Pád po rovině.

Poznámky pro žáky škol středních.

Napsal

Dr. Vinc. Strouhal.

I. Studium pádu volného a pádu po (šikmé) rovině náleží k úkolům mechanickým, kteréž zajímajíce svou jednoduchostí a důležitostí, mají též významné pozadí historické.

Jak známo, platí tu rovnice

$$
\begin{array}{rlrl}
a = g & (1) & a' = g \sin \alpha & (1') \\
v = gt & (2) & v' = g \sin \alpha \,.\, t' & (2') \\
s = \frac{1}{2} gt^2 & (3) & s' = \frac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t'^2 & (3') \\
\hline
\frac{1}{2} v^2 = gs & (4) & \frac{1}{2} v'^2 = g \sin \alpha \,.\, s' & (4')
\end{array}
$$

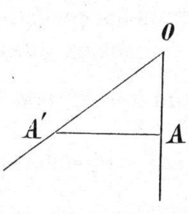
Srovnávajíce rovnice sobě odpovídající, docházíme známých těch dvou zákonů, jak je poznal již G. Galilei. Jest to:

a) *Zákon o rychlostech.*

Rovnice (4) a (4′) dávají totiž

$$v = v' \quad \text{pro} \quad s = s' \sin \alpha,$$

t. j. v bodech A, A′ (obr. 1.) ležících v rovině nákresné na přímce vodorovné jsou rychlosti pádu stejny.



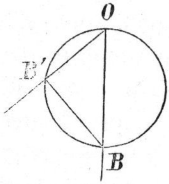
Obr. 1

b) *Zákon o tětivách.*

Rovnice (3) a (3′) dávají podobně

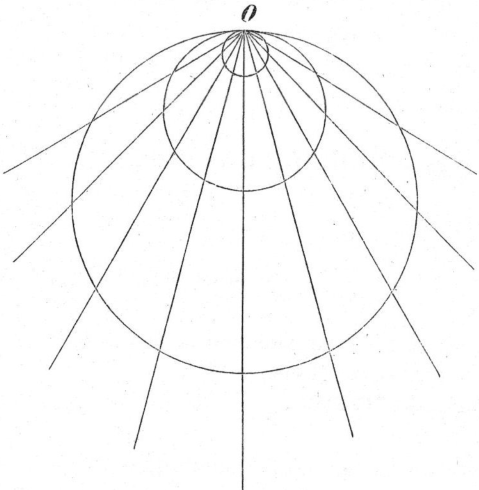
$$t = t' \quad \text{pro} \quad s \sin \alpha = s' ,$$

což vede k větě, že tětiva OB′ (obr. 2.) jest isochronní se svislým průměrem OB.



Obr. 2.

Jinak lze zákon tento vyjádřiti formou velmi elegantní jak ji udal též již G. Galilei. Hmotné body padající v rovině nákresné po přímkách od téhož bodu O (obr. 3.) všestranně dolů



Obr. 3.

se rozbíhajících, zůstávají rozloženy na kruhu stále se rozšiřujícím. Kdyby to byly body svítivé, dávaly by ve svém seskupení stále kruh. Věta platí všeobecněji i pro případ, že se přímky od téhož bodu O rozbíhají všestranně v prostoru: body padající zůstávají pak rozloženy na kouli stále se rozšiřující. Rozšiřování děje se úměrně se čtvercem času.

V obr. 3. je nakresleno pro urychlení $g = 9{\cdot}8 \frac{m}{sec^2}$ v rozměru $\frac{1}{1000}$ (tedy *mm* za *m*) pro 1*sec*, 2*sec*, 3*sec*.

To jsou věci všeobecně známé.

Avšak platí jen pro případ idealní, kterýž nelze realisovati, kdy totiž padající (malá) tělesa se šinou po rovině bez všelikého tření. Ve skutečnosti bývá však právě toto tření velmi značné. To jest také důvodem, proč se známé experimenty o pádu po rovině provádějí s tělesy nikoliv po rovině se šinoucími, nýbrž po ní se valícími, tedy obyčejně s koulemi ve žlábkách, při čemž v skutku lze tření úplně téměř zanedbávati. Avšak zde vzniká obtíž nová a zásadní; neboť zde dokonce neplatí rovnice (1′)—(4′) — jak níže ještě vyložíme —, poněvadž není $a' = g \sin \alpha$. Tím pak ovšem veškeré důsledky přestávají. Zůstává jediné to, že pohyb těžiště takové koule jest rovnoměrně urychleným, avšak urychlení a^* jest od onoho a' zcela rozdílné, a připojme ihned, že jest a^* značně menší.

Říkává se tedy, že následkem tření ony hořejší zákony neplatí, a tím se věc odbude.

Avšak není třeba vlastní otázce se vyhýbati. Tření lze quantitativně stanoviti koefficientem. Na místě tohoto lze názorněji ještě zavésti úhel ϑ, tak že tang ϑ se rovná onomu koefficientu.*) Právě pro pád po šikmé rovině má tento úhel ϑ jednoduchý význam; neboť padání tělesa po rovině s jistým třením se šinoucího od tohoto úhlu začíná.

Lze tudíž formulovati otázku v tom způsobu: jak se modifikují ony dva hořejší tak jednoduché zákony Galileovy *a)* a *b)*, když se ke tření stanovenému koefficientem tang ϑ přihlíží.

Výsledek je zajímavý. Zákony ty se nikterak nekomplikují, zůstávají i tak jednoduchými, jenom se málo pozmění, a to způsobem takovým, že z něho teprve tím jasněji význam úhlu ϑ vysvitne.

II. Pro pád po rovině, jak se skutečně děje, když se hmota

*) Reiss-Theurer, Fysika, odstavec 30.

m (netočíc se) s jistým třením šine, nepřijde plná složka $mg \sin \alpha$ váhy mg k platnosti; jistá část oné složky se třením ruší. Poněvadž těleso tlačí na rovinu vahou $mg \cos \alpha$ a poněvadž koefficient tření jest tang ϑ, ztrácí se třením část

$$mg \cos \alpha \,.\, \mathrm{tang}\, \vartheta,$$

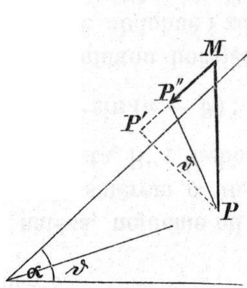
takže pád se řídí silou

$$mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \,.\, \mathrm{tang}\, \vartheta.$$

Jest tudíž urychlení a'' dáno výrazem

$$a'' = g \sin \alpha - g \cos \alpha \,.\, \mathrm{tang}\, \vartheta \,.$$

Obr. 4. ukazuje, jak snadno lze konstrukcí toto uychlení a'' znázorniti. Vedeme-li obvyklým spůsobem svisně $\mathrm{MP} = g$,



Obr. 4.

podél pak roviny a k ní kolmo $\mathrm{MP}' = g \sin \alpha$, $\mathrm{PP}' = g \cos \alpha$, postačí, když od úhlu MPP′, kterýž jest $= \alpha$, odřízneme

$$\mathrm{P'PP''} = \vartheta\,;$$

i jest
$$\mathrm{P''P'} = g \cos \alpha \,.\, \mathrm{tang}\, \vartheta$$

ona část urychlení, která třením se ztrácí, a zbytek $\mathrm{MP''} = a''$ jak nahoře udáno, urychlení způsobující pád. Zároveň vychází z trojúhelníka MPP″ dle věty sinusové jednodušší vztah

$$\frac{a''}{g} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin(90 + \vartheta)}$$

čili

$$a'' = g\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta},$$

kterýžto výraz ovšem také vyjde z rovnice pro a'', když rozdíl

$$\sin\alpha - \cos\alpha \,.\, \mathrm{tang}\,\vartheta$$

dle známých goniometrických vztahů upravíme.

Poznavše tedy, jakým urychlením a'' se pád po rovině v případu tření řídí, obdržíme soustavu rovnic analogických dřívějším

$$a'' = g\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta} \qquad (1'')$$

$$v'' = g\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta}\,.\,t'' \qquad (2'')$$

$$s'' = \tfrac{1}{2}g\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta}\,.\,t''^2 \qquad (3'')$$

$$\tfrac{1}{2}v''^2 = g\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta}\,.\,s'' \qquad (4'')$$

Srovnávajíce nyní rovnice (1) — (4) s těmito rovnicemi (1″)—(4″), obdržíme

a) z rovnic (4) a (4″)

$$v = v'' \quad \text{pro} \quad s = s''\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta},$$

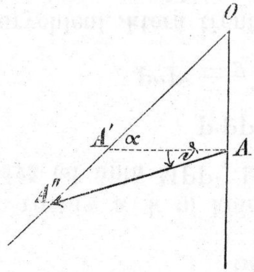
b) z rovnic (3) a (3″)

$$t = t'' \quad \text{pro} \quad s\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos\vartheta} = s''.$$

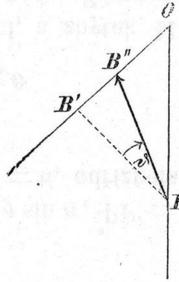
Oba tyto výsledky lze geometricky jednoduše interpretovati. Při tom ovšem předpokládáme, že jest $\alpha > \vartheta$.

Těleso dopadší volně do bodu A (obr. 5.), má jistou rychlost v. Chceme-li nalézti místo, ve kterém těleso, po rovině padajíc, téže rychlosti nabude, nejdeme od A ku A′, jako dříve, směrem horizontálním, nýbrž směrem o úhel ϑ dolů odkloněným; v tomto směru stihneme místa A″, kdež jest teprv $v'' = v$; neboť jest OA : OA″ $= \sin(\alpha - \vartheta) : \sin(90 + \vartheta)$, jak hořejší rovnice žádá.

Podobně těleso za jistý čas dopadne volně do bodu B (obr. 6.). Chceme-li zvěděti, kde se těleso po rovině padající



Obr. 5.



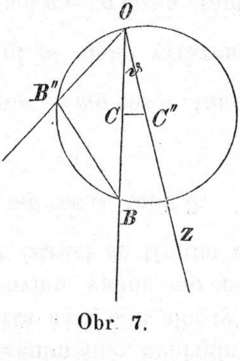
Obr. 6.

v témže okamžiku nalézá, nejdeme od B k B' směrem kolmým, jako dříve, nýbrž opět směrem o úhel ϑ vzhůru odkloněným; tak dojdeme ($\alpha > \vartheta$) místa B''; neboť jest

$$OB'' : OB = \sin(\alpha - \vartheta) : \sin(90 + \vartheta),$$

což opět souhlasí s podmínkou hořejší.

Polohu bodu B'' lze obdobně i zde nalézti konstrukcí kruhovou. Vedeme (obr. 7.) OZ pod úhlem BOZ $= \vartheta$, rozpůlíme OB bodem C a vedeme CC'' vodorovně; i jest C'' středem kruhu, jenž opsán poloměrem C''O odtíná OB'' $= s''$, isochronní si OB $= s$.



Obr. 7.

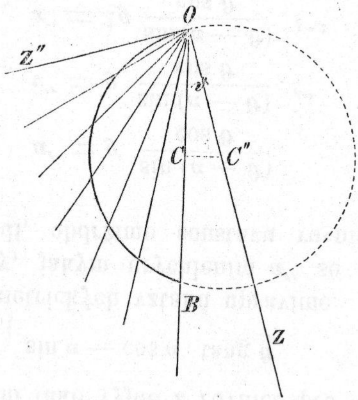
Všimněme si, že úhel BB''O $= 90 + \vartheta$ jest konstantní, nezávislý na odklonu α roviny. Vycházejí-li tudíž v rovině nákresné od bodu O přímky na jednu i druhou stranu dráhy vertikalní a začnou-li po těchto přímkách současně od bodu O padati tělesa, mající týž koefficient tření vlačného, jest jich geometrické místo v každém okamžiku též kruh (resp. kruhový oblouk), obdobný kruhu Galileově. Střed toho kruhu padá po přímce OZ s urychlením $\frac{g}{\cos\vartheta}$, tak že se poloměr OC″ opět úměrně se čtvercem času zveličuje.

Věta o isochronismu tětiv platí patrně i zde, jenom že tětivy nejsou isochronní s vertikalním průměrem kruhu, nýbrž s vertikalní tětivou, napínající oblouk o úhlu obvodovém $90 + \vartheta$.

Konstrukce dává ovšem též oblouk o úhlu obvodovém $90 - \vartheta$.

Jako často dává i zde geometrie řešení všeobecnější než bylo žádáno; řeší totiž také případ, kde by ϑ bylo negativní, t. j. kde by na místě tření jako síly pohyb zadržující byla dána síla pohyb pohánějící.

Konstrukce ukazuje též pěkně, že existuje rovina mezní, OZ″ $\perp$ OZ, od které pád teprve začíná. Patrně jest její odklon $\alpha = \vartheta$. (Obr. 8.).



Obr. 6

Ze všech úvah těchto vysvítá tudíž jasně, že nejsou nikterak komplikovanější zákony pádu těles po rovině, když se má zřetel ke tření, s jakým se po rovině — neotáčejíce se —

šinou. Výsledky Galileovy jeví se tu specielním případem těchto všeobecnějších, totiž pro $\vartheta = 0$.

III. Zákony pádu po rovině demonstrují se — aby se tření obešlo — vždy tak, že se nechají koule (ze slonoviny nebo mosazi) padati na rovině po (čtyrech neb pěti) žlábcích do prkna vhodně vedle sebe vhoblovaných. Tření při valení lze tu vskutku zanedbávati.

Avšak sleduje-li se pád quantitativně, na př. tak, že se dle obvyklých formulí počítá pro jistý odklon α roviny a jistou její délku doba, za kterou koule s hora dolů dopadne, ukáže se, že pád trvá velmi značně déle než ze vzorce se vypočetlo. Jak již řečeno, jest toho příčinou, že rovnice $a' = g \sin \alpha$ neplatí a to zase proto, že se koule nešine, nýbrž valí; nabývá tudíž, padajíc, nejenom energie pohybu postupného, nýbrž též pohybu rotačního.

Je-li m hmota koule, jest $\frac{1}{2} mv^2$ energie postupu koule vzhledem k linearní rychlosti v těžiště.

Je-li dále K moment setrvačnosti koule pro průměr (horizontalní), jest analogicky $\frac{1}{2} K\omega^2$ energie rotace koule vzhledem k uhlové rychlosti ω. Součet obou energií pohybů vyplývá však z práce mgs vynaložené, aby se koule na výšku s roviny vyzvedla. Platí tudíž rovnice

$$mgs = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} K\omega^2 .$$

V této rovnici jest především, je-li r poloměr koule,

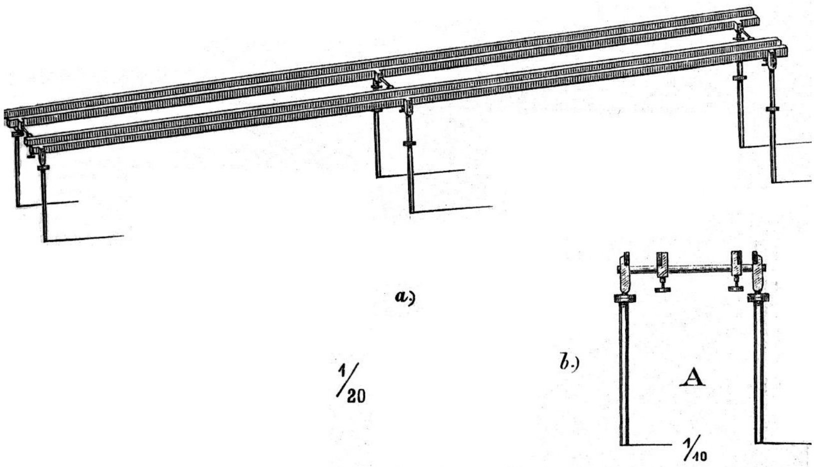
$$K = m \, . \frac{2}{5} r^2 .$$

Jest patrno, že hmota m v rovnici se krátí. Jest tudíž jednostejno, jsou-li koule padající — při určitém poloměru — těžší neb lehčí, tedy na př. jsou-li mosazné nebo železné, slonové, dřevěné atd.

Zůstává tedy vztah — vstupující na místo rovnice (4)

$$2gs = v^2 + \frac{2}{5} r^2\omega^2 .$$

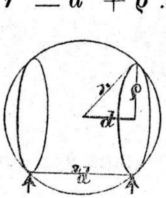
Mezi rychlostí linearní v a úhlovou ω platí jistá relace, která však závisí na tom, *jak* se koule valí, zda-li po kruhu největším anebo po kruzích menších. Ke studiu těchto vztahů slouží vhodně „rovina", která je zastoupena čtyrmi železnými tyčemi (obr. 9.), z nichž dvě a dvě jsou k sobě přidruženy,



Obr. 9.

tvoříce koleje, po nichž koule padajíce se valí. Vzdálenost $2d$ obou kolejí může se až do jisté meze měniti. I jest patrno, že dle toho, jak tyto koleje jsou od sebe daleko, koule padají po kruzích poloměru ϱ, kterýž se mění se šířkou $2d$ kolejí tak, že jest (obr. 10.)

$$r^2 = d^2 + \varrho^2.$$



Obr. 10.

V každém případě jest (obr. 11.)

$$\omega = \frac{v}{\varrho}.$$

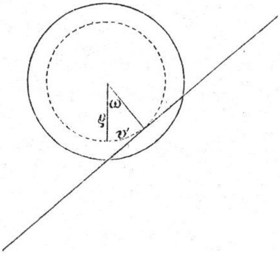
Zavedouce tedy do rovnice hořejší tyto výrazy, obdržíme

$$\frac{2gs}{v^2} = 1 + \frac{2}{5} \frac{r^2}{r^2 - d^2},$$

anebo, klademe-li ke krátkosti

$$\frac{d}{r} = e\,,$$

$$\frac{2gs}{v^2} = 1 + \frac{0{\cdot}4}{1 - e^2}.$$



Obr. 11.

Zaveďme sem ještě na místě rychlosti v raději urychlení a^*, s jakým postupný pohyb se děje: i jest

$$\frac{1}{2} v^2 = a^* \frac{s}{\sin\alpha}\,,$$

z čehož pak plyne

$$\frac{g \sin\alpha}{a^*} = 1 + \frac{0{\cdot}4}{1 - e^2}.$$

Úloha jest tím vlastně již řešena. Jest viděti, že nikdy

není $$a^* = g \sin\alpha\,,$$
nýbrž vždy

$$a^* < g \sin\alpha\,.$$

Aby se však výsledek stal názornějším, můžeme formulovati otázku takto:

Jaký odklon β by musila míti rovina, aby koule, netočíc se a ovšem šinouc se bez tření, tedy dle idealního případu Galileova, padala s týmže urychlením a^*?

Patrně by tu bylo (jako 1′)

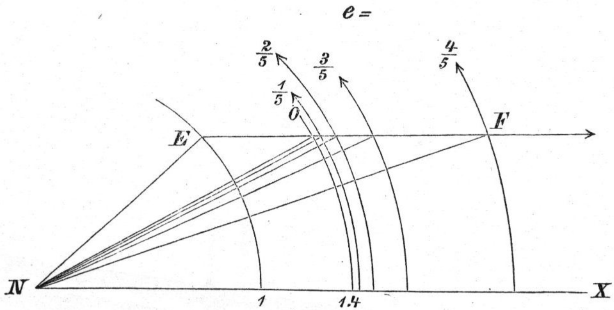
$$a^* = g \sin\beta .$$

Z toho plyne pak

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1 + \frac{0{\cdot}4}{1 - e^2} .$$

Hodnota na pravo jest pro určitý poměr e šířky kolejí $2d$ k průměru koule $2r$ hodnotou číselnou známou. I jest možno jednoduchou konstrukcí úhel β k danému α nalézti.

Opíšeme k cíli tomu čtvrtkruh poloměrem 1 a druhý čtvrtkruh poloměrem $1 + \frac{0{\cdot}4}{1 - e^2}$.



Obr. 12.

Je-li α dán, vedeme jednoduše (obr. 12.) EF horizontálně jest FNX úhel β. Obrazec jest proveden pro

$$e = 0\,, \frac{1}{5}\,, \frac{2}{5}\,, \frac{3}{5}\,, \frac{4}{5}\,.$$

Tabellarně jest

e	$1 - e^2$	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	
0	$\frac{25}{25}$	$\frac{10}{25}$	$= 1{\cdot}400$
$\frac{1}{5}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{10}{24}$	$= 1{\cdot}417$
$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{10}{21}$	$= 1{\cdot}476$
$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{10}{16}$	$= 1{\cdot}625$
$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{10}{9}$	$= 2{\cdot}111$
1	0	∞	∞

Případ obyčejný, jak se při experimentování po žlábcích hledí realisovati, jest dán hodnotou

$$e = 0\,,$$

pak jest

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{\cdot}4\,.$$

Urychlení a^* jest zde největší, jehož lze dosáhnouti. Nemění se, jak z obrazce 12. pěkně jest viděti, ani z počátku, když se užívá kolejí jen málo od sebe vzdálených, až teprve, když šířka kolejí dosáhla asi deseti procent průměru koule. Když se na žlábcích ne dosti volně provedených koule stranou zachycuje, takže se valí ne po kruhu největším, má to za následek opozďování koule; to bývá také spolu příčinou, proč stejné koule na rovině se žlábky odchylně padají.

Připomínám, že pozorování, konané na „rovině“ s kolejemi — jak jí při svých přednáškách užívám — velmi dobře s počtem souhlasí, tak že by se rovina taková i pro účely škol středních, jakožto velmi instruktivní, doporučovala. Zejména jest frappantní rozdíl, když se zcela stejné koule nechají padati současně, jedna po kolejích úzkých a druhá širších. Jinak jest patrno, že při stejném $e = \frac{d}{r}$ všechny koule, velké neb malé, padají stejně, zejména tedy pro $e = 0$; po svém největším kruhu padá malá kulička isochronně s koulí sebe větší