L},$$

tudíž

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{L}{\varDelta L}}.$$

Forma tato vyjádřuje způsobem očividným, jak ton, při chvění struny podélném vznikající, jest značně vyšší než ton chvěním příčným vzbuzený. Prodloužení $\varDelta l$ jest jen malou částí celé délky L. Proto jest poměr $L : \varDelta L$ číslo velmi veliké, tak

*) Mechanika, § 378., pag. 590, 1901.

že i jeho druhá odmocnina jest ještě velmi veliká. Fakticky se však dle posledního vzorce nepočítá, nýbrž dle prvnějšího, poněvadž prodloužení struny nelze tak snadno měřiti.

Při struně na vertikalním monochordu napjaté měli jsme v § 85.:

$$p = 7853 \frac{megadyna}{cm^2},$$

$$E = 2020000 \frac{megadyna}{cm^2}.$$

Z těchto číselných hodnot se vypočítá

$$\sqrt{\frac{E}{p}} = 16{\cdot}04.$$

Dle toho jest v konkretním tomto případě

$$\frac{N_l}{N_t} = 16{\cdot}04,$$

t. j. ton N_l jest velmi blízce (až na pětinu kommatu) čtvrtou oktavou tonu N_t.

Pokus souhlasí s tímto výsledkem velmi dobře. Struna se tře bassovým smyčcem nejprve příčně a pak týmže smyčcem podélně, při čemž se může smyčec nechati v poloze příčné a vésti tak po struně. Oba tony znějí zvučně, a jich intervall oktavový lze v konsekutivní souvislosti dobře posouditi.

Z rovnice

$$\frac{N_l}{N_t} = \sqrt{\frac{E}{p}}, \qquad p = \frac{P}{q},$$

určí se jednoduše modul elasticity

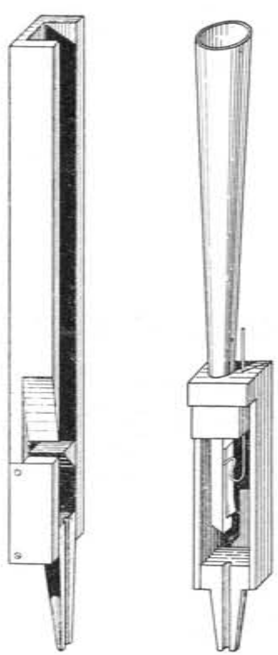
$$E = \left(\frac{N_l}{N_t}\right)^2 \cdot \frac{P}{q}$$

z intervallu obou tonů transversalného a longitudinalného a z napjetí P na jednotku průřezu přepočítaného. Průřez q postačí, počítá-li se dle vzorce $q = \pi r^2$ z průměru $2r$ struny napjaté, který se změří kontaktním měřítkem. Jinak určí se průřez q přesněji vážením a při tom vezme se dodatečně v počet též kontrakce průřezu, vznikající prodloužením struny, ve způsobu v § 81. na příkladě objasněném.

Píšťaly.

§ 121. Rozdělení píšťal.

U píšťal má se rozezvučeti daný sloupec vzduchový, jehož rozměry průřezové jsou malé proti délce. Toho lze docíliti *spoluzněním, resonancí.* Ton, s nímž sloupec vzduchový se uvádí ve spoluznění, jest dán; dle způsobu pak, jakým ton tento vzniká, dělí se píšťaly ve skupiny dvě.



Obr. 115. Píšťala retná a jazýčková.

1. Daný ton vzniká jakožto *ton třecí,* prouděním vzduchu proti ostré hraně (§ 86.). Píšťaly na tomto základě upravené zoveme *retné, labialní.*

2. Daný ton vzniká příčným chvěním plíšku, *jazýčku,* kterýž jest na jednom konci upevněn, na druhém volný (§ 93.). Píšťaly na tomto základě upravené zoveme *jazýčkové, lingualní.*

K předběžné orientaci o úpravě obou těchto druhů píšťal slouží obr. 115. Ton třecí u jednoho, jazýčkový u druhého způsobu vzniká v jádru píšťaly, jejíž hořejší část obsahuje vzduchový sloupec jako ozvučník čili resonator. Když by se sloupec tento odstranil, zněl by ton daný pro sebe dále; ton třecí, při určité rychlosti proudění vzduchu, slaběji, ton jazýčku dosti silně, ale oba samostatně, nejsouce oním sloupcem podmíněny. Proto píšťaly dávají nejvhodnější a nejznámější příklad akustického spoluznění.

§ 122. Píšťaly retné.

Resonance sloupců vzduchových, vzbuzená tonem třecím, ukazuje se již, když se fouká přes kraj nádoby válcovité, baňky, láhve a pod., v níž jest vzduch. Aby se ton třecí lépe vytvořil, vede se proud vzduchový, štěrbinou zúžený, proti hraně. Dle této základní myšlenky jsou upraveny varhanní píšťaly, jež označujeme jako *retné* čili *labialní.* Jsou buď cínové nebo dřevěné. Proud vzduchový vstupuje (obr. 115.) nožkou čili patkou do vzduchové komory, která se zúžuje ve štěrbinu. Touto proudí vzduch do části otevřené, která se obrazně označuje jako ústa píšťaly, proti hraně klínu, který tvoří ret svrchní, kdežto dolejší stěna štěrbiny tvoří ret spodní. Nad ústy začíná těleso píšťaly, obsahující sloupec vzduchový. Průřez jeho jest buď kruhový, jako u píšťal cínových, nebo pravoúhlý, jako u píšťal dřevěných. Poměr rozměrů průřezových k délce určuje míru čili *mensuru* píšťal. Příklady jakož i význam mensury seznáme později.

Rozměry průřezové, jimiž se číselně vyjadřuje mensura píšťal, bývají u průřezu kruhového průměr. (někdy též obvod), u průřezu pravoúhlého hloubka. Mensura píšťal širokých bývá až 8, úzkých až 40. To jsou čísla extremní, mezi nimiž případy skutečné jsou obsaženy. Při celém registru, jak bývá u varhan, není mensura všech píšťal konstantní, nýbrž píšťaly pro tony vysoké jsou poměrně poněkud širší.

V ústech píšťaly tvoří se tedy vzduchem proti hraně hořejšího rtu proudícím ton třecí. Jeho výška jest podmíněna především tvarem úst, tedy šířkou štěrbiny, ostrostí hrany, její vzdáleností od štěrbiny, do jisté míry též její polohou v proudu vzduchovém, dále pak rychlostí proudění vzduchu. Ozvučný sloupec vzduchový sesílí ton takový, jímž se dle daných podmínek podélného vlnění může rozezvučeti.

Tyto podmínky týkají se především otázky, zda-li jest píšťala *otevřená* nebo *krytá;* dále otázky, zda-li sloupec vzduchový vydává svůj ton *základní* nebo některý *svrchní.*

Obyčejně žádá se, aby píšťala vydávala svůj ton *základní.* Dle toho nutno tvar úst zaříditi. Hořejší ret nesmí býti dolejšímu příliš blízko, aby hrana hořejší nepřišla do proudu vzduchového silného, čímž by ton třecí byl vyšší. Nesmí býti též hrana jakkoli ostrá neb tupá, nýbrž výšce tonu přiměřená, tedy při hlubších tonech tupější, a při vyšších ostřejší. Je-li na př. píšťala dlouhá, tedy pro hluboký základní ton zařízená, hrana hořejšího rtu však ostrá, lze základní ton velmi nesnadno obdržeti a to jen tím způsobem, že se fouká velice slabě; následkem toho jest pak ovšem tento základní ton sotva slyšitelný. A když se rychlost proudění vzduchu jen málo zvýší, hned přeskočí ton, píšťala se, jak říkáme, přefoukne, ozve se některý z tonů svrchních. Toto přeskočení tonu nastane ostatně u každé píšťaly, když se rychlost proudění vzduchového zvyšuje. Z počátku jde i ton základní poněkud do výšky, ale pak náhle se ozve nejbližší ton částkový, a opět následující, a tak se obdrží celá jich řada, velmi snadno u píšťal úzké mensury, méně snadno u píšťal široké mensury, poněvadž zde velký průřez sloupce vzduchového znesnadňuje složitější způsob chvění. Jak viděti, jedná se o zjev týž jako u strun, které se rozezvučí tony třecími (§ 87.).

Tento názor o vzniku tonů v píšťalách vyložen jest ve spisu výše citovaném: D[r] *V. Strouhal*, Ueber eine besondere Art der Tonerregung, Würzburg, 1878. *Fr. Melde*, jednaje ve své Akustice 1883 o píšťalách (pag. 249.) praví: „Dojista náleží všechny podobné tony k tak zvaným tonům třecím, jichž význam, jak jsme již nahoře (p. 72.) viděli, roku 1878 Strouhal též v jiných směrech vyložil. Na konci svého nahoře citovaného pojednání vykládá vznik tonů píšťal tony harmonickými; já pak připojuji se tomuto názoru úplně. Též *Tyndall* s ním souhlasí . . . Dlužno tudíž za to míti, že se zde jedná o úkaz resonance, jejíž základní zákony též zde mají svou úlohu.“ Na str. 252. udává pak dále, jak se přímým studiem tonů třecích i vzduchových o správnosti názoru toho přesvědčil. O tonech prouděním vzduchu štěrbinami vznikajících podal podrobnou studii *W. Kohlrausch* (1881) a nalezl zákony, jež jsou se zákony pro třecí tony nalezenými v plném souhlasu.

§ 123. **Zákony Bernoulliho**.

Zákony, jimiž se stanoví výška tonu píšťaly otevřené neb zavřené, objevil r. 1762 *Daniel Bernoulli*. Jsou v podstatě tytéž, jako zákony platící pro podélné chvění tyčí.

1. Budiž píšťala otevřená. Sloupec vzduchový chvěje se tak, jako tyč úplně volná (§ 116.). Je-li tudíž L délka píšťaly, N kmitočet některého tonu částkového, c rychlost zvuku ve vzduchu, platí vztahy

$$L = 1 \cdot \frac{\lambda}{2},\quad 2 \cdot \frac{\lambda}{2},\quad 3 \cdot \frac{\lambda}{2}, \ldots,\; k \cdot \frac{\lambda}{2},$$

$$N = 1 \cdot \frac{c}{2L},\quad 2 \cdot \frac{c}{2L},\quad 3 \cdot \frac{c}{2L}, \ldots,\; k \cdot \frac{c}{2L}.$$

Píšťala otevřená dává řadu tonů částkových kteréž jsou *harmonické*. Dává-li ton svůj základní, zaznívají též vyšší tony harmonické s ním zároveň, čímž vzniká *zvuk*, jenž svou harmonickou dokonalostí se druží ke zvuku strun. Polohu uzlů a vrcholů v píšťale otevřené, dává-li některý ze svých částkových tonů, znázorňuje obr. 116., (jenž jest analogický s obrazcem 110.).

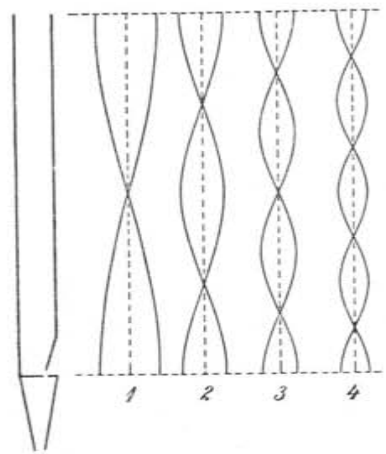
2. Budiž píšťala krytá. Sloupec vzduchový chvěje se tak, jako tyč na jednom konci volná, na druhém upevněná (§ 116.).

Znamená-li tudíž opět L délku píšťaly, N kmitočet některého tonu částkového, c rychlost zvuku ve vzduchu, platí vztahy

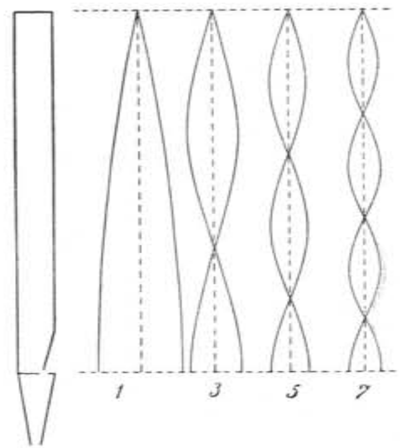
$$L = 1 \cdot \frac{\lambda}{4},\quad 3 \cdot \frac{\lambda}{4},\quad 5 \cdot \frac{\lambda}{4},\; \ldots,\; (2k-1)\frac{\lambda}{4},$$

$$N = 1 \cdot \frac{c}{4L},\quad 3 \cdot \frac{c}{4L},\quad 5 \cdot \frac{c}{4L},\; \ldots,\; (2k-1)\frac{c}{4L}.$$

Píšťala dává tedy opět řadu tonů, jež jsou harmonické, avšak tony sudé scházejí, zůstávají *jen* tony *liché*. Tyto zaznívají se základním tonem též zároveň; píšťala dává zvuk, avšak nikoli tak plný jako píšťala otevřená, poněvadž sudé tony harmonické v něm nejsou. Polohu uzlů a vrcholů v píšťale kryté, dává-li některý ze svých tonů částkových, objasňuje obr. 117., (jenž jest analogický s obrazcem 112.).



Obr. 116. Poloha uzlů a vrcholů v retné píšťale otevřené.



Obr. 117. Poloha uzlů a vrcholů v retné píšťale kryté.

Co se pak týče *základního* tonu, máme

$$\text{pro píšťalu otevřenou} \quad N_1 = \frac{c}{2L},$$

$$\text{pro píšťalu zavřenou} \quad N_1 = \frac{c}{4L}.$$

Základní ton píšťaly kryté jest tudíž dolejší oktava základního tonu píšťaly otevřené.

Když se tedy píšťala otevřená kryje, sníží se ton základní i všechny harmonické o jednu oktavu, při čemž se současně harmonické sudé vyloučí.

Dle vzorců uvedených lze délku píšťaly na př. otevřené pro daný základní ton jednoduše počítati. Dříve se stanovily tyto délky ve stopách. Tak udává na př. *Sauveur* ve stopách pařížských pro tony N následující délky L:

$$\text{Ton} = C_1,\quad C,\quad c,\quad c^1,\quad c^2, \ldots$$
$$L = 32,\quad 16,\quad 8,\quad 4,\quad 2, \ldots.$$

Dle toho označují se dosud hlasy (rejstříky) varhan jako 16-stopové, atd. dle délky otevřené píšťaly, která přísluší prvnímu tonu manualu nebo pedalu. Tak bývá na př. principal na manualu 8-stopový, na pedalu 16-stopový. Subbass pedalový jest 32 stopový, (nebo 16-stopový krytý), kdežto oktava manualová jest 4-stopová, superoktava 2-stopová. Při kombinování hlasů varhan jsou tato stopová označení na rejstříkových trakturách pohodlná, poněvadž rychle orientují o výškové poloze hlasů těch.

Počítáme-li dle oněch vzorců přesněji, a to v metrech i v pařížských stopách*) a volíme-li ladění temperované, jak jest u varhan pravidlem, obdržíme výsledky následující:

$$c = 340\,\frac{m}{sec},\qquad c = 1046{\cdot}7\,\frac{stop}{sec}.$$

Ton =	C_1,	C,	c,	c^1,	c^2, ...
N =	32·33,	64·66,	129·3,	258·7	517·4, ...
L =	5·26,	2·63,	1·31,	0·66,	0·33, ...
L =	16·19,	8·09,	4·05,	2·02,	1·01, ...

Hořejší řádek udává délku v metrech, dolejší v pařížských stopách.

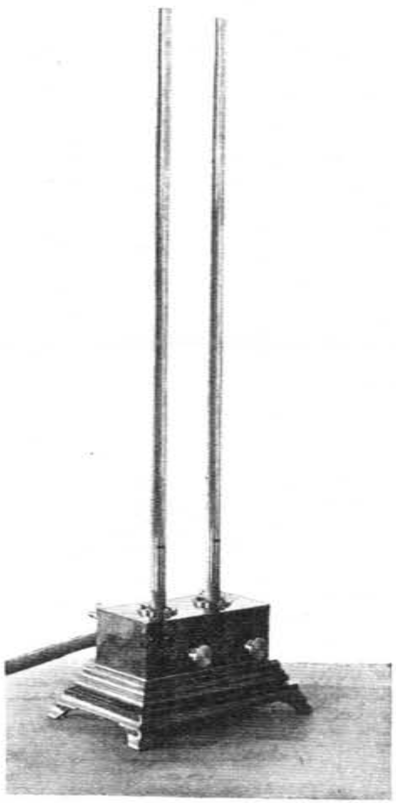
§ 124. Pokusy.

K pokusům o znění píšťal jest třeba míti výběr píšťal cínových i dřevěných, otevřených a krytých, a k nim dobrý měch, velké kapacity a takové úpravy, aby se tlak, kterým vzduch proudí, dal regulovati. Požadavkům těmto velmi dobře vyhovují malé varhany, znázorněné v obr. 118. Obsahují tři oktavy píšťal cínových, mensury úzké (rejstřík viola da gamba) v rozsahu $c \ldots c^3$, dále dvě oktavy píšťal dřevěných, krytých (rejstřík bourdon) v rozsahu $C \ldots c^1$ a k tomu jako pokračování jednu oktavu, $c^1 \ldots c^2$, dřevěných píšťal otevřených (rejstřík flétna otevřená). Ladění jest obvyklé temperované. Ve varhanách jsou dva měchy čerpací, kteréž hrající, podobně jako při harmoniu, střídavě nohama šlape; toto zařízení se dvěma měchy ssacími jest výhodnější než jenom s jedním, poněvadž lze vzduch ne

*) Mechanika, § 20., tabulka pag. 29, 1901.

Obr. 118. Varhany k pokusům laboratorním.

v jednotlivých nárazech, nýbrž téměř stálým proudem hnáti do měchu zásobního, čímž se spíše stálý tlak vzduchový zachová. Měch zásobní jest měchem souběžným, stoupajícím při naplňování na všech čtyřech stranách stejnoměrně, tak že hořejší jeho prkno zůstává vodorovné. Na toto kladou se železná závaží, dle potřeby několik po 10 *kg* a několik po 5 *kg*.



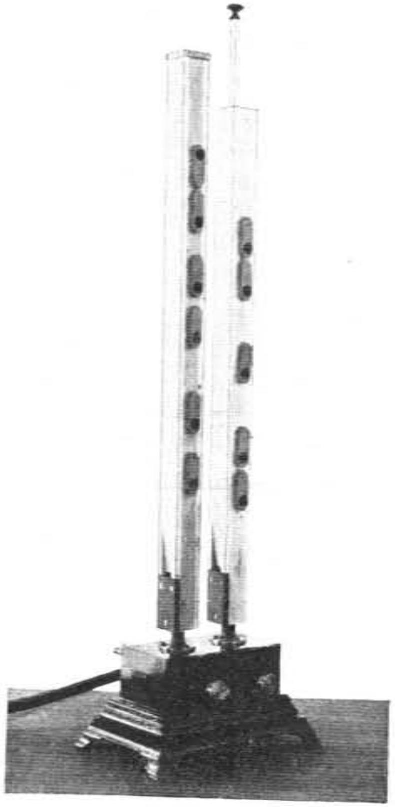
Obr. 119. Úzké píšťaly mosazné, otevřená a krytá, ke studiu tonů harmonických.

Manometrem vodním lze tlak, kterým vzduch z měchu proudí, stanoviti. Kladou-li se závaží na měch na př. od 10 *kg* do 50 *kg*, stoupá tlak od $3^1/_3$ *cm* do $11^1/_3$ *cm* vody, tedy na každých 10 *kg* o 2 *cm* vody. To souhlasí s tím, že účinná plocha měchu jest okrouhle půl čtverečného metru; kapacita měchu činí dva hektolitry. Varhany hrají plně a zvučně, činí-li tlak $9\frac{1}{3}$ *cm* sloupce vodního, tedy při zatížení měchu závažím 40 *kg*.

Od hlavního měchu jdou vzduchovody k oběma rejstříkům píšťal, ale vedle toho též k násadcům 3 *cm* v průměru, po obou stranách v předu umístěným, k nimž se připojují široké trubice kaučukové, průměru 3 *cm*, aby se odtud vzduch vésti mohl jinam, na př. k sirenám, nebo k píšťalám mimo varhany postaveným. Experimentator ovládá příslušnými trakturami jednak volbu neb kombinaci rejstříků, jednak přítok vzduchu do kaučukové trubice na levo neb na pravo, neb na obou stranách současně.

K pokusům píšťalami mimo varhany hodí se dobře vzduchová komora, k níž se od měchu vede vzduch; komora obsahuje násadce k postavení píšťal a pod nimi posuvné příčky, jimiž se přítok vzduchu k píšťalám přerušuje nebo uvolňuje. Příklady tohoto zařízení jsou v obrazcích dále následujících.

Pokusy lze především ukázati, že píšťala vedle svého tonu základního dává řadu tonů svrchních, harmonických, a to píšťala otevřená všechny harmonické, píšťala krytá liché harmonické. K pokusům o těchto tonech hodí se dobře úzké mosazné píšťaly (Koenig) v obr. 119. znázorněné, jež mají ústa malá a hranu svrchního rtu dosti ostrou. Píšťala otevřená dává c^1, zavřená c jakožto základní ton. Při experimentování dlužno pamatovati, že ton píšťaly jest resonancí sesílený ton třecí, a že při poměrech daných lze výšku tohoto tonu jen rychlostí proudění ovládati. Aby tudíž jedna i druhá píšťala, otevřená a krytá, dala ton *základní*, jest třeba, aby vzduch proudil *velice volně*, tlakem *velmi malým*. Regulace jest možná jednak závažími, jež se kladou na měch, jednak sevřením kaučuku, kterým vzduch proudí. Přes to jest velice nesnadno, zejména u píšťaly kryté, obdržeti ton základní; zaznívá velmi slabě, sotva slyšitelně. Když se rychlost proudění vzduchu postupně zvětšuje více a více, přeskakuje ton do následujícího harmonického, i jest velmi dobře slyšeti, jak při otevřené píšťale se ozývají tony harmonické všechny, při zavřené však jenom tony liché. Na varhanách může experimentator vždy napřed udati ton, který dlužno očekávati. Rovněž velmi dobře lze ke studiu tonů částkových užiti dvou píšťal dřevěných malé mensury (Koenig), jak jsou znázorněny v obr. 120., z nichž jedna, otevřená, dává c^1, druhá, krytá, c. Na těchto píšťalách jsou v jedné stěně učiněny otvory, jež lze klapkami krýti; jsou na místech, kde při určitých tonech částkových jest buď vrchol neb uzel. Ukazuje se pak důležitý rozdíl. Když při určitém tonu otevřeme otvor na místě, kde jest vrchol, nemění se ton; když však otevřeme na místě, kde jest uzel, přeskočí ihned ton do jiného. Vskutku jest pak v uzlech zhuštění a zředění nemožné.

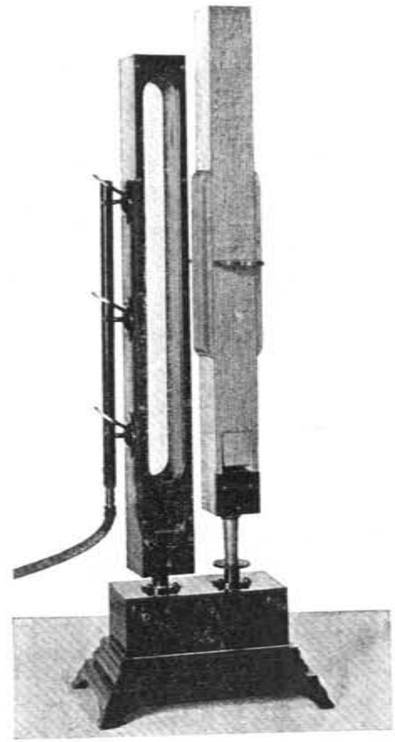


Obr. 120. Píšťaly dřevěné, úzké mensury, otevřená a krytá, ke studiu tonů harmonických a polohy uzlů i vrcholů.

U píšťal velké mensury nelze tak snadno větší řadu tonů harmonických vzbuditi, nýbrž jen tony, jež jsou v řadě nejbližšími, u píšťaly otevřené oktavu neb ještě duodecimu, a zavřené stěží více než duodecimu. Že píšťaly úzké snáze se uvedou ve složitější způsob chvění než široké, je podobně pochopitelno, jako že tenké a dlouhé tyče snáze se rozloží ve větší počet malých stojatých vlnek než tlusté a krátké.

Píšťala krytá v obr. 120. má píst na pošinování. Tím způsobem lze ukázati, jak se pošinováním tohoto pístu mění ton dle zákona délkového.

Píšťala krytá dává při stejné délce ton o oktavu nižší než otevřená. Zdálo by se, že se zákon ten ukáže jednoduše, když se některá z otevřených dřevěných píšťal na varhanách nechá zníti a pak dřevem přikryje. Pokus nemá však výsledku očekávaného; píšťala buď vůbec nedá žádného tonu, tak že je slyšeti pouze šumot proudícího vzduchu, anebo dá svrchní ton k tomu,



Obr. 121. Píšťala s plaménky manometrickými; píšťala mající uprostřed posuvnou příčku z části plnou a z části provrtanou.

který měl vzniknouti jako základní. Úkaz se vysvětlí snadno, když se má zřetel k tonům třecím; při dané rychlosti proudění vzduchu nemůže v ústech píšťaly vzniknouti ton té hloubky, jak pro resonanci je nutno. Proto lze pokus tak provésti, že se ton píšťaly otevřené přeruší, píšťala přikryje, a pak teprve nechá znovu zníti, při čemž se proud vzduchu umírní, aby vznikl ton třecí nízký.

Jinak se pokus ten provádí píšťalou, v obr. 121. (na pravo) znázorněnou, která má uprostřed posouvací příčku z polovice plnou a z polovice provrtanou. Uspořádání má tu výhodu, že *ton zůstává nezměněným*, když se nechá v píšťale nejprve příčka provrtaná a když se pak vsune část plná. Ukáže se tedy, že píšťala krytá dává týž ton jako otevřená o délce dvojnásobné. Ostatně i zde je nutno ton přerušiti, pokud se přesunutí příčky děje; jinak se při přesunování ozývají tony svrchní.

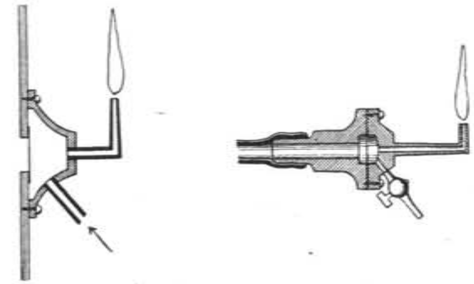
§ 125. **Poloha uzlů a vrcholů.**

O poloze uzlů a vrcholů v píšťale otevřené a zavřené lze se orientovati mnohými způsoby, z nichž některé jsou hrubší, méně citlivé, jiné jemnější, citlivější, tudíž také přesnější. Velmi dobře hodí se ke studiu tomu píšťala, jejíž jedna anebo lépe ještě dvě protější stěny jsou ze skla, jako píšťala prvá v obr. 121. Může též býti celé těleso píšťaly zastoupeno skleněnou trubicí, ale pak je žádoucno, aby mensura trubice byla dostatečně veliká. Užívá-li se píšťaly kryté, zařídí se kryjící deska tak, aby se dala vyjmouti, načež se malým otvorem v desce prostrčí nit, nebo drát, kterým se drobné přístroje do vnitř píšťaly mohou vkládati.

Vloží-li se shora, na nitce, do píšťaly otevřené nebo i kryté malá membrana na kulatém rámečku napjatá s pískem (*Savart* 1823, *Hopkins* 1838), pozorujeme, jak v uzlech písek téměř v klidu zůstává, mimo uzly pak živě víří, nejživěji na vrcholech. K témuž účelu lze užiti blány kollodiové (*Gripon*) nebo mydlinové (*Mach*). Platinovým kontaktem na membraně ve spojení s akkumulatorem a signalovým zvonkem lze tyto rozdílnosti i sluchu demonstrovati; na vrcholech zvonek zvoní, umlkne však na uzlech. Že v uzlech není klid úplný, způsobují jednak vyšší tony částkové, jednak dojista i ta okolnost, že vlna odražená v píšťale otevřené není téže intensity jako původní. Je-li mensura píšťaly malá, vznikají vkládáním oné membrany změny v intensitě i ve výšce tonu píšťaly, o nichž pojednal *V. v. Lang* (1879) a jež vyniknou zejména, když se membrana na nitce rychle po délce píšťaly táhne vzhůru nebo pouští dolů.

Také sluchem lze přímo nalézti uzly a vrcholy. Položí-li se ucho na stěnu dřevěné píšťaly a pošinuje-li se od místa k místu podél stěny, je slyšeti, jak v uzlech ton více zní než na vrcholech. (V. v. Lang 1879.)

Velmi pěkně lze rozdílnosti ve chvění vzduchu na různých místech píšťaly ukázati objektivně *methodou manometrických plaménků*, kterouž do akustiky zavedl *R. Koenig*. Základ této i jinak mnohostranně užívané methody jest následující.



Obr. 122. Schema Koenigova zařízení manometrických plamének na stěně píšťaly a v pouzdru samostatném.

Dřevěná stěna píšťaly provrtá se na vhodně voleném místě, a na kulatý otvor napne se tenká kaučuková membrana. Přes otvor s membranou upevní se neprodyšně mosazné pouzdro, do něhož ústí dvojí mosazná trubička (obr. 122. na levo). Jedna připojuje se kaučukem k plynovodu; druhá má na konci malý kulatý otvor jako plamenník. Když se zde plyn do pouzdra vpuštěný zapálí, hoří malým, podlouhlým plaménkem, málo svítivým. Zní-li píšťala, pak vznikají v průřezu, v němž je otvor s membranou, povšechně periodické zhuštění a zředění a následkem toho změny tlakové, jimiž se membrana uvádí v příčné chvění; toto přenáší se jako podélné na plyn i na plamének. Proto, jakmile se píšťala rozezvučí, jest viděti, jak plamének nabude zvláštních obrysů, při čemž se stává ještě méně svítivým. Vibrační jeho tvar vynikne v časovém rozvinutí, kteréž se připraví methodou optickou, subjektivní, totiž zrcadlem analysujícím. Obyčejné zařízení jeho objasňuje obr. 5. v § 7.

U píšťal se mají ukázati, jak řečeno, rozdílnosti ve kmitání vzduchu na uzlech a vrcholech; dlužno tudíž umístiti na stěně píšťaly několik pouzder manometrických té úpravy, jak nahoře byla popsána. Obyčejně se umisťují tři, a to na místech, kde jest uzel tonu základního a kde jsou uzly prvního tonu svrchního. U píšťaly otevřené upraví se tedy otvory jeden uprostřed stěny, druhý a třetí v jedné a v třetí čtvrtině délky. U píšťaly kryté jeden na konci, blíže kryjící desky, druhý uprostřed, třetí v druhé třetině stěny. V obr. 121. (na levo) jest znázorněna píšťala, kteráž jest třemi takovými pouzdry manometrickými opatřena.

Dává-li píšťala otevřená základní ton, ukazuje plamének uprostřed kmitání nejživější, na důkaz, že uprostřed jest uzel; oba plaménky druhé jeví kmitání slabší, poněvadž jsou bližší vrcholů vlny. Když však píšťala se přefoukne a ozve se oktava, nastane toho opak; oba tyto plaménky, jsouce na uzlech vlny, kmitají nejživěji, kdežto plamének uprostřed jest — téměř — v klidu, ne úplně, poněvadž zaznívá ještě duodecima.

Ne vždy lze oba tony tyto od sebe přesně odloučiti; obyčejně zní oktava zároveň s primou velmi jasně. Tak jest tomu na př. u píšťaly v obr. 121. Ale pak je zjev tím zajímavější. Vibrace plaménku prostředního jsou jednoduché, plaménků pak hořejšího a dolejšího složené, tak že, jako jest oktavu vedle primy slyšeti, jest ji též ve kmitání plaménků vedle primy viděti.

U píšťaly kryté ukazuje plamének na konci píšťaly umístěný vždycky živé vibrace, poněvadž zde jest vždy uzel. Oba další jeví rozdíly dle toho, zda-li dává píšťala základní ton nebo zda-li ton přeskočí při větším tlaku, kterým proudí vzduch, na duodecimu.

Kmitání manometrických plaménků, jak se jeví v zrcadle analysačním, ukazuje četné podrobnosti, o nichž pojednáme později při jiné příležitosti. Manometrická pouzdra s plaménky lze sestrojiti též jako přístroj samostatný, který se připojí kaučukem k jakémukoliv zdroji vlnění vzduchového. Obraz 122. (na pravo) ukazuje takové pouzdro manometrické v úpravě Koenigově.

V pokusech předcházejících byla poloha uzlů a vrcholů (obr. 116. a 117.) dle zákonů Bernoulliho za známou předpokládána, a ukazovaly se jen rozdílnosti ve chvění vzduchu v uzlech a vrcholech. Zajímavou studii*) provedl *R. Koenig* za tím účelem, aby tuto polohu hledal, přesně určil, a z toho důsledky odvodil o tom, jak si rozdělení uzlů a vrcholů v píšťale při určitém tonu částkovém máme představiti. Píšťala, kteréž užíval, byla 2·33 *m* dlouhá, průřezu čtvercového, o straně 0·12 *m*. Jedna stěna jejího tělesa byla celá skleněná, ostatní dřevěné. Stěna k této skleněné protější byla po celé délce středem

*) R. Koenig, Méthode pour observer les vibrations de l'air dans les tuyaux d'orgue, 1881. Quelques expériences d'acoustique, 1882, pag. 206.

proříznuta ve štěrbinu 1 *cm* širokou; touto štěrbinou byla vložena do píšťaly úzká mosazná, vhodně ohnutá trubička, jejížto jeden konec připadl do středu čtvercového průřezu píšťaly; od druhého konce šla pak kaučuková trubička přímo do ucha, k auskultaci, nebo k plaménku manometrickému. Aby se pak ona štěrbina zase uzavřela, položil Koenig píšťalu vodorovně do podlouhlé vany s vodou, tak že dřevěná stěna se štěrbinou přišla dolů, skleněná nahoru. Trubička mosazná byla pak připojena k sáňkám, jimiž se dala pošinovati po celé délce píšťaly; pošinutí se odčítalo na měřítku, kteréž na jiné skleněné desce na píšťale bylo umístěno.

Postup pokusů byl následující. V ústech píšťaly postavila se hrana svrchního rtu — zařízená na pošinování — proti štěrbině tak, aby určitý částkový ton píšťaly čistě zněl. Na to se auskultační trubička od místa k místu pošinovala. Při auskultaci bylo slyšeti ton na uzlech velmi mohutně, méně v blízkosti vrcholů, na vrcholech pak samých ton dosti náhle utichl. Bylo tedy možno stanoviti subjektivní touto methodou *polohy vrcholů*. Ale i objektivní methodou, plaménkem, bylo lze toto měření kontrolovati, poněvadž na vrcholech plamének náhle přestal kmitati a hořel světlem svítivým. Koenig sestavil svá pozorování ve dvou přehledných tabulkách; jedna dává pozorování při oné píšťale otevřené, druhá při téže píšťale, když byla kryta. Neuvádějíce dat číselných, jež mají význam individualný právě pro ony píšťaly, jichž užil, přestáváme na výsledcích, pokud jich platnost jest všeobecnou.

Při určitém tonu částkovém N_k píšťaly otevřené nebo kryté jsou jak vrcholy tak i uzly od sebe *stejně odlehlé*, aequidistantní; jich vzájemná odlehlost činí $^1/_2\,\lambda_k$; odlehlost každého uzlu od sousedního vrcholu pak $^1/_4\,\lambda_k$. *Výjimku* činí především *první* vrchol a uzel. V ústech píšťaly vzniká na hořejším rtu prouděním vzduchu již jisté zhušťování a zřeďování vzduchu, souvisící patrně se vznikem tonu třecího. Proto jest první uzel o jakousi délku x_k blíže k štěrbině úst, než jak udává $^1/_4\,\lambda_k$. To platí o píšťale otevřené i zavřené. Je-li píšťala otevřená, činí výjimku též *poslední* vrchol a uzel. Jest totiž poslední uzel o jakousi délku y_k blíže ke kraji píšťaly, než jak udává $^1/_4\,\lambda_k$, tak jako by sloupec vzduchový zasahal ještě do volného prostoru a jako by tam byl poslední vrchol pošinut. Vskutku ukazuje pokus, že malá membrana s pískem, nad otevřenou píšťalou v jisté odlehlosti umístěná, se uvádí ve chvění. Ostatně nalézá Koenig i u píšťaly zavřené poslední vrchol blíže ke stěně uzavírající, než jak udává

$^1|_4 \lambda_k$; ale zdá se, že původ této odchylky jest nahodilý, jakož tomu nasvědčuje, že Savart nalezl malou odchylku ve smyslu opačném.

Zajímavé pokusy konali *Kundt, Dvořák, Raps* o velikosti *zhuštění a zředění*, jakéž vzniká v uzlech píšťaly. K účelu tomu připojili k uzlům zvláštní manometr vodní, který byl opatřen ventilem otevírajícím se jednostranně, na př. účinkem zhuštění. Výsledky pokusů byly různé; pravdě nejbližší zdají se býti ty, jež nejnověji (1889) obdržel *A. Raps* při píšťale kryté, 36 *cm* dlouhé a 4·5 *cm* × 6·5 *cm* v průřezu, jejíž ústa měla otvor 2·2 *cm*, a jež dávala základní ton 184 $\frac{1}{sec}$. Stoupal-li tlak, kterým vzduch do píšťaly proudil, od 4·4 *cm* do 30·8 *cm* výšky vodního sloupce, stoupalo zhuštění od 4·0 *cm* do 18·2 *cm* a zředění od — 4·0 *cm* do — 17·7 *cm* tlaku sloupce vodního. *Töpler a Boltzmann* užívali (1870) methody stroboskopické ve spojení s methodou interferenční, a nalezli rozdíly tlakové až $^1|_{80}$ atmosfery; amplituda kmitů stanovena při tom na 0·25 *cm*. *Mach* nalezl (1873) amplitudu až 0·4 *cm*. Rozumí se samo sebou, že čísla tato jsou dle povahy své jen individualná, orientační, poněvadž v konkretních případech jiných rozhodují četné okolnosti zvláštní.

§ 126. **Odchylky od zákonů Bernoulliho.**

Pro délku píšťaly otevřené a kryté plynou ze zákonů Bernoulliho vzorce

$$L = k\,\frac{c}{2N_k} \qquad L = (2k-1)\,\frac{c}{4N_k},$$

kdež značí N_k kmitočet k-tého tonu částkového. Záhy však bylo praktickými zkušenostmi poznáno, že délka tato jest poněkud veliká. Měření v předešlém odstavci popsaná, jež provedl *R. Koenig* a jimiž mnohé dřívější práce byly doplněny, objasnily, jaká jest toho příčina. Odlehlost prvního vrcholu — jenž připadá na hranu svrchního rtu — od prvního uzlu jest fakticky menší než $^1|_4 \lambda_k$, o délku x_k; při píšťale otevřené jest však též odlehlost posledního vrcholu — jenž připadá do krajního průřezu píšťaly — od posledního uzlu fakticky menší než $^1|_4 \lambda_k$ o délku y_k. Platí tedy vlastně vztahy

$$L = k\,\frac{c}{2N_k} - x_k - y_k, \qquad L = (2k-1)\,\frac{c}{4N_k} - x_k.$$

Skutečná délka píšťaly jest tedy menší, než jak vychází ze zákonů Bernoulliho. Ukazuje se však, že tyto korrekce x a y jsou podmíněny tak četnými okolnostmi, že nelze o nich všeobecně říci

něco určitého. Ani u jedné a téže píšťaly nelze vystihnouti vztahů jednoduchých. *Wertheim* se domníval, že u otevřené píšťaly určitého tvaru a průřezu součet $x_k + y_k$ jest nezávislým na délce píšťaly a na čísle řadovém k tonu. *Koenig* ukázal, že tomu tak není. Součet $x_k + y_k$ dával u jeho píšťaly otevřené pro $k = 3$ hodnotu 0·370 *m*, pro $k = 8$ jenom hodnotu 0·184 *m*; přepočtením na příslušnou polovlnu obdržel

$$x_3 + y_3 = 0{\cdot}41 \, . \, \frac{\lambda_3}{2}, \qquad x_8 + y_8 = 0{\cdot}59 \, . \, \frac{\lambda_8}{2}.$$

Při pokusech Koenigových neosvědčil se však také zákon o harmonickém postupu tonů částkových; tony řadově pozdější byly poněkud vyšší, než by dle zákonů Bernoulliho následovalo. Ovšem dlužno poznamenati, že *Koenig* měnil postavení svrchního rtu proti štěrbině, chtěje tak docíliti částkových tonů co možno čistých, jak to dle theorie o tonech třecích jest pochopitelno. Ale právě vzhledem k tomu jest nesnadno přisvědčiti, že by zákon o harmonických tonech částkových — při *určitém postavení* hrany k štěrbině současně znějících — měl býti povšechně za neplatný uznán.

Ale i když počítáme x a y pro tony *základní*, píšíce

$$L = \frac{c}{2N} - x - y, \qquad L = \frac{c}{4N} - x$$

čili

$$N = \frac{c}{2(L + x + y)}, \qquad N = \frac{c}{4(L + x)},$$

kterýchžto vzorců praxis nejvíce užívá, nelze pro odchylky x a y zákonů povšechně platných nalézti. *Wertheim* udává vzorce, kteréž však jsou poněkud složité a též se přesně neosvědčují. Praxis varhanická vedla k některým vzorcům empirickým, jichž se nyní všeobecně užívá. Za příklad uvádíme vzorce pro píšťalu otevřenou, které udal *Cavaillé-Coll*, proslulý francouzský stavitel varhan.

1. Pro píšťaly průřezu kruhového, o průměru h, jako jsou píšťaly cínové, jest

$$x + y = {}^5|_3\, h.$$

Délka skutečná píšťaly jest o $^5|_3 h$ menší než jak dle zákonů Bernoulliho ze vzorce pro základní ton vychází.

2. U píšťal průřezu pravoúhlého, jak bývají píšťaly dřevěné, šířky a a tloušťky, neb, jak se zde říká, hloubky b, nemá

šířka a na výšku tonu účinku žádného, je-li štěrbina a hrana protější po *celé šířce* píšťaly rozestřená. Jinak se zúžením ton snižuje, čehož se používá při ladění píšťal (příklopky na ústech, vousy). Hloubkou b se však ton snižuje, tak že jest

$$x + y = 2b.$$

Délka píšťaly skutečná jest tedy o dvojnásobnou hloubku menší, než jak dle zákonů Bernoulliho ze vzorce pro základní ton vychází.

Délky takto vypočtené nazývají se zhusta *délkami redukovanými*. Při tom se počítá délka od kraje štěrbiny, kterou vzduch proudí.

Za příklad uvádíme měření následující. Jsou dány dvě Koenigovy píšťaly, obě základního tonu $ut_3 = 256$ dle ladění fysikalního; jedna dřevěná průřezu pravoúhlého (znázorněná v obr. 131. níže následujícím), šířky 5·0 *cm*, hloubky 6·0 *cm*, délky 54·5 *cm*, tudíž mensury = 9; druhá mosazná, průřezu kruhového (znázorněná v obr. 119.), průměru 1·6 *cm*, délky 63·7, tudíž mensury = 40. Počítáme-li délku redukovanou jedné i druhé píšťaly, obdržíme

$$L + x + y = \begin{cases} 54{\cdot}5 + 2\,.\,6{\cdot}0 = 66{\cdot}5 \\ 63{\cdot}7 + \frac{5}{3}\,.\,1{\cdot}6 = 66{\cdot}4. \end{cases}$$

Délka theoretická jest $\dfrac{34000}{2\,.\,256} = 66{\cdot}4.$

Výsledek souhlasí tudíž velmi dobře.

Jak mensura při témže rejstříku se mění (§ 122.), ukazuje následující příklad. Na varhanách obr. 118. jest rejstřík viola da gamba, jdoucí od c do c^3. Stanoví-li se délka a průměr cínových píšťal, vychází

pro tony	c,	c^1,	c^2,	c^3,
mensura	32·3,	29·8,	25·0,	18·3.

Ubývá tedy délek rychleji než průměrů; píšťaly pro tony vysoké mají mensuru poměrně širší.

Na zvuk píšťal mají též *stěny* jisté účinky, ač vedlejší. Stavitelé varhan dobře znají, že ne každý cín, jak v obchodě se kupuje, stejně se hodí pro píšťaly varhanní. Podobně ne každé dříví jest pro píšťaly varhanní stejně dobré. *Savart* nahradil jednu stěnu dřevěné píšťaly pergamentem, různě napjatým, též papírem, různě vlhkým a konstatoval změnu (snížení) tonu. Též barvitost zvuku píšťal jest podmíněna materialem stěn. Podobné zkušenosti mají hotovitelé plechových nástrojů hudebních.

§ 127. Rychlost zvuku v plynech.

Podobně jako u tyčí lze též u sloupců vzduchových nebo vůbec plynných, jež se uvedou v podélné chvění, z výšky tonu N stanoviti rychlost c zvuku na základě vzorců ze zákonů Bernoulliho pro píšťaly otevřené a kryté plynoucích

$$N_k = k\,\frac{c}{2L}, \qquad N_k = (2k-1)\,\frac{c}{4L},$$

anebo na základě vzorců opravených

$$N_k = k\,\frac{c}{2\,(L + x_k + y_k)}, \qquad N_k = (2k-1)\,\frac{c}{4\,(L + x_k)}.$$

Při tom jest možno pozorovati buď *absolutně* nebo *relativně*. Při měření absolutním dlužno znáti korrekce x_k a y_k; při měření relativním zjednodušuje se věc vzhledem k tomu, že korrekce tyto na povaze plynu nezávisí. Při témže řadovém čísle k jest pak zcela jednoduše

$$\frac{N'}{N} = \frac{c'}{c}.$$

Relativní výška tonu jest zároveň relativní rychlostí zvuku. Z pravidla srovnává se rychlost zvuku c' v libovolném plynu s rychlostí zvuku c ve vzduchu téže teploty.

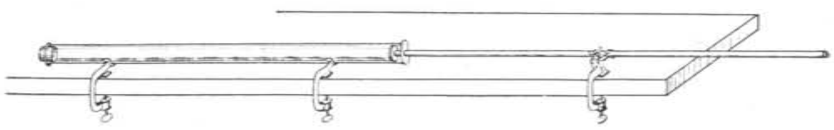
Dle této methody konal (1829) pozorování hlavně relativní *Pierre Dulong* (1785—1838), v nichž později pokračoval (1858) *Ant. Masson* (1806—1860). Vrstevník tohoto *Wilh. Wertheim* (1815—1861) provedl (v letech 1848—1851) četná měření, jimiž hleděl určiti korrekce x a y, aby mohl obdržeti rychlosti absolutní. Ve výsledcích pro vzduch ukázala se závislost rychlosti zvuku na průměru píšťal; při menším průměru vycházela rychlost menší zcela podobně, jak později *Régnault* pokusy přímými zjistil. Rozdíly činí několik desetin procenta.

Budiž zde poznamenáno, že touto methodou byla určována též u píšťal *vodních* rychlost zvuku ve vodě. Pokusy takové konal zejména *Wertheim*, který pro píšťalu vodní sestrojil zvláštní, dosti složitý přístroj, vhodný též pro kapaliny jiné než vodu. Výsledky pokusů byly však jen *přibližně* správné z toho důvodu, že u kapalin nelze zabrániti *spoluchvění stěn* píšťaly.

Methodu zvláště jednoduchou pro pozorování absolutní i relativní udal *Kundt**). Při píšťale rozezvučí se sloupec vzdu-

*) *August Kundt* (1839—1894) působil jako professor fysiky na polytechniku v Curychu a na universitách ve Würzburku, Strassburku a Berlíně. První práce o jeho obrazcích práškových připadají do let 1866—1868.

chový resonancí s tonem třecím. Avšak prouděním vzduchu trpí pravidelnost celého zjevu. Proto uvedl Kundt sloupec vzduchový v trubici skleněné ve chvění způsobem jiným, totiž podélným kmitáním tyče pevné. Aby pak učinil polohu uzlů a vrcholů patrnou, nasypal do trubice skleněné něco lehkého prášku, kterýmž při chvění vzduchu vznikají zvláštní obrazce. Proto se jeho methoda zove *methodou obrazců práškových* čili *Kundtových*.



Obr. 123. Uspořádání pokusu pro obrazce Kundtovy.

K pokusu hodí se velmi dobře lehký prášek korkový, bílý prášek kysličníku křemičitého nebo též suché lykopodium; skleněná trubice má býti suchá, tím více, čím je prášek jemnější, tedy zejména pro lykopodium. Uspořádání pokusu objasňuje schematicky obr. 123. Tyč, skleněná nebo lépe kovová, mosazná neb ocelová, jest uprostřed ve svěráku upevněna; na jednom volném konci zasahá do skleněné trubice, jež jest na druhé straně uzavřena. V trubici jest vzduch. Tře-li se tyč podélně, rozezvučí se, a její konec do trubice zasahající vykonává podélné vibrace (podobně jako v obr. 114. znázorněno) o kmitočtu N. Tyto vibrace mají se přenášeti na vrstvy vzduchu. K cíli tomu upevní se na konci oné tyče lehounký kotouč korkový nebo kartonový, o průměru poněkud menším než jest průměr trubice. Tímto kotoučem podélně kmitajícím vzniká ve vzduchu v trubici vlnění, kteréž se na uzavřeném konci trubice odráží a vracejíc se dává s vlněním původním vlnění stojaté, je-li délka sloupce vzduchového násobkem polovlny vzduchové (§ 82.). Proto se trubice skleněná zařídí na pošinování, (lépe než tyč, jež raději zůstane upevněnou), aby onen kotouč přišel více nebo méně do vnitř trubice. Tře-li se tyč na druhém svém konci a dává-li základní svůj ton čistě a zvučně, jest pozorovati, jak se prášek v meziuzlí zvedá, tvoře příčné rýhy, jako žebra, kdežto na místech uzlových zůstává ležeti. Lze tedy měřiti odlehlost uzlů, tudíž *délku polovlny vzduchové*.

Budiž $\frac{1}{2}\lambda$ délka polovlny ve vzduchu, $\frac{1}{2}\Lambda$ délka polovlny v materialu tyče, dané délkou L tyče samé. Je-li c rychlost

zvuku ve vzduchu, C rychlost zvuku v tyči, máme vzorce:

$$\frac{c}{N} = \lambda, \qquad \frac{C}{N} = \Lambda,$$

tudíž

$$\frac{C}{c} = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\frac{1}{2}\Lambda}{\frac{1}{2}\lambda} = \frac{L}{l}.$$

Vzduch v trubici dá se nahraditi jiným plynem. Pak jest obdobně

$$\frac{C}{c_1} = \frac{\Lambda}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{2}\Lambda}{\frac{1}{2}\lambda_1} = \frac{L}{l_1},$$

a odtud

$$\frac{c_1}{c} = \frac{l_1}{l}.$$

Pokus nabývá tím zvláštní *názornosti*. Oko *vidí délku tyče* L a *vidí zároveň délku meziuzlí* l v trubici. Těmito délkami vidí přímo znázorněný *poměr rychlostí*, s jakými se zvuk šíří *v tyči* a *ve vzduchu*. A nahradí-li se vzduch jiným plynem, vidí ve změně meziuzlí l_1 přímo změnu rychlosti c_1.

Podstatou svou jest methoda Kundtova relativní. Absolutní stává se, je-li rychlost c šíření se zvuku v materialu tyče odjinud známa.

Dle methody své potvrdil Kundt, že zvuk v trubicích užších se šíří rychlostí menší; proto jest nutno k pokusům vybrati trubice průměru aspoň $2\frac{1}{2}$ až 3 cm; rozdíl začíná býti znatelným, je-li průměr trubice menší než $\frac{\lambda}{4}$ pro daný ton N. Při tom ubývá rychlosti té s průměrem více u tonů hlubších než vysokých. Dále potvrdil, že při stoupající teplotě plynu ton ve výšce stoupá úměrně s výrazem $\sqrt{1+\beta t}$. Zejména provedl relativní měření rychlosti zvuku v různých plynech, v kterýchžto pracích pokračovali i mnozí badatelé jiní.

Při pokusech obdrží se rychlosti c a c_1 pro tu teplotu, kterou vzduch a plyn právě má. Při pozorování relativním béře se rychlost c pro vzduch za známou; je-li t teplota vzduchu, jest (§ 67.)

$$c = 331 \,.\, \sqrt{1+\beta t}.$$

Pro vzduch suchý jest

$$\beta = 0{\cdot}00367,$$

pro vzduch vlhký, střední vlhkosti, brává se okrouhle

$$\beta = 0{\cdot}004.$$

Rychlost c_1 vypočtená pro plyn, který jest vysušen, platí též pro teplotu t_1, kterou plyn právě má; chce-li se pak výsledek redukovati na teplotu nullovou plynu, dělí se výrazem $\sqrt{1 + \beta t_1}$, kdež jest $\beta = 0{\cdot}00367$.

Z výsledků, jež pro různé plyny a páry byly methodami zde popsanými nalezeny, a to pro teplotu $0^0\ C$, buďtež za příklad uvedeny následující (Landolt a Börnstein, 1894):

vzduch	331·0 m/sec	
kyslík	317·2 „	Dulong
vodík	1286·4 „	Zoch
kysličník uhelnatý . .	337·1 „	Wüllner
kysličník uhličitý . . .	259·3 „	Wüllner
kysličník dusnatý . . .	259·6 „	Wüllner
kysličník dusičitý . .	325 „	Masson
páry alkoholové . . .	230·6 „	Masson
páry étherové	179·2 „	Masson
svítiplyn	490·4 „	Zoch.

Methoda práškových obrazců Kundtových koná velmi dobré služby, jedná-li se o úkol opačný, *stanovení výšky tonů*, zejména u tonů *velmi vysokých*. Když se zjedná a vyměří práškový obrazec vzniklý tonem výšky neznámé, obdržíme délku polovlny vzduchové, ze kteréž pak při známé rychlosti zvuku se vypočítá *kmitočet*.

Tony velmi vysoké a nejvyšší lze obdržeti píšťalkou *Galtonovou*, kterou zdokonalil *M. Th. Edelmann* (v Mnichově). Jest to malá, krytá píšťalka, jejíž píst se dá mikrometricky pošinovati, čímž lze výšku tonu spojitě měniti. Na mikrometrickém šroubu, zařízeném po způsobu kontaktních měřítek, lze zároveň délku sloupce vzduchového až na setiny millimetru odečísti. K vytvoření čistého tonu jest nutno, aby otvor úst byl výšce tonu přiměřený. Aby se otvor tento dal měniti, rozdělil Edelmann píšťalku na dvě části. Dolejší část obsahuje štěrbinu *kruhovou*, hořejší pak ostrý, rovněž kruhový ret píšťalky. Kruhová forma má tu výhodu, že se dá soustruhem *velmi přesně* vypracovati. Obě části se k sobě mikrometricky přibližují. Vzduch do píšťalky se žene malým kaučukovým ballonkem.

Práškové obrázky vznikají v úzkých, velmi dobře vysušených skleněných trubičkách, v nichž jest něco málo lykopodia,

rovněž co možná suchého. Píšťalka se dá ústy před otvor trubičky. Postupuje-li se při vytvořování těchto obrazců k polovlnám vždy kratším a kratším, ukáže se zajímavý zjev *překročení meze* pocitů sluchových ve směru k tonům nejvyšším. Lze na př. vytvořiti obrazce o polovlnách až jen 2 *mm* (Koenig), tony, na kteréž velmi citlivé plaménky ještě reagují, kteréž však sluch lidský již neslyší. Kmitočet činí při vlnce 4 *mm* okrouhle 85000 1/*sec*. V § 67. byla označena jakožto *nejzazší mez*, přes kterou pocity tonů nejvyšších *naprosto nejdou*, oktava osmičárkovaná, jejížto závěrečný ton c^9 má kmitočet 66816 1/*sec*, a vlnu 5·09 *mm*. *Kterým tonem této oktavy* v případech konkretních, u jednotlivých pozorovatelů, jest mez stanovena, záleží dle dosavadních pozorování patrně na *jemnosti sluchové individualné*.

Methodou Kundtových obrazců stanovili *Kundt a Lehmann* (1874) a *Dvořák* (1875) též rychlost zvuku pro *kapaliny*. Pozorování mají zajímavost methodickou; výsledky však jsou jen přibližné, poněvadž nelze zameziti, aby chvěním kapalin nebyly spolu stěny trubic ve chvění uvedeny, podobně, jak to již u píšťal vodních bylo pozorováno (§ 126.).

§ 128. Účinek teploty vzduchu a hutnosti plynu na výšku tonu píšťaly.

Jest zajímavo položiti otázku, jak se ladění píšťal, na př. ve varhanách, mění teplotou vzduchu. Za normalní teplotu přijměmež, analogicky jako u ladiček, $15^0\,C$. Značí-li N_t a N_{15} kmitočet tonu píšťaly při teplotě t a 15^0, obdržíme ze vzorců § 67. vztahy

$$\frac{N_t}{N_{15}} = \frac{c_t}{c_{15}} = \frac{331\,.\sqrt{1+\beta t}}{331\,.\sqrt{1+15\beta}} = \sqrt{\frac{1+\beta t}{1+15\beta}}.$$

Vzhledem k tomu, že β jest koefficient velmi malý, můžeme počítati dále dle známých vzorců přibližných

$$\frac{N_t}{N_{15}} = \sqrt{1+\beta(t-15)} = 1 + \frac{1}{2}\beta\,(t-15).$$

Vzduch obyčejný jest vždy vlhký. Proto klaďme

$$\beta = 0{\cdot}004.$$

Tím obdržíme pro hledaný intervall výraz

$$\frac{N_t}{N_{15}} = 1 + 0{\cdot}002\,(t-15).$$

Je-li na př. $t = 25^0$, obdržíme intervall hledaný

číselně 1·0200

logarithmicky 0·00860.

Vzhledem k logarithmickému intervallu kommatu 0·00540 poznáváme, že rozladění varhan rozdílem temperaturním 10^0 činí půldruhého kommatu. U ladiček za stejných poměrů (§ 103.) činilo jen desetinu kommatu. Rozladění varhan jest tedy 15kráte značnější, a jest ve smyslu opačném; v létě jsou varhany výše, ladičky níže.

Jedná-li se o teplotu t vyšší, a vychází-li se od teploty nullové, máme intervall

$$\frac{N_t}{N_0} = \sqrt{1 + \beta t}.$$

Kdybychom intervall tento určili, mohli bychom z něho naopak počítati teplotu dle vzorce

$$\beta t = \left(\frac{N_t}{N_0}\right)^2 - 1,$$

tedy

$$t = \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{N_t}{N_0}\right)^2 - 1\right].$$

Při tom jest

$$\frac{1}{\beta} = 273.$$

Kdyby na př. intervall zahřátím suchého vzduchu stoupl až na velkou tercii, bylo by

$$\frac{N_t}{N_0} = \frac{5}{4}, \qquad t = 154^0.$$

Na tom zakládá se *akustický pyrometr*. Netřeba, aby horkým vzduchem se rozezvučela píšťala, stačí tu *resonance* sloupců vzduchových, jež jsou na př. v horkých pecích umístěny.

Žene-li se do téže píšťaly jednou suchý vzduch, podruhé suchý plyn, dává píšťala tony N a N_1 intervallu (§ 65.)

$$\frac{N_1}{N} = \frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{1}{D}}.$$

Tento intervall činí na př. u vodíku

číselně . . . 3·7894,

logarithmicky . . . 0·57857.

Odečteme-li oktavu . . . 0·30103,

zbývá . . . 0·27754,

velká septima jest . . . 0·27594

dle ladění temperovaného. Píšťala, která suchým vzduchem dává na př. c, dávala by suchým vodíkem téže teploty h^1.

Rovnice hořejší, kteréž jsme k výpočtu užili, platí jen pro supposici (§ 63.)

$$k_1 = k.$$

Ne vždy jest možno tuto rovnost — třebas jen přibližně — připustiti. Pak lze naopak z rychlosti c_1 poměr $k_1 = \frac{C_p}{C_v}$ počítati. Neboť přesně jest

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{k_1}{k}}\sqrt{\frac{1}{D}}.$$

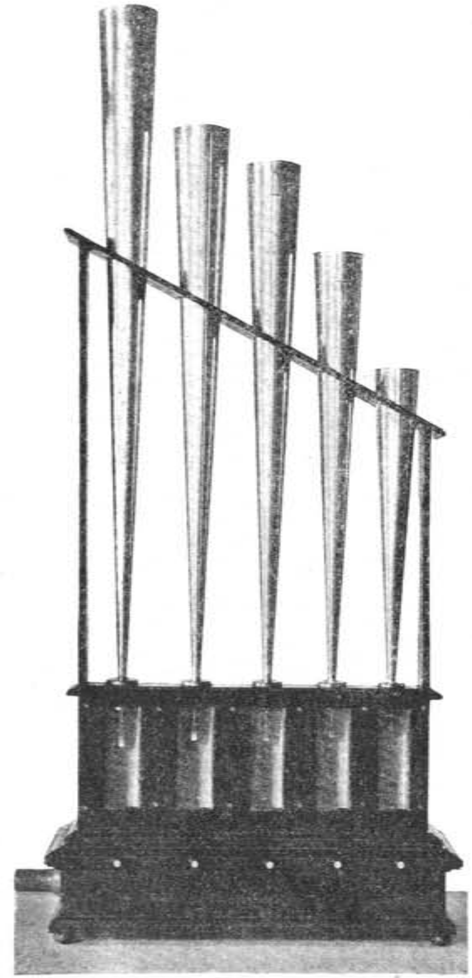
Jsou-li tedy veličiny c, k pro vzduch známy, a určí-li se pro plyn hutnosti D rychlost c_1, lze zase poměr specifických tepel k_1 při konstantním tlaku a objemu stanoviti.

Význam teploty vzduchu a hutnosti plynu ukáže se velmi jednoduchým a poučným pokusem následujícím. (E. Mach.) Vybéře se několik stejných zkoumavek se stěnami silnějšími. Když na dno některé z nich poklepneme kladívkem tak upraveným, jak se ho užívá pro ladičky (anebo jednoduše prstem), ozve se ton. Výška jeho ihned stoupá, když držíme zkoumavku otvorem dolů nad kahanem alkoholovým. Zejména však změní se ton, když držíce zkoumavku otvorem dolů pouštíme do ní vodík anebo i svítiplyn; stále poklepávajíce slyšíme, jak ton jde do výše. Podobně, když dáme do zkoumavky něco étheru a vypláchneme, aby se naplnila parami étheru, a držíce ji pak otvorem nahoru poklepáváme zdola; snížení tonu jest frappantní. Obrátíme-li zkoumavku, můžeme, stále poklepávajíce „slyšeti", jak těžké páry étherové padají a jak na jich místo znenáhla vniká vzduch.

§ 129. **Píšťaly jazýčkové a blánité.**

U píšťal jazýčkových vzbudí se resonance sloupce vzduchového tonem, který dává jazýček píšťaly. Jest to tenký a pružný plíšek kovový, obyčejně z tvrdé mosazi, tvaru podlouhlého pravoúhelníka, který jest na jednom konci — vlastně v celé třetině — upevněný a na druhém volný. Aby se pak uvedl ve chvění proudem vzduchovým, přiléhá ke žlábku, jehož otvor nekryje úplně, nýbrž jen tak, aby mezerami vzduch mohl prouditi (obr. 115.). Při tom jest jazýček buď poněkud menší než průřez žlábku, tak že jím proráží, jsa volným, anebo jest po-několik větší, tak že na něj naráží. Nazýváme jazýček v prvém případě volným (průrazným), v druhém nárazným. Ozvučný násadec bývá zde z pravidla konickým neb jehlancovitým dle toho, je-li cínovým nebo dřevěným. Obr. 124. ukazuje pět píšťal s jazýčky volnými a ozvučníky dřevěnými (varhanový rejstřík klarinet); obr. 125. podobně pět píšťal s jazýčky náraznými a s ozvučníky cínovými (varhanový rejstřík trombone). Píšťaly dávají velký a malý trojzvuk. Na jazýček doléhá pružný mosazný, vhodně upravený (obr. 115.) drát, který lze shora pošinovati; jazýček se tím zkracuje nebo prodlužuje, jeho perioda vibrační se mění a píšťala se ladí. Poněvadž při vibraci jazýčku vzduch zároveň periodicky vráží do ozvučníků, podobně jako u sireny Dove-Helmholtzovy, jest zhuštění a zředění tím vznikající značné a zvuk mohutný. Tomu napomáhá též forma ozvučníků, jež se rozevírají nahoru v širší průřez. Hlasu klarinet užívá se při varhanách jen v manualu; zvuk píšťal jest plný a hladký. Oproti tomu jest hlas trombonu, ač jinak krásný, silný, přece poněkud drsný; užívá se ho ve varhanách i v manualu i v pedalu, kdež se jím docílí tonů velmi hlubokých a přece plných a zvučných. Rozdíly tyto v barvitosti zvuku mají základ svůj v jazýčku: u volného jest hlas vždy kulatější, u nárazného drsnější. Ozvučníky lze sejmouti. Tím se ukáže především, že ton jazýčku jest samostatný, ozvučníkem nepodmíněný; u harmonia se užívá jen tonů jazýčkových. Zároveň se však objeví přece vzájemná zá-

Obr. 124. Píšťaly jazýčkové s jazýčky volnými a s ozvučníky dřevěnými.



Obr. 125. Píšťaly jazýčkové s jazýčky náraznými a s ozvučníky cínovými.

vislost obou v tom smyslu, že ve výšce ton jazýčku se mění spoluchvěním vzduchu, ale také, že ton vzduchu se tonem jazýčku mění; modifikují se tudíž navzájem.

Kmitání jazýčku účinkem proudu vzduchového děje se v podstatě tak, jako kývání stromů účinkem větru. Rozměry jazýčku jsou výšce tonu přiměřené. U jazýčkových nástrojů hudebních, klarinetu, fagotu, hoboje jest jazýček dřevěný z italské třtiny, u klarinetu jednoduchý, u fagotu a hoboje dvojitý.

Teplota má na kmitočet jazýčku účinek velmi malý, podobně jako u ladiček, avšak větší na kmitočet ozvučníku, a to ve smyslu opačném. Poněvadž však ozvučník ovládá spolu kmitání jazýčku, jest patrno, že se teplotou také tony píšťal jazýčkových poněkud zvyšují. Přefouknutí píšťaly jazýčkové — podobné tomu, jaké tak snadno nastává u píšťal retných — jest velice nesnadné; vždy zazní týž základní ton. Ale současně s tímto zaznívá množství tonů harmonických, které lze již sluchem velmi dobře rozeznávati. Proto jest zvuk těchto píšťal tak plný a hudebně účinný.

Jazýčky kovové u píšťal dají se nahraditi dvěma rovně přistřiženými proužky membran, jež jsou k sobě tak připojeny, aby tvořily úzkou štěrbinu, položenou kolmo na osu píšťaly. Plochy obou těch proužků mohou při tom býti buď položeny do téže roviny, na osu píšťaly kolmé (J. Müller), anebo střechovitě k sobě nakloněny (H. Helmholtz). Poslední forma jest pro experimentování výhodnější. Aby se taková *píšťala blánitá* čili *membranová* upravila, vybéře se trubice (dřevěná nebo mosazná) vhodného průměru (1 *cm* až 3 *cm*), seřízne se souměrně dvěma k sobě (kolmo nebo i šikmo) nakloněnými řezy, jež se stýkají v hraně, kteráž osu trubice kolmo protíná. Na tyto střechovité plochy položí se pak dvě kaučukové, rovně přistřižené, mírně napjaté membrany tak, aby v oné hraně vznikla úzká štěrbina, načež se membrany drátem nebo nití přiváží k trubici. Po případě lze k trubici připojiti nějakou resonanční nádobu, na př. kuželovitě nebo zvonovitě se rozšiřující.

Zajímavý jest však rozdíl, žene-li se vzduch směrem do píšťaly anebo opačně z píšťaly ven. Oba případy se doplňují. Štěrbina má určitou šířku. Žene-li se proud vzduchu do píšťaly, pak se štěrbina periodicky zužuje, *zavírá*, žene-li se z píšťaly ven, naopak periodicky rozšiřuje, *rozevírá*. Proto lze zváti membranovou štěrbinu v prvém případě *zavíravou*, v druhém

rozvíravou *). Štěrbina rozvíravá snese proud vzduchu prudší a dává *zvuk vyšší*; zavíravá připouští jen mírný proud vzduchu a dává *zvuk nižší*. Velmi rozmanité studie lze konati, když se trubice jenom jediným proužkem kaučukovým *obloží*, tak, aby vznikla štěrbina, při čemž experimentator oba konce proužku drží v rukou **). Když je více napíná, stává se zvuk vyšší; když při témže napjetí štěrbinu zužuje anebo zkracuje, stává se zvuk též vyšším. Ale i při určité štěrbině lze měniti výšku zvuku tlakem proudícího vzduchu; za jinak stejných poměrů stoupá výška zvuku stoupajícím tlakem. Pokusy tyto, jež lze velmi dobře improvisovati prostředky nejjednoduššími, jsou proto zajímavy, poněvadž se jimi vysvětluje tvoření se hlasu v ústrojí hlasovém. *Vazy hlasové* (chordae vocales) ve chřtánu tvoří též štěrbinu hlasovou, tak zvanou *hlasivku*; její šířka se řídí svaly chřtánovými, jež současně napjetí vazů hlasových přiměřeně mění, kteréžto svaly chřtánové zase příslušnými hybnými nervy jsou ovládány. Vzduch se žene plícemi tlakem větším neb menším ze chřtánu ven, hlasivka jest tedy štěrbinou *rozvíravou*, dutina úst působí jako resonator.

U nástrojů plechových zastupují rty hrajícího blánovou štěrbinu rozvíravou; vibrace rtů jest viděti, když se užije násadce skleněného.

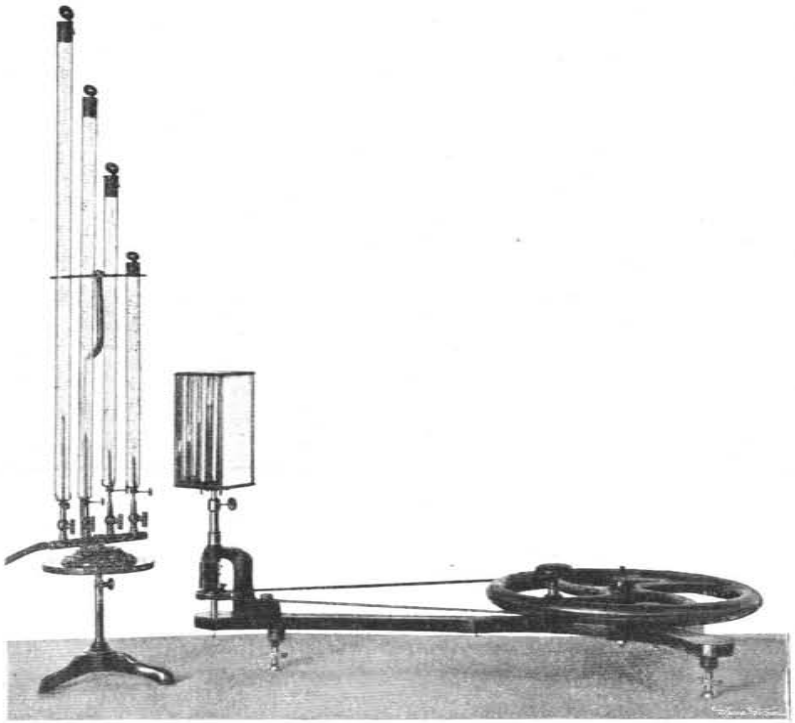
§ 130. **Znějící plaménky.**

Proudí-li svítiplyn úzkou skleněnou nebo kovovou trubičkou, na konci v malý kulatý otvor zúženou, dává, zapálen, plamének málo svítící, kterýž hoří zcela klidně. Když se plamének tento vloží do vertikalní skleněné trubice rozměrů přiměřených a když se zvenáhla pošinuje zdola výše, začne v určité poloze zníti, z počátku slabě, pak silněji, při čemž se stává méně svítivým nebo vůbec nesvítivým a nabývá zvláštních obrysů. Říkáme, že plamének zní, že zpívá. Jest velmi pravděpodobno, že děj je zde podobný tomu, který jsme seznali u píšťal retných. Prouděním plynu v úzkém otvoru vzniká nejspíše též ton třecí, který se resonancí sloupce vzduchového sesiluje. Proto také rozhoduje o výšce tonu délka trubice, jako u píšťal. S tím souvisí, že lze obdržeti při téže trubici i vyšší tony harmonické, jako v píšťale

*) H. Helmholtz užívá názvů „einschlagend" a „ausschlagend".

**) Aby membrana dobře dolehla, dlužno rohy seříznuté trubice ohnouti přiměřeně na venek.

otevřené; třeba poněkud polohu plaménku měniti a hlavně plamének přiměřeně zmenšovati. Proto jest nutno, aby při pokusech takových byl po ruce v plynovodu regulační kohout.



Obr. 126. Zpívavé plaménky a optická analysa jich pohybu kmitavého.

U trubic dlouhých lze obdržeti dobře tři, někdy i čtyři, harmonické tony; při nejvyšším jest ovšem plamének již velmi malý a snadno chvěním uhasíná. Obr. 126. ukazuje čtyři trubice skleněné s plaménky; dávají velký trojzvuk sesílený oktavou. K regulaci výšky plaménků jsou kohoutky plynové při ruce. Trubice skleněné mají nahoře příklopky mosazné s malým otvorem uprostřed. Když se trubice příklopkem kryje, přestane plamének zníti, ale hoří dále, poněvadž onen malý otvor umožňuje proudění vzduchu v trubici.

Když se plaménky pozorují způsobem v obrazci spolu znázorněným v analysačním zrcadle, mírnou rychlostí otáčeném, jest viděti, že plaménky se periodicky stahují a roztahují, a že poměr period souhlasí s relativní výškou tonů, jež slyšíme. Když

se plamének regulačním kohoutem znenáhla zmenšuje, stává se, že ton přeskočí do druhého tonu harmonického, který s délkou sloupce vzduchového souhlasí. Ihned jest v zrcadle analysačním viděti, jak kmity plaménků se stanou relativně četnějšími. Jest tedy patrno, že plaménky kmitají v periodě souhlasící s výškou příslušných tonů.

Plaménky malé, jak dosud byly popisovány, dávají tony jemné, zpívavé. Mohutné zvuky lze obdržeti, když se připraví široká a dlouhá trubice plechová (na př. průměru 10 *cm* a délky 1·6 *m* až 2 *m*) a když se vkládá do ní plamenník široký, při němž hořící plyn proudí z mnoha otvorů. Dobře jest tento plamenník nasaditi na zvláštní plechovou nádobu, do níž proudí plyn z plynovodu, aby vibrace plamenu se mohla díti nerušeně. K pozorování vibračních jeho forem slouží okénko do oné trubice zasazené (Reusch, 1864). Když se plyn zapálí, vznikne plamen dosti vysoký, který se však jako by stlačí, když rozzvučení nastane, při čemž jednotlivé plaménky dostávají tvary kmitajících jazýčků. Základní ton snadno přeskočí do oktavy. V mohutném zvuku lze již sluchem rozeznati množství svrchních tonů harmonických.

Zpívavé plaménky objevil *Higgins* (1802) užívaje plaménku vodikového (chemická harmonika). *Chladni* poznal, že výška tonu jest určena délkou trubice, jako u píšťal. Ukázal též, že po případě vzniká i oktava neb duodecima tonu základního. *Wheatstone* analysoval znějící plamen otáčivým zrcadlem. *Schaffgotsch* a *Tyndall* zpozorovali, že plamének mnohdy začne zpívati, když se mu udá jeho ton; naopak přestane zpívati, když se zakřikne silným zvukem. Pěkný zjev tento nastává, když plamének není ve své pravé poloze v trubici úplně, nýbrž jen přibližně. Dají-li se do trubice dva plaménky, lze je rozzvučeti, jsou-li oddělené; naproti tomu přestanou zvučeti, když se sblíží. Tím způsobem lze ton přerušiti — sblížením, a vzbuditi — oddálením. Na tom základě sestrojil *Kastner* (1873) jakýsi druh varhánek, který nazval *pyrofon.*

Vznik tonu vysvětluje *Faraday* periodickými explosemi, které dává směs vzduchu a plynu. Že však vysvětlení tonem třecím má mnoho pro sebe, dokazuje též úkaz, že plameny dávají tony i bez resonance sloupce vzduchového. Když se upraví dvě širší trubice mosazné s kulatým hořákem (na př. z tučku pracovaným), dává proudící zapálený plyn plameny dosti vysoké; postaví-li se tyto proti sobě do pravého úhlu, začnou po případě též zpívati, tony dosti zvučnými a nikoli nepříjemnými, jež se nadto dle proudění plynu rozmanitě mění.

Jiný pokus, který vyslovenému názoru o vzniku oněch tonů též nasvědčuje, udal *Rijke**). Do trubice skleněné vloží se mírně hluboko mosazná neb železná dosti hustá síťka. Když se trubice drží svisle, a když se do ní proti síťce vloží plamen plynový, rozžhaví se síť; jakmile se pak plamen odstraní, je slyšeti dosti silný zvuk, který, když síťka chladne, znenáhla přestává. Udržuje-li se síťka proudem galvanickým rozžhavenou, je slyšeti ton stálý. Rozdílem teploty vzduchu nad a pod síťkou tvoří se patrně proud vzduchu v trubici, kterým vzniká ton třecí na drátech síťky; vzduch v píšťale pak resonancí ton sesílí. Vskutku výška tonu je určena délkou trubice.

§ 131. Citlivé plaménky.

Některé plameny plynové, zejména takové, které hoří za většího tlaku plynu, ukazují tu zvláštnost, že na jisté zvuky způsobem význačným reagují; obyčejně se jich účinkem smršťují, někdy zase prodlužují. Zoveme je *plameny citlivé*.

Akustickou citlivost plamenů pro jisté zvuky zpozoroval r. 1858 *Leconte*. „Byl jsem“ — tak vypravuje **) — „ve společnosti osmi osob, jež přišly večer poslouchat hudbu. Hrála se některá tria od Beethovena na klavír, housle a cello. Na zdi, v blízkosti klavíru, byly dva ploché plamenníky. Oba plaménky hořely spojitě, při zavřených oknech a klidném vzduchu. Jeden z nich byl však pod vyšším tlakem, kterým se téměř třepal. Krátce po tom, co hudba začala, zpozoroval jsem, že plamének ukazuje kmity, jež úplně souhlasily se slyšitelným pohybem hudby. Zjev tento byl by zpozoroval každý, zejména když k tomu přistoupily silné tony cella. Bylo velmi zajímavo viděti, jak úplně přesně i trylky tohoto stroje plaménkem byly spolukonány. *Hluchý byl by mohl harmonii viděti.* Průběhem večera, kdy v městě spotřeba plynu klesala a tím tlak plynu stoupal, stával se zjev patrnější . . .“ Úkazem zabýval se zejména *Tyndall****). Ve svém díle „O zvuku“ věnuje mu celý oddíl.

---

*) Pieter Rijke, prof. fysiky na univ. v Leydenu. Příslušné pojednání jest z roku 1859.

**) Silliman's American Journal of Sciences and Arts, 1858, New-Haven, Conn.

***) *John Tyndall*, (1820—1893), professor fysiky na „Royal Institution“ v Londýně, proslul nejen jako badatel, nýbrž též jako experimentator; četné veřejné přednášky, jež konal, vynikaly nejen duchaplnou dikcí, nýbrž též velikým počtem pokusů vhodně volených a se vzácnou dovedností prováděných. Přednášky tyto vyšly tiskem; k nim náležejí též přednášky „O zvuku“ (On sound, první vydání 1867).

Citlivé plameny mohou býti buď ploché, tenké, jako list anebo kulaté. Plameny ploché, z hořáků motýlkových, reagují jen při větším tlaku plynovém a nabývají pak při vyšších, ostrých tonech neb nárazech tvaru roztřepaného, dělíce se v několik šlehajících jazýčků. Jinak jsou pro experimentování výhodnějšími kulaté plameny, při nichž plyn za většího tlaku proudí trubicemi hladkými, širšími a ke konci se zúžujícími. Při tom jest žádoucno, aby i trubice plynovodné a kaučukové byly průměru většího a aby v blízkosti citlivého plamene nebyl žádný kohout plynovod zúžující. Za těch poměrů utvoří se pak při dostatečném, po případě zvýšeném tlaku plynu, plamen hladký, dlouhý (50 až 60 *cm*), který účinkem některých zvuků se čeří, smršťuje. K těmto zvukům náležejí méně zvuky hluboké, hudební, více však zvuky vysoké, ostré, nehudební, jako pískání, hvízdání, sykot, tleskot, šramot, zvonění, nárazy kovu na kov, a pod. Z vokalů hláska *u* nemá účinku žádného, více již *o*, *e*, *i*, nejvíce *a*.

Citlivý plamének za obyčejného tlaku plynu lze ve zvláštní úpravě obdržeti způsobem, který udal *Govi* (1873). Plyn proudí malým otvorem kulatým proti mosazné síťce, nad kterouž se zapálí. Při vhodné vzdálenosti síťky obdrží se plamének nesvítivý, který uvnitř, kde se hořící plyn stýká se vzduchem, ukazuje modravý kužel. Na tomto kuželi lze citlivost plaménku nejlépe studovati. Při oněch ostrých, vysokých zvucích, jak byly nahoře uvedeny, smršťuje se kužel tento stávaje se plošším, při čemž hořící plamének šumí více než jinak. Přístroj vypadá jako obyčejný plamenník Bunsenův, jenom že má otvor malý kulatý a nad ním síťku mosaznou na tyčince kovové, kterou lze pomocí šroubu na plamenníku samém v různé výšce upevniti*).

Jako proudící a při tom hořící svítiplyn, tak citlivě reaguje též proudící kouř nebo proudící plyn jakýkoli teploty obyčejné, jehožto stín lze na př. ve světle homocentrickém na bílé stěně pozorovati.

---

*) Tyndall popisuje podobný přístroj, který mu udal *Philipp Barry* v soukromém listě.

VII.

Úkazy chvění neb znění současného.

§ 132. Interference zvuku.

V oddílu II., jednajícím o pohybu vlnivém, vyložili jsme již základy interference vln. Šíří-li se vlny řadou bodovou *souhlasně*, za sebou, vzniká jich skládáním všeobecně vlna *postupná*; šíří-li se *opačně*, proti sobě, vzniká za jistých podmínek vlna *stojatá*. Ve vlnění stojatém čili, jak kratčeji říkáme, ve *chvění*, nalézají se všechna tělesa *zvučící*; *každé* z nich podává tudíž příklad o skládání vln ve smyslu druhém. Proto zbývá jednati zvlášť o skládání vln ve smyslu prvém. Tu pak vyskytuje se za jistých podmínek případ, kdy vlny, řadou bodovou souhlasně se šířice, *ruší se navzájem*. Tento zvláštní případ označujeme jakožto *interferenci* vln, užívajíce slova toho ve smyslu praegnantním.

Podmínky, za kterých interference vln v tomto smyslu vzniká, vyplývají ze všeobecných výkladů o vlnění; i jedná se pak o to, jakým uspořádáním lze podmínky tyto akusticky realisovati.

V této příčině lze ve zvukových úkazech interferenčních rozeznávati dvě skupiny, dle toho, zda-li interference nastává *rozdíly fasovými*, nebo *rozdíly dráhovými*.

Dvě vlny, řadou bodovou se šířící, interferují, když se dle svého vzniku rozeznávají ve fasi o lichý násobek čísla π; při tom se ruší částečně neb úplně, dle toho, jsou-li jich amplitudy různé nebo stejné. Interference nastává však také tím způsobem, že vlny, dle vzniku svého fasí stejnou vznikající, postupují různými drahami; následkem toho opozdí se jedna vlna proti druhé a tímto opožděním, jež jest určeno rozdílem dráhovým,

vzniká teprve rozdíl fasový. Koefficient převodní činí (§ 39.) $\frac{2\pi}{\lambda}$; proto rovná se rozdíl fasový lichému násobku čísla π, když rozdíl dráhový činí lichý násobek polovlny. Neboť jest pak

$$(2k+1)\,\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}=(2k+1)\,.\,\pi.$$

Rozdělením zde udaným lze v akustických případech interference, o nichž dále jednáme, nabýti dobrého přehledu.

Jméno „*interference*" nyní všeobecně užívané zavedl *Young* *). Jsa původně přívržencem theorie emanační světla přiklonil se později k theorii undulační. Princip interferenční, jím poznaný, stal se důležitým doplňkem principu Huygensova; proto nikoli neprávem nazývá se Young vedle Huygensa druhým zakladatelem undulační theorie světla.

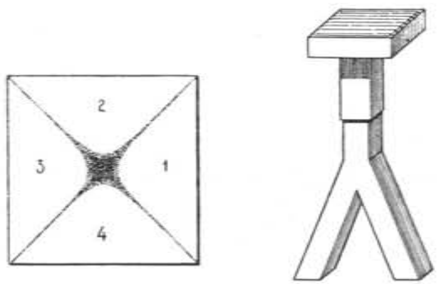
§ 133. Příklady interference rozdíly fasovými.

1. Vlny, jež by při vzniku svém měly *fase opačné*, obdržíme užívajíce sousedních polí kmitající desky; aby pole tato byla větší, což pro pokusy jest pohodlnější, rozezvučíme desku tak, aby dávala svůj některý hluboký ton, který jest pak vyznačen jednoduchým obrazcem zvukovým. Zde pak jde o to, vlny, jež mají interferovati, vésti nejprve odděleně a pak spojiti. Obr. 127. objasňuje uspořádání, kteréž pokusu dal *Hopkins* **). Jeho přístroj má dva ze dřeva pracované zvukovody A, B, průřezu obyčejně čtvercového, kteréž se spojují v jediný C; přes tento je přešinut příklop, s napjatou membranou M, na př. pergamentovou, tak že se dá ve výši pošinovati. K přístroji tomu náleží deska, na př. čtvercová, v obr. 127. spolu rýsovaná, rozměrů takových, aby odlehlost AB obou otvorů činila asi $^2/_3$ strany desky (na př. rovné 20 *cm*). Deska se zapne ve svém těžišti do svěráku (obr. 100. a 101.) a rozezvučí tak, aby dávala buď ton svůj základní anebo některý svrchní jemu nejbližší. Při základním tonu vzniknou dvě čáry uzlové se stranami rovnoběžné, tvořící kříž. Při tonu tomuto nejbližším vzniknou též dvě čáry uzlové ve směru obou

*) *Thomas Young* (1773—1829) byl od r. 1800 lékařem a zároveň (1801 až 1804) professorem fysiky na Royal Institution v Londýně. Roku 1811 stal se lékařem v nemocnici sv. Jiří a zároveň sekretářem ústavu Board of Longitude, kdež vydával Nautical-Almanac. Pojednání jeho o interferenci světla má název: On the theory of light and colours (1801).

**) *William Hopkins* (1793—1866) žil v Cambridgi; příslušné pojednání uveřejnil ve Philosoph. Trans. 5. 1835.

úhlopříček; tento případ — pro experimentování snazší — jest v obr. 127. předpokládán. Dají-li se pak konce zvukovodní *A*, *B* nad sousední pole kmitové, jako 1, 2, nebo 2, 3 aneb 3, 4, aneb 4, 1, ruší se vlny, poněvadž kmitání v obou těch polích jest opačné. Pak-li se dají nad pole kmitová, jež vespolek souhlasí, jako 1, 3 nebo 2, 4, sesilují se vlny. To se pozná jednoduše dle toho, jak se chová membrana *M*. Na tuto se nasype něco písku. V případě prvém písek zůstává v klidu, v druhém se rozvíří. Pošinováním příklopu *M* lze mnohdy dosáhnouti spoluznění sloupce vzduchového ve zvukovodech, a tím účinku na membranu značně většího.



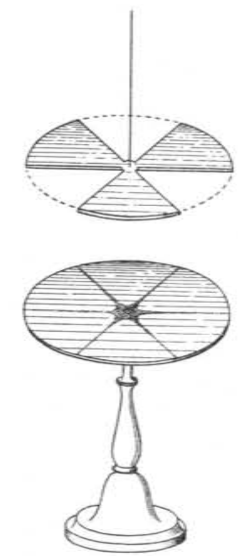
Obr. 127. Interferenční pokus Hopkinsův.

2. Interference podobné, jako v oddělených a pak spojených zvukovodech Hopkinsových lze pozorovati též ve volném vzduchu; neboť vlny, jež vznikají kmity jistých polí v určitém okamžiku positivními (na př. směrem nahoru), seslabují se kmity sousedních polí, v témže okamžiku negativními. Sesílil by se tudíž zvuk desky, kdyby se tato pole s kmity negativními kryla. Tuto myšlenku provedl *Lissajous* (1855) způsobem v obr. 128. znázorněným. K desce kruhové I, rozezvučené tak, aby se rozdělila na 6 polí radialně, dal zhotoviti stejnou desku II, radialně rovněž na 6 výseků rozdělenou, ze které však výseky liché byly vyříznuty. Kladla-li se tato deska těsně nad desku zvučící, sesílil se zvuk, když se kryly výseky buď liché nebo sudé; naproti tomu byl zvuk slabší, když se kryly z polovice výseky i sudé i liché. Proto, když se deska II otáčela nad deskou I, bylo slyšeti periodické stoupání a klesání intensity zvukové.

3. Týž zjev periodického stoupání a klesání zvuku při otáčení lze obdržeti u ladičky. Když se rozezvučí a drží v ruce

v blízkosti ucha, osou svou na př. vertikalně, jest slyšeti její ton v intensitě nenáhle sice slábnoucí, ale jinak se neměnící.

Když se však ladička kolem vlastní osy otáčí, je slyšeti, jak za jedno otočení ton čtyřikráte téměř mizí a čtyřikráte plně zaznívá; když se tedy otáčí dosti rychle, je slyšeti ton periodicky zaznívati silněji a slaběji. Pokus lze ukázati též objektivně, ladičkou na ozvučné skřínce montovanou (obr. 97.). Ladička se odšroubuje a upevní svou osou do osy centrifugalního stroje; před ladičku postaví se její ozvučná skřínka. Když se ladičkou otáčí, lze i v dálce slyšeti, jak ton periodicky mohutní a slábne, rychleji neb volněji dle toho, jak se rychle strojem otáčí. Nechá-li se ladička v postavení tom státi, kdy ton je minimalní, nastane ihned sesílení tonu, když se přes jedno rameno opatrně nastrčí trubička, na př. z kartonu, tak aby kmitání nepřekážela, na důkaz, že seslabení zvuku nastává interferencí. Místa minimalní intensity zvuku jsou čtyři hyperbolické válce, jichž ohniskové přímky padnou do vnějších hran obou ramen ladičky. Protneme-li tyto plochy rovinou na ladičky kolmou, a není-li šířka ramen příliš veliká, obdržíme za průsek téměř hyperbolu, jejíž osy souřadnicové padnou do obou rovin souměrnosti ladičky a jejíž vrcholy jsou ve středu průřezovém obou ramen ladičky. Úkaz poprvé pozoroval *Vilém Weber*.



Obr. 128. Interferenční pokus Lissajousův.

4. Postaví-li se na touž komoru vzduchovou (jako na př. v obr. 121.) dvě píšťaly, jež jsou přesně unisono, a nechá-li se zníti nejprve jedna, a pak k ní ještě druhá, nenastane sesílení tonu, jak by se očekávalo, nýbrž naopak seslabení. Jsou-li píšťaly otevřené, zaznívá silněji oktava. Píšťaly kmitají ve fasích opačných; lze toho dokázati objektivně, methodou plaménků, jak níže o tom ještě jednáme.

5. Postaví-li se proti sousedním otvorům sireny Seebeckovy dvě trubičky se stran opačných, zaznívá při otáčení sireny ton zvučně, nechá-li se proud vzduchový proti sireně jíti *buď* trubičkou jednou *nebo* druhou; naproti tomu zní ton slabě, ne-

chá-li se vzduch prouditi *oběma* trubičkami *současně*. Dokonaleji lze týž interferenční pokus ukázati dvojitou sirenou Dove-Helmholtzovou (obr. 71. pag. 139.). Vzduch nechá se nahoře i dole prouditi tou řadou, která má 12 otvorů. Oba tony znějí unisono. Hořejší komora dá se však otáčeti; lze tudíž její postavení říditi tak, aby vzduch nahoře i dole vyrážel buď současně nebo střídavě. Když vyráží současně, sesilují se oba tony; pak-li střídavě, seslabují se. Poloha vzduchové komory liší se v tomto případě od polohy v případě onom o $\frac{1}{24}$ celé otočky. Otáčení hořejší komory způsobuje se ozubeným kolem, které jest spojeno s rukovětí; převod činí 1 : 3. Aby se otočila komora o $\frac{1}{24}$, dlužno rukověť otočiti o $\frac{1}{8}$, t. j. o 45°. Když se otáčí o 360°, pak se ton 4-krát sesílí a 4-krát seslabí.

Co se dalších tonů částkových týče, seslabí se s prvým (základním) zároveň všechny liché, sesílí se však sudé; zejména oktava vynikne při seslabení tonu základního zřetelně.

§ 134. Příklady interference rozdíly dráhovými.

1. Jednoduchostí vůdčí myšlenky vyniká pokus, kterým *Desains* (1860) napodobil pokus *Youngův*, jenž jest *v optice* pokusem interferenčním *základním*. Ve skřínce, jejíž vnitřní stěny byly k zamezení odrazů vattou pokryty, umístil píšťalku o tonu vysokém, ke kteréž otvorem ve stěně dolejší vedl trubicí vzduch. Na hořejší stěně byly dva otvory A, B, k píšťale souměrně umístěné, jimiž zvuk píšťalky se šířil na venek. Na některém místě stěně, jimiž zvuk píšťalky se šířil na venek. Na některém místě M nad otvory nastalo seslabení neb sesílení zvuku dle toho, zda-li rozdíl dráhový $AM - BM$ činil lichý nebo sudý počet polovln. Ke zkoumání těchto míst interferenčních užíval vodorovné membrany s pískem. Otvory A, B byly blízko sebe, tak že rozdíl směrů AM a BM ve větší od skřínky vzdálenosti byl nepatrný. Vzhledem k tomu, že se jedná o chvění podélné, jest tato okolnost důležitou.

2. Přehlednější jest úprava pokusu, kterou udal *Quincke* (1866). Ladička budí vlny ve vzduchovodu, který se dále rozděluje ve dvě větve, z nichž jedna jest však o polovlnu delší; obě větve se pak zase spojí v jedinou, od níž jde dále spojení k uchu. Pokus lze improvisovati způsobem, který objasňuje obr. 129. Upraví se dvě stejné trubice mosazné A, A', dělící se ve dvě větve B, C a B', C'. Tyto větve se k sobě připojí trubicemi

kaučukovými, nestejné délky; rozdíl činí

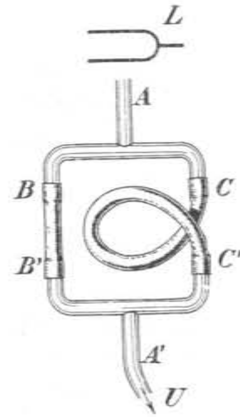
$$CC' - BB' = \frac{\lambda}{2}.$$

Před otvor A přijde ladička; od otvoru A' jde vzduchovod k uchu. Následkem interference vln v obou zvukovodech není slyšeti ton žádný, anebo aspoň slabý, ton však vynikne ihned, když se kaučuk CC' smáčkne, čímž se ve zvukovodu CC' jedna vlna zadrží, tak že působí pak vlna toliko ve zvukovodu BB'.

Zpravidla užívá se ladičky, jež dává normalní a^1. Pro tento ton jest při obyčejné teplotě vzduchu (§ 67.)

$$N = 435 \frac{1}{sec}, \quad \lambda = 0{\cdot}782\ m.$$

Polovlna činí tedy 39·1 *cm*; o tuto délku vezme se kaučuk CC' proti BB' delší.



Obr. 129. Interferenční pokus Quinckeho.

Základní myšlenku pokusu zde popsaného vyslovil *Herschel* r. 1833 a provedl později zejména *Nörrenberg*; dvojnásobný jeho zvukovod byl zasazen do zdi, dělící od sebe dvě síně; v jedné byla jako zdroj zvukový otevřená píšťala (délky 30 *cm*), v druhé byl pozorovatel. Zařízení Quinckeho jest totožné, jenom jednodušší ve svých prostředcích.

Úpravu pokusu lze v mnohém způsobu zdokonaliti. Na místě A připojí se resonator, na př. kuželovitý. Místo k uchu vede se zvukovod k manometrickému plaménku, čímž pozorování se stává objektivním.

R. Koenig upravil apparat velmi dokonale. Zvukovody jsou celé mosazné; na jedné straně se však dají prodlužovati podobným zařízením, jako jest u pozounů, totiž šoupacími trubicemi. Lze pak na zvláštním měřítku prodloužení dráhy na této straně, tedy rozdíl dráhový měřiti, a tím při úplné interferenci délku polovlny určovati. Manometrické plaménky jsou tři, jeden je spojen s jednou, druhý s druhou větví přímo, a třetí se zvukovodem spojeným. Při stejných drahách kmitají všechny plaménky stejně, což se pozoruje (jako u zpívavých plaménků) zrcadlem analysačním. Při rozdílu dráhovém o polovlnu přestane třetí plamének kmitati, druhé pak dva nekmitají souhlasně, nýbrž střídavě, majíce rozdíl fasový o polokmit. Ještě jinak lze pokus upraviti, aby se interference ukázala objektivně. Část A může obsahovati trubici *Kundtovu*, v níž způsobem v § 119. popsaným vznikají obrazce práškové; část A' může býti jako jejím pokračováním, může obsahovati trubici skleněnou, téhož zařízení jako A, jejíž délka jest taková, aby i v ní vznikaly obrazce práškové, jsou-li ve větvích dráhy BB' a CC' stejně dlouhé. Když se pak dráha CC' o polovlnu — práškovými obrazci přímo danou — zvětší, na př. kaučukem nebo zařízením pozounovým, pak v trubici A' nevznikají obrazce práškové žádné.

Z četných těchto modifikací téhož pokusu, jak byly od různých experimentatorů provedeny, jest nejlépe viděti, že methoda, ukázati akustickou interferenci rozdíly dráhovými, jest nejdokonalejší a pro experimentování a zejména pro měření nejpohodlnější.

§ 135. **Rázy; pozorování subjektivní.**

Interference zvláštního druhu vzniká tehda, kdy rozdíl fasový dvou vln není *stálým*, jak v § 133. předpokládáno, nýbrž periodicky měnlivým. Tento případ nastává, když obě vlny vznikají vibracemi o kmitočtech N_1 a N_2 sobě *velmi blízkých*. Výsledná vibrace částeček vzduchových nabývá zvláštního tvaru, jak o tom v § 11. bylo jednáno Děje se tak, jako by platil kmitočet průměrný $\frac{1}{2}(N_1 + N_2)$ a jako by při něm amplituda periodicky stoupala a klesala mezi dvěma hodnotami extremními, minimalní $r_2 - r_1$ a maximalní $r_2 + r_1$. Jsou-li amplitudy sobě rovné, stoupá a klesá amplituda výsledná periodicky od hodnoty nullové do hodnoty maximalní $= 2r$ a zpět k nullové; vibrace, časově rozvinutá, ukazuje pak tvary, jak jsou v obr. 15. a 16. (dole) znázorněny.

Výsledek tento, platný všeobecně pro vibrace jakékoli, má důležitý *význam akustický*. Zazníváli určitý ton kmitočtu N_1 a připojíme-li k němu stejně intensivní ton druhý, o *kmitočtu N_2 velmi málo rozdílném* na př. poněkud větším, slyšíme, jako by ton výšky střední *periodicky mohutněl a slábl*, sesilování činí dojem výbuchů, jež dorážejí k uchu; pravíme, že vznikají *rázy*, *záchvěje*, *zázněje*. Intensita rázů jest vzhledem k dvojnásobné amplitudě čtyřikráte větší než tonů jednotlivých; počet pak rázů R za sekundu jest dán rozdílem kmitočtů

$$R = N_2 - N_1.$$

Dle výkladu tohoto jest podmínkou rázů současné znění dvou ve výšce blízkých *tonů*. Při studiu experimentalním dlužno tudíž vyloučiti takové nástroje hudební, jež dávají *zvuky* a voliti takové, jež dávají co možná čisté tony. Na prvém místě vyhovují podmínce této ladičky, nejlépe na skřínce resonanční (obr. 97.). Volí se dvě ladičky, jež dávají unisono; jedna z nich se pak rozladí; malé závažíčko upevní se šroubem nejprve v uzlu, a pak pošinuje se od uzlů dále ke konci ramen; rozladění tím zneenáhla stoupá a s ním počet rázů při znění obou současném. Na druhém místě vyhovují oné podmínce kryté píšťaly, nejlépe varhanní pedalové, jež dávají tony velké oktavy nebo kontraoktavy; rozladění děje se pohyblivým pístem, kterým se píšťala kryje; rázy vynikají velmi mohutně. Méně dobře hodí se píšťaly otevřené, anebo obě unisonní struny polychordu horizontalního, a j. vzhledem k četným tonům harmonickým, jež dávají pro sebe též rázy, rušící rázy hlavní.

Pro studium zákona o *počtu rázů za sekundu* osvědčuje se velmi dobře polyfonní sirena Dove-Helmholtzova (obr. 71.), při kteréž může pozorovatel rozdíl kmitočtů libovolně řiditi. K tomu cíli pustí se proud vzduchu do vzduchové komory horní i dolní proti těm dvěma řadám otvorů na kotouči, na nichž jest vyvrtáno otvorů stejně mnoho, totiž 12. Znějí pak tony dva, *přesně unisono*, ať jest rychlost, jakou se sirena otáčí, jakákoli. Hořejší komora vzduchová jest však pro sebe otáčivou; k tomu slouží klika spojená s ozubeným kolem, jež zasahá do ozubeného kola vzduchové komory. Relativní počet zubů jest 1 : 3. Když se tedy otočí klika jednou kolem, otočí se komora vzduchová o třetinu svého obvodu, na němž jest 12 otvorů, tudíž o 4 otvory. Děje-li se otáčení desce sirenové vstříc, zvýší se kmitočet tonu na hořejším kotouči vznikajícího o 4, je tudíž slyšeti 4 rázy, *při čemž jest jednostejno, jakou rychlostí se sirena právě otáčí*, neb jinými slovy, *jaká jest výška tonu*.

Jest ovšem pravda, že sirenou nevzniká ton, nýbrž zvuk, v němž vedle tonu základního jest slyšeti též vyšší tony harmonické. Proto vedle rázů tonů základních vznikají též rázy jich oktav a to v počtu dvojnásobném, rázy jich duodecim v počtu trojnásobném atd. Mají-li vyniknouti jen rázy *tonů základních*, dlužno právě tyto tony co možno *sesíliti*. To se stane příklopy, v obr. 71. (dole) znázorněnými. Sesílení tonu základního děje se tu resonancí vzduchu příklopy těmi uzavřeného, a jest ovšem nejznačnější tehda, kdy ton sireny souhlasí s tonem resonančním aneb jest mu dosti blízko.

R. Koenig má za to, že rázy vznikají nejen tehda, když k tonu N_1 přistoupí ton N_2 o kmitočtu velmi málo rozdílném, nýbrž i tehda, když kmitočet N_2 jest málo rozdílným od *násobku* kN_1 kmitočtu tonu prvého. Pozorujme tyto násobky

$$N_1,\quad 2N_1,\quad 3N_1, \ldots,\quad kN_1,\quad (k+1)\,N_1.$$

Kmitočet N_2 nechť stoupá od hodnoty $N_2 = N_1$ počínajíc; rázy začínají, jich počet je větší a větší, přecházejí při velkém počtu v hukot; avšak tento zase přestává, rázy se dostavují jednotlivě, jich počet je menší a menší, když se N_2 blíží druhému násobku $2N_1$, mizí při rovnosti a opět se dostavují v počtu rostoucím, když N_2 přešlo přes $2N_1$. Ukaz se opakuje v blízkosti třetího násobku $3N_1$, rovněž čtvrtého $4N_1$, všeobecně k-tého, kN_1. Majíce úkaz všeobecně popsati, sestavme následující schema:

Násobky prvého		$kN_1,$				$(k+1)\,N_1,$	
		$\Vert$				$\Vert$	
druhý ton	$N_2\,.$	N_2	$\ldots N_2$	$\longrightarrow$	$N_2\ldots$	N_2	$\ldots N_2$
rozdíly	$\overbrace{kN_1 - N_2},$	$0,$	$\overbrace{N_2 - kN_1},$		$\overbrace{(k+1)\,N_1 - N_2},$	$0,$	$\overbrace{N_2 - (k+1)\,N_1}$
jich počet	klesá,	0,	stoupá,		klesá,	0,	stoupá,
rázy	svrchní,		spodní,		svrchní,		spodní.

Můžeme nyní, toto schema na očích majíce, říci takto: Vzrůstá-li N_2, a blíží-li se kmitočtu kN_1, je slyšeti rázy v počtu klesajícím, až přestanou při rovnosti $N_2 = kN_1$; vzrůstá-li N_2 ještě dále, je slyšeti opět rázy v počtu vzrůstajícím, jež přecházejí zponenáhla v hukot; z tohoto však vyniknou opět jednotlivě, když se N_2 blíží násobku $(k+1)\,N_1$; rázy stávají se volnějšími, přestávají, je-li $N_2 = (k+1)\,N_1$ a dostavují se znovu v počtu stoupajícím, když N_2 násobek $(k+1)\,N_1$ překročí.

Koenig nazývá rázy

$$N_2 - kN_1 \qquad \textit{spodními},$$
$$(k+1)\,N_1 - N_2 \qquad \textit{svrchními}.$$

Je-li počet rázů dostatečně veliký, vzniká dle Koeniga *ton rázový*; a to svrchní a spodní, o kmitočtech

$$kN_1 - N_2 \text{ svrchní}, \qquad N_2 - kN_1 \text{ spodní},$$

jakož i

$$(k+1)\,N_1 - N_2 \text{ svrchní}, \qquad N_2 - (k+1)\,N_1 \text{ spodní}.$$

Koenig jde však ještě dále. Může se státi, že ton spodní $N_2 - kN_1$ se přiblíží následujícímu svrchnímu $(k+1)\,N_1 - N_2$; vznikají opět rázy v počtu, který jest dán rozdílem obou, tedy

$$(k+1)\,N_1 - N_2 - N_2 + kN_1 = (2k+1)\,N_1 - 2N_2.$$

Je-li tento počet dostatečný, vzniká opět rázový ton, který Koenig zove *sekundarním*, oproti oněm *primarním*, z nichž vzniká. Sekundarní

mizí, je-li

$$N_2 = \frac{2k+1}{2}\,N_1,$$

t. j., je-li N_2 právě uprostřed mezi sousedními tony rázovými.

Při studiu tohoto výkladu připadá sama sebou myšlenka, že se při rázech od Koeniga pozorovaných jedná o rázy mezi tonem daným N_2 a mezi harmonickými tony kN_1, $(k+1)\,N_2$, prvého tonu N_1, v jehož průvodu přicházejí. Proti tomu uvádí však Koenig, že rázy ty pozoroval též u ladiček, jež nemají svrchních tonů harmonických, jakož i u krytých píšťal, při nichž není žádných sudých tonů harmonických.

Zaznívají-li dva tony N_1 a N_2 o kmitočtech téměř stejných současně, je slyšeti ton jediný, výšky průměrné $\frac{1}{2}(N_1 + N_2)$ a měnlivé intensity. Vzrůstá-li však rozdíl obou kmitočtů, nastává přece konečně *rozlišení* obou před tím jako by splývajících tonů. Jest otázka, při kterém intervallu $\dfrac{N_2}{N_1}$ toto rozlišení již jest znatelné. Otázkou touto zanášel se *Bosanquet*; nalezl povšechně hodnotu $65\frac{1}{2} : 64$, což by dalo logarithmický rozdíl 0·01006, tedy téměř dvě kommata. Intervall tento jest ostatně měnlivý dle výškové polohy obou tonů a dle jemnosti sluchu pozorovatele.

Pravidlo, že slyšíme ton N výšky střední $N = \frac{1}{2}(N_1 + N_2)$, platí jen tehda, když tony původní, ve výšce sobě velmi blízké, jsou *intensity stejné*. Jsou-li však intensity různé, na př. jeden velmi slabý proti druhému, pak nastává zvláštní úkaz *kolísání výšky výsledné*. Ton N, který slyšíme, jest při *maximu* intensity *mezi* N_1 a N_2, ale při *minimu* jest

$$N > N_2, \text{ je-li } N_2 \text{ silnější, } N_1 \text{ slabší,}$$
$$N < N_1, \text{ je-li } N_1 \text{ silnější, } N_2 \text{ slabší.}$$

V *minimu* působí tedy *slabší* ton, je-li *nižší*, positivně, je-li *vyšší*, negativně *).

§ 136. **Pokračování; pozorování objektivní.**

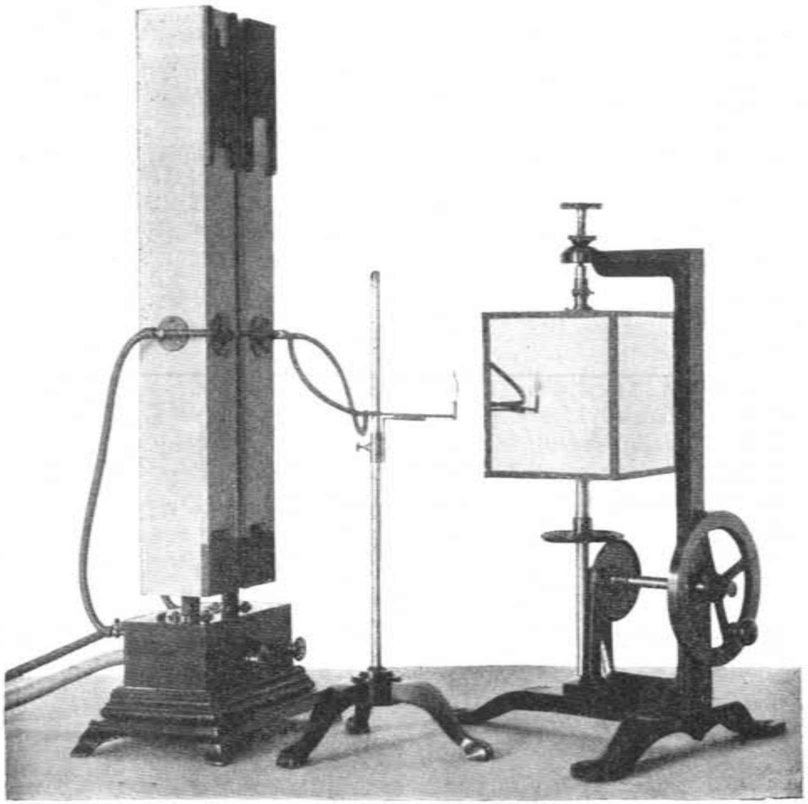
Methodu subjektivní, sledovati rázy sluchem, lze v mnohých případech doplniti methodou objektivní, jež umožňuje rázy sledovati zrakem; slyšení se tu doplňuje viděním. Takovýmto kombinováním obou method podporuje se velice hlubší poznání tohoto, pro akustiku tak významného úkazu.

U ladiček lze interferenční zjev, který jest základem rázů, učiniti patrným optickou projekcí pomocí zrcátka, jež se u každé ladičky na jednom ramenu upevní a na druhém vyváží ve způsobu, jak o něm v § 12. bylo obšírně jednáno.

---

*) v. Helmholtz, Tonempfindungen, Beilage XIV.

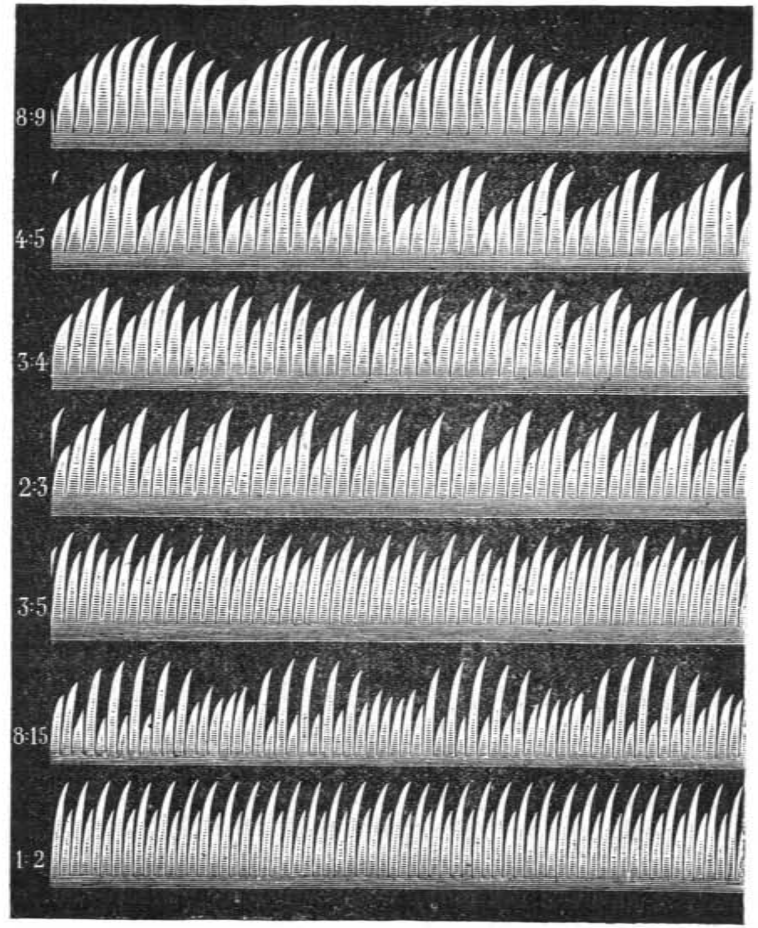
U píšťal lze týž interferenční zjev učiniti viditelným methodou manometrických plaménků. Úpravu pokusu (R. Koenig) znázorňuje obr. 130. Na společné vzduchové komoře jsou postaveny dvě otevřené, dřevěné píšťaly. Jedna jich stěna jest uprostřed provrtána, přes otvor jest napjata kaučuková membrana



Obr. 130. Objektivní znázornění rázů plaménkem manometrickým.

a kryta pouzdrem. Toto má na jedné straně vedení plynové, kterým plyn do pouzdra vstupuje, na druhé pak straně vedení další, kterým se plyn úzkou kaučukovou trubičkou vede k plamenníku. V tomto případě, kde jde o rázy, jdou od obou píšťal plynovodní kaučukové trubičky k hořáku společnému. Malý, podlouhlý plamének kmitá pak působením obou píšťal, a jeho kmity analysují se otáčivým zrcátkem. K přístroji náleží celá řada píšťal,

jichž tony jsou v jednoduchých vzájemných intervallech. V obr. 130. jsou znázorněny píšťaly, jež jsou unisono; jednu z nich lze nahraditi píšťalou jinou, která k ní dává oktavu nebo kvintu, kvartu, sextu nebo velkou tercii. Při stejných píšťalách



Obr. 131. Časové rozvinutí plaménku kmitajícího působením dvou píšťal.

lze jednu z nich rozladiti – nahoře šoupátkem, kterým se odkrývá otvor ve stěně tak, aby místo unisono zněly píšťaly v intervallu až velké sekundy; je-li místo druhé píšťaly jiná oktavová, lze tímto rozladěním obdržeti až velkou septimu. Jaký pohled poskytuje plamének působením obou píšťal kmitající v zrcadle analysačním, ukazuje obr. 131.*). Při intervallu čistém, na př. 1 : 2 jeví obraz přesně superposici kmitů jednotlivých; oktava jich dává dvakráte tolik. Je-li intervall ten pozměněn na velkou septimu, ukazují se již maxima a minima, jež se střídají v periodě krátké. Určitěji vystupuje tato periodicita při rozladění unisonity píšťal na velkou sekundu; i zde jest perioda, v níž se maxima a minima střídají, krátká, prodlouží se však, když jest rozladění menší, při čemž zároveň rázy vystupují subjektivně určitěji.

K porozumění těchto zjevů interferenčních, jak se pozorují na plaménku účinkem obou píšťal kmitajících, lze úpravu pokusu pozměniti také tak, že každá píšťala má svůj plamének zvláštní. Dají-li se plaménky na společný stojánek nad sebe, lze v zrcátku pozorovati oba současně. Pak lze intervall tonů obou píšťal viděti v relativním počtu zubů. Vrcholy těchto zubů jsou odkloněny na opačnou stranu, než se zrcadlo otáčí, anebo, jak jest lépe říci, jsou přikloněny v touž stranu, na kterou se samy zdánlivě otáčejí. Znějí-li píšťaly unisono, jest viděti, jak plaménky kmitají střídavě, naznačujíce rozdíl fasový o půl kmitu (§ 133. 4.).

§ 137. Stanovení absolutní výšky tonu na základě rázů.

Rázy dávají prostředek experimentalní velmi jednoduchý, kterým lze rozhodnouti, jsou-li dva ve výšce sobě velmi blízké anebo nominalně stejné tony, na př. dvě normalní ladičky a^1, nebo dvě píšťaly dle udání týž ton dávající, zcela přesně unisono čili nic. Jsou však též dobrou pomůckou, kterou lze i *kmitočet* daného tonu *určiti*.

1. Budiž dán ton, jehož kmitočet N_1 jest neznámý. Přibéřeme k němu ton ve výšce velmi málo odchylný, na př. vyšší, o kmitočtu N_2. Necháme pak oba tony zníti a určíme, počítajíce rázy a zároveň sekundy, mnoho-li rázů připadá na jednu sekundu, což jest rozdíl

$$R = N_2 - N_1.$$

Je-li kmitočet N_2 znám, určí se tím i kmitočet N_1. Není-li znám, což jest případ obyčejnější, hledíme určiti *intervall obou tonů*

$$n = \frac{N_2}{N_1}.$$

*) Reprodukovaný z původního pojednání R. Koeniga.

Pak vypočítáme z obou rovnic

$$N_1 = \frac{R}{n-1}, \qquad N_2 = \frac{nR}{n-1}.$$

Tuto methodu udal *Sauveur* (1700). Dle ní lze na př. určiti kmitočet píšťaly *C* na varhanách obr. 118. (v rejstříku bourdon), když se s ní nechá zníti píšťala v ladění temperovaném, *Cis* (= *Des*) a když se rázy přímo počítají. Intervall n jest při ladění temperovaném znám (§ 53.).

Ve vyšších oktavách roste počet rázů R při témž intervallu n, tak že se již nedá počítáním zjistiti. Zde by se tedy musil intervall n zmenšiti a pak zvlášť určiti.

2. Toto určení lze provésti *sonometricky*, na př. vertikalním monochordem, poněvadž zde intervall dvou tonů je stanoven buď *zákonem o délkách* při témže napjetí, nebo *zákonem o napjetí* při téže délce. Lze tedy experimentovati dvojím způsobem. K danému tonu N_1 určí se ton monochordu přesně unisono a odečte se délka struny L_1. Na to se pošine kobylka monochordu mikrometricky o délku ΔL, tak aby vznikl ton na př. N_2 poněkud vyšší, ale tak blízký tonu danému, aby se rázy daly počítati. Tím způsobem určí se R a určí se i n dle zákona

$$n = \frac{L}{L - \Delta L} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta L}{L}},$$

tudíž přibližně

$$n = 1 + \frac{\Delta L}{L},$$

odkudž pak plyne

$$N_1 = R\,\frac{L}{\Delta L}, \qquad N_2 = R\,\frac{L}{\Delta L} + R.$$

Jinak lze též tím způsobem experimentovati, že se zvýšení tonu docílí zvýšením napjetí P o ΔP. Pak jest

$$n = \sqrt{\frac{P + \Delta P}{P}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta P}{P}},$$

tudíž přibližně

$$n = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\Delta P}{P},$$

odkudž pak plyne

$$N_1 = 2R\,\frac{P}{\Delta P}, \qquad N_2 = 2R\,\frac{P}{\Delta P} + R.$$

Přibližné vzorce tyto vystačí v praxi úplně; jen v případech výjimečných, na př. při hlubokých tonech, bylo by nutno počítati dle vzorců přesných. Výhodou jest pokaždé konati pozorování dvě, totiž voliti $\varDelta L$ jednou negativně, po druhé positivně, anebo $\varDelta P$ jednou positivně, po druhé negativně. Methodu v podstatě udal *Robinson* 1822.

3. Methoda předešlá vyžaduje zvláštní péče pro stanovení intervallu N a vedle toho ovšem též pro stanovení počtu rázů R. *Jindřich Scheibler* zjednodušil věc tím způsobem, že volil za intervall n takový, který není třeba teprve určovati, nýbrž, který je sluchem velmi přesně dán, totiž intervall *oktavy*

$$\frac{N_2}{N_1} = n = 2.$$

Poněvadž však potom rozdíl

$$N_2 - N_1 = R$$

jest příliš veliký, než aby se dal přímo určiti, použil k jeho určení *interpolace*. Mezi tony N_1, N_2 vložil řadu tonů N', N'', N''', . . . , $N^{(k)}$ takových, aby první z nich byl velmi blízký tonu N_1, poslední z nich $N^{(k)}$ velmi blízký tonu N_2 jakož i, aby sousední v řadě byly sobě velmi blízké. Pak lze počítati rázy při kombinaci dvou a dvou tonů a určiti tak rozdíly

$$\begin{aligned} N' - N_1 &= R' \\ N'' - N' &= R'' \\ N''' - N'' &= R''' \\ &\vdots \\ N_2 - N^{(k+1)} &= R^{(k)}. \end{aligned}$$

Sečtením rozdílů těchto vyjde

$$N_2 - N_1 = R,$$

kdež značí R součet všech rozdílů jednotlivých. Poněvadž jest pak $n = 2$, vychází zcela jednoduše

$$N_1 = R, \qquad N_2 = 2R.$$

Tony N_1 a N_2 byly specialně dány *ladičkami*

$$N_1 = a = 220 \frac{1}{sec},$$

$$N_2 = a^1 = 440 \frac{1}{sec}.$$

Mezi ně interpoloval 54 ladičky, tak aby dvě sousední dávaly dohromady znějíce asi 4 rázy, dle orientační rovnice

$$\frac{440 - 220}{4} = \frac{220}{4} = 55.$$

Jednotlivých rozdílů R', R'' . . . musí pak býti 55, tedy ladiček všech 56, tudíž interpolovaných 54. Kmitočet všech těchto ladiček byl pak přesně určen. Tak vznikl *tonometr*, jaký i dnes zoveme *Scheiblerův*. Měl pak význam všeobecnější. Jakýkoli ton N mohl býti postupem oktavovým uveden do intervallu a . . a^1 a zde pak srovnáván se dvěma ladičkami, mezi něž svou výškou padl, a dle rázů z obou určen.

Aby převodu postupem oktavovým nebylo třeba, sestrojil *Koenig* svůj *velký tonometr*, v němž ladičky postupují od výšky 16 až 21845 kmitů.

4. Jinou methodu interpolační udal *Töpfer* (1842). Do oktavy A . . . a interpoloval jen tři tony, tvořící postupně velké tercie, dle relativních čísel

$$1, \ \frac{5}{4}, \ \left(\frac{5}{4}\right)^2, \ \left(\frac{5}{4}\right)^3, \ 2.$$

Rozdíl obou posledních tonů činí vzhledem k tonu základnímu

$$2 - \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{128-125}{64} = \frac{3}{64}.$$

Je-li základním tonem $A = 108{\cdot}75$, vychází

$$\frac{3}{64} \cdot 108{\cdot}75 = 5{\cdot}1.$$

Tolik rázů za sekundu dává tedy předposlední interpolovaný ton se závěrečným a. Tyto rázy lze počítati, a pak dle známých intervallů určiti absolutní výšku tonů všech.

§ 138. **Zkouška principu Dopplerova na základě rázů.**

Rázy poskytují možnost zkoumati správnost principu Dopplerova velmi citlivě. Může se jich použiti několikerým způsobem.

1. Buďtež dány na skřínkách ozvučných dvě ladičky na př. a^1, jež jsou *přesně unisono*. Když je pozorovatel vedle sebe postaví a smyčcem rozezvučí, slyší *jednotný ton*, ale rázů neslyší žádných. Vezme-li však jednu z ladiček do rukou a vzdaluje-li od druhé rychlostí b, *slyší zřetelně rázy*. O citlivosti této methody poučí jednoduchý rozpočet. Rychlost zvuku za obyčejných po-

měrů jest 340 $m|sec$. Ton ladičky, od které se pozorovatel vzdaluje, zaznívá ve výšce snížené

$$435 \cdot \frac{340 - b}{340};$$

rozdíl v kmitočtech proti ladičce, kterou béře pozorovatel s sebou, tedy počet rázů, jest dán výrazem

$$R = 435 - 435\,\frac{340 - b}{340} = 435 \cdot \frac{b}{340}.$$

Číselně vychází:

$$b = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots$$
$$R = 1{\cdot}28, \quad 2{\cdot}56, \quad 3{\cdot}84, \quad 5{\cdot}12, \ldots.$$

Vidíme tudíž, jak i při rychlostech skrovných, (jako na př. 2 $m|sec$), počet rázů jest dostatečný, (5 za dvě sekundy), aby mohl velmi dobře býti pozorován. Je-li ton vyšší, všeobecně N, jest počet rázů

$$R = N\,\frac{b}{340},$$

tedy přiměřeně větší.

2. Jedinou ladičkou lze provésti týž pokus, když se na místo ladičky druhé volí její akustický obraz, t. j. když se pozorují vlny od rovné stěny odražené. Obr. 95. ukazuje ladičku značnější tloušťky, s rukovětí; ladička dává kmitočet okrouhle 2000 $1|sec$. Drží-li se proti stěně klidně, slyší pozorovatel jednotný ton; naproti tomu slyší rázy, když rukou pohybuje ladičkou proti stěně nebo od stěny.

§ 139. **Ton differenční; skizza historická.**

Dva tony, nižší o kmitočtu N_1 a vyšší o kmitočtu N_2, dávají, současně znějíce, za určitých podmínek podnět ke vzniku *třetího tonu*, jehož kmitočet jest dán rozdílem $N_2 - N_1$ obou kmitočtů daných. Zvláštní zjev tento pozoruje se velmi dobře u některých rejstříků varhan; hraje-li zde někdo dvojzvuky, slyší, jako by zazníval současně nějaký hlas třetí. Poněvadž pak varhaníci, ladíce varhany, zkoušejí správnost ladění ve dvojzvucích, jest pochopitelno, že první, kdož tyto tony pozorovali, byli varhaníci. Udává se, že *Jiří Sorge* (1703—1778), varhaník v Lobensteinu (v knížectví Reuss) uveřejnil první o těchto tonech zprávu, v pojednání z roku 1744, v němž (ve formě dialogu) podává návod k ladění, zejména vzhledem k hudební temperatuře. Samostatně objevil je *Romieu*, mathematik a člen akademie v Montpellieru, jenž v pojednání z roku 1751 nazval úkaz ten velmi význačně: „Phénomène de troisième son“ (Úkaz třetího zvuku). V širší známost uvedl tony differenční *G. Tartini* *), jenž v pojednání z roku 1756, „Trattato di musica“, na tonech differenčních založil zvláštní soustavu harmonie; dle něho nazývají se ty tony často „Tartiniho“. Nyní je zoveme *kombinačními* nebo určitěji *differenčními*.

K demonstrování tonu differenčního hodí se velmi dobře dvě píšťalky (na př. Schmidtovy), jež dávají tony v oktavě dvoučárkované; na př. tony c^2 (1) a f^2 ($\frac{4}{3}$), k nimž jest tonem differenčním f ($\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$). Rovněž tak dvě ladičky, jichž tony jsou v téže poloze výškové. Velmi dobře vystupuje differenční ton, když se u dvou stejných ladiček, jako jsou na př. ladičky a^1 na resonančních skříňkách v obr. 97., hrají jejich *první tony svrchní*; tyto zaznívají velmi *jasně* a *ostře*, a jsou *vysoké*; poněvadž se pak z pravidla od sebe rozeznávají (§ 105.) na př. o půl tonu neb i více, dávají hluboký, velmi zřetelný ton differenční. Také vysoké tony tyčí podélně třených hodí se k tomu účelu. Tak zvané Tyrolské zvonky, jichž příčný řez jest ellipsovitý, dávají tony dva, dle toho, kde se paličkou udeří anebo smyčcem trou, dávají však též velmi dobře differenční ton obou oněch jednotlivých. *Koenig* sestrojil zvláštní přístroj, při němž dvě delší skleněné tyče se trou současně vlhkým suknem upraveným na obvodu kola, tak že oba vysoké tony znějí *nepřetržitě*. Přístrojem tím lze pozorovati po případě též rázy anebo tony differenční dle toho, zda-li se do apparatu zasadí tyče o tonech velmi blízkých nebo tyče o tonech odlehlejších. Velmi dobře lze tony differenční slyšeti u polyfonní sireny Dove-Helmholtzovy, když se nechají zníti dva tony sobě blízké, zejména, když oba tony vznikají při téže komoře vzduchové.

Výšku tonu differenčního určil *Tartini* pravidlem zvláštním. Je-li intervall n obou tonů N_1 a N_2 vyjádřen nejmenšími celými čísly m_1 a m_2, jest ton differenční dán číslem 1. Též

*) *Giuseppe Tartini* (1692—1770), narozen v Piraně v Istrii. Průběh jeho života byl dosti dobrodružný. Jako znamenitý virtuos na housle povolán byl též r. 1723 do Prahy, aby koncertoval při slavnostech korunovačních císaře Karla VI. načež setrval tři léta ve službách hraběte Kinského. Působil jako umělec i jako učitel, založiv r. 1728 proslulou školu pro hru na housle v Padui. Užívá též názvu: „Del terzo suono nella natura.“

Chladni souhlasil v této příčině s Tartinim. Jest patrno, že pravidlo toto tehda je správné, když ve zlomku, udávajícím relativní výšku n, čitatel jest o 1 větší než jmenovatel. Vskutku jest tomu tak u veliké většiny intervallů a to právě hlavních, jako: $^9|_8$, $^6|_5$, $^5|_4$, $^4/_3$, $^3|_2$, $^2|_1$.

Správný zákon o tonu differenčním poznal (roku 1832) *Gustav Hällström* (1775—1844, prof. fysiky na univ. v Helsingforsu). Zároveň vyslovil domněnku o *differenčních tonech řádu vyššího*, čímž vysvětliti hleděl zjev, který již dříve *Th. Young* pozoroval, že totiž je někdy slyšeti tony differenční dva.

Z tonů daných obdržíme differenční ton řádu prvého, tento dává opět s danými differenční tony řádu druhého, jak patrno ze schematu

$$\begin{array}{ccc} N_2, & & N_1 \\ & N_2 - N_1 & \\ \hline N_2 - (N_2 - N_1), & & (N_2 - N_1) - N_1 \\ = \quad N_1 & , & N_2 - 2\,N_1 . \end{array}$$

Všeobecný výraz pro ton differenční jest tudíž

$$bN_2 - aN_1.$$

Proti této theorii o differenčních tonech řádu vyššího činil námitky zejména *Poggendorff* (1834) z důvodů theoretických. *Helmholtz* ukázal, že takové differenční tony vyššího řádu nevznikají, když původně jsou dány čisté *tony*, za to však že mohou vznikati, když jsou dány *zvuky*, v nichž jsou zastoupeny též *harmonické tony* o kmitočtech aN_1, bN_2, kdež jsou a, b celá čísla 1, 2, 3,... Vzhledem k tomu jest pak patrno, že differenční ton

$$bN_2 - aN_1$$

vzniká z vyšších tonů harmonických.

„Při jednoduchých tonech lze zřetelně slyšeti jen takové hlubší tony kombinační, jichžto kmitočet se rovná rozdílu kmitočtů tonů primarních; jestliže vedle toho existují kombinační tony jiných řádů, jsou příliš slabé, než aby mohly při mírné síle primarních tonů býti uchu slyšitelnými. Jestliže při složených tonech kombinační tony vyšších řádů mnohdy velmi zřetelně vystupují, dlužno je za kombinační tony vyšších tonů vedlejších prohlásiti“ (v. Helmholtz 1856).

§ 140. Tony kombinační.

Původní názor o původu tonu differenčního, kterýž při současném znění tonů N_1 a N_2 je slyšeti, vycházel od vzniku rázů. Vskutku jest názor tento velmi blízký. Počet rázů jest dán rozdílem $N_2 - N_1$ a týmž rozdílem jest dána výška tonu differenčního. Můžeme tedy souditi takto. Pokud jest rozdíl $N_2 - N_1$ malý, na př. 5 až 10, lze rázy velmi dobře rozeznávati *jednotlivé*, tak jako lze u sireny Savartovy při malé rychlosti otáčení slyšeti nárazy lístku na zuby *jednotlivé*. Když se však onen rozdíl zvětšuje, vzniká drsnost souzvuku, jež však ponenáhlu se vyrovnává, přecházejíc v hukot, ze kterého se dostavuje ton nový, differenční. Tento názor měl zejména *J. L. Lagrange* jakož i *Th. Young*. Dle toho byly by tony differenční vlastně tony *rázovými*.

Proti názoru tomu činil podstatné námitky *Helmholtz**). Týž pozoroval, že za jistých poměrů ze dvou tonů primarních N_1 a N_2 vzniká ještě *jiný* kombinační ton, $N_1 + N_2$, který zove *summačním*. Lze jej slyšeti dobře u píšťal varhanních, když se ucho dá těsně před ústa obou píšťal; dobře jest, nechá-li se zníti nejprve píšťala o tonu vyšším a přidá-li se pak k ní druhá o tonu nižším; vznikne pak ton třetí výšky větší. Nejlépe jej dává polyfonní sirena Dove-Helmholtzova, užívá-li se tonů na témže kotouči sireny vznikajících. Při tom ovšem dlužno vždy pamatovati, zda-li ton summační nekoinciduje s některým tonem differenčním vyššího řádu.

Všeobecně lze tuto otázku o eventualní koincidenci tonu summačního s tonem differenčním vyššího řádu takto rozhodnouti. Má-li býti

$$N_1 + N_2 = bN_2 - aN_1,$$

dlužno, aby intervall tonů primarních byl určen výrazem

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{a+1}{b-1},$$

t. j. aby byl dán zlomkem zakončeným. U tonů, jež Helmholtz uvádí jako $^2/_1$, $^3/_2$, $^4/_3$, $^5/_4$, $^6/_5$, $^8/_5$, $^7/_4$ jest podmínka tato vyplněna. Tak na př. platí vztah

$$1 + \frac{3}{2} = 3 \,.\, \frac{3}{2} - 2 \,.\, 1.$$

*) Příslušné pojednání má název „*O tonech kombinačních*“ a vyšlo v Pogg. Annalech roku 1856, svazek 99, pag. 497. Zde rozhoduje spisovatel též otázku o tonech kombinačních vyššího řádu.

t. j. summační ton primy a kvinty jest differenčním mezi duodecimou a oktavou primy. Při sireně jest intervall n dvou tonů *vždy* dán *poměrem celých čísel*, totiž poměrem počtu otvorů. Proto *mathematicky* jest koincidence tonu summačního s tonem differenčním vyššího řádu vždy možná. *Fysikalně* dlužno však pamatovati, že harmonické tony, řadově velmi daleké, jsou pro vznik tonů differenčních příliš slabé.

Jak řečeno, byla existence tonů summačních *východištěm* námitek, jež Helmholtz proti theorii tonů rázových činil. K tomu družily se však ještě důkazy jiné. Rázy v počtu 30 slyšíme jako drsnost souzvuku, ale differenční ton výšky 30 zaznívá hladce. Rázy je slyšeti i u tonů velmi slabých, nikoli však tony differenční. Tyto, jakož i tony summační, vznikají jenom, když jsou tony primarní silné. To předpokládá kmitání v amplitudách značnějších. Princip superposice vln předpokládá však amplitudy velice malé. Dlužno tudíž *theoreticky vyšetřiti*, jak se utváří stav vlnění, kdy podmínce této není vyhověno, kdy tedy zejména výchylky jsou tak značné, že nelze urychlení klásti úměrným *prvé mocnosti* výchylky, nýbrž, kde ještě dlužno přibrati i *druhou mocnost*. Helmholtz provádí pro tuto supposici analytický rozbor a tímto dokazuje theoreticky existenci tonů kombinačních jak differenčních tak summačních. Zároveň ukazuje počtem, že amplituda tonů summačních jest značně menší než differenčních.

Přibližně mají se tyto amplitudy k sobě jako výrazy

$$\left(\frac{1}{N_1 + N_2}\right)^2 : \left(\frac{1}{N_2 - N_1}\right)^2;$$

proto jsou intensity obou tonů kombinačních v poměru

$$\left(\frac{1}{N_1 + N_2}\right)^4 : \left(\frac{1}{N_2 - N_1}\right)^4.$$

Tak na př. při primě a kvintě vychází pro poměr intensit tonu summačního a differenčního výraz

$$\left(\frac{1}{1 + {}^3|_2}\right)^4 : \left(\frac{1}{{}^3|_2 - 1}\right)^4 = \frac{1}{625}.$$

Ton summační jest 625-kráte slabší než differenční. Theorie poukazuje zároveň na možnost summačních tonů řádů vyšších; ovšem že intensita těchto tonů jest zase ještě daleko menší.

Položíme-li v § 4. místo rovnice

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -hy$$

za základ počtu rovnici, kterou se i čtverec elongace y přibírá, totiž

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = ay + by^2,$$

vzniká při elongacích positivních $(+y)$ jiná síla než při negativních $(-y)$; neboť změnou znamení výraz čtvercový by^2 zůstává nezměněným. Jsou pak proti sobě síly

$$-ay + by^2, \qquad ay + by^2.$$

V tom jest obsažena *asymmetrie* ve smyslu mathematickém. Helmholtz poukazuje na to, že v ústrojí sluchovém jest podobná *asymmetrie* ve smyslu *fysikalním*, poněvadž bubínek ušní jest kladívkem jednostranně zatížen.

Důležitou a zajímavou jeví se býti otázka, zda-li a pokud tony kombinační mají existenci *objektivní*, ve vlnění vzduchu, anebo, zda-li vznikají jen *subjektivně*, v našem uchu. Helmholtz zkoušel, za jakých podmínek reagují *membrany* anebo *resonatory* na tony kombinační. Ukázalo se, že tony kombinační lze prostředky těmito *objektivně* dokázati, když *oběma* původními tony nebo zvuky se uvádí *tatáž hmota vzduchová v prudší chvění*. Tak jest tomu u sireny Dove-Helmholtzovy, když oba tony vznikají při *téže komoře vzduchové*, podobně u harmonia, kde rovněž pro všechny tony je *společná komora vzduchová*. Když však tony původní vznikají ve hmotách vzduchových od sebe zcela oddělených, na př. hrají-li se dva tony na dvou houslích, znějí-li dvě píšťaly na dvou od sebe oddělených komorách vzduchových a pod., pak jest objektivní existence tonů kombinačních pochybnou. Tony differenční, kteréž pak slyšíme, vznikají *subjektivně* teprve v uchu našem, kde obě oddělené vlny se stýkají. Aby se rozdíl tento též jménem zřetelně vyjádřil, označují se tony differenční subjektivní jakožto tony *Tartiniho*, ony pak objektivní jakožto tony *Helmholtzovy*.

Existence tonů Tartiniho, kteráž jest nepochybná, ukazuje, že theorie Helmholtzova o vzniku tonů kombinačních vyžaduje ještě bližšího vyšetření. Jest pravda, že tony differenční vznikají za podmínek jež theorie tato předpokládá, ale není pravda, že by tony differenční nemohly vzniknouti i bez těchto podmínek. Jako slyšíme záchvěje, i když tony, jimiž se způsobují, jsou velice slabé, tak slyšíme i ton differenční, i když příslušné tony jsou intensity mírné. Z toho pak vyplývá, že názor, dle něhož rázy při veliké frekvenci přecházejí v ton, má přece v sobě mnoho pravdě podobného.

§ 141. Hudební význam tonů kombinačních.

O hudebním významu tonů kombinačních, zejména differenčních — neboť summační jsou příliš slabé — byla již na svém místě (§ 47.) učiněna zmínka. Tony differenční *dotvrzují dokonalost souzvuku velkého akkordu* při ladění *přirozeném*; za to při ladění *temperovaném* nebo *Pythagorejském* vystupují *rušivě* (§ 55.). V prvé řadě platí to u varhan; zejména v blízkosti anebo uvnitř varhan jeví se dissonance tyto dosti značně. Též u harmonia. Tony differenční vynikají zde velmi dobře; hraje-li někdo ve dvojzvucích, zdá se, jako by třetí nějaký hlas zazníval spolu; zejména, když se dvojzvuky mění chromatickým postupem jednoho tonu, co zatím druhý zůstává stálým, jest slyšeti, jak třetí hlas se oddaluje nebo přibližuje, dle toho, jde-li druhý hlas do hloubky nebo do výšky. Konsonantním však tento hlas není, poněvadž ladění není přirozené, nýbrž temperované. Poměrně nejméně vadí tony differenční u klavíru. Ton zde v plné intensitě zazní jen krátce, jeho doznívání jest slabé.

Zajímavo jest studovati, jak se při ladění přirozeném differenční tony mění *obraty* hlavního akkordu durového i mollového. Věc vynikne dobře z tabellarního sestavení, jak zde následuje.

Tony differenční v obratech akkordů.

Trojzvuk durový.

	kvintakkord	sextakkord	kvartsext-akkord
Tony primarní	$1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2$	$\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$
Tony differenční sousedních tonů	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
Ton differenční krajních tonů	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1.

Trojzvuk mollový.

	kvintakkord	sextakkord	kvartsext-akkord
Tony primarní	$1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}, \frac{3}{2}, 2$	$\frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5}$
Tony differenční sousedních tonů	$\frac{1}{5}, \frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$
Ton differenční krajních tonů	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$.

V akkordu *durovém* a jeho *obratech* vystupují tedy differenční tony, jež jsou konsonantní s tony primarními. Zejména ve kvintakkordu a kvartsextakkordu sesiluje se jimi v hlubších oktavách tonika; při sextakkordu též dominanta. Proto jest oprávněn název: „trias harmonica perfecta“, trojzvuk harmonický *dokonalý*. V akkordu *mollovém* a jeho *obratech* jsou některé differenční tony konsonantními, jiné však dissonantními. Vystupují zde tony differenční pro mollový akkord charakteristické:

dolejší oktava toniky

$$\frac{1}{2} = 1 : 2$$

malá sexta $\left(\frac{8}{5}\right)$ v dolejší oktavě prvé, druhé a třetí

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{5} : 2$$

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{5} : 4$$

$$\frac{1}{5} = \frac{8}{5} : 8$$

malá tercie $\left(\frac{6}{5}\right)$ v dolejší oktavě druhé

$$\frac{3}{10} = \frac{6}{5} : 4$$

malá septima $\left(\frac{9}{5}\right)$ v dolejší oktavě prvé

$$\frac{9}{10} = \frac{9}{5} : 2.$$

Tony differenční náležejí tedy vesměs stupnici diatonické mollové ($\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$). Největší dissonanci dává malá sexta ($\frac{8}{5}$) vedle kvinty ($\frac{3}{2}$). Při tom jest však malá sexta sama o sobě konsonantní s primou a malou tercií, tvoříc akkord durový této malé sexty v druhém obratu, dle vztahu

$$\frac{4}{5},\quad 1,\quad \frac{6}{5},$$

$$1,\quad \frac{6}{5},\quad \frac{8}{5}$$

Vzniká tudíž dissonance zvláštního druhu, naznačující hudební neklid, a vyžadující rozvedení ve smyslu durovém nebo mollovém. Dissonancí takových, jež hudebně jsou velice působivé, užíval zejména *Giovanni Palestrina* (1514—1594) „Musicae princeps", jak hlásá jeho pomník v dómu sv. Petra v Římě.

§ 142. **Tony variační.**

Dva tony, jeden o kmitočtu N_1 a druhý o kmitočtu N_2 velmi málo rozdílném, na př. větším, dávají záchvěje, jichž počet za sekundu jest

$$R = N_2 - N_1.$$

Tyto záchvěje znamenají *změnu intensity* tonu, jehožto kmitočet N jest *průměrným* obou daných, dle vzorce

$$N = \tfrac{1}{2}(N_1 + N_2).$$

Jest to tedy tak, jako bychom z daných tonů konstantní intensity, jako složek, obdrželi ton měnlivé intensity, jako výsledný. Jestliže úkaz takto pojímáme, pak vzniká otázka, zda-li platí též úkaz obrácený. Budiž dán ton, jehož výška jest N a jehož intensita se za sekundu R-kráte mění. Jest tedy otázka, zda-li ton takový se v pocitu našem rozloží ve své složky, totiž ve dva tony intensity stálé o kmitočtu

$$N' = N - \frac{R}{2}$$

$$N'' = N + \frac{N}{2}.$$

Dle dosavadního stavu věcí dlužno otázku tuto zodpověděti kladně (Koenig, Radau). Tony, jež vznikají periodickou změnou intensity tonu daného, zovou se *variační*.

Udává se několikerý způsob, jakým lze tony variační pozorovati. *Koenig* sestrojil k pokusu zvláštní sirenu, podobnou sireně Seebeckově, jejíž otvory mají průměr periodicky se měnící. Vede-li se proti otvorům proud vzduchu, vzniká ton intensity periodicky měnlivé a tím tony variační. Jiný pokus, kterýž rovněž Koenig udal, záleží v tom, že se před ladičku, jež dává ton mírné výšky (na př. c^1), postaví deska s velkými otvory; při otáčení desky zní ton ladičky dle polohy otvorů silněji nebo slaběji. K sesílení tonu slouží válcový resonator, vložený mezi ladičku a otáčivou desku. *Beetz*, užívaje interferenčního pokusu *Lissajousova* (§ 133.), nechal kruhovou desku s výřezy rychle otáčeti nad kruhovou deskou rozzvučenou.

Podobně lze užiti interferenčního zjevu u ladičky (§ 133.). K účelu tomu volí se nejlépe některá z větších ladiček, jež jest montována na resonanční skřínce, na př. ladička a v obr. 97. znázorněná. Ladička se od skřínky odšroubuje a nasadí do osy centrifugalního stroje; před ladičku postaví se těsně otvor resonanční skřínky, položené na vedlejším stolku.

Když se ladička rozezvučí a uvede ve volnou rotaci, lze slyšeti, jak se ton periodicky sesiluje a seslabuje. Točí-li se rychleji, je slyšeti, jak se ton ladičky jako by rozdělí ve dva, jeden hlubší a druhý vyšší. Vadou jest, že ton ladičky rychle slábne, tak že oba tony jen v blízkosti lze slyšeti. Otáčí-li se na př. ladičkou 10-kráte za sekundu, mění se intensita tonu 40-krát. Kmitočet ladičky jest 217·5 1|*sec*. Vznikají tudíž variační tony

$$N' = 217{\cdot}5 - \frac{40}{2} = 197{\cdot}5$$

$$N'' = 217{\cdot}5 + \frac{40}{2} = 237{\cdot}5.$$

Intervall obou jest

$$\frac{N''}{N'} = \frac{237{\cdot}5}{197{\cdot}5},$$

což dává číselně 1·2025

logarithmicky 0·08010.

Intervall rovná se velmi blízce malé tercii ($\frac{6}{5}$). Aby se úkaz nekomplikoval ve smyslu Dopplerova principu, drží se ucho v ose rotační ladičky.

Velmi dobré výsledky dává methoda, jež se zakládá na pozorování v § 104. uvedeném. Zakryje-li se otvor resonanční skřínky u ladičky, utlumí se resonanční ton a ladička zní slaběji. Jde tedy o to, aby se toto zakrývání otvoru dálo periodicky, s frekvencí dostatečnou. K tomu účelu upevní se na elektromotoru v obr. 69. znázorněném obdélná deska z kartonu, vhodné délky a šířky.

Ladička postaví se pak otvorem své resonanční skřínky tak, aby onen pruh při každém svém otočení dvakráte otvor právě kryl. K pokusu osvědčila se ladička c^2 o kmitočtu 512 dle ladění fysikalního. Resonanční skřínka má délku 15 *cm*, otvor její má šířku 7 *cm* a výšku $3\frac{1}{2}$ *cm*. Dle toho upravena ona deska kartonová, na elektromotoru o délce 28 *cm* a šířce 6 *cm*. Jakmile se elektromotor uvede v činnost a ladička rozezvučí, lze velmi zřetelně slyšeti, jak na místě původního tonu ladičky vzniká celý akkord. Pokus jest proto pohodlný, poněvadž lze mezi pokusem ladičku vždy smyčcem opět rozezvučeti. Ještě lépe jest, když se ladička elektromagneticky udržuje ve znění stálém. Rheostatem lze rychlost, jakou se otáčí elektromotor, v jistých mezích měniti, čímž pokus nabývá větší rozmanitosti.

§ 143. Spoluznění a resonance.

Působí-li na nějaké těleso pružné vnější síla periodicky, na př. náraz pravidelně se opakující, uvádí se těleso to v pohyb téže periody, v jaké ona síla účinkuje. V akustice nastává případ tento vždy, kdykoli působí těleso zvučící svými pravidelnými výchvěji na jiné, kteréž jest rovněž svou pružností chvění schopno. Mnohdy děje se tak přímo, častěji nepřímo vzduchem, kterýž se rozvlní znějícím tělesem, čímž se stává, že částečky vzduchu kmitajíce v blízkosti pružných útvarů podélných nebo plošných tyto rovněž ve chvění uvádějí. Otázka, zda-li se působením tímto ve chvění vskutku uvedou, závisí na některých podmínkách, jimiž jest též povaha tohoto spoluchvění určena.

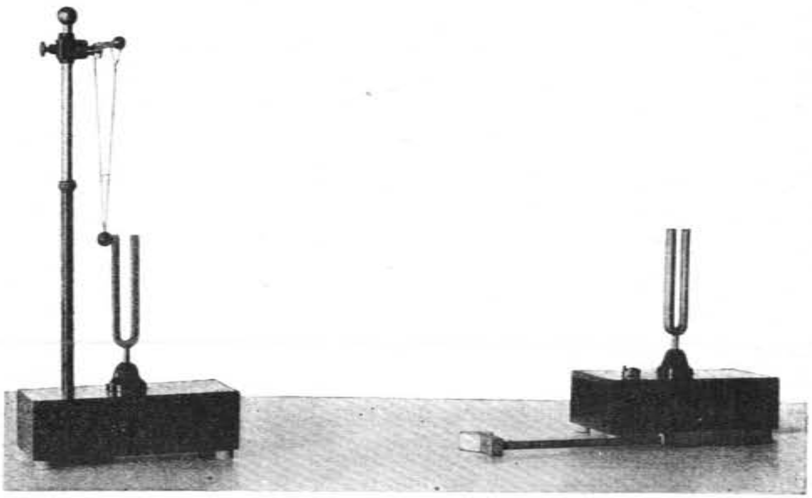
Tělesa pružná mají svou *vlastní periodu* chvění, jež jest podmíněna jich pružností a rozměry. Souhlasí-li tato perioda vlastní s periodou vnější síly, jest tím vyplněna nejlépe podmínka spoluchvění; pravíme, že chvění jest *soudobým, synchronním*. Amplituda spoluchvění jest v tomto případě největší. *Spoluznění*, jež tímto způsobem vzniká, trvá, *i když síla vnější působiti*

přestala; nastává úkaz *doznívání*. Mnohdy postačí, i když obě periody jsou aspoň přibližně stejné; ovšem že amplituda spoluchvění jest menší. Ale i tehda, když periody jsou různé, může nastati spoluchvění, když kmity dle *vlastní pružnosti* tělesa vznikající *rychle se tlumí*. Pak nové a nové nárazy ovládají pohyb samy, nenastává interference s pohyby vlastními tělesa, *kteréž* následkem toho *vykonává kmity periody vnější*. Nastává *ozvuk, resonance*. Těleso působí pak oproti danému tělesu znějícímu jako ozvučník, resonator. *Doznívání* však v tomto případě *nastati nemůže*, právě vzhledem ke značnému útlumu vlastních vibrací. Rozumí se samo sebou, že oba tyto případy spoluchvění nejsou ve skutečnosti ostře od sebe odlišeny. Proto také nerozlišují se ostře výrazy spoluznění a ozvuk čili resonance, poněvadž vskutku mají mnoho společného. Známkou nejvíce charakteristickou jest *doznívání* jakožto příznak malého útlumu.

Příkladů k tomu, co zde všeobecně řečeno, nalézáme v akustice množství veliké; již tím jest důležitost těchto zjevů, zejména pak ozvuku, resonance, pro celou akustiku naznačena. Četné příklady byly uvedeny již v jednotlivých odstavcích na místě příslušném.

Příklad pro spoluznění nejvíce význačný podávají dvě ladičky stejné úpravy a stejného tonu, na př. tonu a^1 nebo c^2, montované na ozvučných skřínkách. Když se rozezvučí jedna, začne zníti i druhá, třebas byla ve značné vzdálenosti, na př. 10 metrů neb i více. Pokus lze provésti subjektivně nebo objektivně. Když se první ladička nechá chvíli zníti, utlumí se, načež je slyšeti, jak zní druhá. Může však ke druhé ladičce přiléhati lehká dřevěná kulička bifilarně zavěšená (obr. 132.). Jakmile prvá ladička se rozezvučí, jest viděti, jak v téže chvíli kulička se začíná odrážeti, na důkaz, že ladička druhá se uvádí ve spoluznění. V *projekci optické* lze úkaz *velmi citlivě* uspořádati. Pokusem tímto jest podán *význačný* příklad *kmitání synchronního*; nepatrnými nárazy kmitajících částeček vzduchu v okolí ladičky druhé uvádějí se ramena této ladičky, o hmotě poměrně velmi značné, ve spoluchvění, poněvadž jich vlastní perioda *přesně souhlasí* s periodou vnější, čímž nepatrné účinky jednotlivých nárazů se mohou summací stupňovati. Právě tak může i těžké kyvadlo se rozkývati nárazy jednotlivě sotva znatelnými, když tyto nárazy se opakují v témže tempu, v jakém kyvadlo samo kývá. Podobně dovede i slabý hošík rozhoupati těžký zvon, když vždy v pravém tempu zatáhne za provaz.

Jakmile však na ladičku druhou nastrčíme malé závažíčko, kterým se její perioda kmitání i jen málo mění, nelze spoluchvění pozorovati. Podobně jest hudebníkům známo, že struna na houslích se rozezvučí, když se v blízkosti na stejně naladěnou strunu jiných houslí hraje. Úkaz však nenastává, jsou-li struny rozladěny.



Obr. 132. Spoluznění ladiček, znázorněno objektivně.

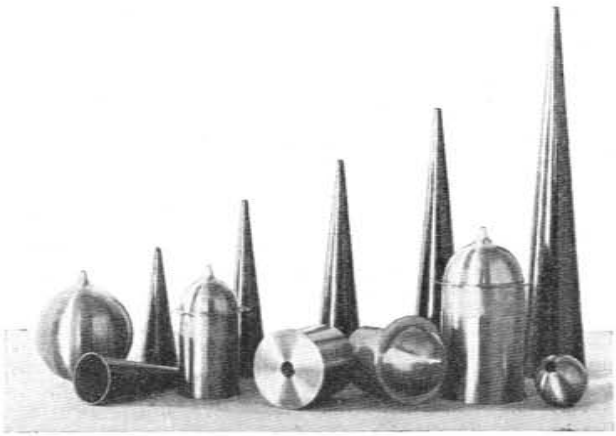
Mnohdy lze i přes malé rozdíly v periodě spoluchvění docíliti. Již v roce 1739 zpozoroval anglický hodinář *Ellicot*, že dvoje hodiny kyvadlové, upevněné na téže dřevěné desce, jdou přesně stejně, jsou-li kyvadla obou i jen přibližně stejné délky; ba může se státi, že kyvadlem jedním rozejde se ponenáhlu kyvadlo druhé. Dle toho by bylo možno, jak *Breguet* poznamenal, montovati dva zcela stejně pracované chronometry na touž kovovou desku. Pak by se ve svém chodu srovnaly tak, že by šly identicky, čímž by nepravidelnosti chodu chronometru jednoho i druhého se vzájemně vyrovnaly, tak že by dva takové chronometry *zachovávaly přesněji chod konstantní* než jediný. Jinak nelze, jak známo, toho docíliti, aby dvoje i stejně pracované hodiny kyvadlové nebo dva stejně pracované chronometry šly zcela stejně, jsou-li od sebe odděleny. Podobně zaznívají souhlasně, jak *Savart* zpozoroval, dvě kovové stejné a stejně napjaté struny na polychordu, i když jinak jich tony

jednotlivě následkem nepatrných rozdílností se úplně neshodují, poněvadž se ve kmitání sobě vzájemně přizpůsobí.

Přečetné jsou příklady resonance v akustice; podmínkám svrchu vytčeným, značnému útlumu a příslušné pružnosti, vyhovují zvláště pevné útvary plošné, desky, blány, a vedle nich hmoty vzduchové. Resonancí sesilují se zvuky strun i tyčí, zejména ladiček, resonancí sesilují se tony třecí u píšťal labialních a tony pružných jazýčků u píšťal lingualních. Resonanční půda má základní důležitost u piana a u všech nástrojů smyčcových. A nejedná se tu pouze o sesilení zvuku; jest v povaze tělesa v resonanci uváděného, že některé tony ve zvuku obsažené více sesiluje a jiné méně; tím nabývá původní zvuk *určité barvitosti*, kteráž jest rozhodující pro čistotu, lahodnost, jasnost zvuku a která tím nástroji hudebnímu dodává větší neb menší ceny. Resonancí uvádí se ve chvění pružná deska telefonu nebo fonografu, blány při plaméncích manometrických, a konečně jest bubínek ušní lidí a zvířat příkladem nejznámějším a nejvýznačnějším resonance. Všechny nástroje hudební užívají resonance, aby znějícím tělesem pevným větší množství vzduchu bylo ve chvění uváděno, a i tam, kde vzduch přímo se rozezvučí, u nástrojů dechových, jest chvění vzduchu úkazem resonančním.

§ 144. **Resonatory Helmholtzovy.**

Ke mnohým účelům akustickým jest výhodno míti resonator, kterýž by jenom na *určitý ton* resonoval; jest pak možno resonatorem takovým ze *směsi* přečetných tonů tento jediný *vybrati* a *sesíliti*, a tím způsobem též poznati. Takovéto resonatory zavedl do akustiky *Helmholtz*. Měly původně tvar duté koule, na dvou protějších stranách násadci otevřenými opatřené; jeden násadec, přední, rozšiřuje se poněkud na venek a slouží k tomu, aby jím vlnivý pohyb vzduchu do resonatorů se převáděl. Druhý násadec, menší a na venek se zúžující, vkládá se buď do ucha při pozorování subjektivním, anebo se kaučukem spojí s plaménkem manometrickým při pozorování objektivním. Obr. 133. ukazuje na levo takovýto resonator; vedle toho pak ještě resonatory válcovité a kuželovité. Válcovité zavedl *Koenig*; v obrazci 133. jsou znázorněny uprostřed a to v částech oddělených; tyto se dají do sebe vkládati, jedna do druhé více nebo méně pošinouti, čímž se objem uzavřeného vzduchu mění. Lze tedy resonator *laditi* pro mnohé tony, což jest velmi výhodné. Kuželovité zavedl *Appunn*; jsou jednodušší a lacinější.



Obr. 133. Resonatory různých tvarů.

Problem resonanční propracoval theoreticky zejména *H. v. Helmholtz* a *Lord Rayleigh*. O významu vodivosti tepelné při resonatorech pojednal *F. Koláček* (Wied. Ann. 12, p. 353, 1881).

§ 145. Rozkládání zvuku.

Dojmy zvukové jsou povšechně způsobovány periodickým pohybem částeček vzduchových k bubínku ucha přiléhajících. Pohyb takový může býti velmi rozmanitý; dle věty *Fourierovy* lze však funkci, kterou se pohyb ten vyjadřuje, nahraditi mathematicky *součtem* jednoduchých *funkcí sinusových*, jichž argumenty a koefficienty dle určitých pravidel se vypočítají. Přijmeme-li princip superposice pohybů, znamenala by tato věta foronomicky, že lze každý periodický pohyb pokládati za *složený* z řady periodických *pohybů jednoduchých, sinusových*. Rozklad tento, ve smyslu mathematickém i foronomickém, má základní *význam akustický*; neboť *ucho naše* vskutku *rozklad takový vykonává*. *G. S. Ohm* *) byl první, jenž vyslovil (1846) zákon, že ucho lidské

*) *Georg Simon Ohm* (1789—1854), v posledních letech professor university Mnichovské, týž, jenž proslul v oboru elektřiny dynamické zákonem po něm nazvaným.

vnímá jenom *chvění sinusové*, každé pak chvění jiné že *rozkládá* v řadu chvění sinusových; zvuk pociťujeme tudíž jako *souznění tonů*. Tuto větu uhájil *Ohm* proti *Seebeckovi* (1847). Jest pravda, že ne vždy tonů těch slyšíme; avšak to není důkazem, že jich nevnímáme. Vskutku i v jiných oborech smyslových dlužno činiti rozdíl mezi cítěním a vnímáním. Že pak ony tony vskutku vnímáme, toho důkazem jest, že je slyšíme, když obracíme na ně pozornost anebo když je sesilíme; prostředek pak k tomu poskytuje *resonance*.

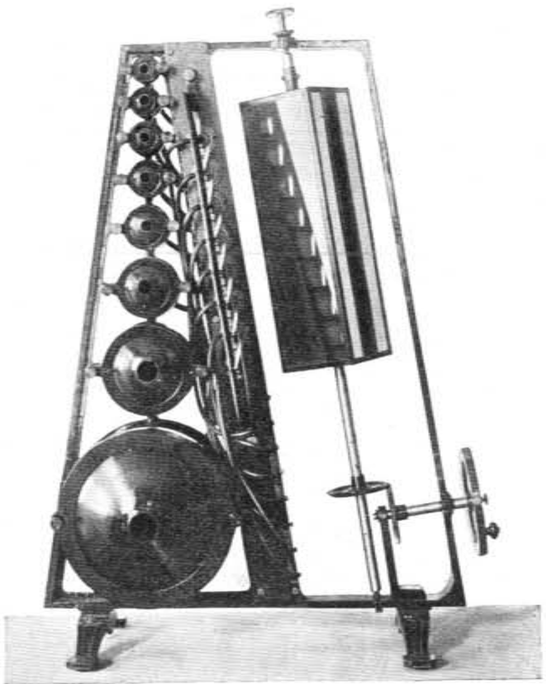
Dle toho jest mezi okem a uchem důležitý rozdíl. Oko postihuje veškeré barvy nejjemnějších odstínů, nedovede však v barvách složených, jež vzniknou superposicí z jednoduchých, tyto jednoduché poznati. Ucho naopak postihuje jenom jednoduché sinusové pohyby, jež pociťuje jako tony; za to však samo rozkládá zvuky v jednoduché tony jakožto elementy. Jakým opatřením uchu tato mohutnost rozkládací přísluší, vysvětluje akustika fysiologická.

Pokusem lze rozkládání zvuku objasniti pomocí největšího polychordu akustického, totiž klavíru. Odstraní-li se pedálem útlum strun a zpívá nebo hraje-li se proti resonanční půdě piana, ozvou se četné struny, dávajíce souzvuk, kterým se dosti napodobí hlas neb zvuk nástroje hudebního. Ovšem že dlužno pamatovati, že v klavíru *nejsou všechny* tony obsaženy. Proto nutno při pokusu tomto, má-li míti ten smysl, který je zde míněn, zpívati nebo hráti do klavíru zvuk, který na některé klavese je zastoupen.

Struny mohli bychom nahraditi resonatory Helmholtzovými. Kdybychom jich sestavili tolik, kolik je strun na pianu, každý z nich pak spojili s plaménkem manometrickým, ukázalo by se v zrcadle analysačním kmitajícími plaménky totéž opticky, co se při pianě chvěním strun jevilo akusticky. V tomto smyslu upraven jest analysační přístroj *Koenigův* v obrazci 134. znázorněný. Skládá se z 8 resonatorů kulovitých, jež jsou ve spojení s příslušnými plaménky manometrickými. Největší resonator jest upraven pro ton c (ut_2) ostatní pro jeho vyšší tony harmonické. Zazní-li tedy zvuk se základním tonem c, pak přístroj zvuk ten *analysuje*, t. j. ukáže, které tony, k tomuto základnímu harmonické, jsou eventualně ve zvuku tom zastoupeny. Přístroj slouží tedy *jenom* k analysi zvuku, jehož základním tonem jest c. Jeho harmonický průvod tvoří tudíž tony

$$c^1,\quad g^1,\quad c^2,\quad e^2,\quad g^2,\quad i^2,\quad c^3, \ldots,$$

kdež označujeme písmenou *i* sedmý ton harmonický, který není v chromatické stupnici zastoupen. Označení tohoto se v hudbě zhusta užívá. Smysl onoho přístroje vynikne nejlépe, když se v blízkosti jeho umístí varhany (obr. 118.) a když se na ně hraje jakákoli skladba; kdykoli se ozve ton *c* v rejstříku cínovém nebo dřevěném, anebo kdykoli se ozve některý z jeho tonů harmonických, prozrazují plamének v otáčejícím se zrcadle pozorované, že tyto tony ve skladbě byly hrány.



Obr. 134. Koenigův analysator zvuku *c*.

Závadou jest poněkud, že Koenig své resonatory ladí dle „ladění fysikalního", tedy níže (§ 49.) než jest nynější ladění normalní. Koenig sestrojil též *universalní přístroj analysační*, který se skládá ze 14 resonatorů formy válcovité (obr. 133.), kteréž lze v jistých mezích laditi. Přístroj tento, ovšem značně dražší než onen, má větší extensitu a jest tudíž pro účely akustické analyse vhodnější.

§ 146. Skládání zvuku.

Při pokusu klavírovém, popsaném v odstavci předešlém, byl podán experimentalní důkaz nejen rozkládání, nýbrž zároveň i skládání zvuku; neboť struny rozzvučené, současně znějíce, dávají *celkový dojem* téhož *zvuku*, kterým byly rozzvučeny. Způsobem dokonalejším prováděl tuto synthesi Helmholtz. Sestavil řadu ladiček, elektromagneticky ve chvění udržovaných, montovaných na skřínkách ozvučných; ladičky dávaly řadu tonů harmonických. Dle toho, které ladičky kombinoval a v jaké síle tony jednotlivé nechal zníti, mohl Helmholtz napodobiti hlasy různých nástrojů hudebních i hlasy lidské. Při tom konstatoval, že rozdíly fasové při chvění ladiček jednotlivých nemají významu žádného. Věc je důležita, poněvadž *forma vlny* výsledné jest těmito rozdíly spolu podmíněna.

Větu poslední v plném tom znění popírá *Koenig*. Důkaz opačný vede sirenou zvláštní úpravy. Připouští však, že účinek fase na barvitost jest velmi nepatrný.

§ 147. Barvitost zvuku.

Skládáním a rozkládáním zvuku jest zásadně rozhodnuto též o té vlastnosti zvuku, kterou jsme nazvali jeho *barvitostí*. Zvuky různých hlasů lidských i různých nástrojů hudebních, při témže tonu základním, ukazují význačné rozdílnosti, dle nichž původ těchto zvuků — na základě skutečnosti — dobře poznáváme. Resonance poučuje nás, že zvuky tyto jsou složené. Když, odstraníce útlum strun, proti resonanční půdě piana zpíváme neb hrajeme zvuk určité výšky, slyšíme, jak se rozezvučí celá řada strun; poslouchajíce pak jich všech souzvuk, poznáváme původní zvuk, který jsme zpívali neb hráli. Tím dokázán jest též úkaz obrácený, *skládání* zvuku z jednotlivých tonů, a *napodobení barvitosti* zvuku daného. Proto není dalekou myšlenka, základ barvitosti hledati v průvodu, jehož se ve zvuku daném tony svrchními dostává tonu základnímu. Nevyčerpatelná různost v barvitosti rozmanitých zvuků jest pak pochopitelnou, poněvadž onen průvod může býti různý nejen dle *počtu* svrchních tonů, nýbrž též dle *intensity* každého jednotlivého.

První, jenž pojal myšlenku, podstatu barvitosti hledati v tonech svrchních, byl *Monge* (1746—1818, slavný mathematik, zakladatel geometrie deskriptivní), pro něhož se nyní (Résal, C. R. 79. 1874) priorita reklamuje. Tím však není umenšena zásluha *Helmholtzova*, jenž samostatně stejnou domněnku nejen jasně vyslovil, nýbrž též četnými pokusy hleděl objasniti a dokázati. Ve svém díle „Lehre von den Tonempfindungen" věnuje rozpravě o barvitosti hudebních zvuků celý oddíl 5.

Nazývati tuto vlastnost zvuku „barvou" není vhodné, poněvadž (nehledíc k významu tohoto slova ve smyslu látkovém) nazýváme barvou ve smyslu fysikalním *určitý ton světelný*, jak bychom dle analogie akustické říci mohli. Barva ve smyslu akustickém jest tedy *ton*. Zde však jde o *směs tonů* a celkový její dojem. Tento jest názvem *barvitost* vystižen lépe.

Jsou-li základem barvitosti *svrchní tony* doprovázející určitý ton *základní*, pak není barvitosti tam, kde tohoto průvodu není. *Ton nemá barvitosti žádné*; zní měkce a temně. Hlasem přicházíme, zpívajíce „*u*", k takovým jednoduchým tonům nejblíže.

Jinak rozhoduje o barvitosti v *první* řadě, jsou-li svrchní tony *neharmonické* nebo jsou-li *harmonické*. Neharmonické tony svrchní nalézáme u tyčí příčně se chvějících (též u ladiček), desek, (povšechně též zvonů) a membran. Zvuk jest — až na některé výjimky (ladičky, když svrchní tony se utlumí) — nepěkný, nehudební.

Zvuky s harmonickými tony svrchními vznikají v prvé řadě chvěním *strun*. Barvitost těchto zvuků závisí především na tom, *jak* se struna rozezvučí, zda-li nárazem nebo třením. Na prvý způsob jsou zařízeny piano, harfa, kytara, cithera; sem náleží též pizzicato nástrojů smyčcových. Na druhý způsob jsou zařízeny nástroje smyčcové: housle, viola, violoncello, bassa. Jak jsou laděny jich struny, vysvětluje obrazec 72.

Povšechně možno říci, že barvitost zvuků u nástrojů strunových závisí na materialu, tloušťce, tuhosti a pružnosti struny. U nástrojů způsobu prvého rozhoduje místo a jakost nárazu, u nástrojů způsobu druhého místo a jakost smyku. Vedle toho rozhoduje však měrou značnou resonance, tedy povaha resonanční půdy nebo resonanční skřínky. A tak závisí čistota, jemnost, měkkost zvuků těchto předních nástrojů hudebních, vše to, co krásou, výrazností tonu zoveme, jednak na *nástroji*, jednak na *umělci*, a jen kde dokonalost nástroje se pojí s dovedností umělce, dosáhne se krásy hudební největší.

Harmonický průvod k tonu základnímu dávají dále *píšťaly retné*. Barvitost jest tu podmíněna především materialem píšťal.

Dřevo tlumí, cín podporuje vysoké tony harmonické. Dále rozhoduje, zda-li jest píšťala otevřená nebo krytá; neboť krytím píšťaly vyloučí se z celého průvodu harmonické tony sudé. Konečně má na barvitost důležitý vliv mensura píšťaly. Úzká mensura podporuje vznik velmi četných vysokých tonů harmonických, široká mensura připouští jen začáteční tony harmonické. Dle toho, co zde povšechně řečeno, jest patrno, že zvuky na tony harmonické nejchudší dávají široké, kryté píšťaly dřevěné, vskutku zní u těchto téměř jen základní ton. Jsou-li užší, ozývá se též duodecima; odtud jich jméno kvintaty (quintam tenens, kvintadena). Píšťaly dřevěné otevřené dávají vedle tonu základního zřetelně oktavu i kvintu a dle mensury i vyšší tony harmonické (na př. otevřená flétna varhan); zvuk jest jasnější, zvučnější. Tato vlastnost se stupňuje u otevřených píšťal cínových; jsou-li mensury větší (principal), dávají hlavně základní ton, sesílený jenom začátečními tony svrchními; pak-li jsou užší (viola da gamba*), mají mnoho i vysokých tonů harmonických a zní zvučně, jasně.

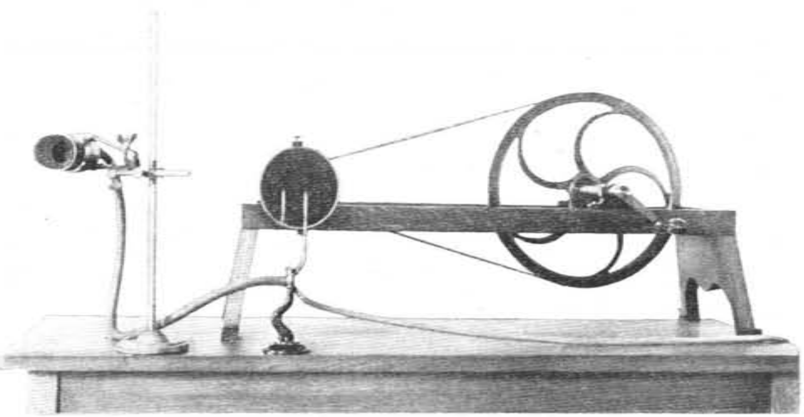
Píšťaly jazýčkové dávají zvuky různé barvitosti dle toho, zda-li jazýčky jsou volné nebo nárazné, jakého jsou materialu, a jak jest zařízen ozvučník. Vzduch v ozvučníku se chvějící má uzel v blízkosti jazýčku, poněvadž zde jsou změny hustoty vzduchu největší. Proto, jsou-li ozvučníky válcové, vznikají jen liché tony harmonické, podobně jako u píšťal krytých. Obyčejně bývají však ozvučníky kuželovité, nahoru se rozšiřující; při těchto vznikají tony harmonické všechny. Počet jich jest veliký přes to, že jazýček vykonává jen jednoduchý pohyb vibrační; ale prudkými nárazy vzduchu, který jazýčkem intermittovaně vyráží, vznikají harmonické tony v počtu velikém. Proto jest hlas varhanních píšťal jazýčkových zvučný, při tom ostrý, u jazýčků nárazných drsný, hrčivý, u volných hladší, plynnější. Dle tvaru ozvučníku, který bývá někdy i dvojitě kuželovitý, dociluje se rozmanitých barvitostí. Harmonium a nástroje jemu podobné mají jen jazýčky volné bez ozvučníků.

Aby vysoké tony harmonické byly sesíleny, připojuje se ve varhanách k hlasům základním ještě hlas smíšený, *mixtura*. Ke každé klavese zní několik píšťal cínových, dávajících k danému tonu základnímu jeho oktavy a kvinty po sobě jdoucí,

*) Gamba, ital. noha, koleno, tedy hlas píšťal napodobující hlas violoncella nebo basy violinové.

na př. k tonu C tony c^1, g^1, c^2, je-li mixtura trojnásobná, nebo ještě g^2, c^3, je-li mixtura pětinásobná. Mixtura samotna zní nepříjemně, ječivě; když však se připojí k rejstříkům dávajícím základní tony v mnohonásobném obsazení, sesílené po případě oktavami, a když zejména k mixtuře jako protiváha zní hlasy pedalové, dávají varhany hlas vynikající svou mohutností, plností, zvučností, hlas velebný, slavnostní v pravém slova smyslu.

Dechové nástroje orchestru druží se dle povahy své dílem k píšťalám retným (flétna), dílem k jazýčkovým (klarinet, hoboj, fagot). Nástroje plechové druží se k píšťalám membranovým; jazýčky membranové jsou zde zastoupeny rty hrajícího. Zvuky těchto nástrojů jako jest helikon, bombardon, pozoun, trumpeta, křídlovka, piston, horna atd., jsou silné, plné, zvučné, mnohdy ostré, pronikavé; rozmanitosti v barvitosti dociluje se různými záhyby, tvarem nátrubku, na němž při hraní jsou rty, a j.



Obr. 135. Optické studium barvitosti zvuku.

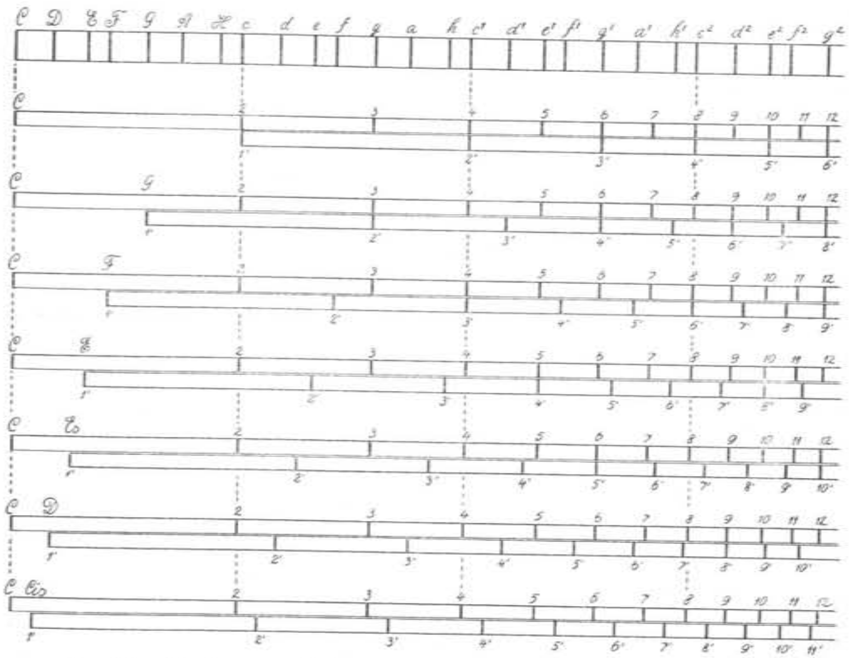
Podobně jako u píšťal membranových vzniká hlasivkami též hlas lidský, mluva i zpěv. Barvitost jest zde nesmírně rozmanitá již dle individualných vlastností organu hlasového, dle pohlaví, věku, a při určité osobě dle hlásek, které se zpívají neb mluví. Tato veliká rozmanitost ukazuje se i zraku methodou manometrických plaménků, na př. v úpravě, jak ji znázorňuje obr. 135. Zpívá nebo hraje se do nálevkovitého násadce, od něhož vede kaučuk k manometrickému pouzdru toho druhu, jak jest v obr. 122. znázorněno. Plamének jest před rovným zrcadlem,

jež se otáčí kolem vodorovné osy, k níž však zrcadlo jest *v mírném uhlu nakloněné*. Je-li tedy plamének v ose otáčecí, obíhá zrcadlový jeho obraz v kruhu, když se zrcadlem otáčí. Tím se obdrží též rozvinutí časové kmitavého pohybu plaménkem, ovšem nikoli v jednom jen směru, jako při obyčejném zrcadle analysačním. Nejzřetelněji vystupuje toto rozvinutí v hořejší a dolejší části kruhu, kde pohyb obrazu plaménkového jest ke směru jeho kmitání kolmý.

§ 148. **Konsonance a dissonance.**

Otázka konsonance a dissonance týče se nikoli melodického postupu, nýbrž harmonického souznění zvuků. Zní-li nějaký zvuk N_1 a necháme-li k němu přistoupiti zvuk druhý, na př. vyšší N_2, máme někdy dojem, že zvuk druhý k prvému nepatří, že jest mu cizí, že v souzvuku jeden ruší druhý; jindy zase máme dojem, že sdružení obou v souzvuk jest přirozené, vhodné, po případě sluchu příjemné, lahodné. V tomto smyslu mluvíme o *dissonanci* neb *konsonanci zvuků*. Otázka, v čem záleží *podstata* zvláštního zjevu tohoto, zaměstnávala hudební theoretiky všech věků, a ještě dosud není zcela jasně a přesvědčivě zodpověděna. Škola Pythagorova viděla v konsonanci jakési kouzlo jednoduchých čísel; vskutku jest konsonance dvou zvuků N_1 a N_2 nejdokonalejší, je-li poměr $N_2 : N_1$ obou kmitočtů vyjádřen jednoduchými čísly 1, 2, 3, . . . přirozené řady, a právě tento poměr jevil se při pokusech Pythagorových v jednoduchosti příslušných délek strunových. V těchto představách utkvěl celý starověk i středověk, a ještě v novém věku kladl *Leibniz* (a podobně *Euler*) zvláštní důraz na tuto jednoduchost poměru $N_2 : N_1$, ve které prý duše naše, mimovolně čítajíc kmitočty, zvláště si libuje. *Sauveur* (1700) naproti tomu poukazoval již *k záchvějům* a zcela zřetelně udává, že hudebníci nazývají souzvuky konsonantními, není-li při nich záchvějů, naopak, jsou-li při nich záchvěje, dissonantními, poněvadž záchvěje jsou pocitu našemu nepříjemnými. O málo let později poukázal *Rameau* (1726) na svrchní tony harmonické, jež ve zvuku každý ton základní doprovázejí; tento průvod tonů zove „mnohonásobnou resonancí“. Poněvadž tedy ve zvuku vedle základního tonu se již jeho oktava nebo duodecima atd. nalézá, proto jeví se býti připojení těchto tonů k onomu základnímu přirozeným, odůvodněným.

Konečně *Smith Robert* (1746) poukázal též na záchvěje, kteréž mezi svrchními tony daných zvuků mohou vzniknouti. V každém z těchto úsudků zračí se povaha toho, kdo je vyslovil. *Leibniz* i *Euler* byli více mathematikové, *Sauveur* byl akustik, *Rameau* byl praktický hudebník (organista a skladatel), *Smith* opět akustik; každý vytkl, co jemu dle vlastního odboru se zdálo býti důležitým.



Obr. 136. Vzájemná poloha harmonických tonů svrchních u dvojzvuků v ladění přirozeném.

Také v theorii, kterou v dobách nedávných (1862) *Helmholtz* samostatně podal, nalézáme tytéž základní myšlenky, jenom že soustavněji propracované; také Helmholtz klade důraz na význam svrchních harmonických tonů a na význam záchvějů; těmito se vysvětluje více dissonance, oněmi více konsonance. Takové zvuky náležejí k sobě v souzvuk, jsou konsonantními, které mají větší neb menší počet částkových tonů společných; naproti tomu takové zvuky se v souzvuku vylučují, jsou dissonantními, které buď již ve svých základních anebo také ve svých svrchních tonech dávají záchvěje od nás nepříjemně

pociťované. V konsonanci tvoří tedy ona pospolitost jistých tonů moment positivní, a nedostatek rušivých záchvějů moment negativní.

Ke studiu konsonance neb dissonance na těchto základech hodí se velmi dobře grafické znázornění, provedené na základě ladění přirozeného. V obrazci 136. jest nahoře znázorněna *diatonická stupnice*, *přesně* dle intervallů *logarithmických*, v několika oktavách, pokud místo stačí, provedená, při čemž jednotka druhého místa v logarithmu jest vyjádřena délkou 1 *mm*; odhadem desetin lze tedy ještě jednotku třetího místa v logarithmu odečísti. Intervall kommatu, 0·00540, jest tedy dán délkou 0·54 čili okrouhle půl millimetru, tudíž i v tomto malém měřítku dostatečně dlouhou. K této stupnici diatonické připojíme na dvou proužcích papíru v témže měřítku *pořad tonů harmonických*, přesně dle intervallů *logarithmických* rýsovaný. Chceme-li nyní studovati, které tony harmonické dvou daných zvuků splývají a jak dalece ostatní od sebe se rozcházejí, položíme jeden proužek jeho začátkem na místo, jež ve stupnici zaujímá zvuk prvý, a vedle něho druhý proužek jeho začátkem na místo, jež ve stupnici zaujímá zvuk druhý. V obr. 136. jest věc provedena pro dvojzvuky

$$C, c\left(\frac{2}{1}\right);\ C, G\left(\frac{3}{2}\right);\ C, F\left(\frac{4}{3}\right);\ C, E\left(\frac{5}{4}\right);\ C, Es\left(\frac{6}{5}\right);\ C, D\left(\frac{9}{8}\right)$$

a konečně pro velký půlton

$$C, Cis\left(\frac{16}{15}\right).$$

Při bedlivém studiu těchto koincidencí objevují se mnohé zajímavé podrobnosti, které se však ztrácejí, když se diagramm provádí dle ladění temperovaného, jako by dle *klaviatury piana* (E. Mach). Jest pravda, že tato klaviatura se zdánlivě doporučuje svou konkretností; avšak neméně jest jasno, že nedokonalosti ladění temperovaného, jakéž tato klaviatura představuje, přesnost mathematickou úplně ruší.

Pozorujme nyní věc podrobněji. Jest patrno, že největší počet koincidencí tonů částkových obdržíme, když ke zvuku N_1 připojíme zvuk N_2, jehož ton základní jest jedním z tonů částkových zvuku prvého, tedy na př. prima, oktava, duodecima atd. Konsonance takové nazývá Helmholtz ***absolutními***. Vskutku koinciduje každý částkový ton zvuku N_2 s některým částkovým tonem zvuku N_1.

Veliký počet koincidencí obdržíme však též při intervallu kvinty a kvarty. Konsonance tyto zove Helmholtz ***dokonalými***.

Střední konsonance dávají dle Helmholtze velká tercie a velká sexta. *Nedokonalé* konsonance malá tercie a malá sexta. Naproti tomu velká sekunda a malá septima, zejména pak malá sekunda a velká septima, dávají *dissonance*. Tyto a podobné dissonance vysvětluje Helmholtz *záchvěji*, jež působí na sluch povšechně právě tak nepříjemně, jako kmitající světlo na zrak. Rozhoduje však též *frekvence* záchvějů. Pokud jest jich počet za sekundu malý, rozeznáváme je jednotlivě; stoupá-li počet, a nelze-li je sledovati jednotlivě, vzniká drsnost souzvuku, jež při počtu asi 33 záchvějů za sekundu stává se nejnepříjemnější. Zní-li na př. $c^2 = 522$ a k tomu $h^1 = 489{\cdot}4$ (kmitočty dle normalního ladění přirozeného), vzniká 32·6 záchvějů. Tento souzvuk h^1, c^2 jest vskutku velmi nepříjemný. Ale *stejný* počet záchvějů vzniká též při souzvuku

půltonu	$h^1 = 489{\cdot}4$,	$c^2 = 522$,	$c^2 - h^1 = 32{\cdot}6$
celého tonu	$c^1 = 261$,	$d^1 = 293{\cdot}6$,	$d^1 - c^1 = 32{\cdot}6$
malé tercie	$e = 163{\cdot}1$,	$g = 195{\cdot}8$,	$g - e = 32{\cdot}7$
velké tercie	$c = 130{\cdot}5$,	$e = 163{\cdot}1$,	$e - c = 32{\cdot}6$
kvarty	$G = 97{\cdot}9$,	$c = 130{\cdot}5$,	$c - G = 32{\cdot}6$
kvinty	$C = 65{\cdot}3$,	$G = 97{\cdot}9$,	$G - C = 32{\cdot}6$

a přece jest souzvuk v postupu naznačeném vždy méně a méně drsný a přechází konečně i v konsonanci. Proto předpokládá Helmholtz, že nerozhoduje jen *absolutní počet záchvějů*, nýbrž též *intervall obou tonů*.

V podrobném studiu nutno přihlížeti též k záchvějům svrchních tonů částkových, jakož i tonů differenčních. Při stoupajícím počtu záchvějů za sekundu umenšuje se jich drsný účinek, a přestává při počtu asi 130 za sekundu.

Založí-li se theorie konsonance a dissonance na tonech partialních ve zvuku obsažených, pak jest nesnadno pochopiti, kterak se mohou jeviti konsonantními neb dissonantními *jednoduché tony*, při nichž svrchních tonů žádných není. *Helmholtz* připouští důsledně, že vskutku u *tonů* se jeví konsonance snesitelná, kde by *zvuky* v téže výšce základního tonu dávaly již dissonanci. Jsou však akustikové (na př. Melde), kteří vůbec popírají význam tonů svrchních a i kombinačních pro konsonanci a dissonanci. Jiní kladou důraz na hudební *příbuznost* tonů, nazývajíce takové tony přímo příbuznými, kteréž jsou součástky *téhož hudebního zvuku*. Souzvuk tonů takových dává *konsonanci*. Příbuznost tonů jakož i jich konsonance v souzvuku se však

umenšuje, čím dále jsou tony takové v hudebním zvuku od základního vzdáleny. Nepřímo příbuznými jsou tony, kteréž mají příbuznost s týmže *tonem třetím*. Souzvuk tonů takových dává *dissonanci**).

§ 149. **Methoda stroboskopická.**

Ve zvláštním způsobu užívá *methoda stroboskopická***) kombinovaného kmitání ke studiu vlastního pohybu kmitavého. V podstatě své má toto studium mnoho příbuzného s pozorováním záchvějů.

Jednotlivé fase kmitavého pohybu následují za sebou z pravidla příliš rychle, než aby bylo lze jeho průběh pozorovati. Jinak má se však věc, když se těleso kmitající pozoruje ve světle *intermittovaném*, když se osvětluje *jednotlivými záblesky* časově *stejně od sebe odlehlými*, jichž počet jest v jistém vztahu s počtem kmitů v téže době vykonaných. Takovéto záblesky obdržíme nejjednoduššeji výboji elektrickými, pravidelně po sobě následujícími, na př. elektrikou influenční, anebo lépe induktorem; při tomto lze hlavní proud interruptorem rovnoměrně pracujícím přerušovati a spojovati, čímž vznikají v proudu indukovaném výboje, kteréž, když se dějí ve vzduchu, dávají jiskry, a když se užije vakuových lamp, dávají záblesky značné světlosti. Následují-li tyto záblesky po sobě dostatečně rychle, stává se, že oko ani toho neznamená, že osvětlení jest přerušované, majíc dojem světla spojitého. Když se však ve světle takovém rychle sem tam pohybují na př. prsty rukou, jeví se mnohonásobně, poněvadž dojem, který každým momentním osvětlením v oku vzniká, nějakou dobu trvá.

Když tedy takovouto intermittující lampou osvětlíme na př. kmitající ladičku, a když počet záblesků v jisté době volíme účelně v určitém vztahu k současnému počtu kmitů ladičky, jest viděti, jak ladička kmitá tak volně, že průběh pohybu lze okem sledovati. Intermittujícím osvětlením jeví se tedy postup fasí býti volnějším.

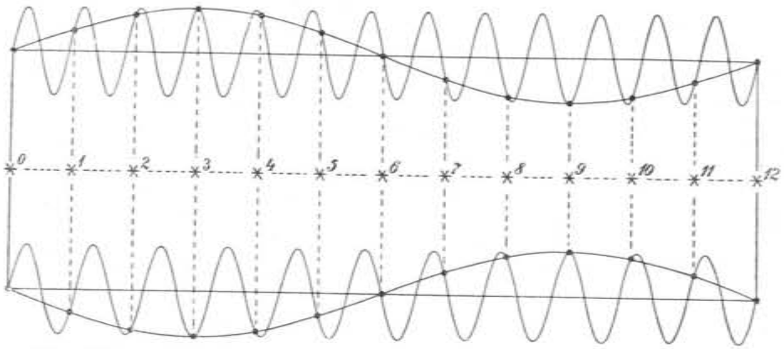
Abychom porozuměli, jak je to možno, učiňme jednoduchou úvahu, užívajíce zároveň grafického znázornění (obr. 137.).

*) Viz *O. Hostinský*, Lehre von den musikalischen Klängen, Prag, 1879, pag. 72.

**) στρόβος, ὁ pohyb v kruhu, σκοπέω pozoruji.

Při tomto jsou jednotlivé záblesky označeny hvězdičkami naznačujícími jako by jiskry elektrické. Současné kmity jsou znázorněny v rozvinutí časovém.

Předpokládejme, že na p záblesků připadá $p + 1$ kmitů, na př. na 12 záblesků 13 kmitů (obr. 137., kmity hořejší).



Obr. 137. Jak vzniká stroboskopický kmit souhlasný nebo zpátečný osvětlením pravidelně přerušovaným.

V době od jednoho záblesku k druhému vykoná se tedy $1 + \frac{1}{p}$ kmitu; tudíž kmity *předbíhají*. Rozdělme celý kmit na p fasí. Když se nulltým zábleskem osvětlí začátek vibrace, připadá na první záblesk *první* fase, ale již druhé vibrace, na druhý záblesk *druhá* fase, ale až třetí vibrace, atd. tak, že *následují po sobě fase tak* jako v jediné vibraci, ale p-kráte volněji. Oko tedy vidí, jako by těleso kmitající vykonalo *jeden* kmit, za dobu, kdy p záblesků vzniklo. Nazýváme kmit tento *stroboskopickým*. Poněvadž kmitání předbíhá, děje se stroboskopický kmit v před.

Předpokládejme, že na p záblesků připadá $p - 1$ kmitů, na př. na 12 záblesků 11 kmitů (obr. 137., kmity dolejší).

V době od jednoho záblesku k druhému vykoná se tedy $1 - \frac{1}{p}$ kmitu; tudíž kmity *dobíhají*. Úvahou podobnou seznáme, že i v tomto případě oko vidí, jak těleso kmitající vykonává jeden stroboskopický kmit, ale směrem zpátečním, poněvadž kmitání dobíhá.

Aby se stroboskopické kmitání jevilo oku nikoli trhaně, nýbrž plynule, spojitě, nutno, aby číslo p bylo dostatečně *velké*.

Na druhé straně však, aby oko kmitání stroboskopické mohlo sledovati, dlužno, aby počet m stroboskopických kmitů za sekundu byl dostatečně *malý*. Je-li N kmitočet tělesa kmitajícího, jest patrně

$$m = \frac{N}{p+1} \quad \text{anebo} \quad m = \frac{N}{p-1}.$$

Když se na př. stroboskopicky ukazuje kmitání velké ladičky v obr. 85., při níž jest okrouhle

$$N = 75\,\frac{1}{sec},$$

a když se chce, aby pohyb šel v před, jest vhodno voliti

$$m = 3,$$

tak že jest

$$p + 1 = 25, \quad \text{tudíž} \quad p = 24.$$

Toto číslo stačí, aby stroboskopické fase následovaly po sobě spojitě.

Je-li N číslo velmi veliké, na př. u ladiček oktavy dvoučárkované a má-li býti m číslo malé, musí pak p býti též velmi veliké. Pro Koenigovu ladičku c^2 jest dle ladění fysikalního

$$N = 1024.$$

Má-li tedy býti na př.

$$m = 4,$$

vychází pro pohyb v před

$$p + 1 = 256, \quad \text{tudíž} \quad p = 255.$$

Pro rotující desku s výřezy bylo by toto číslo poněkud veliké. Lze však též voliti číslo poloviční nebo jen třetinové, tedy na př.

$$p = 85.$$

Pak připadá na p záblesků $3p + 1$ kmitů, jednotlivé fase přeskakují tedy dva kmity, ale dojem stroboskopický tím netrpí.

Nejsou-li čísla m, p účelně volena, mohou vzniknouti komplikace. Chceme-li úvahu vésti všeobecně, zaveďme vedle kmitočtu N tělesa zvučícího ještě počet N' záblesků světla intermittujícího za sekundu.

Budiž

$$\frac{N}{N'} = \frac{r}{s}$$

a při tom

$$\frac{N}{r} = \frac{N'}{s} = m.$$

Pak koinciduje s záblesků s r kmity. Pravíme, že těleso zvučící vykonává *r-násobný kmit* a jest při tom *s-kráte osvětleno.* Za sekundu se toto osvětlení opakuje m-krát. Oko vidí těleso kmitající v *s polohách*, zřetelně tehda, je-li s číslo malé, na př. 2, 3, 4 a pod. *Není zde žádného stroboskopického kmitání.*

Budiž všeobecněji

$$\frac{N}{N'} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p \pm 1}{p}$$

a při tom

$$\frac{N}{r(p \pm 1)} = \frac{N'}{sp} = m.$$

Pak jest viděti stroboskopické kmitání, ale s-násobné; neboť každý z s obrazů kmitajícího tělesa vykonává kmit stroboskopický. Úkaz jest zajímavý, jen je-li s číslo malé.

§ 150. **Pokračování; způsob intermittujícího osvětlování.**

Nahoře uvedli jsme jakožto konkretní příklad intermittující osvětlování elektrickou vakuovou lampou. Způsob tento jest nejlepší. Osvětlení jest *okamžité*, a užívá-li se na kathodě látek fluorujících (Puluj), jest též dosti intensivní. Moderními interruptory (motorovými) lze též *pravidelnost* přerušování dosti dobře ovládati. Velmi dobře lze však též experimentovati světlem slunečním nebo elektrickým. Čočkou soustředí se toto světlo v bod a zde se umístí deska s výřezy aequidistantními, na elektromotoru (obr. 69.) nasazená. Při rotaci, kterou lze proudem dobře říditi, propouští se světlo výřezy desky, ale jinak se zadržuje, tak že osvětlení jest intermittující. Pravidelněji než motor pracuje elektromagnetická ladička. K účelu tomu nasadí se na její ramena dvě lehké destičky mosazné, černé, každá se štěrbinou ve způsobu, jak v obr. 99. na vibračním mikroskopu jest provedeno; obě tyto úzké štěrbiny padnou na sebe, když obě ramena jsou v poloze rovnovážné. Když se tedy ladička rozezvučí, koincidují za jeden kmit ladičky obě štěrbiny dvakrát. Ladička v obr. 99. dává c dle ladění fysikalního, má tedy

kmitočet 128 $\frac{1}{sec}$. Když se tedy štěrbiny dají do ohniska, v němž se elektrické neb sluneční světlo čočkami soustředí, pak se osvětlení přerušuje za sekundu 256krát.

Pracuje-li se ladičkou v obr. 99. déle, způsobuje jiskření na kontaktu přerušovaném nesnáze a nepravidelnosti. Pak jest lépe nikoli proud přerušovati, nýbrž dáti tento proměnlivý kontakt do vedlejšího spojení, aby se proud jen sesiloval a seslaboval.

Rotující desky s výřezy lze použiti též k pozorování *subjektivnímu*, které jest ovšem dle své úpravy jednodušší než objektivní. Pozorovatel dívá se otvory rotující desky na kmitající těleso. Budiž však poznamenáno, že methoda záblesků elektrických, jež jsou momentanní, má právě proto přede všemi zde ještě uvedenými methodami rozhodnou přednost.

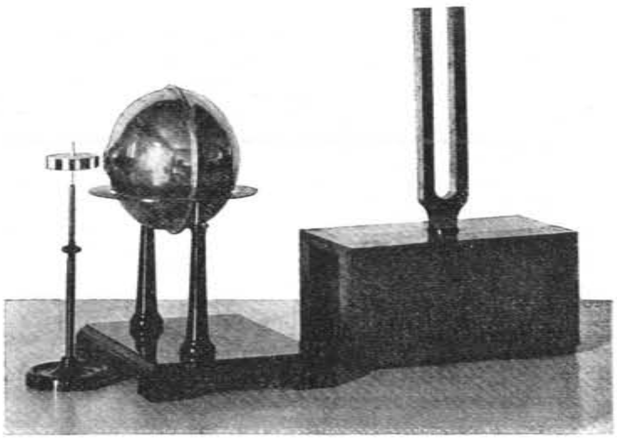
Methodu stroboskopickou v její applikaci na studium pohybu kmitavého udal (1836) *J. Plateau*; samostatně též (1845) *Ch. Doppler*. Mnohé práce methodou touto provedl *A. Toepler* (* 1836) a zejména *E. Mach* (* 1838), jenž ve spise „Optisch-akustische Versuche", 1873 pag. 63—94 obšírnou o vlastních studiích podává zprávu a připojuje zároveň historický výklad o původu methody. Tyto studie konal v době, kdy působil v Praze na spojené universitě Karlo-Ferdinandské. Jako spolupracovníky uvádí v práci té *Neumanna* a *Herverta*, kteří jeho návodem mnohá pozorování dle methody stroboskopické provedli. Budiž na tomto místě obnovena památka obou těchto v mladém věku zemřelých fysiků českých.

Dr. *Mírumil Neumann* narozen $^{23}/_{11}$ 1843 v Novém Strašecí, studoval v Praze, stal se 1869 assistentem fysiky u prof. *Macha* a habilitoval se r. 1871 pro experimentalní fysiku. Založil r. 1873 mechanickou dílnu pro fysikalní stroje. Vynikl činností svou v Jednotě českých mathematiků v Praze, jejíž byl od roku 1868 prvním starostou. Redigoval tři „Zprávy Jednoty" a přispíval do těchto jakož i do „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky" založeného r. 1872, jehož byl *F. Studnička* prvním redaktorem, mnohými články, zejména též akustickými. Zemřel $^{22}/_{12}$ 1873 v Praze.

Josef Hervert narozen $^{14}/_{1}$ 1846 v Poděbradech, studoval v Praze, byl v letech 1871—1876 assistentem fysiky u prof. *Zengera* na české technice. V postavení tomto osvojil si návodem svého vynikajícího učitele mnohých praktických vědomostí a nabyl zejména dobrých zkušeností o stavbě fysikalních strojů. Proto, když Dr. *Neumann* r. 1873 zemřel, přejal jeho dílnu zároveň s prof. *F. Houdkem* a zjednal sobě o její rozkvět zásluh velikých. Konec jeho života byl neblahý. Výbuchem při zkoušení kotle přišel o obě oči a zemřel roku 1883 v ústavu choromyslných. Z jeho prací vynikají zejména pokusy, jimiž pomocí plynových plamenů transversalně kmitajících zkoušel pohyb částeček vzduchových na konci otevřených píšťal, pokusy, jež také *Helmholtz* ve svých „Tonempfindungen" uvádí.

§ 151. Mechanické účinky zvuku.

Vlny vzduchové, vzbuzené zvuky mohutnějšími, ukazují též účinky mechanické. Studiem zjevů těchto zabývali se (hlavně v letech 1870—1880) lord *J. Rayleigh*, *A. M. Mayer* a j., zejména pak *V. Dvořák**), jenž o těchto účincích konal pokusy velmi četné. Mnohé z nich jsou povahy jemnější, daří se jen za okolností příznivých; tak na př. pokusy o akustickém odpuzování neb přitahování nemohou se dobře dařiti v uzavřené síni, kde vlny původní se kombinují s četnými vlnami od stěn odraženými. Zde uvádíme pokusy takové, kteréž ony účinky jednoduše a jistě, v úpravě elegantní, ukazují.

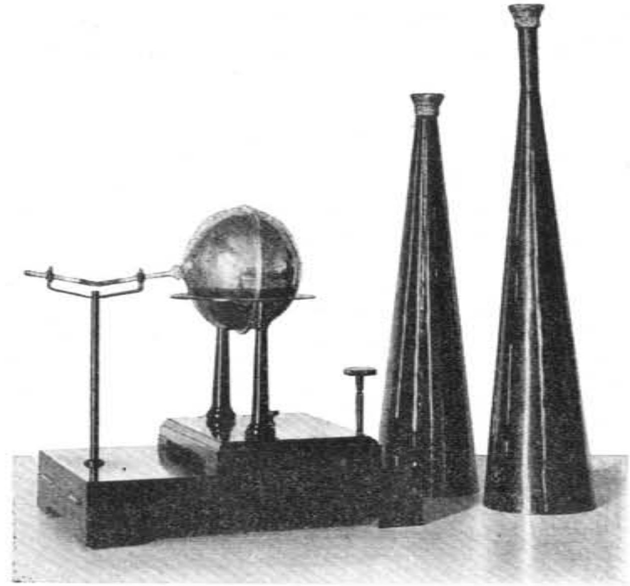


Obr. 138. Rotace vznikající prouděním vzduchu z resonatoru.

K pokusům těm jest potřebí silných zdrojů zvukových. Tím může býti ladička na resonanční skřínce, jako jest v obr. 138. znázorněna, jež dává g^1; má ramena silnější, a dává ton zvučný. Ještě lépe hodí se k tomu píšťaly jazýčkové s konickým ozvučníkem, jako jest v obr. 139. (v pravo na kraji) znázorněna, jež dává rovněž g^1. Píšťala se rozezvučí, když se do násadce prudce fouká. Místo toho lze též do ozvučníku silným hlasem týž ton g^1 zpívati; ozvučník takový jest v obr. 139. (v pravo druhý od

*) *Vincenc Dvořák*, fysik český, narozen 1848, habilitoval se r. 1874 na universitě Pražské, kdež byl assistentem prof. Macha. Od r. 1875 působí jako professor fysiky na chorvatské universitě v Záhřebě.

konce) znázorněn. Na ton g^1, jejž tyto zvukové zdroje dávají, jest naladěn mosazný resonator formy kulovité.

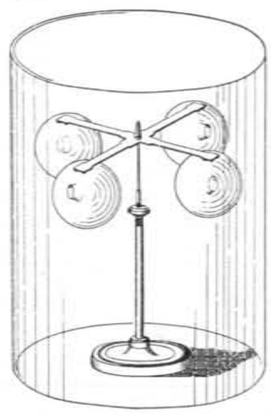


Obr. 139. Manometrické měření tlaku, jakým vzduch z resonatoru proudí.

Když se proti širšímu otvoru resonatoru příslušný ton g^1 intensivně zpívá neb hraje, lze ukázati, že menším otvorem proudí vzduch z resonatoru ven. K tomu stačí dáti před otvor tento malou hořící svíčičku, jež se proudem tím shasne. Malý mlýnek z kartonu na jehlu položený, když se před ústí onoho otvoru správně postaví, roztáčí se proudícím vzduchem velmi rychle (obr. 138.). Že průměrný tlak vzduchu v resonatoru se chvějícího je větší než vzduchu okolního, tím větší, čím je zvuk mohutnější, objasní se manometricky, úpravou, jež jest z obr. 139. patrna. V trubičce skleněné, mírně ohnuté, jest několik kapek alkoholu, zbarveného na př. fuxinem. Na trubičce jest nanesena stupnice. Stavěcím šroubem na stolku lze postavení alkoholického indexu v manometrické trubičce regulovati.

Na základě proudění vzduchu z resonatoru lze způsobiti zvukem nepřetržité rotace. Dvořák upevnil voskem na vodorovně položený, z lehkých tyčinek dřevěných upravený kříž čtyři malé skleněné resonatory a celek zařídil na rotaci, ve způsobu z obr. 140.

patrném. Když se proti tomuto přístroji i mírnou intensitou příslušný ton g^1 hraje neb zpívá, začne přístroj se otáčeti zejména snadno tehda, když se přes něj přešine skleněný válec, jak v obr. 140. naznačeno a když se přístroj i s válcem postaví do rohu dvou stěn, na př. dvou velkých mosazných a k sobě



Obr. 140. Zvukové kolo reakční.

pravoúhle připojených desek. Rotace vzniká týmž způsobem jako u Segnerova kola. Dvořák nazývá přístroj ten *zvukovým kolem reakčním.*

§ 152. Reprodukce zvuku.

Roku 1877 byl v širší známost uveden *telefon,* který již roku 1874 vynalezl *Alex. Graham Bell* (narozený r. 1847); byl to jeden z nejdůmyslnějších a nejdůležitějších vynálezů století 19tého. Přístrojem tímto, jehož jednoduchá úprava každého překvapovala, byl podán důkaz, jak neobyčejně rozmanitým způsobem může kmitati tenká deska železná, reagující na zvuky velice různé, jež bylo možno těmito vibracemi na základě magnetoindukce proudem dále převáděti a reprodukovati. Rozmanitost těchto vibrací znázorňuje velice poučně pokus na bláně mydlinové, provedený ve způsobu v obr. 109. naznačeném. Reprodukce zvuku telefonem, na základě magnetoindukčním, jest nejdokonalejší, kterou známe.

Od této reprodukce magnetoindukční k reprodukci mechanické, kterou zavedl *Th. Alva Edison* (narozený r. 1847) není

daleko. Jeho *fonograf* má však tu výhodu, že ve *fonogrammu* mechanicky zjednaném jest zvuk jako by uschován tak, že může býti reprodukován kdykoli a ne jednou, nýbrž mnohokráte. Předchůdcem fonografu Edisonova byl fonautograf *Scottův* (1859).

U fonografů Edisonových užívá se destiček ze slídy anebo lépe z tenkého broušeného skla. Destička jest na dně nálevkovitého násadce, kterým se vlny zvukové zachycují a na desku soustřeďují. Na destičce jest ocelový hrot, kterým se vibrace destičky vepisují do stanniolu, jak to bylo původně, nebo do válců ze směsi vosku a pryskyřice, jak se jich užívá v dobách nynějších. Válec se otáčí rukou nebo lépe hodinovým strojem aneb motorem elektrickým a při tom se jako při fonautografu šroubovitě v těsných závitech pošinuje. Stopy, jež hrot ve hmotě tohoto válce zůstavuje, udávají způsob vibrace destičky. Reprodukce těchto vibrací a tudíž i zvuku, kterýmž se před tím vytvořily, nastane, když se otáčením válce onen hrot vede po šroubovicích; při tom uvádí se oněmi vrypy ve vibraci a tím i destička slídová, čímž i dojem zvuku jest způsobován. Jest ostatně výhodno, když se pro *recepci* zvukových kmitů užívá *jiného* hrotu („recorder"), který jest ve způsobu jemného *nožíku* přibroušen, a pro *reprodukci* zase jiného („reproductor"), který jest poněkud *zaoblen.* Podivuhodno jest, jak i směs rozmanitých hlasů, zvuků, šumotů a pod. se registruje a jak ucho naše z komplikovaného pohybu vibračního destičky a tudíž i příslušného vlnivého pohybu vzduchu opět ony jednotlivé hlasy neb zvuky analysuje. Děje-li se pozorování objektivně, sesiluje se zvuk vhodným resonančním zařízením. Jemnější jest však pozorování subjektivní, při němž se vibrace vzduchu destičkou působené převádějí kaučukovými trubičkami do obou uší přímo. Při posuzování výkonů tohoto stroje nesmí ovšem pozorovatel v něm viděti nějaký nástroj koncertní; neboť šumoty, šramocení hrotu, a zvláštní ne vždy příjemná barvitost zvuků vadí jakémukoli požitku uměleckému.

Jinou úpravu dal fonografu *Berliner* (1888) ve svém *grammofonu.* Registrování se děje nikoli ve křivkách šroubových na válci, nýbrž v rovině v závitnicích. Membrana jest slídová; na ní jest upevněn proužek měděný, do něhož jest zasazen hrot iridiový. Fonogramm vzniká na rovné desce zinkové, potažené jemnou vrstvou vosku, který byl rozpuštěn v benzinu. Do této vrstvy činí onen hrot vibrační vrypy. Slabým roztokem kyseliny chromové (10%) se pak deska zinková leptá, čímž místa, kde vosk hrotem vibrujícím byl odšinut, se prohloubí do desky. Z tohoto originalu fonografického lze cestou galvanoplastickou zjednati otisky. Fotograficky dají se původní fonogrammy též zvětšiti, čímž se jich studium usnadní. Vedle těchto forem hlavních existují ještě četné jiné, oratiografy, logografy a pod.

V novější době používá se fonografických registrací ke studiu vokalů. Zařízením pákovým jest možno vrypy přenésti na papír a zjednati vibrační křivky; celkem jsou tyto podobny těm, jež se dostávají manometrickými plaménky. Definitivních výsledků o podstatě vokalů dosud zjednáno není přes velikou zajímavost, jakou práce dosud vykonané poskytují. Theorie Helmholtzova o tonech *určité absolutní výšky*, jimiž jednotlivé samohlásky jsou určeny, nevysvětluje, jak jest to možná, že lze samohlásky zcela zřetelně šeptati, ba již dechem při určitém postavení úst naznačiti, ač při tom o tonech nějakých sotva lze mluviti. Zajímavé jsou též pokusy, fonograficky různá, nyní již vymizející nářečí, v zájmu studia jazykového zachytiti a budoucím věkům uchovati.

VIII.

Fysiologie sluchu.

Napsal Dr. *F. Mareš.*

§ 153. Úvod.

Sluch podává pocity šelestů, zvuků, tonů. Šelesty jsou drsné, neklidné, nečisté; zvuky dojímají klidem, plynulostí, čistotou. Při cviku a pozornosti rozeznává sluch ve zvucích jako součásti tony, jakožto nejjednodušší sluchové pocity. Tony tvoří dle jakosti plynulou rozmanitost jednoho rozměru, pořádají se dle „výšky“ v souvislou řadu. Vzdalují-li se dva tony od sebe v této řadě, přibývá jakostného rozdílu mezi nimi; avšak v určité vzdálenosti nabudou zase zvláštní podobnosti, tak že téměř splývají; podobné tonové jakosti vracejí se v „oktavách“. Plynulá změna výšky tonové dojímá nelibě, jako kvílení; děje-li se však změna ta po určitých stupních, činí dojem libý (melodie). Tony vyznačují se přesnou odměřeností na rozdíl na př. od pocitů světelných, které zůstavují dlouhé stopy.

Zní-li dva tony různé výšky současně, splývají více nebo méně v jednotu; stupeň tohoto splývání záleží na určitých okolnostech; nejdokonaleji splývají oktavy, potom kvinty a t. d. Splývání dvou tonů slove konsonancí, a má různé stupně; tony, které nesplývají a se rozcházejí, tvoří dissonanci. Zvuk dvou, tří neb i více tonů činí dojem celku; napnutím pozornosti rozezná však sluch v tomto celku jednotlivé tony a může kterýkoli z nich sledovati. Tato analysující schopnost vyznamenává sluch před jinými smysly, zvláště před zrakem, který současné světelné pocity skládá v pocit výsledný; sluch však rozeznává u vřavě zvuků a šelestů kteroukoli složku. Na analysující schopnosti sluchu zakládá se dojem akkordů a harmonie. Dva současně znějící tony činí, za určitých okolností, dojem zvuku, který nevyznívá klidně a plynule, nýbrž zaznívá střídavě silněji a slaběji, tvoří zázněje neboli rázy.

Všem těmto obměnám sluchových dojmů odpovídají určité poměry sluchových podnětů, totiž vzdušných kmitů; šelestům kmity nepravidelné, zvukům složité kmity periodické, tonům jednoduché sinusové kmity (dle Ohma), záznějům interference dvou kmitů ne zcela stejné periody. Kromě toho však rozeznává sluch tony, které sám přidává neboli kombinuje k tonům objektivným. To jsou kombinační (differenční) tony Tartiniho; těmto tonům neodpovídá žádný prokázaný objektivný kmit vzdušný, ony jsou původu ryze fysiologického. Od těchto pravých kombinačních tonů rozeznávají se kombinační (differenční a summační) tony Helmholtzovy, které odpovídají objektivným vzdušným kmitům, vznikajícím výsledně za určitých okolností (ve společném větrníku sireny, harmonia).

To je stručně pocitový obsah sluchový. Rozbor, srovnávání a třídění tohoto obsahu náleží psychologii, která vyhledává též podmínky libosti sledu tonů (melodie), splývání a příbuznosti tonů (konsonance a harmonie) přihlížejíc též k citům, které se zvláště ke sluchovým dojmům připojují. V nové době zabývají se psychologií sluchu Wundt, zvláště C. Stumpf, Th. Lipps a j.

Pocitový obsah sluchový odpovídá pravidelně určitým fysickým dějům, jejichž výzkum provádí fysika; jsou to rozmanité pohyby pružných těles, sdělované vzduchu a v něm se šířící, dle určitých fysikou vyhledávaných zákonitostí.

Vzdušné pohyby působí ve sluchový ústroj jako podněty, vzbuzujíce v něm fysiologické děje, kterým odpovídají sluchové pocity. Fysiologie má vyšetřiti, jak působí ony podněty ve sluchový ústroj, jakého způsobu děje vznikají v tomto ústroji, a jak tyto děje souvisí se sluchovými pocity. Fysiologie má tedy vyšetřiti souvislost mezi fysickými podněty a příslušnými pocity, uskutečňovanou smyslovým ústrojem. Může-li psychologie přímo pozorovati pocitový obsah sluchový, může-li fysika přesně měřiti a určovati pohyby pružných těles i vzduchu, jakožto sluchových podnětů, jest úkol fysiologie daleko obtížnější, poněvadž děje probíhající ve smyslovém ústroji sluchovém při jeho činnosti nejsou dosud pozorování přístupny. Fysiologický výklad sluchové činnosti opírá se tedy jednak o strukturu sluchového ústroje, jednak o všeobecné vědomosti, které máme o činnosti nervové, i bude obsahovati mnoho hypothetického a vůbec problematického.

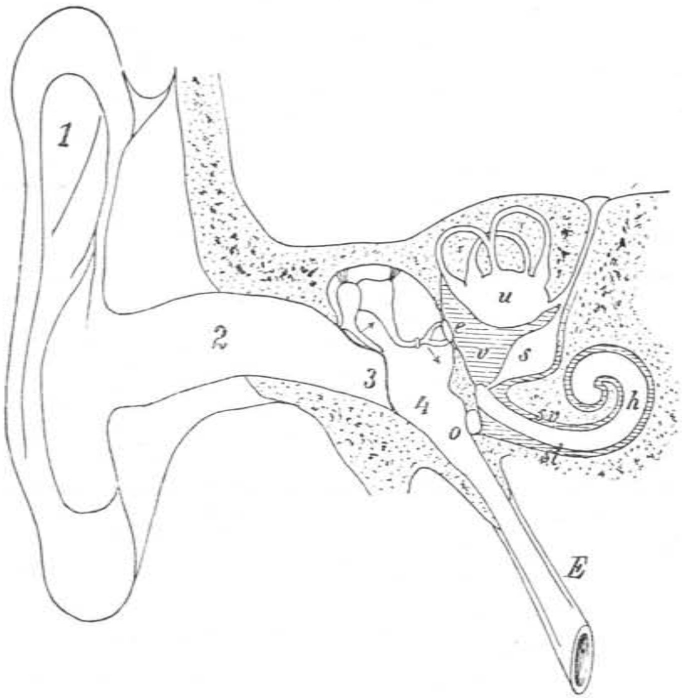
§ 154. **Struktura sluchového ústroje.**

Každý smyslový ústroj skládá se z *čidla* na obvodu těla; v čidle jsou smyslové epithelie, buňky to obdobné buňkám nervovým, ale zvláště přizpůsobené ke vnímání určitých podnětů. Sluchové čidlo jest uloženo v dutině skalní kosti (části kosti spánkové), jako útvar velmi složitý a proto labyrintem zvaný; specialně sluchu slouží část labyrintu zvaná hlemýžďovým výčnělkem. Čidlo bývá opatřeno ústroji pomocnými, které slouží přivádění podnětu ke smyslovým epitheliím; tak jest opatřeno čidlo zrakové, sítnice oka, dioptrickým ústrojem očním, a tak slouží převodu podnětu sluchového na čidlo *bubínkový ústroj* sluchový.

Smyslový nerv spojuje čidlo s mozkem. *Sluchový nerv* (vůbec VIII. nerv mozkový) počíná se v gangliích uložených poblíže sluchového labyrintu; stýká se na obvodu se smyslovými epitheliemi sluchovými, a centralně vstupuje do prodloužené míchy; stýká se s jádry šedé hmoty zde uloženými (jádro VIII. nervu, olivy), má spojení s malým mozkem a se zadním párem čtverhrbolí ve středním mozku. Konečně vstupuje v šedou kůru spánkového laloku pláště mozkového. Tyto závity kůry mozkové považují se za *psychofysiologické ústředí sluchové.*

Všechny tyto části: čidlo, smyslový nerv a psychofysiologické ústředí nervové, tvoří *smyslový ústroj* jakožto výkonnou jednotku.

Podrobnější popis zařízení sluchového ústroje postupuje tuto směrem výkonu, od obvodu k ústředí nervovému, dle obr. 141. *Vnější ucho* jest ušní boltec a sluchovod; tento je na konci přepažen šikmo postavenou a do vnitř puklicovitě vtaženou blanou bubínkovou, která uzavírá *dutinu bubínkovou* neboli *střední ucho.* — Dutina bubínková je spojena rourou Eustachovou s dutinou hltanovou, a může se v ní tudy vzduch vyměňovati. Vzdušné kmity, přiváděné sluchovodem, působí chvění blány bubínkové, jehož volnost požaduje stejný tlak vzduchu na obou stranách blány. Obyčejně jest ústí roury Eustachovy v hltanu uzavřeno; proto při náhlém stoupnutí nebo klesnutí tlaku vnějšího vzduchu zalehne v uších, t. j. blána bubínková nemůže volně kmitati pro různost tlaku na obou svých stranách. Při polykání otevře se ústí roury Eustachovy, a tlak vzduchu v dutině bubínkové vyrovná se; při zavřených ústech a ucpaném nosu vyssaje se polknutím vzduch z dutiny bubínkové; ale tak možno tam též vzduch z dutiny hltanové vtlačiti.



Obr. 141. Celkový přehled sluchového čidla.
1. boltec ušní, *2.* vnější sluchovod. *3.* blána bubínková, *4.* dutina bubínková, *E* roura Eustachova, *e* otvor elliptický („oválný“), *o* otvor okrouhlý, *v* vestibulum (předsíň) labyrintu, *u* utrikulus s polokruhovými kanálky, *s* sakkulus, *h* hlemýžďovitý výčnělek, *sv* scala vestibuli, *st* scala tympani.

V dutině bubínkové nachází se *ústroj bubínkový*, řetěz tří skloubených kůstek, spojujících blánu bubínkovou s „oválným otvorem“ k dutině, ve které jest uložen sluchový labyrint; řetězem tím přenáší se chvění blány bubínkové na lymfu, na dutiny labyrintové, a tudy též na sluchové čidlo. První kůstka, kladívko, je spojena rukojetí s blanou bubínkovou; hlavička kladívka, zavěšená vazem na stěně dutiny, má na straně kloubovou plochu, kterou se stýká s kloubovou plochou na těle kovadlinky; tato, krátkým výčnělkem pomocí vazu na stěně dutiny zavěšená, stýká se kloubovou plochou na konci dlouhého svého výčnělku s hlavičkou třmínku, jehož deska je zasazena a kruhovým vazem

upevněna v „oválném otvoru“ ku předsíni dutiny labyrintové, ale tak, že jsou možny pohyby desky, zvláště na horním okraji. Tímto spojením je blána bubínková vtažena puklicovitě dovnitř, tak že tvoří kužel, jehož strany jsou ven vypouklé.

Bubínkový ústroj pokládá se za pomocné, ochranné a akkomodační zařízení sluchové; nepodmiňuje možnost sluchu, která zůstává i po zrušení bubínkového ústroje; neboť vzdušné kmity přenášejí se na labyrint i velice hustou kostí skalní.

Pomocný význam bubínkového ústroje záleží dle Helmholtze v tom, že přetvořuje vzdušný kmit velké amplitudy a malé energie ve kmit malé amplitudy a velké energie; napomáhá tedy rozkmitání těžší lymfy lehkými vzdušnými kmity. Mechanism, jakým se provádí tato transformace, není po způsobu páky, nýbrž zakládá se na zvláštním puklicovitém zakřivení blány bubínkové; pro bližší výklad odkazuje se tu ku pojednání *Helmholtzovu* (Pflügers Archiv I., 1. 1868). Kromě toho dlužno vytknouti, že ústroj bubínkový přetvořuje molekularný kmit vzdušný ve kmit molarný, tak že vlnám vzdušným odpovídá pohyb lymfy labyrintové jako massy.

Ochranný význam ústroje bubínkového záleží v tom, že zabraňuje vytržení desky třmínku L „oválného otvoru“ a chrání tak labyrintový ústroj před přílišnými výchvěvy vzdušnými. U obojživelníků a ptáků je blána bubínková spojena s otvorem k labyrintu jednou kostěnou tyčinkou (columella), i je pochopitelno, že takové pevné spojení pohyby těsněji přenáší, než řetěz skloubených kůstek; neslouží tedy toto skloubení jemnosti, nýbrž ochraně sluchu. Při přílišných exkursích blány bubínkové směrem ven oddálí se kloubová plocha kladívka od plochy kovadlinky, tak že sice kladívko pohyb ten sleduje, nikoli však kovadlinka; tento kloub má též zvláštní závoru, zub, který zamezuje nadmírné pohyby; mechanika zařízení toho podává se z útvaru kloubových ploch, i odkazuje se pro její výklad na svrchu uvedené místo.

Akkomodační význam bubínkového ústroje, obdobný akkomodaci v ústroji zrakovém, spatřuje se v tom, že činností dvou svalů, upínajících se svými šlachami na sluchové kůstky, může se způsobiti postavení kůstek, přispívající přenosu velmi jemných kmitů vzdušných; činnost ta nastává při pozorném (napnutém) naslouchání. Napínač bubínku (musculus tensor tympani) upevňuje se dlouhou šlachou na rukojeti kladívka poblíže krčku, a jeho smrštění táhne kladívko a blánu bubínkovou dovnitř, čímž tato se více napíná; spolu vtlačuje se tím deska třmínku do otvoru oválného, tak že tlak v dutině labyrintové se zvyšuje. Tím sevrou se též pevněji klouby kůstek, tak že jejich řetěz nabývá větší pevnosti a stává se způsobilejším ku přenosu pohybu, na způsob pevné tyčinky. Druhý sval dutiny bubínkové, musculus stapedius, upevňuje se šlachou na hlavičce třmínku a táhne ji svým smrštěním stranou, tak že se deska třmínku v oválném otvoru vzepře. Oba svaly přivádějí se v činnost reflektoricky podněty sluchovými, a snad též napnutím pozornosti. Mechanism sluchové akkomodace jest ostatně těžko stanoviti, otázka zůstává spornou.

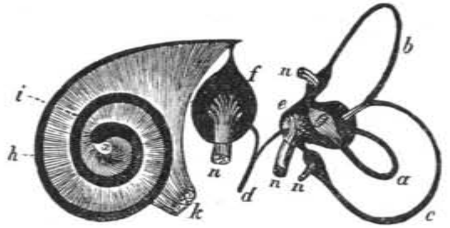
Vnitřní ucho obsahuje vlastní čidlo smyslové, složitý to system míšků a kanálků, nazvaný proto labyrintem. Labyrint jest uložen v obdobně utvářené dutině skalní kosti, a to tak, že zůstává kolem něho souvislý volný prostor, vyplněný lymfou (perilymfou). Labyrint sluchový ukazuje různé utváření u různých tříd obratlovců, a jsou i vnější pomocná zařízení sluchového čidla různě zařízena. U ryb není žádného bubínkového ústroje, labyrint „sluchový“ jest úplně uzavřen v dutině kosti skalní a představuje sám celý obvodový ústroj „sluchový“. U obratlovců ve vzduchu žijících vytvořuje se dutina bubínková; u obojživelníků a ptáků skládá se ústroj bubínkový z blány, zcela na povrchu hlavy postavené a spojené kostěnou tyčinkou s otvorem k dutině labyrintové. U ssavců teprve vyvinují se tři skloubené kůstky, vnější sluchovod a ušní boltec. Též labyrint ukazuje postupně složitější zařízení u různých tříd obratlovců. Pro popis útvaru labyrintu, jakož i pro posouzení jeho výkonného významu, je výhodno porovnati jeho útvar u různých tříd obratlovců a poukázati též na postupný jeho vývoj.

V embryonalném vývoji počíná labyrint jako ztluštěná deska v povrchovém listu zárodkovém; tato deska prohloubí se pozvolna a uzavře se konečně v míšek, který se oddělí od povrchové vrstvy a posunuje se hlouběji. Tento „míšek sluchový“ připomíná „otocysty“ bezobratlých, zvláště měkkýšů. Než záhy začne se míšek velmi rozmanitě šněrovati a vychlipovati; nejprve ukáží se na něm dva oddíly; vrchní neboli dorsalní oddíl, jménem utriculus, vychlípí se ve tři polokruhové kanálky, z nichž každý počíná na předním konci výdutí (ampullou). Tento utrikularní oddíl utvařuje se nejdříve, a nachází se též u nižších obratlovců, u ryb, dokonale vyvinutý; jen petromyzon dospívá k utváření jediného polokruhového kanálku. Za to zůstává u ryb spodní

neboli ventralní oddíl původního míšku pozadu jako okrouhlý pytlíček (sakkulus), z něhož se vychlipuje jen zcela krátký výčnělek.

U obratlovců žijících ve vzduchu pokračuje však vývoj tohoto výčnělku ze sakkulu dále; u obojživelníků prodlužuje se, u ptáků nabývá již značnější délky, ale teprve u ssavců vyrůstá tak, že se svinuje v závity jako hlemýžď. S vývojem hlemýžďového výčnělku postupuje též vývoj ústroje bubínkového; oba ústroje scházejí u ryb, počínají se vyvíjeti u obojživelníků a dosahují vrcholu vývoje u ssavců. Bubínkovým ústrojem přeměňují se vzdušné kmity v pohyby perilymfy, ale tyto pohyby mohou v dutině labyrintové postupovati jen podél výčnělku hlemýžďového, kdežto utrikularní část labyrintu s polokruhovými kanálky zůstává stranou od těchto pohybů. Mysleme si (obr. 141.), že deska třmínku vtlačí se do otvoru ku předsíni labyrintu (fenestra ovalis s. vestibuli); posunutí perilymfy může nastati jen v tom směru, kde má dutina labyrintová povolnou stěnu; ta nachází se v otvoru okrouhlém (fenestra cochleae), uzavřeném blanou. Dráha od otvoru oválného k otvoru okrouhlému vede však podél celé délky výčnělku hlemýžďového; tento výčnělek je v dutině kostěné, odpovídající jeho tvaru, uložen tak, že ji rozděluje na dvě patra, spojená na vrcholu hlemýždě otvorem; horní patro souvisí s předsíní labyrintu (scala vestibuli), dolní patro stýká se otvorem okrouhlým s dutinou bubínkovou (scala tympani). Pohyb perilymfy postupuje tedy z předsíně labyrintu podél scala vestibuli, prochází otvorem na vrcholu hlemýždě (helikotrema) do scala tympani a vyrovnává se na bláně uzavírající otvor okrouhlý. Zařízení to ukazuje, že pohyby perilymfy dějí se především podél výčnělku hlemýžďového, kdežto ostatní části labyrintu zůstávají opodál těchto pohybů.

Jednotlivé oddíly labyrintu souvisí u nižších obratlovců širokými spojkami; u ssavců však ztenčují se tyto spojky v úzké kanálky. Schematický nárys ssavčího labyrintu (obr. 142.) ukazuje utriculus *e* s polokruhovými kanálky a jejich ampullami *a b c*; tenký výčnělek utrikulu spojuje se s podobným výčnělkem sakkulu *f* v dlouhý kanálek *d*, končící váčkem na lebečném povrchu skalní kosti (ductus endolymphaticus). Ze sakkulu *f* vyrostlý hlemýžďový výčnělek, na začátku tenčí a na slepém konci ve vrcholu hlemýždě širší, odděluje se od sakkulu, tak že s ním souvisí jen zcela tenkou spojkou. Tento soubor míšků a kanálků je v sobě uzavřený a lymfou (endolymfou) naplněný, jako jeho prvotný základ: míšek sluchový.

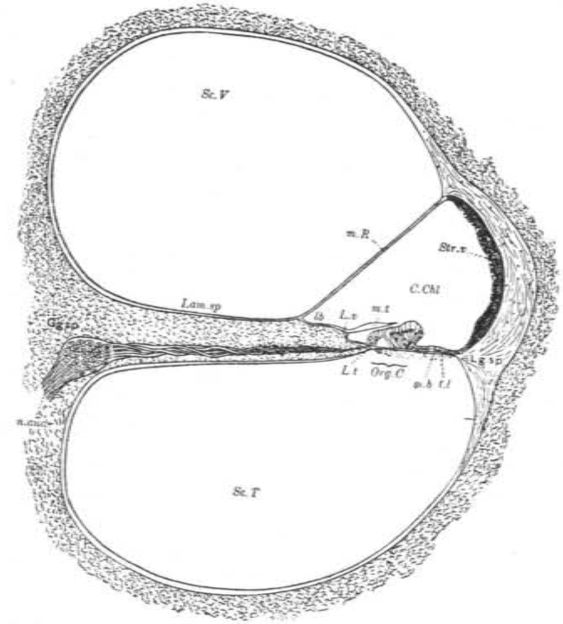


Obr. 142. Schematický nárys labyrintu ssavčího (dle Hensena). *e* utriculus, *a*, *b*, *c* polokruhovité kanálky, *f* sakkulus, *hi* hlemýžďový výčnělek, *n* nervus vestibuli, *k* nervus cochleae, *d* ductus endolymphaticus.

Stěna labyrintu utvořená vazivovou blanou, jest pokryta na vnitřním povrchu vrstvou epithelových buněk, původu pokožkového; na určitých místech utvařují se tyto buňky ve *smyslové epithelie*. Taková místa jsou: 1. ve třech ampullách polokruhových kanálků; smyslové buňky jsou tu opatřeny vlásky, vlajícími v endolymfě. 2. V utrikulu a sakkulu; smyslové buňky jsou tu též opatřeny vlásky, ale spočívají na nich konkrementy krystalků vápenatých solí (otokonie neboli otolithy, zvláště velké u ryb). 3. Zvláštní uspořádání ukazují smyslové epithelie postavené v pruhu táhnoucím se po celé délce hlemýžďového výčnělku (stria acustica cochleae); u ssavců nabývá tento pruh smyslových epithelií v hlemýždi zvláštního zařízení, které slove *ústrojem Cortiho*. *Smyslové nervy* přistupují k labyrintovým šesti čidlům *dva*; počátek jejich jest v nervových buňkách dvou poblíže labyrintu položených ganglií. *Ganglion vestibuli* vysílá nervová vlákna k čidlům v sakkulu, utrikulu a v ampullách polokruhových kanálků; to jest *nervus vestibuli* (*n*). *Ganglion spirale* prostírá se ve spirální štěrbině kostěné stěny osy hlemýždě a vysílá nervová vlákna vějířovitě ku pruhu smyslových epithelií podél celého hlemýžďového výčnělku: to jest *nervus cochleae* (*k*). Oba tyto nervy labyrintu rozeznávají se vedle sebe v průběhu VIII. nervu vstupujícího do prodloužené míchy. Smyslové čidlo hlemýždě vyznačuje se tedy od ostatních čidel labyrintu zvláštní innervací

Vývojová i srovnávací morfologie, fysiologický výzkum i psycho-fysiologický rozbor pocitových obsahů podávají soubor důvodů, že smyslová čidla sakkulu, utrikulu a polokruhových

kanálků, tedy celý innervační obvod *nervi vestibuli*, slouží pocitování passivného pohybu a svislého tlaku tíže, (k čemuž je zvláště otolithový ústroj sakkulu a utrikulu způsobilý); tyto pocity přispívají podstatně k orientaci hlavy v prostoru, zvláště k směru svislému, a tím slouží k zachovávání rovnovážné polohy těla. Proto uznává se ústroj ten za příslušný *smyslu statickému*. Tím netvrdí se nic o tom, pokud a jak slouží též sluchu.



Obr. 143. Průřez kostní dutinou hlemýždě (dle Fostera).
Lam. sp. lamina spiralis ossea, *C. Chl.* canalis cochleae, *m. b.* membrana basilaris, *m. R.* membrana Reissneri, *Str. v.* stria vascularis, *Lg. sp.* ligamentum spirale, *Org. C.* organum Cortii, *m. t.* membrana tectoria, *Sc. V.* scala vestibuli, *Sc. T.* scala tympani, *Gg. sp.* Ganglion spirale, *n. aud* nervus auditorius.

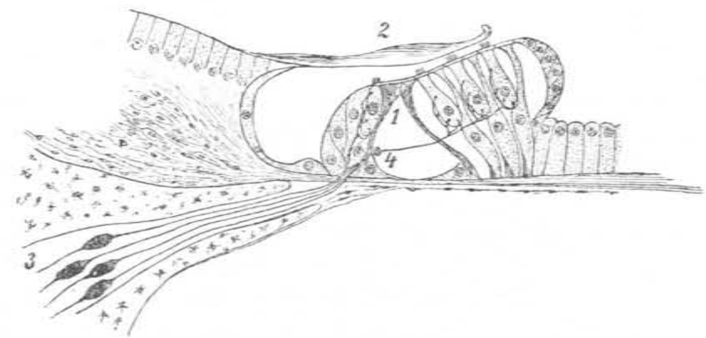
Naproti tomu je podobná řada důvodů, že čidlem sluchovým jest pruh smyslových epithelií podél hlemýžďového výčnělku, a že sluch v pravém (člověku známém) smyslu počíná u obratlovců tam, kde počíná hlemýžďový výčnělek se svou smyslovou papillou, a s ním též bubínkový ústroj; tedy u obratlovců žijících ve vzduchu.

Ježto se tuto jedná o sluch, pomineme čidel statického smyslu a obrátíme se k zařízení sluchového čidla v hlemýžďovém výčnělku labyrintu. Výčnělek ten jest uložen v kostní dutině, odpovídající z velka jeho tvaru, tedy v hlemýžďovitě svinutém kostním kanálu; uložení hlemýžďového výčnělku je takové, že se jím kostní kanál přepažuje ve dvě patra. Na průřezu (obr. 143.) ukazuje se, jak přepážku tu tvoří z části kostěná deska, vinoucí se spiralně po celé délce kostěného kanálu hlemýžďového (lamina spiralis ossea); z části však hlemýžďový výčnělek labyrintu sám, jehož průřez ukazuje se jako trojúhelník. Základna tohoto trojúhelníka napíná se od volného okraje kostěné desky ku protější stěně dutiny, kde se upevňuje vazem (ligamentum spirale). Pomníme-li, že průřez ten je veden dlouhým, hlemýžďovitě svinutým kanálkem, představíme si, že základna ta představuje průřez dlouhé blány, nazvané ***základnou blanou*** (membrana basilaris), která má velký význam ve fysiologických theoriích sluchu. Šířka základné blány, znázorněná délkou základny na průřezu, je nejmenší na počátku kanálu hlemýžďového a největší na jeho vrcholu. Základná blána skládá se z vláken, napnutých vedle sebe příčně ve směru naznačeném základnou na průřezu a stmelených homogenní látkou. Tato vlákna různí se délkou v té míře, jak se stává základní blána širší směrem k vrcholu hlemýždě. Vlákna základné blány představují se tak jako struny různé délky, napnuté mezi okrajem kostěné spiralní desky a protější stěnou kostní dutiny podél celého hlemýždě.

Na základně trojúhelného průřezu výčnělku hlemýžďového spočívá smyslové čidlo sluchové, jevící se na průřezu jako bradavka (papilla basilaris), ale táhnoucí se jako pruh smyslových epithelií po celé délce hlemýžďového výčnělku (stria acustica cochleae). Ostatní stěny hlemýžďového výčnělku jsou: blána předsíňová (membrana Reissneri) a blána přirostlá ke stěně kostní dutiny hlemýžďové, vyznačená hojnými cevami krevními (stria vascularis).

Přepažení kostní dutiny hlemýžďové ve dvě patra, a to z části hlemýžďovým výčnělkem samým, je významné tím, že podmiňuje postup pohybu perilymfy podél výčnělku hlemýžďového tak, že se tento pohyb může přenášeti na základnou blánu, její vlákna a tudy i na smyslové epithelie, spočívající na základné bláně. Neboť, jak již řečeno, pohyb kůstek sluchových přenáší se deskou třmínku skrze otvor oválný na lymfu v předsíni labyrintu, odtud na předsíňové patro hlemýžďové dutiny (scala vestibuli), otvorem na vrcholu hlemýždě (helicotrema) na patro hlemýždě vedoucí k okrouhlému otvoru dutiny bubínkové (scala tympani).

Pruh smyslových epithelií, spočívající na základné bláně hlemýžďového výčnělku (papilla basilaris) ukazuje u různých tříd obratlovců ve vzduchu žijících různé stupně vývoje; u obojživelníků a plazů nevyznačuje se sluchová papilla jiným než válcovitými epithelovými buňkami, opatřenými na povrchu krátkými, tuhými vlásky; též u ptáků nenachází se v papille jiných zvláštních zařízení. Teprve u ssavců dochází k utváření zvláštních pomocných ústrojů, na kterých smyslové epithelie spočívají, k utváření *organu Cortiho.*



Obr. 144. Průřez organem Cortiho.
1. Cortiho oblouk, *2.* membrana tectoria Cortii, *3.* ganglion spirale, *4.* svazek nervových vláken táhnoucí se tunelem Cortiho.

Na průřezu organu Cortiho (obr. 144.) jeví se jako význačný útvar *Cortiho oblouk* neboli krokvice (1) utvořená ze dvou na koncích tlustších, uprostřed štíhlých a lehce zakřivených tyčinek Cortiho pilířů). Pata těchto pilířů spočívá na základné bláně a ukazuje zbytek protoplasmy a jádro, tak že se pilíř jeví jako přeměněná buňka nebo produkt buňky. Hlavice obou pilířů stýkají se jako by v kloubu. Vnitřní, blíže k desce kostěné stojící pilíř je kratší, tlustší, více vzpřímený, a jeho pata stojí poblíže kostěné desky pevněji; vnější pilíř je delší, útlejší, stojí šikměji, a jeho pata nestojí tak pevně, spočívajíc na pohyblivé základné bláně. Vnitřních pilířů jest více než vnějších (asi 6000, 4500); na dva až tři vnitřní přichází jeden vnější pilíř. Oblouky neboli krokvice Cortiho, postavené vedle sebe po celé délce pruhu sluchového, tvoří krov, kryjící chodbu neboli *tunel Cortiho*; protoplasmové zbytky buněk pilířových tvoří dno neboli půdu tunelu.

O Cortiho oblouky neboli krov opírají se s obou stran smyslové epithelie: válcovité buňky, opatřené na volném, kutikularní deskou uzavřeném povrchu několika (u člověka až 20) krátkými tuhými vlásky neb ostny. Na vnitřní straně krovu nachází se jedna řada těchto buněk, které přiléhají těsně ke vnitřním pilířům tunelu; na vnější straně krovu jsou jich tři řady, ale nepřiléhají těsně ke vnějším pilířům Cortiho krovu, zůstává mezi nimi prostor lymfou naplněný, souvisící mezerami mezi vnějšími pilíři s tunelem Cortiho. Smyslové buňky tyto neopírají se svými patami o základnou blánu, nýbrž o těla buněk podpůrných (Deitersových), které vysílají jemné výčnělky (falangy), končící na volném povrchu kutikularní deskou. Řady smyslových buněk střídají se se řadami buněk podpůrných, jejich kutikularní desky na volném povrchu stýkají se těsně a tvoří jakousi klenbu, ve které jsou smyslové buňky zavěšeny. Při pohledu shora jeví se tato klenba, utvořená z kutikularních desek buněk smyslových i podpůrných, jako mřižovaná blána (membrana reticularis); rovina této blány táhne se od hřebene Cortiho krovu šikmo vzhůru a ven. Mezi těly smyslových buněk a falangami buněk podpůrných zůstávají mezery naplněné lymfou, a tvořící souvislý prostor, který však nesahá až k základné bláně, jako prostor tunelu Cortiho, a slove na rozdíl od tohoto prostorem Nuelovým. Všechny tyto mezibuněčné prostory jsou však zcela uzavřeny od vlastní dutiny výčnělku hlemýžďového, naplněné endolymfou. Pozoruhodná je tato zvláštnost smyslového epithelu sluchového, že jednotlivé buňky jsou takořka volně zavěšeny a podepřeny, na rozdíl od jiných epithelií, jejichž buňky těsně k sobě přiléhají.

Nad rovinu „mřižované blány" vyčnívají vlásky neb ostny smyslových epithelií a nad těmito vznáší se v endolymfě blanka (2) upevněná na okraji kostěné desky spiralní; její volný okraj sahá tak daleko, až kam sahá vnější řada smyslových buněk a jejich vlásků. To jest blána krycí, membrana tectoria s. Cortii; vyskytuje se s prvními základy sluchové papilly, i přisuzuje se jí též význam při funkci sluchové.

Smyslový nerv sluchový pochází z ganglia spiralního (3). Nervové buňky tohoto ganglia vysílají výčnělky jednak k organu Cortiho, jednak k nervovému ústředí mozkovému. Nervová vlákna, postupujíce k obvodu do Cortiho ústroje skrze kostěnou

desku spiralní, ztrácejí dřeňovou pochvu a vstupují jako nahé osové válce mezi epithelie papilly; svazeček vláken táhne se spiralně po délce tunelu (4) Cortiho a vysílá větévky mezerami mezi vnějšími pilíři ke smyslovým buňkám vnějších řad. Soudilo se, že vlákénka nervová vstupují do smyslových buněk, ano že sahají až do jejich vlásků. Dle neuronové theorie zakončují nervová vlákna, jakožto výčnělky buněk nervových, volným rozvětvením, a nesplývají s jinými buňkami, nýbrž stýkají se s nimi toliko. Při velmi hojném rozvětvení může se vlákno nervové jedné nervové buňky stýkati s mnohými smyslovými buňkami; tak je tomu, dle Helda, právě u sluchového čidla; nervová vlákna proplétají se v mezerách Nuelova prostoru mezi buňkami smyslovými, a to tak, že smyslové buňky ležící na různých místech sluchové papilly mají styk s větévkami vlákna jedné nervové buňky. Dle toho mohou k jedné nervové buňce spiralního ganglia přicházeti podněty ze smyslových buněk v papille daleko od sebe vzdálených.

Volné rozvětvení sluchového nervu mezi epitheliemi sluchové papilly jest obdobné rozvětvení smyslových nervů kůže mezi epitheliemi pokožky; poukazuje na původ sluchového čidla z pokožky, i svědčí pro analogii mezi nimi. Též podněty hmatové (tlaky, vibrace, zrychlené pohyby) jsou příbuzny s podněty sluchovými, a zvláště statickými (tlak otolithů). Naproti tomu jeví se základný rozdíl v utváření mezi čidlem sluchovým s jedné a zrakovým i čichovým s druhé strany.

§ 155. **Fysiologický výklad sluchu.**

Fysiologický výklad sluchu má ukázati souvislost mezi fysickými podněty a příslušnými pocity, kteráž souvislost se uskutečňuje smyslovým ústrojem sluchovým. Každý výklad požaduje určitých předpokladů nebo thesí, které se prostě kladou bez dalšího rozboru a odůvodnění. Základným předpokladem fysiologického výkladu smyslových výkonů vůbec jest, že určitému fysiologickému ději ve smyslovém ústroji odpovídá určitý pocit, tak že kdykoli tento určitý fysiologický děj nastane, vstoupí do vědomí tento určitý pocit. Fysiologickým dějem rozumí se tu děj tělesný, probíhající v nervovém ústroji, na způsob dějů fysikochemických.

Tímto předpokladem (nebo spíše postulatem) *psychofysického parallelismu* eliminuje se z fysiologického výzkumu otázka souvislosti mezi fysiologickým dějem ve smyslovém ústroji a příslušným pocitem a odkazuje se kritice lidského poznávání. Fysiologii zůstal by úkol stanoviti jakosti a průběhy fysiologických dějů ve smyslových ústrojích a jejich souvislost s příslušnými fysickými podněty.

Než fysiologie dosud není ani s tento úkol. Jakosti a průběhy fysiologických dějů ve smyslových a vůbec nervových ústrojích jsou dosud zcela neznámy. Známy jsou sice určité elektrické zjevy, provázející činnost nervovou, avšak tyto zjevy jsou asi pouze průvodné a výsledné, a nepraví nic o tom, jakého způsobu a povahy je děj nervové činnosti sám. Proto kladou nebo spíše postulují se takovéto nervové děje, a jejich způsob a povaha znázorňuje se fysikalně-chemickými analogiemi, jako elastická vibrace, jako energetická nebo látková proměna, a t. d. Ježto tedy fysiologické děje ve smyslových ústrojích, a jejich souvislost s fysickými podněty nejsou známy a dosud není vyhlídky, že by fysiologie tento svůj vlastní a základný výzkum brzy provedla, činí se další předpoklady a these, kterými se tato mezera obchází. Takovou thesí jest *princip specifické energie smyslové*, založený J. Müllerem. These psychofysického parallelismu požaduje tolik rozdílných *fysiologických* dějů ve smyslovém ústroji, kolik je různých pocitových jakostí. Ježto však nejsou známy *žádné* fysiologické děje ve smyslových ústrojích, přiřknou se požadované různosti těmto ústrojům samým, a these zní: je tolik zvláštních a rozdílných smyslových *ústrojů*, kolik je různých pocitových jakostí. Každý smyslový ústroj má svůj výhradný způsob činnosti, specifickou energii, která uvádí do vědomí pocit určité jakosti; tento výhradný způsob činnosti jest nezávislý na podnětu, kterým byl ústroj v činnost přiveden, nýbrž závisí jen na specifické povaze tohoto ústroje.

Touto thesí přenáší se problem s pole fysiologického na pole anatomické; anatomii přikládá se tu úkol, aby prokázala tolik zvláštních smyslových ústrojů, kolik je pocitových jakostí, ústrojů, z nichž každému by se mohla přiřknouti specifická energie budící svou činností pocit určité jakosti. Anatomie nevyhoví arci tomuto požadavku; proto se požadavek ten prostě předpokládá. Úkol fysiologie, vyšetřiti způsoby a jakosti fysiologických dějů ve smyslových ústrojích a jejich souvislost s příslušnými podněty, je tak odložen s odvoláním se k anatomii; vysvětlí se to z historického vývoje fysiologie na základě anatomie. Než je patrno, že tímto anatomickým myšlením zatemňují

se vlastní problemy fysiologie a předstírají se lichá rozluštění. Theorie sluchu je toho dokladem.

Princip specifické energie smyslové, přisuzující anatomickým ústrojům specifické způsoby činnosti, nezávislé na jakosti podnětu, osvobozuje fysiologii od těžkého výzkumu, který jí náleží, i zůstavuje jí jen výklad toho, že činnost určitého ústroje, ačkoli zcela nezávislá na jakosti podnětu, nastává přec jen pravidelně na zcela určitý podnět. A tak i fysiologická theorie sluchu, předpokládajíc psychofysický parallelism a princip specifické energie smyslové, zabývá se jen vykládáním, jakým způsobem sluchový podnět určité jakosti vzbuzuje z pravidla činnost jen určitého smyslového ústroje („nervu") s určitou specifickou energií. Tak na př. sluchová theorie Helmholtzova klade smyslové ústroje se specifickou energií sluchovou do spánkového laloku kůry mozkové, na místo neznámé dost, aby bylo možno klásti tam, čeho třeba. Tu požaduje se tolik nervových buněk se specifickou energií, kolik je různých jakostí sluchových pocitů; kdykoli přijde v činnost *tato* buňka se svou specifickou energií, vstoupí do vědomí sluchový pocit *této* jakosti. Každá smyslová buňka kůry mozkové je spojena nervovým vláknem s čidlem na obvodu těla. Má se vysvětliti, že na určitý podnět, působící v čidlo, přivede se v činnost vždy jen určitá buňka v mozku. To vysvětlí se předpokladem, že každá z těch buněk je spojena nervovým vláknem s takovým nějakým elementem v čidle, který odpovídá jen na zcela určitý podnět, který jest *naladěn* na kmit určité periody. Potom nalezne každý kmit *ohlas* jen na určitém elementu sluchového čidla, a ve smyslovou činnost přivede se nervová buňka právě s tím elementem spojená.

Ke zbudování takovéto theorie sluchu není třeba žádné dokonalé znalosti struktury mozku, ba ani struktury sluchového čidla. Hned za všeobecným poznatkem, že slyšíme uchem, naskytne se při dalším dotazování se myšlenka, že slyšíme pomoci *resonance*. Dlouho do nového věku soudilo se s Aristotelem, že dutina labyrintová uzavírá vzduch „qui ... commotus ... ibique tintinans *velut echo* facit ... ac agitatio in auditorium nervum ac ipsam denique cerebri substantiam imprimatur, audiendique actio compleatur (Ingrassias, vyd. r. 1603).

Koncem 17. století počal fysikalní výzkum resonance poznáním, že určitý ton přivede ve spoluznění tu strunu nějakého nástroje, která je na týž ton naladěna. Ihned upotřebeno toho poznání k výkladu slyšení tonů; du Verney (1683) spatřoval ve spiralné kostěné desce, která je širší na začátku a užší na konci hlemýžďové dutiny, resonující těleso, naladěné na různé tony. Boerhaave vyslovil myšlenku analyse zvuku sluchem pomocí resonance zřetelně „... habeantur *chordae nerveae* omnium longitudinum possibilium inter punctum et semidiametrum laminae spiralis Cochleae, ubi ad basin hujus est latissima... Atque habemus adeo chordarum infinitum numerum, quae cum infinitis sonis possint in unisonum tremere: longissimae enim gravissimos sonos, deinde mediae mediocres, brevissimae peracutos expriment, et inter infinitum fere numerum, si una noluerit contremiscere, alia tamen repietur, quae harmonice tremat; quando vero ea tremit, contremiscunt omnes chordae, quae ejus sunt octavae, quintae, tertiae majores, tertiae minores, et ex his conjunctis tremoribus sit unus sonus harmonicus; is autem ad nervum acusticum fertur et quando nunc cum cerebro communicatur, jam auditus est."

V té době věřili ještě, že v labyrintové dutině jest uzavřen vzduch, neboť lymfu objevil a prokázal tu Cotugno teprve r. 1760; netušili, že kostěná dutina labyrintová chová vlastní „kožený" labyrint, jehož váčky a chodby ukázal Scarpa teprve r. 1789; nezdálo se jim o Cortiho ústroji, objeveném teprve r. 1851; a o struktuře mozku netroufali si vůbec ani domněnky. A přece máme tu theorii slyšení tonů i analyse zvuku sluchem pomocí resonance dopodrobna provedenou, námitky uvážené, podrobnosti promyšlené (o theorii sluchových strun nervových jednalo se mnoho v 18. století), tak že naše doba, domnívajíc se novostí, opakuje namnoze starožitnosti. K fysiologické theorii, myšlené anatomicky, stačily právě anatomické předpoklady a postulaty, nezávislé na anatomických vědomostech.

Mikroskopický výzkum struktury sluchového labyrintu, s nímž se započalo v první polovici 19. století, neobjasnil jeho fysiologického výkonu lépe, leda že dal hypothesi sluchových strun jinou formu, než jakou si představoval Boerhaave nebo ještě r. 1849 Carus. Nápadné útvary, které objevil ve sluchové papille ssavců Corti (1851), vedly jej samého i Köllikera k myšlence, že tyto útvary představují recipující ústroje, kterými se přenáší určitý kmit isolovaně na určité nervové vlákno sluchové.

Avšak pouhé jmenování resonance nestačí ke zbudování resonanční theorie sluchu; k tomu třeba stanoviti fysikalní pravidla resonance, přirovnati, jak dalece činnost sluchu souhlasí

s těmito pravidly, a konečně dlužno, dle struktury sluchového čidla, naznačiti, byť i jen problematicky resonující tělíska v tomto čidle. Tuto *soustavnou* práci provedl *Helmholtz*, i možno resonanční theorii sluchu zváti *Helmholtzovou*, ačkoli v jeho díle není naznačeno, že myšlenka sluchové resonance nezrodila se v mysli *Helmholtzově*.

Helmholtzova resonanční theorie sluchu je stručně takováto. Několik periodicky kmitajících těles sděluje současně vzduchu popudy, které se algebraicky sčítají ve výsledný pohyb vzdušné vlny. Vlna ta jest jednotná, neboť táž částice vzduchu nemůže současně konati dva různé pohyby; ale v jejím výsledném pohybu koëxistují jako složky všechny pohyby, příslušné jednotlivým popudům. Mathematicky možno jakýkoli periodický kmit sestrojiti, dle principu Fourierova, ze summy jednoduchých sinusových kmitů, jejichž periody jsou v poměrech celých čísel; a tak možno též každý kmit rozložiti. Obé možno provésti názorně geometrickou konstrukcí.

Výsledný periodický kmit působí sluchový dojem zvuku, na kterém se rozeznává, kromě výšky, zvláštní zbarvení zvukové; to záleží na partialných tonech ve zvuku obsažených, které sluch v něm též rozeznává. Sluch analysuje zvuk v tony; G. S. Ohm stanovil pravidlo této sluchové analyse zvuku tak, že každý vzdušný kmit, odpovídající složitému zvuku, rozkládá se v summu jednoduchých sinusových kmitů, z nichž každý se pociťuje jako ton.

Mathematicky možno rozložiti každý periodický kmit v summu jednoduchých sinusových kmitů; sluch rozkládá zvuk, odpovídající složitému periodickému kmitu, v tony, odpovídající jednoduchým sinusovým kmitům, dle pravidla Ohmova. Má tato shoda mezi mathematickou a sluchovou analysí složitého kmitu nějaký realný podklad?

Možno prokázati, že partialným tonům obsaženým ve zvuku odpovídají *mechanické účiny*, nezávislé na pocitech lidského sluchu i na mathematickém uvažování. Účiny ty jeví se jako *spoluznění*; složitý kmit rozkládá se v jednoduché složky též mechanicky spoluzněním. Tím nabývá rozkládání to zvláštního objektivně platného významu.

Helmholtz stanoví fysikalní podmínky mechanického spoluznění; analysuje zvuk fysikalně pomocí *resonatorů*; ukazuje, že právě tak analysuje zvuk též sluch, i bez pomoci fysikalních resonatorů; poukazuje ke správnosti pravidla Ohmova (proti odporu Seebeckovu): sluch pociťuje jednoduchý sinusový kmit jako ton a rozkládá každý periodický kmit, kterému odpovídá dojem zvuku, v určitou řadu jednoduchých sinusových kmitů.

Jak provádí sluch tuto analysi? Starší výklady přijímaly, že sluch rozeznává výšky tonové dle počtu kmitů a že rozeznává též *tvar* kmitů jako zvukové zbarvení. Avšak sluch nerozeznává různých tvarů vzdušných vln, jako zrak, který sice rozeznává různé tvary kmitů, přehlédne celkovou formu kmitu, ale není schopen rozeznati, z jakých složek se skládá. Rozkládání kmitu v jednoduché sinusové kmity, pociťované jako tony, je nápadnou schopností sluchu. Nenacházíme v přírodě nic obdobného, než jen v rozkládání kmitu *mechanickým spoluzněním*; tak analysuje se zvuk na př. strunami klavíru. Kdyby bylo možno spojiti každou strunu klavíru s nervovým vláknem, které by pociťovalo ton, kdykoli by se jeho struna rozkmitala, rozkládalo by toto zařízení zvuky v tony právě tak, jako sluch činí skutečně.

Novější objevy mikroskopiků, praví *Helmholtz*, připouštějí *myšlenku*, že v uchu jsou *skutečně* taková zařízení, jaká jsme si právě myslili. Nachází se totiž konec každého vlákna sluchového nervu ve spojení s malými elastickými částicemi, o kterých musíme za to míti, že se přivádějí zvukovými vlnami ve spoluznění. Helmholtz tvrdí tu positivně, že myšlence odpovídá skutečnost, a opakuje ještě jednou: Konečné větve sluchového nervu *jsou* spojeny s velmi malými elastickými přívěsky, které se *zdají* býti k tomu určeny, aby nerv svými kmity dráždily. (Tonempf. IV. A. s. 211, 226.) Těmito elastickými přívěsky byly v původním ponětí Helmholtzově Cortiho pilíře; později mluvil Helmholtz o Cortiho organu vůbec jakožto „ústroji způsobilém přejímati kmity základné blány, o čemž celé jeho uspořádání neponechává žádné pochybnosti, ačkoli se nedá přesně stanoviti způsob toho kmitání“.

Avšak — míní Helmholtz — Cortiho pilíře jsou opleteny množstvím rozmanitých vláken a buněk, tak jemných a choulostivých to útvarů, že o jejich souvislosti a významu jsou posud mnohé pochybnosti, ale přes to tvrdí hned na to: podstatný výsledek našeho popisu ucha jest, že nacházíme všude konečky sluchového nervu spojeny se zvláštními jednak pružnými, jednak tuhými pomocnými ústroji, které mohou býti vnějšími kmity uvedeny ve spolukmitání, a tak asi nervovou massou otřásají a ji dráždí (s. 232). Jsou to asi různé části ucha, které se spolu rozkmitávají vlivem kmitů různé rychlosti a pociťují je jako

tony různé výšky — ale které části to jsou, nedá se s určitostí prokázati. U člověka a ssavců můžeme v té příčině míti pouhé domněnky; dle celé své konstrukce jeví se přepážka hlemýždě, nesoucí Cortiho organ, nejzpůsobilejší konati samostatné kmity. Mají-li však tyto útvary sloužiti rozeznávání tonů různé výšky a mají-li tony různé výšky ze všech krajin stupnice stejně dobře býti vnímány, je nutno, aby elastické útvary v hlemýždi, spojené s různými nervovými vlákny, byly různě naladěny, tak aby jejich vlastní tony tvořily pravidelnou řadu po celé délce hudební škály (s. 238).

Helmholtz spatřoval původně tyto útvary v Cortiho pilířích; než Hasse namítnul, že tyto útvary scházejí ve sluchové papille ptáků, kteří přece rozeznávají tony dle výšky, a že tudíž Cortiho pilíře slyšení tonů nepodmiňují. Ačkoli tato námitka nezasahuje plně Helmholtzovu theorii, ve které se jedná hlavně o analysující schopnost sluchu, o slyšení akkordů, kteráž schopnost u ptáků není nijak prokázána, ustoupil přece Helmholtz od myšlenky na Cortiho pilíře, když byl Hensen ukázal, že útvary ty nemají tak různých velikostí, aby mohly sloužiti jako resonatory na různé tony naladěné, jak theorie požaduje. Hensen ukázal naproti tomu, že požadované rozdíly v délce ukazují vlákna základné blány hlemýždě, natažená napříč mezi okrajem kostěné desky spiralní a protější stěnou dutiny hlemýžďové; vlákna ta jsou směrem k vrcholu hlemýždě postupně delší, v té míře, jak se základná blána stává širší, a sice v poměru dvanácteronásobném (od 0·04 *mm* k 0·49 *mm*). Helmholtz vyvinul mathematickou theorii kmitání takovéto blány, jejíž napnutí je napříč daleko větší, než nadél; dle theorie té chová se taková blána tak, jako by její příčná vlákna byla systemem napnutých strun, jejichž spojení v blánu slouží jen k tomu, aby poskytovalo oporu tlaku lymfy na tyto struny. Kmity takové blány budou potom toho způsobu, jako by každá z jejích strun byla nezávislá na ostatních; určitý ton uvede ve spolukmitání ono místo blány, kde je struna na stejný kmit naladěná. Vysokým tonům odpovídaly by dle toho struny základné blány poblíže okrouhlého otvoru k dutině bubínkové, hlubokým struny poblíže vrcholu hlemýždě. Že tak krátké struny přece mohou odpovídati tak hlubokým tonům, vysvětlilo by se tím, že jsou silně zatíženy, zvláště lymfou obou chodeb hlemýždě. Cortiho pilíře mají vedlejší úkol přenášeti kmity blány na výše položené smyslové buňky a nervy sluchové papilly. V tomto změněném smyslu mluví Helmholtz dále o kmitech, naladění, vlastním tonu Cortiho oblouků.

Výklad sluchu dle theorie Helmholtzovy je tedy takovýto. Přivádí-li se do ucha jednoduchý ton, rozkmitají se silně ony oblouky Cortiho, které jsou s ním úplně nebo přibližně v souhlase, všechny ostatní málo nebo nic. Pociťuje se tedy každý ton určité výšky jen určitým nervovým vláknem, a tony různé výšky pociťují se různými nervovými vlákny. Přivádí-li se do ucha složitý zvuk neb akkord, dráždí se ony elastické útvary, které odpovídají jednotlivým tonům ve zvuku obsaženým, i mohou býti též při náležité pozornosti jednotlivě ve zvuku rozeznávány. Tím vykládá se též, proč sluch rozkládá vzdušné pohyby právě ve kmity sinusové. Každá jednotlivá částice vzduchu může v každém okamžiku konati jen jeden pohyb. Že takový pohyb rozkládáme v mathematické theorii v sinusové kmity, mohlo by býti jen libovolnou fikcí ku pohodlí theorie, bez realného významu; toho nabývá se teprve úvahou mechanického spolukmitání. A nyní uvádí se naší hypothesi též slyšení na spoluznění.

Fysiologicky je významno, dokládá Helmholtz, že v této theorii uvádí se pociťování tonů různé výšky na rozdílnost nervových vláken, která byla podrážděna. Takový krok učinil v širším oboru J. Müller učením o specifické energii smyslových nervů; on *dokázal*, že rozdíly v pocitech různých smyslů nejsou určeny podněty, které pocit vzbuzují, nýbrž různými nervovými ústroji, které podněty vnímají. Tak uvádějí se (v Young-Helmholtzově theorii) rozdíly mezi světelnými pocity na rozdíly mezi pociťujícími nervy. Totéž činí tato theorie sluchu: rozdíly v jakosti tonů uvádějí se na rozdíly mezi pociťujícími nervy. Nervy, praví Helmholtz, přirovnávají se ne nepřípadně k telegrafním drátům. Takový drát vodí vždy týž způsob elektrického proudu, bez jakostných rozdílů, kromě rozdílů v intensitě a směru. A přec je možno, dle toho, k jakým přístrojům drát vede, podávati tak telegrafické depeše, zvonky zvoniti, podkopy podpalovati, vodu rozkládati, železo magnetisovati, světlo vzbuzovati atd. Podobně nervy: stav podráždění, který se v nich vzbuzuje a dále vede, je ve všech stejný; ale vede se k různým místům mozku, ke svalům, žlázám, a dle toho řídí se jeho účin.

Ocenění Helmholtzovy resonanční theorie záleží na tom, přiznává-li se jí význam *realný*, že totiž vystihuje skutečné, objektivné dění ve sluchovém ústroji, anebo, přijímá-li se jen

jako *idealné* zobrazení činnosti sluchové dle známé fysikalní analogie. Helmholtz sám snažil se dáti své theorii význam realný; v uchu jsou skutečně taková zařízení, jaká jsme si vymyslili, praví; konečné větve sluchového nervu *jsou spojeny* s pružnými částicemi, které se chovají jako resonatory. Avšak Helmholtz cítí slabost této posice, uznávaje, že o souvislosti útvarů Cortiho ústroje jsou mnohé pochybnosti, a že jsou tu možny jen domněnky. Přes toto kolísání vrací se přece stále ke tvrzení, že myšlence odpovídá skutečnost. Analyse zvuku sluchem nabývá pro něho objektivné platnosti faktem mechanického spoluznění. A tak přijímá se též Helmholtzova theorie jako vystižení objektivného, realného dění v ústroji sluchovém.

Snaha, prokázati resonanční theorii sluchu jakožto *realnou*, jest lichá a marná. Otázka, jsou-li v čidle sluchovém skutečně resonatory spojené s nervovými vlákny, nerozhoduje tu tak, jako základné these celé theorie, které jsou zcela nerealné. První je princip specifické energie smyslové: že jakost pocitu jest určena specifickou energií smyslového ústroje, nezávisle na jakosti podnětu. Helmholtz klade tyto ústroje se specifickou energií smyslovou do nervových buněk v kůře mozkové: neznáme ani těchto buněk ani jejich specifické energie. Aby se vyhovělo faktické skutečnosti, že určitý pocit odpovídá vždy přec jen určitému podnětu, klade se druhá these: Každá mozková buňka se specifickou energií smyslovou je spojena isolovaně nervovým vláknem s určitým resonatorem v čidle sluchovém. Všechna nervová vlákna jsou funkcionalně stejná, vedou jednostejný děj: účin jejich záleží na konečném ústroji se specifickou energií, ke kterému vedou. Tak vzniká zcela povrchní a nerealný telegrafový koncept smyslové činnosti. Není prokázáno, že nervová vlákna jsou funkcionalně jednostejná a že vedou jednostejný děj, ať jest podnět jakýkoliv — jako telegrafické dráty; důvod, že neznáme v nervových vláknech *rozmanitých* dějů, který Helmholtz uvádí, je lichý: neznáme způsobu nervového děje vůbec, i nemůžeme tudíž tvrditi, že je to děj jen jednoho způsobu. Mají-li různé způsoby činnosti *nervové buňky* se specifickou energií, mohou je míti též nervová vlákna k nim vedoucí, neboť geneticky jsou nervová vlákna výčnělky nervových buněk. Telegrafový koncept nervového ústroje podává sice velmi primitivnou analogii k činnosti ústroje toho, ale nemůže se bráti realně, odporuje tomu každá histologická theorie struktury ústroje nervového. V nynější době jsou v popředí theorie fibrillová

(Apathy-Bethe) a theorie neuronová. Fibrillová theorie je v nejpříkřejším odporu s telegrafovým konceptem, neuronová theorie jej nepodporuje. Dle neuronové theorie rozvětvuje se vlákno sluchového nervu, pocházející z nervové buňky v ganglion spirale, volným rozvětvením mezi epitheliemi sluchové papilly, tak že se jeho větévky stýkají s mnohými i od sebe vzdálenými smyslovými buňkami; druhý nervový výčnělek téže buňky v ganglion spirale zarůstá do prodloužené míchy, kde končí zas volným rozvětvením, stýkaje se s mnohými nervovými buňkami v jádru sluchového nervu: odtud vedou *nové* nervové dráhy, z nichž snad *některé* táhnou až do kůry spánkového laloku pláště mozkového, a zde rozvětvují se končíce volně. To vše neodpovídá konceptu telegrafie, leda telegrafie bez drátu. Obě zmíněné these, princip specifické energie smyslové a telegrafový koncept smyslové činnosti, odvalily problem činnosti smyslové s pole fysiologie na pole anatomie: rozluštění problemu je liché, anatomie sama přivádí ad absurdum koncepce fysiologisujících anatomů.

Resonanční theorie sluchu, má-li odpovídati *skutečnosti*, musí vysvětliti všechny zjevy sluchové činnosti: nevyhoví-li v jednom, padá ve všem; to jest neodbytný důsledek toho, béře-li se theorie ta *realně*. A s této strany útočí se v přítomné době na resonanční theorii Helmholtzovu. L. Hermann (Pflgrs Arch. B. 49; 56, 1894) namítnul, že nevysvětluje slyšení *kombinačních tonů*. Resonator může býti uveden ve spoluznění jen skutečným, objektivným kmitem; ale kombinačním tonům (Tartiniho) neodpovídá objektivný kmit vzdušný. Helmholtz soudil, že kmity, kterým odpovídají kombinační tony, vznikají v uchu samém, a to v bubínkové bláně a v kloubu mezi kladívkem a kovadlinkou; odvodil též mathematickou theorii těchto kmitů. Než dle Hermanna spočívá vše to na pochybených předpokladech, které neodpovídají skutečnosti. Resonanční theorie nevysvětlí kombinačních tonů. Velkou obtíží resonanční theorie, praví Hermann, jsou též mikroskopické rozměry domnělých resonatorů sluchových: jak možno *mysliti*, že struna sotva 0·5 *mm* dlouhá má vlastní ton o 40 kmitech? Hlavní cena Helmholtzovy theorie neleží u výkladu slyšení tonů — tu nebylo by ani třeba fysikalního článku mezi kmitem a podrážděním nervu — nýbrž u výkladu analyse zvuku sluchem. Než okolnost, že nějaká hypothesa velmi mnoho zmůže, nestačí k jejímu zachování, jakmile nevyloží i jen jednoho fakta svého oboru. Nezbývá, než nechati Helmholtzovu theorii padnouti, přes její

eleganci; nezbývá než doznati, že nedovedeme dosud fysikalně vysvětliti, že určitý ton dráždí jen jedno nervové vlákno. (Princip specifické energie jest ovšem Hermannovi nedotknutelným.)

Hermann přijal později přece zase resonanční theorii, ale se zvláštní obměnou. Ani Cortiho oblouky ani struny základné blány nevyhovují svými mikroskopickými rozměry podmínkám fysikalní resonance. Avšak při sluchu netřeba mysliti na mechanickou, nýbrž na — fysiologickou pružnost; nejedná se o fysikalní, nýbrž o fysiologické resonatory; nervové děje ukazují, dle Heringovy theorie, kmitání kolem rovnovážné polohy (assimilace — dissimilace), připomínají kmity pružných těles. Jak vidno, opouští Hermann theorii Helmholtzovu docela: nahrazení fysikalních resonatorů fysiologickými znamená doznání nemožnosti theorie Helmholtzovy. Heringova *fysiologická* theorie nervové činnosti vytlačila už theorii Helmholtzovu z oboru světelných pocitů; její převedení v obor sluchu značilo by úplnou porážku theorie Helmholtzovy.

Fysiologickými resonatory mohly by býti, dle Hermanna, smyslové buňky sluchové papilly, z nichž každá by se přizpůsobila ve své dráždivosti na kmit určité periody, tak že by reagovala na tento kmit více než na jiné, měla by jaksi elektivnou dráždivost. *Wundt* (Physiol. Psychol. 1902, 132 sq.) myslí cosi podobného, s tím rozdílem arci, že zamítá princip specifické energie smyslové. Buď jsou specifické energie vláken smyslového nervu dány napřed a resonanční ústroj je k nim přizpůsoben; anebo nabývají nervová vlákna specifické energie přizpůsobením se k určitému podnětu, který na ně pravidelně působí. Wundt přijímá tuto druhou možnost; vlákna sluchového nervu jsou sama přizpůsobena ke kmitům určité periody; vlákna ta prostírají se v kostěné ose a desce hlemýždě, i dráždí se přímo, kromě skrze čidlo a jeho resonatory, též kmity přiváděnými kostí, tak že kmit určité periody dráždí nejvíce vlákno k němu přizpůsobené. Kombinační tony mohly by se tak vysvětliti výslednými kmity kosti. Mínění, že sluchový nerv dráždí se přímo kmity zvukovými, opírá se o udání Ewaldovo, že holubi po exstirpaci labyrintu přece ještě reagují na zvuk; než udání to jest pochybné a vyvrací se; dle obecné zkušenosti nevznikají smyslové pocity než jen působením příslušného podnětu na čidlo smyslové.

Kombinační tony (Tartiniho) neodpovídají objektivným vzdušným kmitům, a proto nelze jich vyložiti resonanční hypothesi, poněvadž resonatory odpovídají jen objektivným kmitům. Helmholtzův pokus, kterým chtěl prokázati, že kombinační tony odpovídají výsledným kmitům nesouměrně elastické bubínkové blány u sluchových kůstek, uznává se za nezdařený, ježto předpoklady, z nichž Helmholtz takové kmity bubínkové blány mathematicky odvozoval, neodpovídají skutečnosti; nezdar pokusu toho jest ostatně zřejmě prokázán tím, že kombinační tony slyší i člověk s porušeným bubínkovým ústrojem. Schäfer pokusil se právě o průkaz možnosti, že takové výsledné kmity koná sama základná blána hlemýždě; než ani tímto posunutím kmitů, kterým by odpovídaly kombinační tony, do temnot sluchového labyrintu samého, neosvětlí se jejich vznik.

Překážka, se kterou se potkává resonanční theorie v kombinačních tonech, navádí v přítomné době některé k úplnému zavržení této theorie a k vymýšlení nových. Pohříchu tyto nové theorie stavějí na týchž základných předpokladech, na principu specifické energie i na telegrafovém konceptu, tak že jejich novota obmezuje se na vymýšlení možností mechanického přenášení kmitů zvukových na vlákna sluchového nervu, ale s vyloučením resonance. M. Mayer zavrhuje resonanční theorii úplně, protože nevyloží kombinačních tonů; vymýšlí nový geometrický způsob rozkládání složitého kmitu, který by vysvětlil vznik těchto tonů; ukazuje, že takové rozkládání je též možné mechanicky ve sluchovém ústroji, a sice vydýmáním základné blány tlakem třmínku. E. ter Kuile poukazuje k tomu, že vnímajícími ústroji sluchovými jsou zajisté epithelové buňky opatřené vlásky; pohne-li se Cortiho oblouk pod těmito buňkami, trou se jejich vlásky o přiléhající k nim krycí blánu Cortiho; sluchové dráždění podobá se hmatovému. Pohyb Cortiho oblouků způsobuje se vydmutím základné blány, které nastává každým vtlačením desky třmínku. V labyrintu přestává všechen zvuk a všechna resonance; tu jest jen hydraulický pohyb lymfy. Ewald rozvádí myšlenku, kterou již Waller proslovil, že základná blána rozkmitá se při každém tonu jako celek, opětujíc kmity blány bubínkové. Ewaldovi jeví se resonanční theorie nedostatečnou, ježto nevysvětluje tonů kombinačních, nevysvětluje rozdílu mezi tonem a šelestem, nevysvětluje konsonance a dissonance, která nemůže se zakládati na záznějích, ježto nehudební sluch tyto rozeznává, nikoli však dissonanci; nevysvětluje ani přirozeného plynulého postavení tonů dle výšky v jedné řadě. Proto má se Ewald za oprávněna vymysliti novou theorii. Každým tonem přivádí se základná blána hlemýždě ve stojaté vlnění; každému tonu odpovídá

stojatá vlna určité délky, určitý zvukový obraz (Schallbild) na základné bláně. Dle tohoto obrazu dráždí se různá vlákna sluchového nervu, obdobně, jako se dráždí zrakový nerv obrazem na sítnici. Pro podrobnosti dlužno odkázati k původním pojednáním (Zeitschrift f. Psychol. u. Physiol. der Sinnesorg. B. 11, 16. Pflügers Archiv B. 76, 78, 79, 81).

Vadou těchto nových sluchových theorií jest, že jsou velmi libovolné a málo srozumitelné, a vedle toho též velmi jednostranné. Hledají výklad kombinačních tonů a jiných podřízených zjevů sluchových, kterých resonanční theorie nevyloží; za to však zanedbávají docela analysující schopnosti sluchu, výkonu to pro sluch nejvýznačnějšího, který resonanční theorie vykládá tak znamenitě. Zasluhuje-li resonanční theorie zavržení, poněvadž nevyloží zjevů podřízených, co zasluhují theorie, které nevyloží zjevu nejvíce vynikajícího?

Námitky proti resonanční theorii odpadají, jakmile theorii té nepřikládá se význam realný, jakožto výrazu skutečného dění v ústroji sluchovém, nýbrž jen význam idealný, jakožto zobrazení výkonu sluchového pomocí známých fysikalních analogií. Odpadne první nejzávažnější námitka, že domnělé resonatory v uchu mají rozměry mikroskopické, a že tudíž nevyhovují mechanickým podmínkám resonance. Odpadne požadavek, aby theorie ta vyložila všechna fakta svého oboru, a aby byla odstraněna, nevyloží-li i jen jediného nejmenšího. Theorie, která by se ve všem a úplně kryla s fakty, byla by s nimi totožna, byla by výrazem realné skutečnosti, a neslušel by jí název — theorie. Neznáme dosud fysikalně-chemických dějů ve sluchovém ústroji při výkonu slyšení; právě proto sestrojujeme si o nich hypothese a theorie, dle analogie dějů z fysiky a chemie nám známých. Ke skutečnému poznání oněch fysiologických dějů bylo by asi třeba ještě jiných fysikalních a chemických vědomostí, než jaké nyní máme.

Tabulky

obsahující absolutní výšky tonů

1. dle ladění přirozeného, normalního $\left(a^1 = 435 \frac{1}{sec}\right)$,

2. dle ladění přirozeného, fysikalního $\left(c^1 = 256 \frac{1}{sec}\right)$,

3. dle ladění temperovaného, normalního $\left(a^1 = 435 \frac{1}{sec}\right)$,

4. dle ladění temperovaného, fysikalního $\left(c^1 = 256 \frac{1}{sec}\right)$.

Normalní ladění přirozené.

A = Aristoxenos D = Delezenne	*n*	sub-kontra	kontra	velké	malé	1 čárkov.
c	1	16·31	32·63	65·25	130·5	261
cis A	25/24	16·99	33·98	67·97	135·94	271·88
cis D	135/128	17·21	34·41	68·82	137·64	275·27
des D	16/15	17·4	34·8	69·6	139·2	278·4
des A	27/25	17·62	35·24	70·47	140·94	281·88
d	9/8	18·35	36·70	73·41	146·81	293·63
dis	75/64	19·12	38·23	76·46	152·93	305·86
es	6/5	19·58	39·15	78·3	156·6	313·2
e	5/4	20·39	40·78	81·56	163·13	326·25
f	4/3	21·75	43·5	87	174	348
fis A	25/18	22·66	45·31	90·63	181·25	362·5
fis D	45/32	22·94	45·88	91·76	183·52	367·03
ges D	64/45	23·2	46·4	92·8	185·6	371·2
ges A	36/25	23·49	46·98	93·96	187·92	375·84
g	3/2	24·47	48·94	97·88	195·75	391·5
gis	25/16	25·49	50·98	101·95	203·91	407·81
as	8/5	26·1	52·2	104·4	208·8	417·6
a	5/3	27·19	54·38	108·75	217·5	435
ais A	125/72	28·32	56·64	113·28	226·56	453·13
i	7/4	28·55	57·09	114·19	228·38	456·75
ais D	225/128	28·67	57·35	114·70	229·39	458·79
hes D	16/9	29	58	116	232	464
hes A	9/5	29·36	58·73	117·45	234·90	469·8
h	15/8	30·59	61·17	122·34	244·69	489·38
c	2	32·63	65·25	130·5	261	522

2 čárkov.	3 čárkov.	4 čárkov.	5 čárkov.	6 čárkov.	A = Aristoxenos D = Delezenne
522	1044	2088	4176	8352	*c*
543·75	1087·5	2175	4350	8700	*cis* A
550·55	1101·09	2202·19	4404·38	8808·75	*cis* D
556·8	1113·6	2227·2	4454·4	8908·8	*des* D
563·76	1127·52	2255·04	4510·08	9020·16	*des* A
587·25	1174·5	2349	4698	9396	*d*
611·72	1223·44	2446·88	4893·75	9787·5	*dis*
626·4	1252·8	2505·6	5011·2	10022·4	*es*
652·5	1305	2610	5220	10440	*e*
696	1392	2784	5568	11136	*f*
725	1450	2900	5800	11600	*fis* A
734·06	1468·13	2936·25	5872·5	11745	*fis* D
742·4	1484·8	2969·6	5939·2	11878·4	*ges* D
751·68	1503·36	3006·72	6013·44	12026·88	*ges* A
783	1566	3132	6264	12528	*g*
815·63	1631·25	3262·5	6525	13050	*gis*
835·2	1670·4	3340·8	6681·6	13363·2	*as*
870	1740	3480	6960	13920	*a*
906·25	1812·5	3625	7250	14500	*ais* A
913·5	1827	3654	7308	14616	*i*
917·58	1835·16	3670·31	7340·63	14681·25	*ais* D
928	1856	3712	7424	14848	*hes* D
939·6	1879·2	3758·4	7516·8	15033·6	*hes* A
978·75	1957·5	3915	7830	15660	*h*
1044	2088	4176	8352	16704	*c*

Fysikalní ladění přirozené.

A = Aristoxenos D = Delezenne	n	sub-kontra	kontra	velké	malé	1 čárkov.
c	1	16	32	64	128	256
cis A	$\frac{25}{24}$	16·67	33·33	66·67	133·33	266·67
cis D	$\frac{135}{128}$	16·88	33·75	67·5	135	270
des D	$\frac{16}{15}$	17·07	34·13	68·27	136·53	273·07
des A	$\frac{27}{25}$	17·28	34·56	69·12	138·24	276·48
d	$\frac{9}{8}$	18	36	72	144	288
dis	$\frac{75}{64}$	18·75	37·50	75	150	300
es	$\frac{6}{5}$	19·2	38·4	76·8	153·6	307·2
e	$\frac{5}{4}$	20	40	80	160	320
f	$\frac{4}{3}$	21·33	42·67	85·33	170·67	341·33
fis A	$\frac{25}{18}$	22·22	44·44	88·89	177·78	355·56
fis D	$\frac{45}{32}$	22·50	45	90	180	360
ges D	$\frac{64}{45}$	22·76	45·51	91·02	182·04	364·09
ges A	$\frac{36}{25}$	23·04	46·08	92·16	184·32	368·64
g	$\frac{3}{2}$	24	48	96	192	384
gis	$\frac{25}{16}$	25	50	100	200	400
as	$\frac{8}{5}$	25·6	51·2	102·4	204·8	409·6
a	$\frac{5}{3}$	26·67	53·33	106·67	213·33	426·67
ais A	$\frac{125}{72}$	27·78	55·56	111·11	222·22	444·44
i	$\frac{7}{4}$	28	56	112	224	448
ais D	$\frac{225}{128}$	28·13	56·25	112·5	225	450
hes D	$\frac{16}{9}$	28·44	56·89	113·78	227·56	455·11
hes A	$\frac{9}{5}$	28·8	57·6	115·2	230·4	460·8
h	$\frac{15}{8}$	30	60	120	240	480
c	2	32	64	128	256	512

2 čárkov.	3 čárkov.	4 čárkov.	5 čárkov.	6 čárkov.	A = Aristoxenos D = Delezenne
512	1024	2048	4096	8192	*c*
533·33	1066·67	2133·33	4266·67	8533·33	*cis* A
540	1080	2160	4320	8640	*cis* D
546·13	1092·27	2184·53	4369·07	8738·13	*des* D
552·96	1105·92	2211·84	4423·68	8847·36	*des* A
576	1152	2304	4608	9216	*d*
600	1200	2400	4800	9600	*dis*
614·4	1228·8	2457·6	4915·2	9830·4	*es*
640	1280	2560	5120	10240	*e*
682·67	1365·33	2730·67	5461·33	10922·67	*f*
711·11	1422·22	2844·44	5688·89	11377·78	*fis* A
720	1440	2880	5760	11520	*fis* D
728·18	1456·35	2912·7	5825·4	11650·8	*ges* D
737·28	1474·56	2949·12	5898·24	11796·48	*ges* A
768	1536	3072	6144	12288	*g*
800	1600	3200	6400	12800	*gis*
819·2	1638·4	3276·8	6553·6	13107·2	*as*
853·33	1706·67	3413·33	6826·67	13653·33	*a*
888·89	1777·78	3555·56	7111·11	14222·22	*ais* A
896	1792	3584	7168	14336	*i*
900	1800	3600	7200	14400	*ais* D
910·22	1820·44	3640·89	7281·78	14563·56	*hes* D
921·6	1843·2	3686·4	7372·8	14745·6	*hes* A
960	1920	3840	7680	15360	*h*
1024	2048	4096	8192	16384	*c*

Normalní ladění, temperované.

	sub-kontra	kontra	velké	malé	1 čárk.	2 čárk.	3 čárk.	4 čárk.
c	16·17	32·33	64·66	129·33	258·65	517·31	1034·61	2069·22
cis-des	17·13	34·25	68·51	137·02	274·03	548·07	1096·13	2192·26
d	18·15	36·29	72·58	145·16	290·33	580·66	1161·31	2322·62
dis-es	19·22	38·45	76·90	153·80	307·59	615·18	1230·37	2460·73
e	20·37	40·74	81·47	162·94	325·88	651·76	1303·53	2607·05
f	21·58	43·16	86·31	172·63	345·26	690·52	1381·04	2762·08
fis-ges	22·86	45·72	91·45	182·89	365·79	731·58	1463·16	2926·32
g	24·22	48·44	96·89	193·77	387·54	775·08	1550·16	3100·33
gis-as	25·66	51·32	102·65	205·29	410·59	821·17	1642·34	3284·68
a	27·19	54·38	108·75	217·50	435·00	870·00	1740·00	3480·00
ais-hes	28·80	57·61	115·22	230·43	460·87	921·73	1843·47	3686·93
h	30·52	61·03	122·07	244·14	488·27	976·54	1953·08	3906·17
c	32·33	64·66	129·33	258·65	517·31	1034·61	2069·22	4138·44

Fysikalní ladění, temperované.

	sub-kontra	kontra	velké	malé	1 čárk.	2 čárk.	3 čárk.	4 čárk.
c	16·00	32·00	64·00	128·00	256·00	512·00	1024·00	2048·00
cis-des	16·95	33·90	67·81	135·61	271·22	542·45	1084·89	2169·78
d	17·96	35·92	71·84	143·68	287·35	574·70	1149·40	2298·80
dis-es	19·03	38·05	76·11	152·22	304·44	608·87	1217·75	2435·50
e	20·16	40·32	80·63	161·27	322·54	645·08	1290·16	2580·32
f	21·36	42·71	85·43	170·86	341·72	683·44	1366·88	2733·75
fis-ges	22·63	45·25	90·51	181·02	362·04	724·08	1448·15	2896·31
g	23·97	47·95	95·89	191·78	383·57	767·13	1534·27	3068·53
gis-as	25·40	50·80	101·59	203·19	406·37	812·75	1625·50	3251·00
a	26·91	53·82	107·63	215·27	430·54	861·08	1722·16	3444·31
ais-hes	28·51	57·02	114·04	228·07	456·14	912·28	1824·56	3649·12
h	30·20	60·41	120·82	241·63	483·26	966·53	1933·05	3866·11
c	32·00	64·00	128·00	256·00	512·00	1024·00	2048·00	4096·00

Abecedný seznam.

Opravy tiskových chyb v Akustice.

(První číslo udává stránku knihy, druhé řádek, na to následuje čtení chybné a naposled je uvedeno čtení správné)

9.	6. zdola, $C_1 - C_2$	správně:	$i(C_1 - C_2)$
13.	4 shora, půl kommy	„	půl kommatu
14.	15. zdola, kmitového pohybu,	„	kmitavého pohybu
60.	1. zdola, kaloidoskop	„	kaleidoskop.
83.	15. shora, periodě kmitavé	„	periodě kmitové
131.	17. shora, v obrazci 64.	„	v obrazci 65.
221.	3. shora, Δt	„	$\Delta\tau$
224.	11. shora, $t_1 = 0$	„	$t_2 = 0$
233.	15. zdola, Dionisiovo,	„	Dionysiovo
263.	1. zdola, $\frac{v}{L} + \frac{v}{L}$	„	$\frac{L}{v} + \frac{L}{v}$
279.	3. shora, pozojujeme	„	pozorujeme
283.	2. zdola, o jednu	„	o jedno
291.	obr. 92, 0·224, 0·221	„	0·222, 0·223
294.	19. shora, 24·999	„	24·995
295.	12. shora, 24·990	„	24·995
361.	19. shora, § 126	„	§ 127
386.	24. shora, N^{k+1}, R^k	„	N^k, R^{k+1}

Opravy tiskových chyb v Mechanice.

(První číslo udává stránku knihy, druhé řádek na to následuje čtení chybné a naposled je uvedeno čtení správné.)

65. 17. zdola, $57^{\circ}\ 11{\cdot}7''$	správně:	$57'\ 11{\cdot}7''$
108. 7. zdola, 19002·497	„	19662·497
110. 9. zdola, $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$	„	$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3}$
206. 13. shora, padesátigrammovým	„	dvacetipětigrammovým
206. 14. shora, dvacetipětigrammovým	„	padesátigrammovým
207. 15. shora, $\frac{P}{r_1} = \frac{Q}{r_2} = \frac{P}{c}$	„	$\frac{P}{r_2} = \frac{Q}{r_1} = \frac{R}{c}$
258. 18. zdola, AB'	„	$A'B'$
270. 6. zdola, $G + \gamma$	„	$G - \gamma$
271. 4. shora, S	„	S_{r}
293. 3. shora, nad	„	pod
311. 5. zdola, lehounké	„	lehounká
324. 11. shora, $\frac{1}{2} c^2 \sin^2 \alpha^2$	„	$\frac{1}{2} c^2 \sin^2 \alpha$
325. obr. 149., η (při P)	„	2η
360. 9. zdola, $a = 149\,501$	„	$a = 149{\cdot}501$
361. 1. zdola, $M + m$	„	$M + m'$
399. 2. zdola, počet dílu	„	počet dílů
408. 12. zdola, $1 - \sin \alpha$	„	$1 - \cos \alpha$
424. 13. zdola, $-0{\cdot}5072$	„	$+0{\cdot}5072$
424. 12. zdola, $-0{\cdot}0051179$	„	$+0{\cdot}0051179$
435. 3. shora, $\frac{a}{b}$	„	$\frac{b}{a}$
14. shora, $\frac{a}{b}$	„	$\frac{b}{a}$
3. zdola, A	„	$-A$
445. 2. zdola, $H : H$	„	$H : H$
485. 22. shora, složení	„	o složení
490. obr. 241., čára z má jíti jen k začátku nádoby		
491. 12. shora, čti: $(h + z) sg - \frac{1}{2} s \left(\frac{q}{q'}\right)^2 v^2 = sg\left(z - \frac{q^2}{q'^2} l\right) + sgh\left(1 - \frac{q^2}{q'^2}\right)$		
512. 16. zdola, úhlem β	správně:	úhlem ε
523. 9. zdola, 0·013332	„	1·013332
552. 20. zdola, lehčím	„	lehčí
575. 10. zdola, $\frac{V}{R + V}$	„	$\frac{R}{R + V}$
575. 6. zdola, $\frac{V}{R + V}$	„	$\frac{R}{R + V}$
576. 16. shora, $a\delta_{\mathrm{n}} + b = \delta_{\mathrm{n}}$	„	$a\delta_{\mathrm{n}-1} + b = \delta_{\mathrm{n}}$
592. 19. shora, $-\mu \frac{p_1}{E}$	„	$-\mu \frac{p_2}{E}$
623. 12. zdola, kdybychom prořízly	„	kdybychom prořízli
634. 14. shora, $r - y$	„	$R - y$
640 6. shora, 0·016	„	6·016
640. 3. zdola, a $l + \Delta l$	„	l a $l + \Delta l$

Název: tření vl*a*čné, ač všeobecně obvyklý, budiž nahrazen jazykově správnějším „tření vl*e*čné".