Stanovení relattivné hmoty země a slunce na základě fysikalním.

Napsal prof. Dr. **V. Strouhal** v Praze.

Stanoviti poměr hmoty země ke hmotě slunce jest úkolem nikoli snadným, kterýž řeší astronomie methodami, založenými na studiu pohybu těles nebeských. Takovým základem jest pohyb měsíce, pokud se jeví býti rušen sluncem (Hansen). Jiným základem jsou perturbace, jež způsobuje země v pohybech planet, zejména Venuše a Marse (Leverrier, Harkness, Tisserand, Newcomb, Backlund). Že úkol jest nesnadným, viděti nejlépe z výsledků, jež od různých zde uvedených badatelů byly vypočítány a jež se rozeznávají vespolek měrou větší než při methodách astronomických bývá pravidlem.

Vzhledem k tomu jest zajímavo upozorniti, že také fysika k řešení úkolu toho přispívá. Veličinou zde jakoby sprostředkující jest *konstanta gravitační*. Astronomie i fysika určuje tuto konstantu číselně, dle vlastních method, tam velmi jednoduchých, zde dosti obtížných a pracných, při čemž se číselné hodnoty vztahují na určité základní jednotky délky, hmoty a času. Poněvadž pak tyto jednotky základní jsou zcela jiné v astronomii a zcela jiné ve fysice, rozeznávají se číselné hodnoty pro konstantu gravitační v astronomii a ve fysice nalezené, jsouce rozdílné svým základem. Proto vede srovnávání obou hodnot k *výsledku novému*, kterým se k řešení úkolu výše naznačeného přispívá.

1. Vizme především, jak astronomie konstantu gravitační zavádí a číselně určuje. Kolem slunce, hmoty M, obíhá v době T oběžnice, hmoty m, v elliptické dráze, jejíž poloosa hlavní budiž a, vedlejší b, numerická excentricita e, parametr p. Za dobu T opíše tedy průvodič r plochu πab, tudíž za jednotku času plochu s, která jest určena vzorcem

$$s = \frac{\pi ab}{T}.$$

Dle třetího zákona Keplerova platí relace

$$T^2 : T'^2 = \frac{a^3}{1 + \frac{m}{M}} : \frac{a'^3}{1 + \frac{m'}{M}},$$

tak že lze na místě doby oběhu T zavésti do hořejšího vzorce pro s výraz *úměrný*, totiž

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{m}{M}}}$$

a nahradíme-li pak ještě poloosu b výrazem

$$a\sqrt{1 - e^2},$$

obdržíme

$$s = C\sqrt{a(1 - e^2)} \,.\, \sqrt{1 + \frac{m}{M}},$$

kdež znamená C konstantu úměrnosti.

Vzhledem k vzorci

$$p = a(1 - e^2),$$

lze formálně jednodušeji psáti

$$s = C\sqrt{p} \,.\, \sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

a s velkou příbližností

$$s = C\sqrt{p},$$

poněvadž jest hmota oběžnice proti hmotě slunce velmi malou.

Obě rovnice poslední obsahují ve formě nejjednodušší všechny tři zákony Keplerovy spojené. Plocha průvodičem za každou jednotku časovou opsaná jest (velmi příbližně) úměrná kořenu z parametru dráhy. Věta platí ostatně netoliko pro dráhy elliptické, nýbrž pro dráhy v kuželosečkách vůbec.

Konstantu úměrnosti C určíme *číselně* použíce rovnic hořejších na konkretní případ *naší země* a volíce určité jednotky. Obdržíme tak vztah

$$\frac{\pi ab}{T} = C\sqrt{p}\,.\,\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

čili

$$\frac{\pi\,.\,a^{\frac{3}{2}}}{T} = C\sqrt{1+\frac{m}{M}},$$

ve kterémž toliko třeba, veličiny zde přicházející v jistých jednotkách číselně vyjádřiti a pak konstantu C počítati. Jednotkou délky jest v astronomii právě poloosa dráhy zemské; tudíž jest

$$a = 1.$$

Jednotkou času jest střední den sluneční; v této jednotce jest

$$T = 365{\cdot}2563835.$$

Jednotkou hmoty jest hmota slunce; tudíž jest

$$M = 1.$$

Zbývá tedy ještě m. Pro tuto hmotu přijal Gauss hodnotu

$$m = \frac{1}{354710}.$$

Z těchto dat vypočítáme

$$\lg 2C = 8{\cdot}2355814 - 10$$
$$2C = 0{\cdot}01720210.$$

Počítá se konstanta 2C a nikoli C, poněvadž má jednoduchý význam Kdyžby se totiž přibližně kladla hmota $m = 0$, vyšlo by

$$2C = \frac{2\pi}{T},$$

což jest průměrná úhlová rychlost, s jakou průvodič postupuje, vyjádřena v jednotce radiant a vztahovaná na střední den sluneční. Dle toho vzorce vyšlo by

$$\lg 2C = 8{\cdot}2355821$$
$$2C = 0{\cdot}01720213.$$

Rozdíl mezi touto hodnotou přibližnou a onou správnou zde sice jest, avšak, jak čísla ukazují, jest velice nepatrný. V logarithmu činí rozdíl jen 6·7 jednotek sedmého místa decimalního.*)

2. Význam konstanty 2C vzhledem k úkolu napřed uvedenému vynikne zvlášť, když se ukáže, v jakém vztahu jest ke konstantě gravitační $\varkappa$. Vyjádříme-li vzájemné urychlení mezi sluncem M a oběžnicí m jednak dle zákonů pohybu centrálního, jednak dle zákonu gravitačního, obdržíme rovnici

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a = \varkappa \frac{M + m}{a^2}.$$

Připojíme-li k ní rovnici hořejší, kterou se konstanta C zavedla, totiž

$$\frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{T} = C \sqrt{1 + \frac{m}{M}},$$

obdržíme výslednou relaci

$$\varkappa M = (2C)^2.$$

Čtverec konstanty 2C a konstanta gravitační $\varkappa$ jsou tedy veličiny úměrné; faktorem úměrnosti jest hmota slunce M. Když však přijmeme základní jednotky astronomické, pro které jsme nahoře číselnou hodnotu 2C počítali, pak jest

$$M = 1,$$

tudíž jednoduše

$$\varkappa = (2C)^2.$$

Z hořejší číselné hodnoty 2C obdržíme tudíž ihned číselnou hodnotu $\varkappa$, totiž

$$\varkappa = 2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4}.$$

3. Také fysika snaží se číselnou hodnotu konstanty gra-

*) Srovnej G. Gruss, Základové theoretické astronomie, 1897, pag. 13.

vitační stanoviti, methodami různými, o nichž minulého roku přehledně bylo referováno*). Hojný číselný material, zjednaný pracemi celého století, jest po ruce; referent sestavil výsledky, jichž došli různí pozorovatelé v různých dobách, ne pro konstantu gravitační samu, nýbrž pro veličinu jinou, s ní určitou relací spojenou, totiž pro střední hustotu země, kteráž jest přehlednější a má jednodušší význam. Výsledky tyto i v dobách nejnovějších zjednané liší se od sebe dosti značně. Tak udává**) *Wilsing* 5·594 a 5·577, a vedle toho *Richarz* a *Krigar Menzel* 5·505, což jest rozdíl jedno procento přesahující. Bylo by žádoucno, aby práce celého století byla zakončena kritickým rozborem všech výsledků, tak aby podobně, jako se děje v astronomii (na př. pro parallaxu slunce), mohla jistá hodnota jakožto pravdě nejpodobnější býti všeobecně uznána a do počtů jiných přijímána. Kdyby se prostě ze všech výsledků, jak je tam referent sestavil, vzal arithmetický průměr, vyšlo by číslo 5·44. K první orientaci výsledek tento stačí; při další úvaze nutno však přihlédnouti k tomu, že váha různých výsledků není stejnou, přes to, že každý z pozorovatelů se snažil co nejvíce přesný výsledek si zabezpečiti; ale zkušenosti doby, o něž se opíral, a prostředky jemné mechaniky, jimiž vládl, byly různé. Vzhledem k tomu dlužno novějším pozorováním, a tu zvláště některým z nich, přičísti větší váhu, čímž se výsledek spíše těmto přizpůsobí. Za pravdě nejpodobnější pokládá „Bureau des longitudes“ hodnotu

$$S = 5{\cdot}50 \frac{g}{cm^3},$$

kteráž je v souhlasu, v mezích chyby pravděpodobné tam udané, s výsledkem, jehož prací 14letou došli *Richarz* a *Krigar Menzel*.

Se střední hmotou specifickou S jest konstanta gravitační $\varkappa$ spojena relací

$$\varkappa \,.\, S = \frac{G}{\frac{4}{3}\pi R}.$$

*) Dr. Vlad. Novák, Časopis pro pěst. mathem. a fys. roč. XXIX. pag. 10.

**) l. c. pag. 28.

Zde znamená R střední poloměr země, G střední urychlení ryze gravitační (bez centrifugalního) pro zemi naši při hladině moře. Číselně jest

$$R = 6371{\cdot}103\, km$$

$$G = 982{\cdot}3\, \frac{cm}{sec^2},$$

z čehož plyne

$$\varkappa \,.\, S = 3{\cdot}6808 \,.\, 10^{-7}\, \frac{1}{sec^2}\,.$$

Jsou tudíž hodnoty k sobě náležející

$$S = 5{\cdot}50\, \frac{g}{cm^3}$$

$$\varkappa = 6{\cdot}69 \,.\, 10^{-8}\, \frac{cm^3}{g \,.\, sec^2}\,.$$

4. Jak viděti, jest číselná hodnota konstanty gravitační určená fysikalně zcela jinou než určená astronomicky. Důvodem toho jest, že výpočet obou založen na základních jednotkách zcela různých; v astronomii jsou jednotkami těmito poloosa *a* dráhy zemské, hmota $\odot$ slunce a den *d* středního času slunečního; ve fysice jsou to *cm*, *g*, *sec*. Zde pak ukazuje se na příkladu klassickém důležitost rozměrů. Chceme-li obě číselné hodnoty $\varkappa$, jež ovšem vyjadřují totéž, do rovnice zavésti, dlužno psáti

$$6{\cdot}69 \,.\, 10^{-8}\, \frac{cm^3}{g \,.\, sec^2} = 2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4}\, \frac{a^3}{\odot \,.\, d^2}\,.$$

Odvodivše rovnici tuto, vraťme se k úkolu napřed vytčenému. Z rovnice té plyne

$$\frac{6{\cdot}69 \,.\, 10^{-8}}{2{\cdot}959 \,.\, 10^{-4}} = \left(\frac{a}{cm}\right)^3 : \frac{\odot}{g} \cdot \left(\frac{d}{\mathrm{sec}}\right)^2.$$

Zde jest především

$$\frac{d}{sec} = 86400.$$

Poměr $\frac{a}{cm}$ lze určiti z rozměrů země, na nichž definice metru založena, a z parallaxy slunce. Pro tuto přijala „Conférence internationale des étoiles fixes“ v Paříži 1896 hodnotu

$$8{\cdot}80.''$$

Přijme-li se pak pro aequatorealní poloměr země R_0 hodnota (A. Clarke)

$$R_0 = 6378{\cdot}3\ km,$$

vychází

$$\frac{a}{cm} = 149501 \, . \, 10^8.$$

Tím zbývá v rovnici hořejší, jakožto jediná neznámá, poměr

$$\frac{\odot}{g}$$

a tento lze počítati, t. j. vyjádřiti hmotu slunce v grammech. Aby se dostala čísla přehlednější, zaveďme hmotu naší země ♁ do počtu, píšíce

$$\frac{\odot}{g} = \frac{\odot}{♁} \cdot \frac{♁}{g} \, .$$

Z hodnot nahoře uvedených, pro R a S, vypočítá se

$$\frac{♁}{g} = 5{\cdot}9579 \, . \, 10^{27} \, ;$$

země naše má tedy hmotu téměř 6 tisíc trillionů tun. Zbývá pak již jen poměr $\frac{\odot}{♁}$, kterýž lze počítati. Výsledkem počtu jest hodnota

$$\frac{\odot}{♁} = 332310$$

anebo, jak se v astronomii obyčejně psává, kde se hmota slunce béře za jednotku,

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{332310} \, .$$

5. Mohlo by se zdáti — na první pohled — že methoda výpočtu zde uvedená jest zásadně pochybenou proto, poněvadž konstanta 2C, na níž výpočet poměru $\frac{m}{M}$ hmoty země a slunce byl založen, již známost tohoto poměru předpokládá. Avšak bližší úvaha ukazuje, že v konstantě 2C onen poměr jen jako *člen korrekční*, malého významu, jest obsažen, tak že korriguje jen poslední sedmé místo decimalní v jejím logarithmu. *Gauss* počítal konstantu 2C z hodnoty

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{354710}.$$

Leverrier (1872) nalezl pro týž poměr na základě saekularních nerovností v pohybech planet Venuše a Marse působených přitažlivostí země, hodnotu

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{324439},$$

kterou přijímají též Annaly observatoře v Paříži.

Obě hodnoty differují velmi značně. Avšak na konstantu 2C má difference ta vliv velmi nepatrný; neboť jest

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1}{354710}} = 0{\cdot}00000067$$

$$\lg \sqrt{1 + \frac{1}{324439}} = 0{\cdot}00000061,$$

rozdíl sahá tedy až do osmého decimalního místa v logarithmu konstanty 2C. Z toho důvodu podržuje se i nyní ještě ta hodnota 2C, jak ji vypočítal Gauss, jakožto konstanta absolutní, ač jsou nyní k disposici data velmi přesná a provádí se při výpočtech jen malá kompensace*) v astronomické jednotce délkové, t. j. v odlehlosti a.

6. Ke konci přihledněmež, jak výsledek, jehož jsme došli z měření fysikalních, souhlasí s těmi, jež byly odvozeny methodami astronomickými. Přestaňme na hodnotách, pracemi nejno-

---

*) Gruss, l. c. pag. 16.

vějšími zjednaných, jež se v astronomii pokládají dle nynějšího stavu věcí za nejlepší.

„*Berliner astronomisches Jahrbuch*“ pro rok 1902 uvádí dle *Newcomba* pro úhrnnou hmotu země a měsíce dohromady hodnotu

$$\frac{☾ + ♁}{\odot} = \frac{1}{329390}.$$

Harkness dochází jakožto hodnoty pravdě nejpodobnější

$$\frac{☾ + ♁}{\odot} = \frac{1}{327214}.$$

„*Nautical Almanac*“ pro rok 1902 přijímá dle *Backlunda* hodnotu

$$\frac{☾ + ♁}{\odot} = \frac{1}{328129}.$$

Uznáme-li pro hmotu měsíce za pravdě nejpodobnější hodnotu

$$\frac{☾}{♁} = \frac{1}{79{\cdot}667}$$

dle *Hansena*, jenž jest v tomto oboru (měsíce) autoritou všeobecně uznanou, vypočítáme z dat nahoře uvedených pro poměr hmoty země a slunce hodnoty následující:

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{333650} \ldots \text{Newcomb}$$

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{331410} \ldots \text{Harkness}$$

$$\frac{♁}{\odot} = \frac{1}{332360} \ldots \text{Backlund.}$$

Tato čísla změnila by se jen velmi málo, kdybychom chtěli pro hmotu měsíce přijmouti hodnotu novější

$$\frac{☾}{♁} = \frac{1}{81{\cdot}068},$$

kterouž vypočítal *Harkness* z pozorování přílivu a odlivu.

Arithmetický průměr hodnot vypočtených dává

$$\frac{\text{♁}}{\odot} = \frac{1}{332473}.$$

Srovnávajíce s tímto výsledkem hodnotu nahoře vypočtenou

$$\frac{\text{♁}}{\odot} = \frac{1}{332310},$$

uznáme, že souhlas jest velmi dobrý.

Z tohoto souhlasu lze usouditi zase zpět, že hodnota konstanty gravitační, kterou jsme za základ výpočtu položili, jest i z důvodů astronomických pravdě velice podobnou.