Literatura

Krasnica J. a kol: Mechanika. Academia, Pha 88

Havránek A.: Mechanika I, II

Bakule R., Svoboda E.: Molekulová fyzika

Bakule R., Brož J.: Molekulová fyzika

Přednáška, cvičení, praktikum
konzultace

Fyzika: základní formy pohybu hmoty
pohyb - jakákoliv změna
experimentální, exaktní - veličiny extenzivní x intenzivní, měření, rozměr

Mechanika - mechanický pohyb - změna polohy těles
(μηχανή nástroj, stroj) v prostoru, jejich velikosti a tvaru
empirie → axiomatická výstavba

kinematika x dynamika (δύναμις: síla)
statika

referenční těleso, referenční (vztažný) systém soustava
- relativnost pohybu

klasická mechanika - rámec - "absolutní" prostor a čas
(prostor 3 rozm., čas 1 rozm. kontinuum) (oddělené)

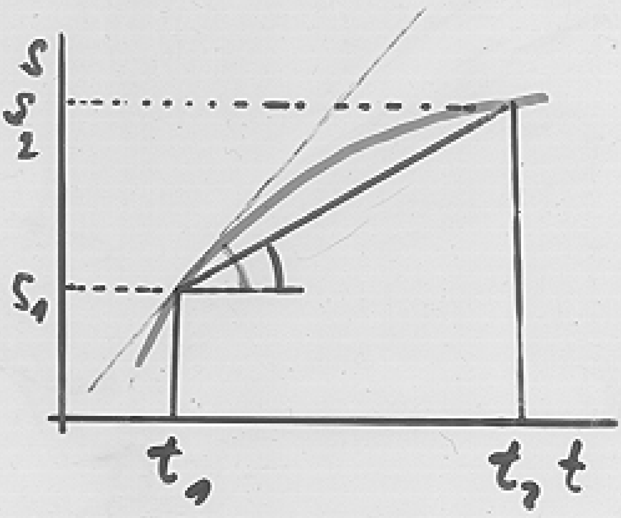
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica 1687

Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty.
Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý

Pojem hmotného bodu
Vztah k matematice

1. Kinematika hmot. bodu

Pohyb po přímce $s = s(t)$



rychlost průměrná

$$v_p = \left(\frac{s}{t}\right) = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

okamžitá

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$ derivace $v(t)$

zrychlení průměrné

$$a_p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

okamžité $a = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

pohyb po křivce v trojrozměrném prostoru

$x = x(t)$ $x_1 = x_1(t)$ $x_i = x_i(t)$

$y = y(t)$ $x_2 = x_2(t)$ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$z = z(t)$ $x_3 = x_3(t)$

polohový vektor
(radiusvektor)
trajektorie, dráha
(parametrizace – jiná
(např. s) $\vec{r} = \vec{r}(s)$
nebo vyloučení parametru

zobecnění:
průměrná rychlost – vektor

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

okamžitá

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$ se složkami $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$, $v_3 = \frac{dx_3}{dt}$

a podobně okamžité zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \text{ ve složkách } a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2}$$

Rozklad na tečné a normálové zrychlení

$$\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{v}}{v} = v \cdot \vec{\tau} \qquad \text{tedy}$$

jedn. vektor tečny

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}}_{\text{tečné složka}} + \underbrace{v \frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{\text{normálová}} \qquad \vec{\tau}\vec{\tau} = 1 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

normálová $\Leftarrow$ $\vec{\tau} \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$

úprava: parametr s: $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \underbrace{\dfrac{ds}{dt}}_{=v\ (\text{proč?})} \cdot \underbrace{\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}}_{\text{závisí jen na tvaru křivky (ne na rychlosti)}}$

$v = \left|\lim \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ a vzdálenost dvou blízkých bodů dráhy se v limitě rovná délce oblouku Δs

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\nu}}{R}$$

$\vec{\nu}$ normála

R poloměr křivosti dráhy

(první ze tří Frenetových vzorců

v obecném případě lze zavést ze definici oskulační roviny, normály a poloměru oskulační kružnice

Závěr

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}}_{\text{tečné}} + \underbrace{\vec{\nu} \cdot \frac{v^2}{R}}_{\text{normálová}}$$

složka zrychlení

Newtonovy zákony

1.Zákon setrvačnosti

Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu pokud není nuceno vnějšími silami svůj stav změnit.

2. Zákon síly

Síla $\vec{F}$ působící na těleso je úměrná součinu jeho hmotnosti a zrychlení $\vec{a}$, které mu uděluje,

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

3. Zákon akce a reakce

Každá akce vyvolává stejnou reakci opačného směru, aneb vzájemná silová působení dvou těles jsou stejně velká a opačně orientovaná.

Newtonovy zákony – poznámky

1) Těleso ≡ hmotný bod ?

2) $\mathrm{II} \not\Rightarrow \mathrm{I}$ – inerciální vztažný systém – Galileův princip relativity

3) hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$
 – formulace II. N. z. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$,
 (platí i pro relativistické rychlosti, kde se m s rychlostí mění !)

4) Zavedení hmotnosti a síly

5) Princip superpozice sil (obvykle mlčky předpokládán)

Klasifikace pohybů

– Dle tvaru dráhy: přímočarý
 křivočarý

– Dle velikosti rychlosti: rovnoměrný
 nerovnoměrný

– Dle velikosti tečného zrychlení: rovnoměrně zrychlený/zpomalený

Příklady pohybu

Přímočarý:

rovnoměrný přímočarý

$$x_1 = k_2 t + k_1$$
$$v_1 = k_2$$
$$a_1 = 0$$

Pozor: $x = v \cdot t$ – možnost záměny složky vektoru („vektor v přímce") s jeho velikostí

rovnoměrně zrychlený (zpožděný) přímočarý

$$x_1 = k_3 t^2 + k_2 t + k_1$$
$$v_1 = 2k_3 t + k_2$$
$$a_1 = 2k_3 \qquad F_1 = 2mk_3$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$
$$v = at$$

harmonický pohyb po přímce

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v_1 = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$
$$a_1 = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x_1$$
$$F_1 = -\underbrace{m\omega^2}_{k} x_1$$

kmitočet ≡ frekvence f

úhlová (kruhová) frekvence $\omega = 2\pi f$

doba kmitu $T = 1/f$

fáze $\omega t + \varphi$ (měří se, je to úhel)

fázová konstanta φ

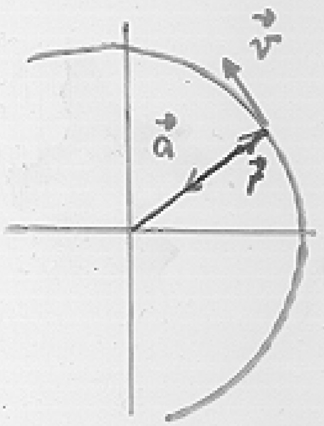
x_1 – výchylka (elongace)

amplituda A

rovnovážná poloha

Křivočaré:

rovnoměrný kruhový



$$x_1 = R\cos(\omega t + \varphi) \qquad x_2 = R\sin(\omega t + \varphi)$$
$$v_1 = -R\omega \sin(\omega t + \varphi) \qquad v_2 = R\omega \cos(\omega t + \varphi)$$
$$a_1 = -R\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \qquad a_2 = -R\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Přitom $v = R|\omega| \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r} \qquad \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

(dostředivé zrychlení)

(úhlové rychlosti ω se přiřazuje vektor ve směru osy otáčení)

nerovnoměrný pohyb po kružnici

(dráha může být pouze část kružnice)

$$x_1 = R\cos\varphi(t) \qquad x_2 = R\sin\varphi(t)$$
$$v_1 = -R\dot{\varphi}\sin\varphi(t) \qquad v_2 = R\dot{\varphi}\cos\varphi(t)$$
$$v = |\vec{v}| = R|\dot{\varphi}|$$

úhlová rychlost obecně $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

$$a_1 = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi(t) - R(\dot{\varphi})^2\cos\varphi(t)$$
$$a_2 = R\ddot{\varphi}\cos\varphi(t) - R(\dot{\varphi})^2\sin\varphi(t)$$

tečné zrychlení $a_t = R\ddot{\varphi}$, normálové zrychlení $a_n = R(\dot{\varphi})^2$
(první členy — druhé členy v rovnicích pro a_1, a_2)

šikmý vrh

$$x_1 = k_6 t + k_5 \qquad x_2 = k_4 t + k_3 \qquad x_3 = -\frac{g}{2}t^2 + k_2 t + k_1$$

$$v_1 = k_6 \qquad v_2 = k_4 \qquad v_3 = -gt + k_2$$

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = -g$$

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_3$$

Pohybová rovnice $m.\vec{a} = \vec{F}$ ← předepsané – třeba silové pole
$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, příp. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$

$\overset{?}{\rightarrow}$ param. rovnice pohybu

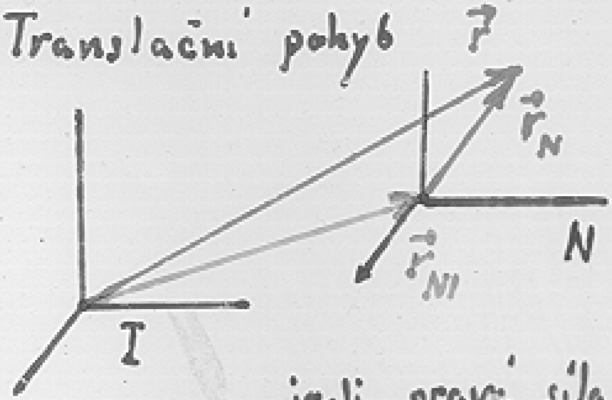
↑

řešení diferenciální(ch) rovnic(e)

Zdánlivé síly × síly pravé

Neinerciální systém - řešení 1. přechod do inerc. a nazpět
2. zdánlivé síly započíst

a) Translační pohyb



$$\vec{r} = \vec{r}_{NI} + \vec{r}_N$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{NI} + \vec{a}_N$$

$\vec{a}_N$ – zrychl. vůči neinerc. syst.

$\vec{a}_{NI}$ – zrychlení neinerc. syst. vůči inerc

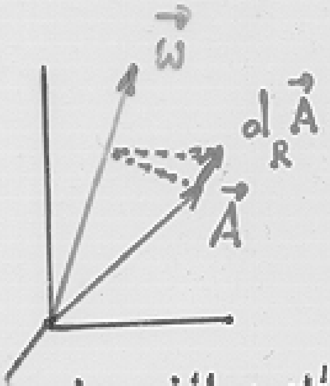
je-li pravá síla $\vec{F}_p = m\cdot\vec{a}$,

je $m\vec{a}_N = \underbrace{\vec{F}_p - m\vec{a}_{NI}}$

Zdánlivá síla $\underline{\vec{F}_z = -ma_{NI}}$

(výtah, Země v grav. poli Slunce $\sim 0.5\times 10^{-3}g$)

b) Rotační pohyb



(úhlová rychlost jako vektor – směr osy rotace)

$$d\vec{A} = d_R\vec{A} + d_N\vec{A}$$

$d_N\vec{A}$ – změna vůči neinerciál. systému

$d_R\vec{A}$ – změna způsobená rotací vůči inerc. systému

$$d_R\vec{A} = (\vec{\omega}\times\vec{A})\cdot dt$$

$$\omega\cdot dt = d\varphi$$

$$\underline{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d_N\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{A}} \quad \text{pro libov. vektor } \vec{A}$$

$\vec{A} = \vec{r}$: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d_N\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}$, tedy $\vec{v} = \vec{v}_N + \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\vec{A} = \vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d_N\vec{v}_N}{dt} + \frac{d_N}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times\vec{v}_N + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec a = \vec a_N + \frac{d_N\vec\omega}{dt}\times\vec r + 2\vec\omega\times\vec v_N + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$$

(ale: $\vec A = \vec\omega \Rightarrow \frac{d_N\vec\omega}{dt} = \frac{d\vec\omega}{dt}$, tedy nakonec

$\vec F_z = m\vec a_N - \vec F_p = m\vec a_N - m\vec a$ vyjde

$$\vec F_z = \underbrace{-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)}_{\text{Síla odstředivá}}\ \underbrace{-\,2m\vec\omega\times\vec v_N}_{\text{Síla Coriolisova}} - \frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r$$

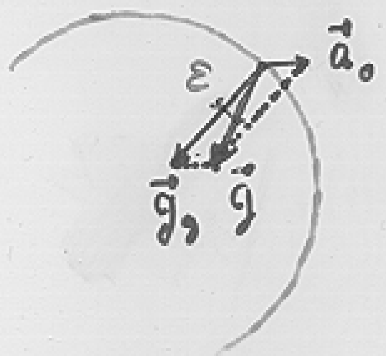
$= 0$ při konstantní úhlové rychlosti

$\vec F_o = -m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r) = m\omega^2\vec r_\perp$ ← složka vektoru $\perp$ k $\vec\omega$

$\vec F_c = -2m\vec\omega\times\vec v_N$

Důsledky:

a) příspěvek k tíhovému zrychlení:



$\vec g_g$ – gravit. zrychlení

$\vec a_o$ – odstředivé zrychlení $\left(= \frac{\vec F_o}{m}\right)$,

výsledné tíhové zrychlení $\qquad a_o = \omega^2 R_z \cos\psi$

$$g \doteq g_g - \underbrace{\omega^2 R_z}_{3{,}46‰ \text{ z } g_g}\cos^2\psi$$

+ odchylka mezi geografickou a geocentrickou šířkou ε
(zeměpisnou zeměstřednou

b) zploštění Země $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}$, $a = 6378$ km

normál. zrychlení

$$\underset{\uparrow\ \mathrm{cm/s^2}}{g} = 978.030\,(1 + 0.005302\sin^2\psi - 0.000007\sin^2 2\psi) - 0.0003086\,\underset{\uparrow\ \mathrm{m}}{H}$$

(Helmert)

× skutečné zrychlení → anomalie tíže

c) Foucaultovo kyvadlo (1851)

d) Koleje, pasáty, cyklony (severní polokoule: $\underset{\odot}{\vec\omega}$ $\quad \vec v \rightarrow$ $\downarrow \vec F_c$)

Odvozené mechanické veličiny

(Historický spor: čím je určen účinek síly na pohybu?
Descartes: hybnost mv
Leibniz „živé síly" (vis viva) mv^2)

R.D. 1596–1650
G.W.L. 1646–1716
I.Newt. 1643–1727
PNPM 1687

integrací (dle času)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

účinek síly „dle času"
impuls síly $\vec{J}$
během čas. intervalu (t_1, t_2)

podobně

$$\vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{L}$$ – impuls momentu síly

(důležité pro krátce trvající síly, lze zavést
průměrnou sílu $\vec{F}_m = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$)

integrací („dle dráhy")

$$\int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{vlastně výkon}} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\vec{v}}{2}\right)} \cdot dt = \left[\frac{mv^2}{2}\right]_{t_1}^{t_2}$$

lze brát jako definici křivkového integrálu
souvislost: věta o substituci

$$A_{21} = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F}\, d\vec{r}$$ – práce vykonaná silou $\vec{F}$ po dráze z bodu $\vec{r}(t_1)$ do bodu $\vec{r}(t_2)$ (srvn. klas. definice) J joule

$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ – výkon, t. j. práce vykonaná za jednotku času $\left(= \frac{dA}{dt}\right)$ W watt

$E_k = \frac{m}{2} v^2$ – kinetická energie

tedy:

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{21}$$

pro $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$ závisí na konkrétní trajektorii

Vektorové pole

– případ <u>silového pole</u> expl. <u>nezáv. na čase</u>

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ pak A_{21} závisí jen <u>na dráze</u>, (ne na parametrizaci, pro stejnou, ale opačně orientovanou dráhu

1rozměrný případ $F_3 = F_3(x_3)$ $\quad \underline{A_{12} = -A_{21}}$

$$\int F_3 \, dx_3 = -E_p(x_3) \qquad F_3 = -\frac{dE_p}{dx_3}$$

primit. fce k F_3

pak $A_{21} = -(E_{p2} - E_{p1})$ potenciální energie

(třeba $E_p = mgh = -mgx_3$)

pak platí

<u>zákon zachování mechanické energie</u>

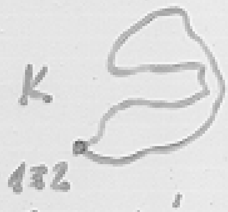
$$\underline{E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \text{konst}}$$

3rozměrný případ: nutné a dostačující podmínka, aby se dala zavést pot. energie $E_p(\vec{r})$, je, aby bylo

silové pole konzervativní – ekvivalent. podmínky

A) $\int\limits_{K_1} \vec{F} \, d\vec{r} = \int\limits_{K_2} \vec{F} \, d\vec{r}$ pro libovolné dvě křivky K_1, K_2 spojující libovolné dva body 1, 2

B) $\oint\limits_K \vec{F} \, d\vec{r} = 0$ pro libovolnou uzavřenou křivku K (cirkulace vektoru $\vec{F}$)



C) $\operatorname{rot} \vec{F} = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = 0$ v celé vyšetřované oblasti

($\nabla \times \vec{F} = 0$, ∇ operátor se složkami $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, t.j. $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$)

pakliže zavést $\underline{E_p(\vec{r}) = -\int\limits_{\vec{r}_r}^{\vec{r}} \vec{F} \, d\vec{r} + \text{konst}}$

referenční bod

a platí $\underline{\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\nabla E_p}$ + ZZME ↑↑

Intenzita $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$, potenciál $V = \frac{E_p}{m}$ $\qquad E = -\operatorname{grad} V$

Příklady:

homogenní gravitační pole $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ $\quad E = (0, 0, -g)$

$$E_p = mgh = mgx_3 \qquad V = gh = gx_3$$

(konstanta volena 0 pro $x_3 = 0$)

centrální gravitační silové pole

<u>Newtonův gravitační zákon</u> (zákon všeobecné gravitace)

$$\vec{F}_2 = -\frac{\varkappa m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$\varkappa = (6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

fixujeme-li $m_1 \equiv m_c$ ($\gg m_2$) v počátku souř. syst. ($\vec{r}_1 = \vec{0}$),

působí na $m_2 = m$ silové pole

$$F(\vec{r}) = -\frac{\varkappa m_c m}{r^3}\vec{r}$$ s potenc. energií $$E_p = -\frac{\varkappa m_c m}{r}$$

$$E(\vec{r}) = -\frac{\varkappa m_c}{r^3}\vec{r} \qquad V = -\frac{\varkappa m_c}{r}$$

(konstanta 0 pro $r \to +\infty$)

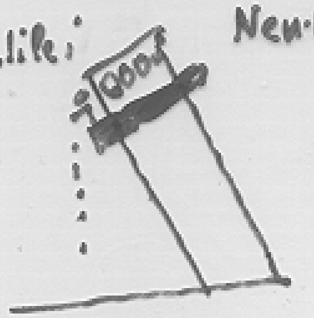
<u>Poznámky</u>

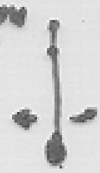
Gravitační pole koule

Měření $\varkappa$ Cavendish, Eötvös, Richarz Krigar-Menzel

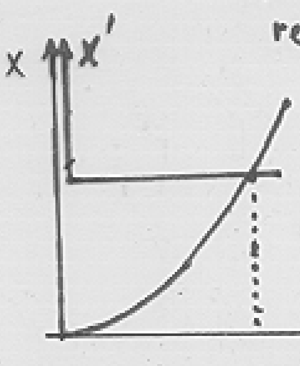
Poznámka o tíhové a setrvačné hmotnosti m

(Galilei Newton Eötvös





obecná teorie relativity



$x' = x - \frac{1}{2}a_0 t^2$

$t' = t$

"křivočaré" souřadnice

(Kinnení!)

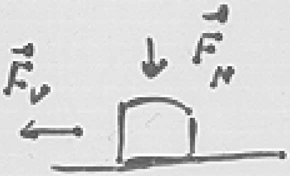
Dissipativní síly ("pole" !?) $E_{k2}+E_{p2}+Q=E_{k1}+E_{p1}$

odpor prostředí (makroskopický systém) – dán třením

tření vnitřní (viskosita, anelasticita, viskoelasticita)

vnější

a) smykové



tření za pohybu – dynamické (kinetické)

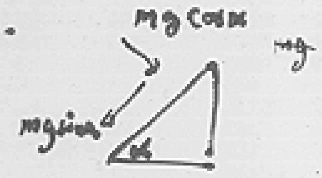
$$\vec{F}_t = -\mu_s F_N \vec{e}_v \qquad \vec{e}_v = \frac{\vec{F}_v}{F_v}$$

suché (Coulombovo) příliš nezávisí na rychlosti

pro namazané plochy či plastické hmoty to moc neplatí

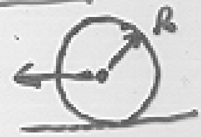
kritická hodnota potřebná k uvedení do pohybu – tření klidové (statické) μ_{s0}

kužel tření $\operatorname{tg}\alpha = \mu_s$



$mg\sin\alpha \geq \mu_s \cdot mg\cos\alpha$

b) valivé



$$F_t = \frac{\mu_v F_N}{R}$$

μ_v rozměr délky

a) i b) – pohyb: konstantní síla – rovnoměrně zpomalený – či zrychlený (pád či klouzání po nakl. rovině)

Pohyb v tekutině – odpor vzduchu

malé rychlosti $\vec{F}_o = -k\vec{v}$ (Stokes $\vec{F}_o = -6\pi\eta R\vec{v}$)

větší rychlosti – kvadratická závislost

Newtonův vzorec $\vec{F}_o = -\frac{\vec{v}}{v}\cdot\frac{C}{2}S\rho_v v^2$

($C \sim 0{,}4$ až 1)

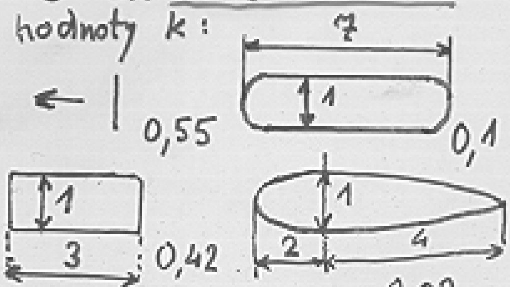
odvození $F\cdot v = \underbrace{S\cdot v\cdot\rho_v}_{\text{hmotnost}}\cdot\frac{1}{2}v^2$

mezní rychlost pádu

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho_v S}}$$

$C = 2k$ závisí na tvaru

hodnoty k:



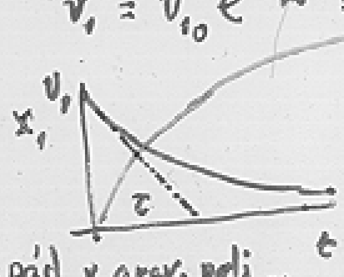
pohyb: integrace dif. rovnice

$$m\dot{v}_1 = -kv_1$$

$$\frac{dv_1}{v_1} = -\frac{k}{m}dt \quad \text{separace prom.}$$

$$\ln v_1 = -\frac{k}{m}t + C$$

$$v_1 = v_{10}e^{-\frac{k}{m}t} = v_{10}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



+ pád v grav. poli $mg = kv_1$

VÝZNAČNÉ DRUHY POHYBŮ HM. BODU

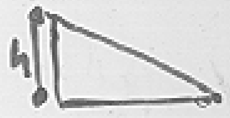
Gravitační pole: homogenní –

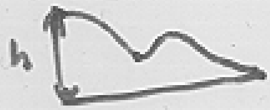
Šikmý vrh
$$x_1 = v_{01} t$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -\frac{gt^2}{2} + v_{03} t$$

síla $\vec{F} = (0, 0, -mg)$

Pohyb s vazbovými silami – použití zachování mech. energie

$$\frac{m}{2} v_1^2 + mgh = \frac{m}{2} v_2^2 \quad \text{pro } v_0 = 0 \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

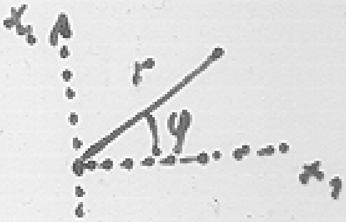




Keplerova úloha:
$$\vec{F} = -\varkappa M_s m \frac{\vec{r}}{r^3} \qquad E_p = -\overbrace{\varkappa M_s m}^{\alpha} \cdot \frac{1}{r}$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow$ moment hybnosti $\vec{b} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{b}_0 \ldots$ konst

$\vec{r}$ i $\vec{v}$ zůstávají v jedné rovině – polární souřadnice



$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad x_1 = r \cos\varphi$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \qquad x_2 = r \sin\varphi$$

Velikost momentu hybnosti $b_0 = m r^2 \dot{\varphi}$

$\Rightarrow$ plošná rychlost $\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{b_0}{2m}$ je konst.

– II K. z. (pro centrální sílu platí obecně)

Integrace pohyb. rovnic – integrál energie

$$\frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + \underbrace{(r^2 \dot{\varphi})^2}_{\frac{b_0^2}{m^2 r^2}} \right] - \frac{\alpha}{r} = E_0$$

tedy $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2 r^2}}$

pro určení dráhy
$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm \frac{mr^2}{b_0} \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b^2}{m^2 r^2}}$$

obyč. dif. rovnice 1. řádu $\frac{dy}{dx} = f(y)\,g(x)$

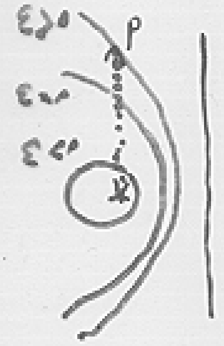
– separace proměnných!

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \int \frac{\pm\, dr/r^2}{\sqrt{\frac{2E_0 m}{b_0^2} + \frac{2\alpha m}{b_0^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \begin{matrix}\arccos\\ \arcsin\end{matrix} \frac{\frac{1}{r} - \frac{\alpha m}{b_0^2}}{\sqrt{\frac{2mE_0}{b_0^2} + \left(\frac{\alpha m}{b_0^2}\right)^2}} + C$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{b_0^2} + \sqrt{\frac{2mE_0}{b_0^2} + \left(\frac{\alpha m}{b_0^2}\right)^2}\cos(\varphi - C)$$

$$\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} - r\cos\varphi} = \varepsilon$$



$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi$$

$$p = \frac{b_0^2}{\alpha m} \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m}}$$

$\Rightarrow$ 1. K. z. $\qquad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad p = \frac{b^2}{a} \ldots$

$$\pi ab = \frac{b_0}{2m}\cdot T \qquad \Rightarrow a = -\frac{\alpha}{2E_0}$$

$$\pi^2 a^2 b^2 = \frac{\alpha m p}{4m^2}\cdot T^2 \qquad b = \frac{b_0}{\sqrt{2|E_0|m}}$$

$$\frac{4\pi^2 m}{\alpha} a^3 = T^2$$

I, II kosmická rychlost — Keplerův problém $t \to \varphi$

problém dvou těles – problém tří těles

poruchy 1. řádu (vyšších řádů).

poruchy periodické × sekulární

Mimochodem: terminologie

$y = f(x)$ explicitní (-ě zadaná) funkce

$F(y,x)=0$ implicitní

dif. rovnice – třeba 2. řádu $y'' = f(x,y,y')$

slovo integrál = řešení (v implicitním tvaru) $F(x,y)=0$

první integrál = vztah $F(x,y,y') = C$ s připadající konstantou

třeba integrál energie

Keplerův problém $t \xrightarrow{?}$ "pravé anomálie" φ

(nepovinné!!!)
jen koho by to zajímalo!

$$r^2\dot\varphi = \frac{b_0}{m}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi}{T}\cdot t\cdot\frac{ab}{p^2}$$

$u = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$:

$$2\,\mathrm{arctg}\,u - \frac{\varepsilon u}{1+u^2} = \underbrace{\frac{2\pi}{T}\cdot t}_{M}$$

$\mathrm{tg}\frac{E}{2} = u$

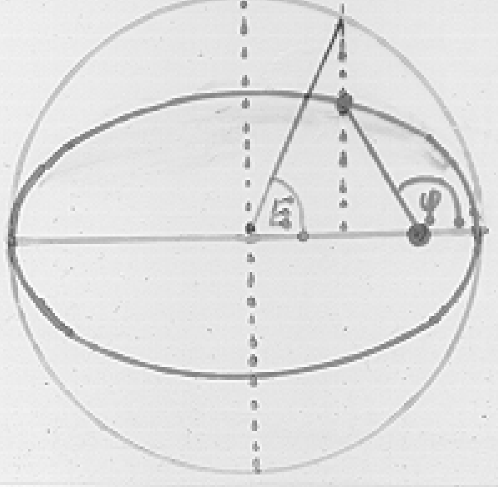
E – "excentrické anomálie"

M "střední anomálie"

φ "pravé anomálie"

$E - \varepsilon\sin E = M$ – Keplerova rovnice (řešit pro E!)

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2} \qquad r = a(1-\varepsilon\cos E)$$



$\varphi - M$ = středová rovnice
srvn. (časová rovnice)

Harmonické kmity – harmonický oscilátor – bez tlumení

$$\boxed{m\ddot{x}_1 = -kx_1}$$

$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ homogenní

$= f(x)$ nehomogenní

lineární diferenciální rovnice (2. řádu)

Vlastnosti:

1) homogenní: lin. kombinace několika řešení je opět řešení, 2 part. řešení y_1, y_2
$\Rightarrow$ obecné řešení $C_1y_1 + C_2y_2$

2) nehomogenní: obecné řešení: partikulární řešení nehomogenní + lin. kombinace dvou part. řešení příslušné homog. rovnice

3) a_1, a_0 konstanty $\Rightarrow$ hledáme řešení ve tvaru $(c)e^{\alpha t}$

(lin. dif. rov. s konstantními koeficienty

$m\alpha^2 e^{\alpha t} = -k e^{\alpha t} \Rightarrow$ charakt. rovnice $m\alpha^2 = -k$

řešení $\alpha = \pm i\sqrt{k/m} = \pm i\omega$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

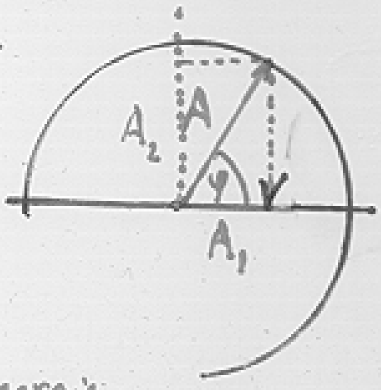
$x_1 = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$

$\underbrace{(C_1+C_2)}_{\text{reál}}\cos\omega t + \underbrace{(C_1-C_2)i}_{\text{imag}}\sin\omega t = A_1\cos\omega t - A_2\sin\omega t$

$A_1 = A\cos\varphi \quad A_2 = A\sin\varphi$

$x_1 = A\cos(\omega t+\varphi) = \mathrm{Re}\left(A\cdot e^{i(\omega t+\varphi)}\right) = \mathrm{Re}\left(A^* e^{i\omega t}\right)$

kde $A^* = Ae^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) = A_1 + iA_2$ je komplexní amplituda



(Příklad: matematické kyvadlo při malých rozkyvech

$ml\ddot{\varphi} = ma_t = -mg\sin\varphi$

$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \quad \sin\varphi \approx \varphi \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Energie

Fázový prostor

Vložka: skládání kmitů

1) Stejné frekvence, stejný směr : $C^* = A^* + B^*$ skládají se komplex. amplitudy

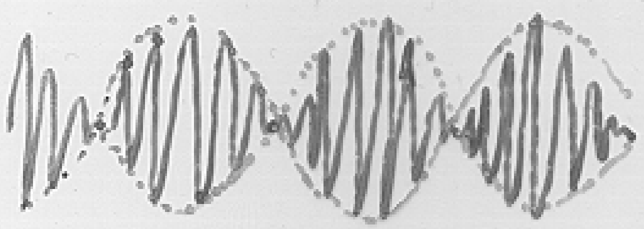
$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\underbrace{\psi}_{\text{fáz. posuv}}$$

nebo $C_1 = A_1 + B_1$, $C_2 = A_2 + B_2$

2) Stejný směr, málo se lišící frekvence

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = \underbrace{A\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t}\,\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$



rázy frekv. $\omega_1 - \omega_2$

(ale pozor: změny fáze

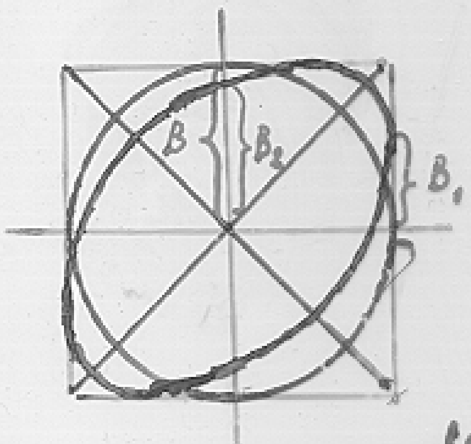
amplitudová modulace

$\cos\omega t(1 + m\cos\Omega t)$

3) Kolmé směry - stejné frekv. $x_1 = A\cos\omega t$

$$x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$



$B_1 = B\cos\varphi \quad B_2 = B\sin\varphi$

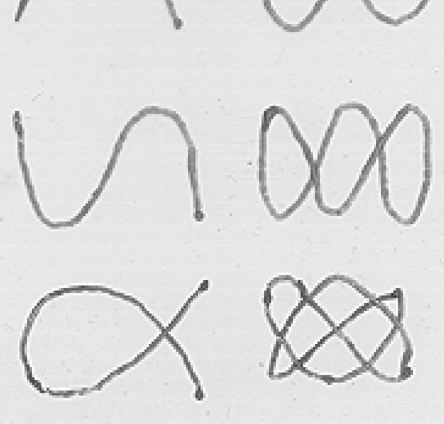
$$\cos\varphi = \frac{B_1}{B} \quad \sin\varphi = \frac{B_2}{B}$$

frekvence 1:2

Lissajous

1:3

2:3



Tlumené kmity

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - h\dot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{h}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x = 0 \qquad x = e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 + \frac{h}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0 \qquad \text{charakt. rovnice}$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{h}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

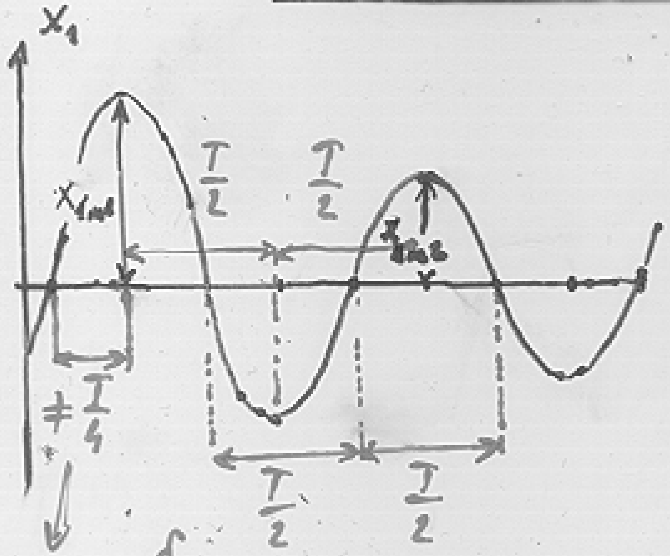
A) malé tlumení: Diskr < 0 — tlumený harmonický kmit

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega \qquad \text{kde} \quad \delta = \frac{h}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{h}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

$$x_1(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$



(úhlová) frekvence tlum. km. $\omega = \frac{2\pi}{T_1}$

konstanta tlumení $\delta = \frac{h}{2m}$ | doba kmitu

útlum $\beta = e^{+\delta T} = x_{1m1}/x_{1m2}$

logaritm. dekrement útlumu $\vartheta = \ln\beta = \delta T$

(relax. doba $\tau = \frac{1}{\delta}$)

$$T\left(\frac{1}{4} - \frac{\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\omega}}{2\pi}\right)$$

maxima:

$$-\delta\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}) - \omega\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi_1 = -\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\omega}$$

Poč. podmínky : $x_{10} = x_{10}$, $v_{10} = 0$: $x_1 = x_{10}e^{-\delta t}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\delta}{\omega}\right)$

$x_{10} = 0$, $v_{10} = v_{10}$: $x_1 = \frac{v_{10}}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t$

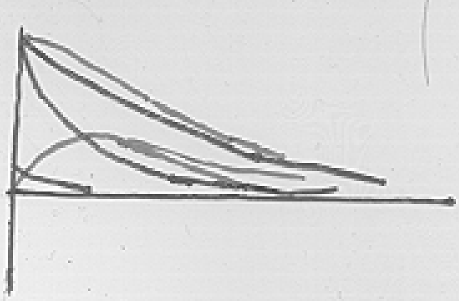
Ztráty energie : energie $E_m = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ za periodu poklesne o $(1 - e^{-2\delta T})E_m$

$$= 2T\delta E_m$$

aperiodický pohyb

B) velké tlumení : Diskr > 0 $\quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm D$ $\quad$ (D je $\sqrt{\ldots}$)

řešení $\quad C_1 e^{(-\delta+D)t} + C_2 e^{(-\delta-D)t}$



max. jediný průchod nulovou polohou

(řešení $C_1 e^{Dt} + C_2 e^{-Dt} = 0$

$\frac{C_1}{C_2} = -e^{-2Dt}$)

poč. podm. $x_{10} = x_{10}$ $\quad v_{10} = 0$ $\quad x_1 = \frac{x_{10}}{D} e^{-\delta t} \left[\delta \, \mathrm{sh}\, Dt + D \, \mathrm{ch}\, Dt\right]$

$\left(\mathrm{ch}\, y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \mathrm{sh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$

$x_{10} = 0 \quad v_{10} = v_{10} \quad x_1 = \frac{v_{10}}{D} e^{-\delta t} \mathrm{sh}\, Dt$

C) mezní případ : mezní aperiodický pohyb

Diskr. = 0 $\quad$ řešení $\quad e^{-\delta t} \quad t e^{-\delta t}$ $\quad \left(\lim\limits_{\alpha_2 \to \alpha_1} \frac{e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)$!

obecné $\quad x_1 = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t)$

poč. podm. $x_{10} = x_{10}$ $\quad v_{10} = 0$ $\quad x_1 = x_{10} e^{-\delta t}(1 + \delta t)$

$x_{10} = 0$ $\quad v_{10} = v_{10}$ $\quad x_1 = v_{10} t e^{-\delta t}$

graf viz ↑ $\quad$ opět max. 1 průchod nulovou polohou

Aplikace : ustalování ruček, galvanometru

balistické kyvadlo, bal. galv. - měření impulzu

Vynucené kmity

$$m \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + k x_1 = \overbrace{F_0 \cos \omega t}^{\text{Budicí síla } F}$$

$$x_1 = \underbrace{C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}}_{\substack{\text{obecné řešení} \\ \text{homog. rov.} \\ \text{přechodový jev}}} + \underbrace{X \cos(\omega t + \varphi)}_{\substack{\text{partikul. řešení} \\ \text{nehomog. r.} \\ \text{ustálený stav}}}$$

$x_1 = Re\left(X^* e^{i\omega t}\right)$ $\qquad$ $F = Re\left(F^* e^{i\omega t}\right)$

$\downarrow$ komplexní amplitudy (j = "jot")

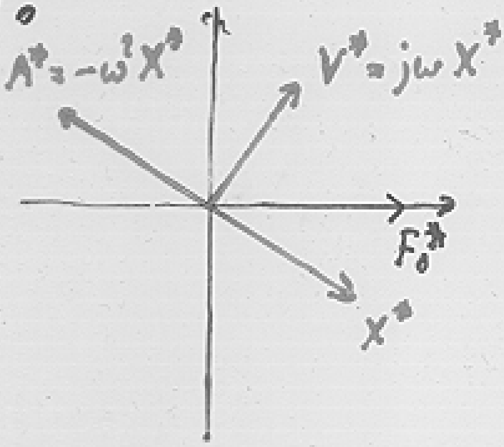
$\dot{x}_1 = Re\left(i\omega X^* e^{i\omega t}\right) = v$

$\ddot{x}_1 = Re\left(-\omega^2 X^* e^{i\omega t}\right)$

nehomog rovnici splníme, je-li

$$-m\omega^2 X^* + j\omega h X^* + kX^* = F_0^*$$

$$X^* = \frac{F_0}{-m\omega^2 + i\omega h + k}$$



$$= \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\cdot 2\delta}$$

amplitude $X = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ $\qquad$ fáze $\varphi = -\operatorname{arctg}\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

! převr. hodnota !

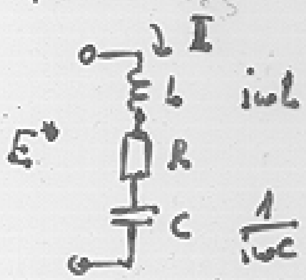
Rezonance výchylky – viz skripta

rychlosti

$$V^* = i\omega X^* = \frac{F_0}{h + i\omega m - \frac{ik}{\omega}} = \frac{F_0/h}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \doteq \frac{F_0/h}{1+2iQx}$$

$Q = \dfrac{\omega_0 m}{h} = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$ $\qquad$ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\qquad$ $x = \dfrac{\omega-\omega_0}{\omega_0}$ relat. rozladění $\left(x \doteq \ln\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

(elektrická analogie



$$I^* = \frac{E^*}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}}$$

$E \leftrightarrow F_0$

$R \leftrightarrow h$

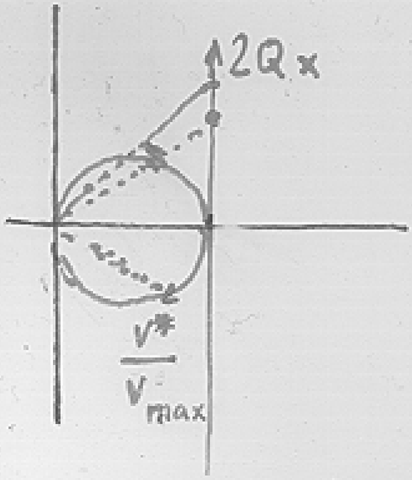
$L \leftrightarrow m$

$C \leftrightarrow \frac{1}{k}$

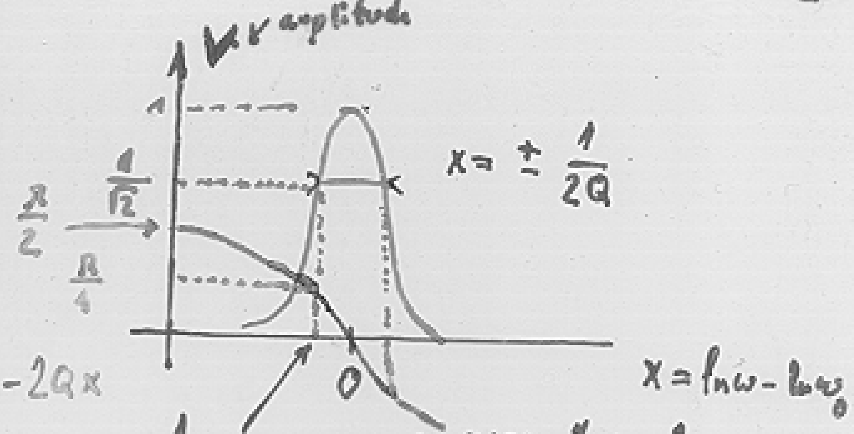
$I \leftrightarrow V$

$Z \leftrightarrow Z_m$ (mech. impedance)

$G \leftrightarrow G_m$ $\quad \frac{F_0}{V}$ admit.



tg φ = −2Qx



- $\frac{1}{Q}$ je relativní šířka "piku" měřená pro $\frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$

další interpretace Q

střední výkon ztracený v oscilátoru $P = \int_0^T \underset{F_0 \cos\omega t}{F(t)}\, \underset{Re(v^*)\cos\omega t - Im(v^*)\sin\omega t}{v(t)}\, dt$

$$P = \frac{1}{2} F_0 \cdot Re(v^*) = \frac{1}{2} F_0 \underset{\text{amplituda rychlosti}}{V} \underset{\text{účiník}}{\boxed{\cos\psi}}$$

také $P = \int h\, v(t) \cdot v(t)\, dt = \frac{1}{2} h V^2$

- tedy $\frac{1}{Q}$ je zároveň relativní šířka "piku" výkonu pro pokles na $\frac{1}{2}$ (FWHM)
- (činitel přepětí) $\frac{\text{"setrvačná síla"}}{\text{"brzdicí síla"}}$ $\frac{m\omega_0 V}{hV}$

Energie kmitů $E_m = \frac{1}{2} m V^2$

ztráta energie za periodu $E_z = T \cdot P = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2} h V^2 = \frac{2\pi}{Q} \cdot E_m$

tedy při rezonanci $\underline{\frac{E_m}{E_z} = \frac{Q}{2\pi}}$ $\left(= \frac{1}{2T\delta}\right)$

Vázané kmity

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_p(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_p(x_2 - x_1)$$

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \qquad x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1)$$

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(k + 2k_p)(x_2 - x_1) \qquad x_2 - x_1 = A_2\cos(\omega_1 t + \alpha_2)$$

$$x_1 = \frac{A_1}{2}\cos(\omega_0 t + \alpha_1) - \frac{A_2}{2}\cos(\omega_1 t + \alpha_2) \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$x_2 \qquad\qquad + \qquad\qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_p}{m}}$$

SOUSTAVA HMOTNÝCH BODŮ A TUHÉ TĚLESO

počet stupňů volnosti

Soustava N hmotných bodů **volných** — 3N

$m_i, \vec r_i(t)$ $\quad i = 1, \dots, N$

s V vazbovými podmínkami — 3N − V

Tuhá soustava ≡ **tuhé těleso** — 6

(3 body se třemi podmínkami)

Kinematika tuhého tělesa („tuhé soustavy")

pohyb translační + otáčivý (rotace)

(postupný, posuvný)

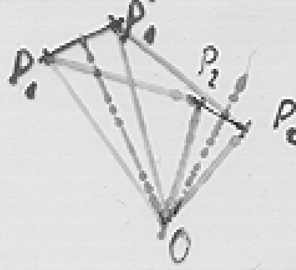
rotace kolem pevné osy

$$\vec v = \vec\omega \times \vec r$$

kolem pevného bodu

konečné otočení:

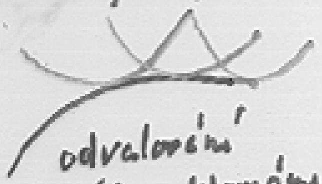
v rovině, kolem bodu: na kulové ploše



pro $\Delta t \to 0$

okamžitá osa otáčení

polodie, herpolodie



odvalování (bez klouzání)

(bod) podélný kruh

$$\vec v = \vec V(t) + \vec\omega(t) \times \vec r$$

okamžitá úhlová rychlost

($\vec r = \vec a + \vec r'$ – stejné rychl.)

$$\vec V' = \vec V + \vec\omega \times \vec a$$

$$\vec v = \vec V' + \vec\omega \times \vec r'$$

na volbě ref. bodu $\vec V$ závisí, $\vec\omega$ nezávisí

Pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\vec p_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec r}_i) = \underset{\text{síly vnější}}{\vec F_i^E} + \sum_k \underset{\text{vnitřní – od k-tého bodu}}{F_{ik}}$$

III. N. Z.: $\vec F_{ik} = -\vec F_{ki}$ → vyjde 0

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\sum_i p_i}_{\text{celková hybnost soustavy } \vec P} = \underbrace{\sum \vec F_i^E}_{\text{výslednice vnějších sil působících na soustavu } \vec F^E} + \boxed{\sum_{i,k} \vec F_{ik}}$$

<u>věta o hybnosti soustavy – 1. věta impulsová</u>

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E$$

zavedení pojmu "<u>hmotný střed</u>" (těžiště)

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \;, \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \text{ celková hmota soust.}$$

lze formulovat jako větu o pohybu hmotného středu

$$\underline{M\ddot{\vec{r}}_S = M\vec{a}_S = \vec{F}^E}$$

(pozn.:

1) pokud nás nezajímá rotace tělesa, chová se těleso jako <u>hmotný bod</u>, umístěný v hmotném středu – jsou-li vnější síly dostatečně homogenní

2) v případě tuhého tělesa spojitě vyplňujícího prostor přechází sumace v <u>prostorový integrál</u>

hustota $\rho = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V}$ "$dm = \rho \cdot dV$"

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho\, dV \;, \quad M = \int_V \rho\, dV$$

totéž pro moment hybnosti:

$$\frac{d}{dt}\vec{b}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \Big(\vec{F}_i^E + \sum_k \vec{F}_{ik}\Big) \quad \text{sečtením}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\substack{\vec{B} = \sum_i \vec{b}_i \\ \text{celkový moment} \\ \text{hybnosti s.h.b.}}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E + \boxed{\sum_{i,k} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}}$$

pro $i \neq k$ dá dvojice ik a ki:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} = (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik} = 0 \text{ pro } \underline{\text{centrální síly}}$$

$\vec{M}^E = \sum \vec{M}_i^E$ celkový moment vnějších sil působících na s.h.b.

<u>věta o momentu hybnosti soustavy – 2. věta impulsová</u>

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^E$$

Pro <u>tuhé těleso</u> obě věty představují <u>pohybové rovnice</u>

Důsledky věty o zachování: (zejména pro isolovanou soustavu, t.j. nepůsobí-li vnější síly)

$$\vec{F}^{\,E} = 0 \implies \vec{P} = \overrightarrow{konst}$$

$$\vec{M}^{\,E} = 0 \implies \vec{B} = \overrightarrow{konst}$$

Energie s.h.b.:

kinetická energie – píšeme-li $\vec{v}_i = \vec{V}_s + \vec{v}_i^{\,s}$

rychlost hm.s. ($\vec{V}_s$); rychlost vůči h.s. ($\vec{v}_i^{\,s}$)

$$E_k = \sum_i \frac{m_i}{2}(\vec{V}_s + \vec{v}_i^{\,s})(\vec{V}_s + \vec{v}_i^{\,s}) = \sum_i \frac{m_i}{2}\Big(V_s^2 + \underbrace{2\vec{V}_s\vec{v}_i^{\,s}}_{\text{dá } 0} + v_i^{s\,2}\Big) =$$

(A) $= \frac{1}{2}MV_s^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{s\,2}$ (**Königova věta**)

$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{s\,2}$ – kin. energie pohybu h. bodů soustavy vůči jejímu h. středu

$\frac{1}{2}MV_s^2$ – kin. energie "h. středu", t.j. bodu o hmotnosti rovné celkové hmotnosti soustavy M pohybujícího se rychlostí h. středu

(B) přírůstek kinetické energie s.h.b. $E_k^{II} - E_k^{I}$ se rovná práci A vykonané vnějšími i <u>vnitřními</u> silami při přechodu ze stavu I do stavu II

(C) jsou-li vnější i vnitřní síly konservativní, platí <u>zákon zachování mechanické energie</u>

$$E_k^{I} + E_p^{I} = E_k^{II} + E_p^{II}$$

(D) pro tuhé těleso ("tuhou s.h.b.") lze ve tvrzeních B, C zmínku o vnitřních silách vynechat

---

Poznámky:

1) rovnice zachování – důsledky invariance pohyb. rovnic vůči posunutí v čase a v prostoru (homogenita prostoru) a otočení v prostoru (isotropie) – t.j. vůči transformacím (tvoří Lieovu grupu – závislost na spojitě se měnícím parametru, teorém Emy Noetherové)

2) Problém dvou těles –

hm. stř. (těžiště) se pohybuje rovnoměrně, lze řešit v "těžišťové" vztažné soustavě

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

v soust. hm. stř. je

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

buď tohle dosadit do první rovnice ← $\vec{r} = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1$

za $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – hmotnost m_1, ale jiná síla

Nebo $\overset{\text{de}}{}$ rovnice vydělit m_i a odečíst

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) F(r) \cdot \frac{-\vec{r}}{r}$$, tedy pro relativní radiusvektor $\vec{r}$

dostanu rovnici

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{kde} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ je redukovaná hmotnost

– pohyb v centrál. poli (což snad stačí, ve skriptech úvahy a přibližnosti řešení)

3) Soustavy s proměnnou hmotností

dM<0: (raketa)

$$\underbrace{\overbrace{(M+dM)(\vec{v}+d\vec{v}) - dM\,\vec{v}_1}^{\text{po}}}_{\text{po}} \underbrace{\overbrace{- M\vec{v}}^{\text{před}}}_{\text{před}} = \vec{F}^E . dt$$

(nad členy: raketa, splodiny, před – rak. + pal.)

dM>0 (kapka)

$$M \cdot d\vec{v} - dM(\vec{v}_1 - \vec{v}) = \vec{F}^E dt$$

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v} \qquad M\vec{a} = \vec{F}^E + \underbrace{\overset{<0}{\frac{dM}{dt}} \vec{u}}_{\text{tah reaktivního motoru}}$$ Meščerského rovnice

Pro $\vec{F}^E = \vec{0}$: $\quad d\vec{v} = \dfrac{dM}{M}\vec{u}$ a pro konstantní $\vec{u}$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{u} \cdot \ln \frac{M_k}{M_p} = -\vec{u} \ln \underbrace{\frac{M_p}{M_k}}_{\text{Ciolkovského číslo}}$$

(Ciolkovského rovnice) (Pozn.: vícestupňové rakety)

4) <u>Praktické příklady</u>: zpětný náraz při výstřelu, zákluz hlavně, bezzákluzové zbraně, balistické kyvadlo

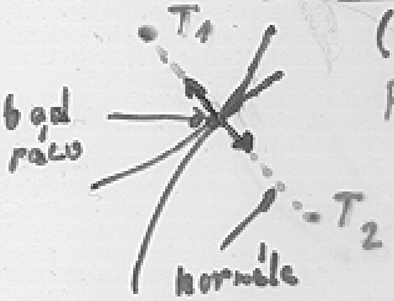
$$mv = (m+M)v_1 \qquad \frac{m+M}{2}v_1^2 = (m+M)gh$$

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

jiné "balistické" metody měření (balistický galvanometr)

5) <u>Rázy těles, srážky částic</u>
(obecně komplikované – i vliv tření, vlastností povrchu)

ráz: <u>středový × výstředný</u>
(centrální) (excentrický)
pro koule vždy (těžiště mimo normálu)



<u>přímý × šikmý</u> opak

· těžiště se pohybují ve směru normály

dělení

A) <u>(dokonale) nepružný</u> $u = \dfrac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}$

B) <u>(dokonale) pružný</u> (restituce)

C) <u>nedokonale pružný</u>
(viskoelast. deformace)
přímý ráz koulí

$c_1 - u$ $\quad -(c_2-u)$

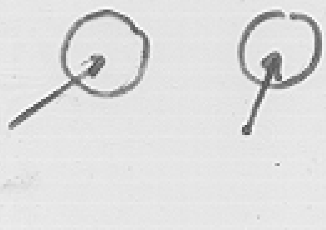
$v_1 = u-(c_1-u)$
$v_2 = u-(c_2-u)$
pro $m_1 = m_2$ se rychlosti vymění

$v_1 = u-k(c_1-u)$
$v_2 = u-k(c_2-u)$

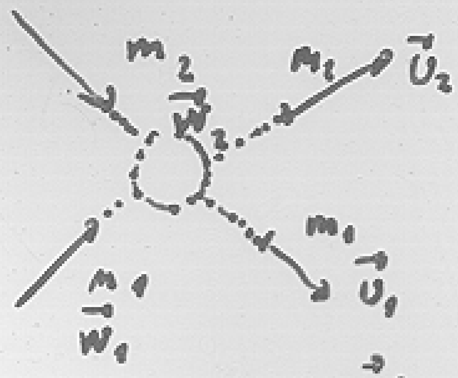
$u = v_1+v$

(k – koef. restituce (Newton)
slonovina $k = 0.81$
olovo $k = 0.20$

šikmý ráz
(hladké pružné koule



srážka dvou částic (hmot. bodů)
pružné



$$m_1\vec{w}_1 + m_2\vec{w}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{m_1}{2}w_1^2 + \frac{m_2}{2}w_2^2 = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2$$

Těžišťový systém: zákon zach. energie ⇒

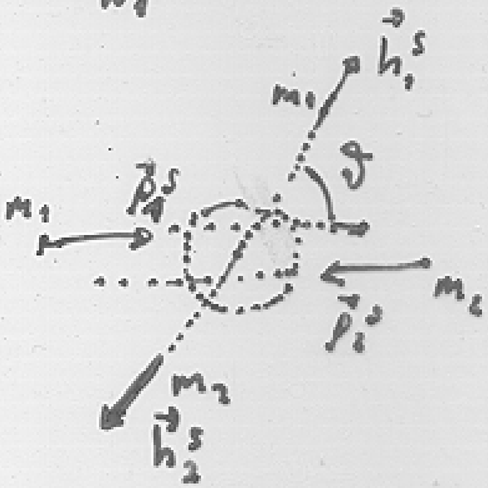
$\Rightarrow w_1^s = v_1^s$ $\vec{w} = \vec{w}_1 - \vec{w}_2$, $v = w$

obecně:

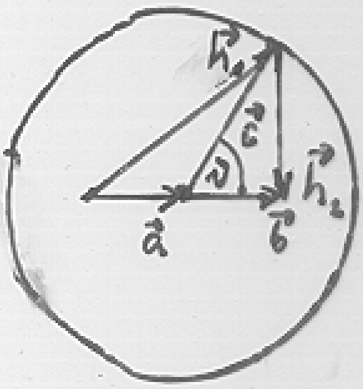
$$\vec{h}_1 = \overbrace{\mu w \vec{\nu}}^{\vec{c}} + \overbrace{\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}^{\vec{a}}$$

$$\vec{h}_2 = -\mu w \vec{\nu} + \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}_{\vec{b}}$$

jednotk. vektor ve směru určném úhlem ϑ



(řešení konkrétní pro daný průběh síly)

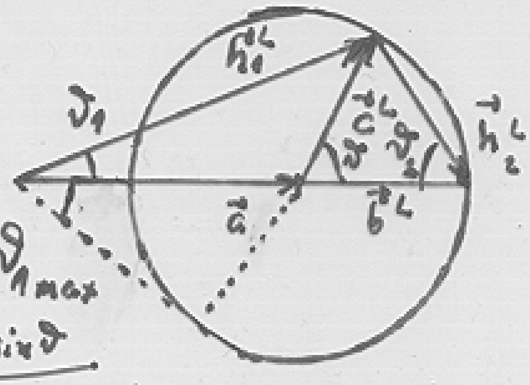


V laborat. soustavě $\vec{p}_2 = \vec{0}$

tedy $c^L = b^L$

a před srážkou $\vec{p}_1^L \parallel \vec{v}_S = \frac{m_1\vec{w}_1^L}{m_1+m_2}$

také obdobně (pro $m_1 > m_2$



a $\sin\vartheta_{1max} = \frac{b^L}{a^L} = \frac{m_2}{m_1}$

(max úhel, pod kterým se odchýlí dopadající – těžší částice

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{c^L\sin\vartheta}{c^L\cos\vartheta + a^L} = \frac{m_2\sin\vartheta}{m_2\cos\vartheta + m_1}$$

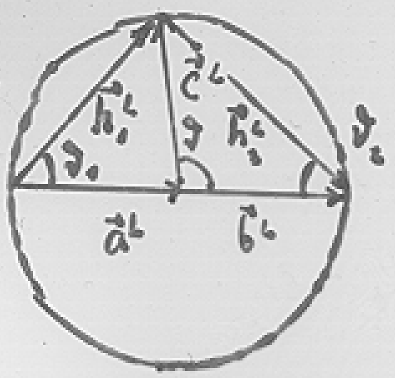
a $\vartheta_2 = \frac{\pi - \vartheta}{2}$

Pro $\vartheta = \pi$ a $m_1 > m_2$ je $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$

— " — $m_1 < m_2$ je $\vartheta_1 = \pi$, $\vartheta_2 = 0$

Spec. pro $m_1 = m_2$: $\vartheta_1 = \frac{\vartheta}{2}$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$

Pro $m_1 = m_2$:



$\vartheta_1 = \frac{\vartheta}{2} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$

... body se rozletí pod pravým úhlem

s výjimkou $\vartheta = \pi$

– když si body vymění rychlosti (nejlépe se odvodí v těžišťové soustavě)

5) Zjednodušení soustavy sil pro tuhé těleso

v podstatě nepotřebujeme, ale může zpřehlednit či zjednodušit problém (technické aplikace)

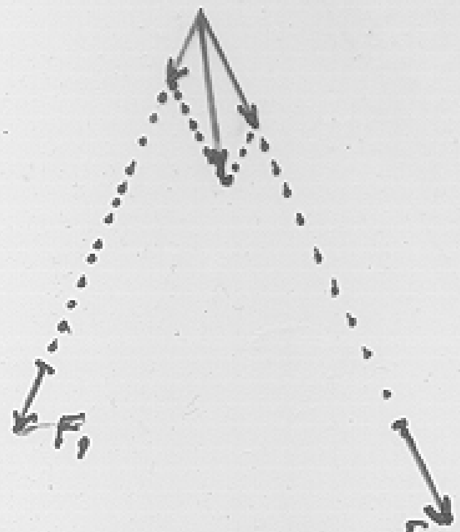
ekvivalentní úpravy soustavy sil: musí zachovat $\sum \vec{F}_i^E$ a $\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$

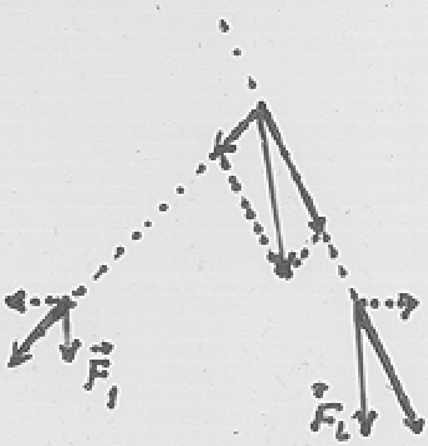
posun působiště síly podél „vektorové přímky"

(„intuitivní" odvození) + ověření ekvivalence

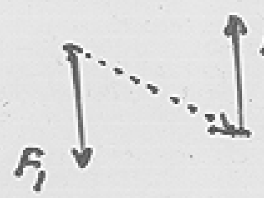
skládání sil s různoběžnými vekt. přímkami

s rovnoběžnými přímkami





Nelze použít pro dvojici sil:
(moment dvojice sil $\vec{d} \times \vec{F}_2$)



– zvláštní útvar

Otázka nezávislosti účinku dvojice sil se stejným momentem na poloze referenčního bodu, velké síly a ramene síly – (!)

·možnost <u>přenosu</u> všech sil <u>do libovolného</u> zvoleného <u>bodu</u> (třebas těžiště) s připojením příslušných silových dvojic – součet jejich momentů = "<u>moment výsledné silové dvojice</u>" $\vec{M}^D$

+ výslednice sil $\vec{F}$ – zcela popisuje účinek silového systému

změna ref. bodu → výslednice sil se nemění

moment výsledné silové dvojice se může změnit

Možnost zvolit ref. bod tak, že $\vec{F} \parallel \vec{M}^D$

(složka $\vec{M}^D$ kolmá ke směru síly je nulová)

homogenní gravitační silové pole:

zvolíme-li za referenční bod těžiště, je

$$\vec{M}^D = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{g} = 0$$

pro libovolnou orientaci grav. pole ⇒ hm. střed lze chápat jako "působiště" grav. síly (i když normálně je působiště určeno až na posun podél vekt. přímky)

proto <u>hm. střed ≡ "těžiště"</u>

<u>Rovnováha tuhého tělesa</u> ... $\vec{F}^G = 0$, $\vec{M}^G = 0$

– "statická" rovnováha – těleso <u>zůstane</u> v klidu, (pokud se mu předtím nepohybovalo)

–podmínky nutné, ne dostatečné

třeba nepohnulo atd.

těleso podrobené <u>vazbám</u> (pohyb po podložce

výhodné užít energetických úvah

rotace kolem pevné osy (reakce: ložiska)

polohy koule na rovné či zakřivené podložce

klasifikace: rovnovážné polohy

stálá (stabilní)	minimum	
vratká (labilní)	maximum	
volná (indiferentní)	konstantní	
	pot. energie E_p	

Rotace tuhého telese kolem pevné osy

Element. přístup: Raději alternativní odvození

$$\underline{E_k} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{J}\Big)\omega^2 = \underline{\frac{1}{2} J \omega^2}$$

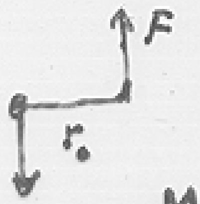
$v_i = \omega R_i^2$ J moment setrvačnosti vzhledem k ose

vzdálenost bodu od osy otáčení

(analogie k postup. pohybu: $m \leftrightarrow J$, $v \leftrightarrow \omega$

Pohybové rovnice: $\frac{d}{dt} E_k = J\omega \frac{d\omega}{dt}$ = výkon dvojice sil $= F \cdot v = F\omega r_0 =$

Alternativní odvození



$= M\omega$

$M = F r_0$ = moment silové dvojice

Tedy pohyb. rovnice

$$\underline{\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = M} \quad \text{a pro konstantní } J: \quad \underline{J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M}$$

Př.: Moment setrvačnost. homogenního válce (délka l, průměr R)

$$M = \int_V r^2 \rho \, dV =$$

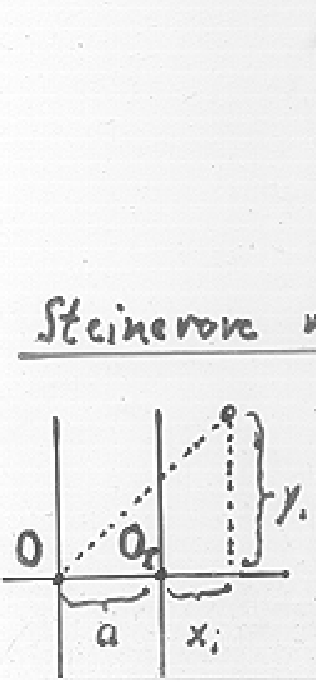
$$= \int_{r=0}^{R} \rho r^2 \underbrace{l \cdot 2\pi r \cdot dr}_{dV} =$$

$$= \rho l \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho l \cdot \frac{R^4}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi R^2 l \cdot \rho \cdot R^2 = \underline{\frac{1}{2} M R^2} = M R_{gyr}^2$$

gyrační poloměr $= \frac{R}{\sqrt{2}}$

Steinerova věta - 2 rovnoběžné osy, jedna prochází těžištěm

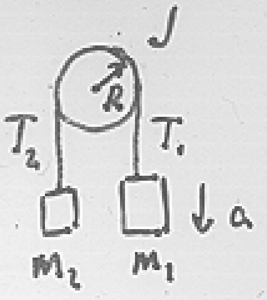


$$J = \sum_i m_i \left[(a + x_i)^2 + y_i^2\right] =$$

$$= \sum_i m_i \left[a^2 + \underbrace{2 a x_i}_{\to\, 0} + x_i^2 + y_i^2\right], \text{ tedy } \underline{J = M a^2 + J_T}$$

Příklady:

1) Těžká kladka



$$J\frac{d\omega}{dt} = R(T_1 - T_2)$$

$$m_1 a = m_1 g - T_1 \qquad v = R\omega$$

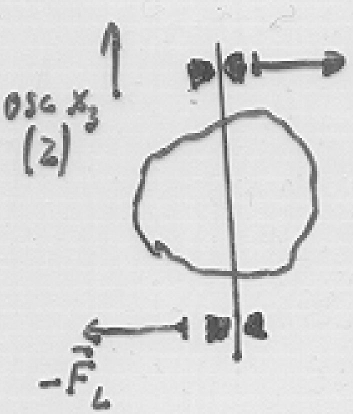
$$m_2 a = T_2 - m_2 g \qquad a = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{Ja}{R} = R(m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a)$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right)a = (m_1 - m_2)g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$

„pozvolný" pohyb



Síly od "ložisek" (dvojice sil) vytvářejí silové momenty v rovině xy, x_1x_2, příspěvek ve směru třetí osy je nulový

$$B_3 = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_3 = \sum m_i (x_{1i} v_{2i} - x_{2i} v_{1i}) = \sum_i m_i R_i^2 \dot{\varphi}_i$$

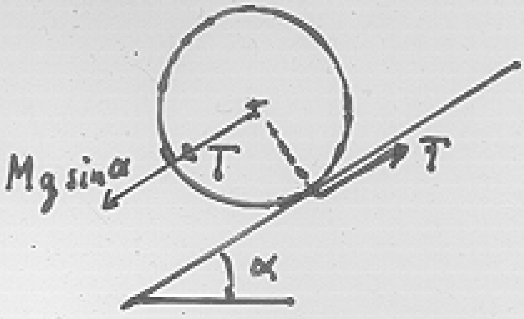
index (i) vynechán → $R\cos\varphi$ $\dot{R}\sin\varphi + R\dot{\varphi}\cos\varphi$ $R\sin\varphi$ $\dot{R}\cos\varphi - R\dot{\varphi}\sin\varphi$

je-li $\dot{\varphi}_i = \omega_3$ pro všechna i, je $B_3 = \omega_3 \cdot \underbrace{\sum m_i R_i^2}$

moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose $\boxed{J}$

gyrační poloměr (poloměr setrvačnosti) $R_0 = \sqrt{J/M}$)

2) Valení po nakloněné rovině



$$Mg\sin\alpha - T = Ma$$

$$T\cdot R = J_T\ddot{\varphi} = J_T\frac{a}{R}$$

$$Mg\sin\alpha = \left(M + \frac{J_T}{R^2}\right)a$$

$$a = \frac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{J_T}{R^2}}$$

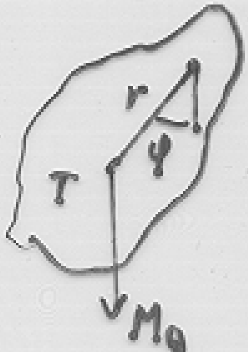
Nebo: je-li J mom. setrvač. vůči ose procházející dotykem

$$J\ddot{\varphi} = J\frac{a}{R} = R\cdot Mg\sin\alpha \Rightarrow a = \frac{Mg\sin\alpha}{\frac{J}{R^2}}$$

ale (St. v.) $J = J_T + MR^2$

(Lze vyjít i ze zachování energie) (čím větší polár. setrv., tím pomalejší)

3) Fyzické kyvadlo



$$J\ddot{\varphi} = -Mgr\sin\varphi$$

malé rozkyvy: $\sin\varphi \sim \varphi$

$$\varphi = \Phi\sin(\Omega t + \varepsilon_\varphi)$$

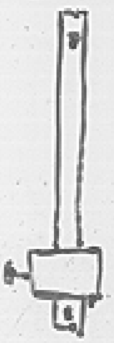
(neplést si $\omega = \dot{\varphi}$ a Ω)

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgr}{J}},$$ doba kmitu $$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgr}}$$

matematické kyvadlo – spec. případ $J = Mr^2 \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{r}}$

redukovaná délka fyzic. kyvadla $l_r = \frac{J}{Mr}$ (problémy s nití!!!)

reverzní kyvadlo



$$T = T' \Rightarrow \frac{J}{Mr} = \frac{J'}{Mr'} \Rightarrow (\text{S.v.})\ \frac{J_S + Mr^2}{r} = \frac{J_S + Mr'^2}{r'}$$

tedy $$r'^2 - r'\frac{J_S + Mr^2}{Mr} + \frac{J_S}{M} = 0$$

kořeny $r_1' = r$, r_2 – vyplývá $r_1 + r_2 = \frac{J_S + Mr^2}{Mr} = \frac{J}{Mr} =$ redukovaná délka

Velké rozkyvy: (jen pro zájemce, nepovinné)

$$\frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 + Mgr\underbrace{(1-\cos\varphi)}_{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = E$$

$$\frac{d\varphi}{dt} \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2E}{J} - \frac{4Mgr}{J}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{2Mgr}{E}\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{2E}{J}}\cdot t \;(+C)$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = u$$

$$\varphi = 2\arcsin u$$

$$d\varphi = \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \sqrt{\frac{E}{2J}}\, t \qquad k = \sqrt{\frac{2Mgr}{E}}$$

A) $k=1$ $\qquad u = \operatorname{tgh}\sqrt{\frac{E}{2J}}\, t$

B) $k<1$ (rotace)

definice neúplného eliptického (čili Lagrangeova) integrálu 1. druhu

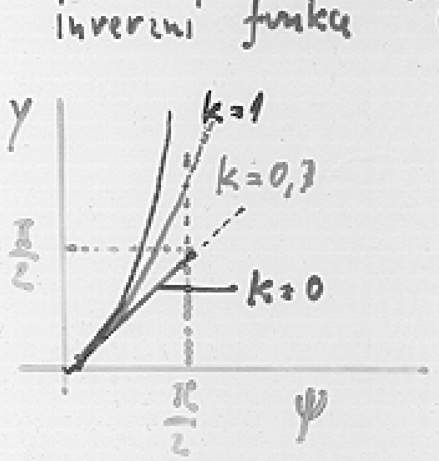
$$\int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k,\psi) = y$$

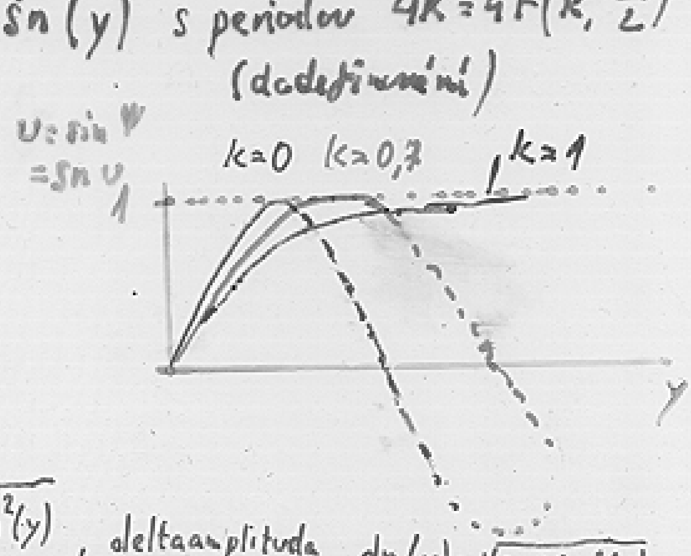
subst. $u = \sin\psi$ $\qquad$ k ... modul ($=\arcsin\alpha$)

úplný integrál: $F(k, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ ψ ... „amplituda"

inverzní funkce $\quad$ sinusamplituda (též sinam(y)) $u = \mathrm{sn}(y)$ s periodou $4K = 4F(k, \frac{\pi}{2})$

(dodefinování)





kosinusamplituda $\mathrm{cn}(y) = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2(y)}$, deltaamplituda $\mathrm{dn}(y) = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(y)}$

Pro $k<1$

$$u = sn\left(\sqrt{\frac{E}{2J}}\cdot t\right)$$

(kývání)

c| Pro $\underline{k>1}$ substituce $u' = ku = u/k'$, kde $k' = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{E}{2Mgr}} = u_{max}$

$$u = \sqrt{\frac{E}{2Mgr}}\, sn\left(\sqrt{\frac{Mgr}{J}}\, t\right) \qquad \varphi = 2\arcsin u$$

perioda: $$T = \frac{2}{\pi} T_m \cdot F\left(u_{max}, \frac{\pi}{2}\right) = T_m\left(1 + \left(\frac{1}{2}u_{max}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}u_{max}^2\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}u_{max}^3\right)^2 + \dots\right)$$

kde $T_m = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgr}}$ perioda pro malé rozkyvy

Rotace tuhého tělesa kolem pevného bodu

$$\vec{B} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \underset{\uparrow \atop \vec{\omega}\times\vec{r}_i}{\vec{v}_i} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$= \sum_i m_i \left(\vec{\omega} \cdot r_i^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\,\vec{r}_i \right)$$

$$B_k = \sum_i m_i \big(\underbrace{x_{q,i} x_{q,i}}_{x_{1,i}^2 + x_{2,i}^2 + x_{3,i}^2} \omega_k - x_{k,i} x_{l,i} \omega_l \big)$$

$$= \sum_i m_i \left(x_{q,i} x_{q,i} \delta_{kl} - x_{k,i} x_{l,i} \right) \omega_l$$

$$B_1 = \left(\sum_i m_i \left(x_{1,i}^2 + x_{2,i}^2 + x_{3,i}^2 - x_{1,i}^2 \right) \right) \omega_1 + \left(\sum_i m_i x_{1,i} x_{2,i} \right) \omega_2 + \dots$$

a.t.p. tedy

$$B_1 = J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3$$
$$B_2 = J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3$$
$$B_3 = J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3$$

souhrnně $B_k = J_{kl}\,\omega_l$

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{J}\,\vec{\omega}$$

(lineární zobrazení)

kde $J_{kl} = \sum_i m_i \left(x_{q,i} x_{q,i} \delta_{kl} - x_{k,i} x_{l,i} \right)$

tedy např. $J_{11} = \sum_i m_i \left(x_{2,i}^2 + x_{3,i}^2 \right), \dots$

a $J_{12} = \sum_i m_i x_{1,i} x_{2,i}, \quad J_{21} = J_{12}, \dots$

složky tensoru momentu setrvačnosti

Tensor setrvačnosti J_{ik} – momenty vůči osám souřadnic J_{ii}

deviační momenty J_{ik}, $i \neq k$

souhlasí s definicí pro pevnou osu

symetrický tensor $J_{ik} = J_{ki}$

9. 4.

Kinet. energie

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \underbrace{(\vec\omega \times \vec r_i)}_{\vec a}(\underset{\uparrow \atop \vec b}{\vec\omega} \times \underset{\uparrow \atop \vec c}{\vec r_i}) = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec\omega(\vec r_i \times (\vec\omega \times \vec r_i)) =$$

$$= \frac{1}{2}\vec\omega\vec B$$

tedy $E_k = \frac{1}{2}\vec\omega\vec B = \frac{1}{2}\vec\omega\overleftrightarrow{J}\vec\omega = \frac{1}{2}\underbrace{\omega_k J_{kl}\omega_l}$

(kvadratická forma v ω_k)

s tím souvisí moment setrvačnosti J vůči libovolné ose $\vec\nu$ — jednotk. vektor, dosaď místo $\vec\omega$

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 \Rightarrow J = \frac{1}{\omega^2}\vec\omega\overleftrightarrow{J}\vec\omega = \frac{\vec\omega}{\omega}\overleftrightarrow{J}\frac{\vec\omega}{\omega}, \text{ tedy}$$

$$J = \vec\nu\overleftrightarrow{J}\vec\nu$$

Pojem tenzoru .. 2 řádu .. transformace složek jako se transformují součiny složek vektorů – t.j. jak?

obecně $\vec a = a_i\vec e_i$ $\quad \vec e_i' = \alpha_i^k \vec e_k$ – transformace vektorové báze

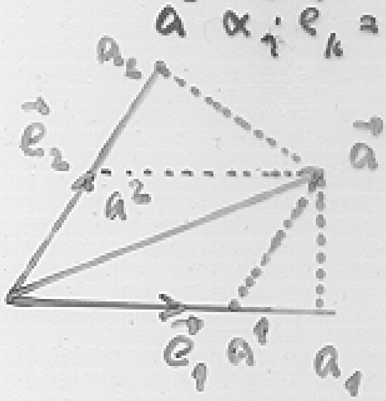
$= a^i\vec e_i$ sčítá se přes stejný horní a dolní index (předp. neortonormální bázi!!!)

$\Rightarrow$

$$a^{i'}\vec e_i' = a^i\vec e_i$$

$$a^{i'}\alpha_i^k\vec e_k = a^k\vec e_k \quad \Rightarrow a^i = \alpha_k^i a^{k'}$$

$$a^{i'} = \beta_k^i a^k$$ kontravariantní složky vektoru



$a_i = (\vec a\vec e_i)$ kovariantní složky:

$$a_i' = \alpha_i^k a_k$$

$$a_i = \beta_i^k a_k'$$

$$\alpha_i^k\beta_k^m = \delta_{im}$$

$$\alpha_k^i\beta_m^k = \delta_{im}$$

<u>Skalární součin</u> $\vec{a}\cdot\vec{b} = a^i\vec{e}_i\, b^k\vec{e}_k = a^i b^k \cdot \underbrace{(\vec{e}_i\vec{e}_k)}_{g_{ik}} = g_{ik}a^i b^k$

složky metrického tenzoru g_{ik}

$a^i \to ?\ a_i$

v ortonormální bázi $g_{ik} = \delta_{ik}$

$a_i = (\vec{a}\vec{e}_i) = a^k\vec{e}_k\vec{e}_i$

tedy $a_i = g_{ik}a^k$ ... snižování indexu

$g^{li}a_i = g^{li}g_{ik}a^k = a^l$ ... zvyšování indexu

(inverzní matice) $g^{li}g_{ik} = \delta_{lk} \Rightarrow g^l_k = \delta_{lk}$

transformace $g'_{ik} = \alpha^l_i \alpha^m_k g_{lm}$ transformuje se

<u>stejně jako součin složek vektorů</u> $a'_i b'_k = \alpha^l_i \alpha^m_k a_l b_m$ ... <u>definice tenzoru</u>

$d^{\dots lm}_{ijk}$

"<u>kolmý tenzor</u>" g_{ik} (δ_{ik})
(izotropní)

dyada $(\vec{a}\,\vec{b})$ střední! — <u>dyadický součin</u> vektorů: $c_{ij} = a_i b_j$

<u>Operace s tenzory</u>

<u>sčítání</u>

<u>násobení</u> $a_{ij}b_k{}^m = c_{ijk}{}^{\dots m}$, $r_i r_j = f_{ij}$

<u>úžení</u> $d_{ij}{}^{ik} = e_j{}^{\cdot k}$ $f_i{}^i = h$ skalár tenzor řádu o 2 nižšího

"<u>přidružení</u>" = snižování a zvyšování indexů

Ortonormální báze: netřeba rozlišovat kovariantní a kontravar. složky

<u>Symetrický tenzor 2. řádu J_{ik}</u>

$J_{ik}x^i x^k = 1$ obecně kvadrika

→ spec. <u>elipsoid setrvačnosti</u>

smysl: $J_{ik}\omega_i\omega_k = 2E_k$ plocha <u>konstantní energie</u> v prostoru vektorů $\vec{\omega}$

<u>$\mathrm{grad}_{\vec{\omega}} E_k = \vec{B}$</u> má směr <u>normály</u> k této ploše

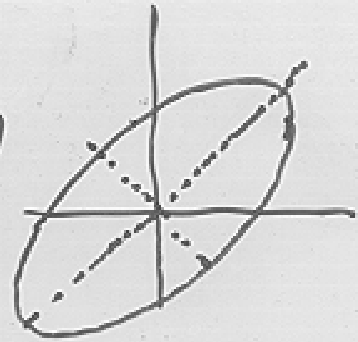
pro vzdálenost d tečné roviny od počátku: $\frac{\vec{B}}{B}\cdot\vec{\omega} = d \Rightarrow d = \frac{2E}{B}$

Převedení $\overleftrightarrow{J}$ na hlavní osy

(neplést si s diagonalizací kvadrat. formy)

vlastní vektory, vlastní čísla

$$\overleftrightarrow{J}\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}$$



$$(J_{ik} - \lambda\delta_{ik})\,\omega_k = 0$$ → hodnost matice < 3 (n)

tedy $\underline{\det(J_{ik} - \lambda\delta_{ik}) = 0 \text{ sekulární rovnice}}$ (také

algebr. rovnice → existuje alespoň 1 kořen v C

$$\overleftrightarrow{J}\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega} \Rightarrow \overleftrightarrow{J}\vec{\bar{\omega}} = \bar{\lambda}\vec{\bar{\omega}}$$

$$\vec{\bar{\omega}}\overleftrightarrow{J}\vec{\omega} = \lambda\vec{\bar{\omega}}\vec{\omega} = \bar{\lambda}\underbrace{\vec{\bar{\omega}}\vec{\omega}}_{>0 \text{ není-li } \vec{\omega} \text{ nulový}}$$ ⇒ λ je reálné

a je-li $\vec{\omega}'\vec{\omega} = 0$, je i $\vec{\omega}\overleftrightarrow{J}\vec{\omega}' = \lambda\vec{\omega}'\vec{\omega} = 0$

⇒ $\overleftrightarrow{J}$ zobrazuje prostor všech vektorů kolmých k ω do sebe → další vlastní vektory hledáme v tomto prostoru stejným způsobem

→ <u>hlavní osy</u> tens. momentu setrvačnosti, <u>$\lambda_i = J_i$ hlavní momenty</u> setrv.

Rotace tuhého tělesa kolem pevného bodu: spec. těžiště

soustava souř. pevně <u>spojená s tělesem</u> aplikace - vyvažování

(skripta: velké Ω_i!)

⇒ Eulerovy rovnice

Spec: Volná rotace - vnější síly nulové

$$\sum_i J_i\omega_i^2 = 2E_k \text{ konst}$$

$$\sum_i J_i^2\omega_i^2 = B^2 \text{ konst}$$

Eulerovy rovnice

$$B_i = I_{ij}\,\omega_j$$

Je: $B_i = J_{ij}\,\Omega_j$ ← totéž v souřad. soustavě pevně spojené s tělesem

$$\vec{M}^E = \frac{d\vec{B}}{dt} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_T + \vec{\omega}\times\vec{B}$$

tedy $\underline{\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_T + \vec{\omega}\times\vec{B} = \vec{M}^E}$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dB_1}{dt} + \Omega_2 B_3 - \Omega_3 B_2 = M_1^E \\ &\frac{dB_2}{dt} + \Omega_3 B_1 - \Omega_1 B_3 = M_2^E \\ &\frac{dB_3}{dt} + \Omega_1 B_2 - \Omega_2 B_1 = M_3^E \end{aligned}\right.$$

a dosazením za $B_i = J_{ij}\Omega_j$

$$J_{11}\dot{\Omega}_1 + J_{12}\dot{\Omega}_2 + J_{13}\dot{\Omega}_3 +$$
$$+ \Omega_2\left(J_{31}\Omega_1 + J_{32}\Omega_2 + J_{33}\Omega_3\right) - \Omega_3\left(J_{21}\Omega_1 + J_{22}\Omega_2 + J_{23}\Omega_3\right) = M_1^E$$

a t. d. : Euler. rovnice v obecném tvaru

Speciálně pro $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ (rotace kolem osy z): ⟹ smysl deviačních momentů; vyvažování statické a dynamické; prakt. aplikace (kolo, rotor turbíny) ..

$$J_{13}\dot{\Omega}_3 - \Omega_3^2 J_{23} = M_1^E$$
$$J_{23}\dot{\Omega}_3 - \Omega_3^2 J_{13} = M_2^E$$
$$J_{33}\dot{\Omega}_3 = M_3^E$$

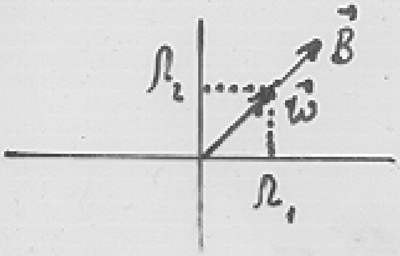
v hlavních osách

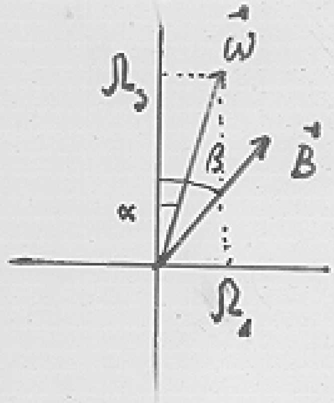
$$\left|\begin{aligned} &J_1\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\Omega_3(J_3 - J_2) = M_1^E \\ &J_2\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1(J_1 - J_3) = M_2^E \\ &J_3\dot{\Omega}_3 + \Omega_1\Omega_2(J_2 - J_1) = M_3^E \end{aligned}\right.$$

Setrvačník asymetrický volný
symetrický těžký
kulový
(běžně: symetrický s $J_{33} \gg J_{11} = J_{22}$)
!!

volný symetrický setrvačník

$J_1 = J_2$





$\Omega_3 = konst$

$$\dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \frac{\Omega_3(J_3 - J_1)}{J_1} = 0$$

$$\dot{\Omega}_2 - \Omega_1 \frac{\Omega_3(J_3 - J_1)}{J_1} = 0$$

$\Rightarrow \Omega_1 = A \sin(\Omega t + \alpha)$
$\Omega_2 = -A \cos(\Omega t + \alpha)$

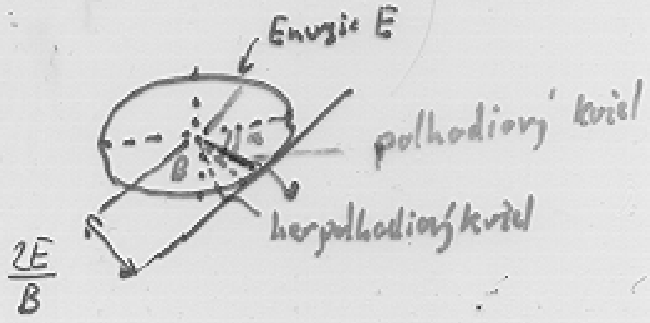
$$\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha} = \frac{J_1}{J_3}$$

$\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \Omega_3$ rychlost precese v tělese

Ω_p rychlost precese v prostoru $\Omega_p = \omega \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

regulární precese

geometrická interpretace:



volné osy rotace

stabilita rotace – polhodie
– v geometrickém smyslu
– z energetického hlediska

$$\underbrace{J_1^2 A^2 + J_3^2 \Omega_3^2}_{\parallel} = J_3^2 \omega^2$$

$2E_{kp} J_3$

stabilní

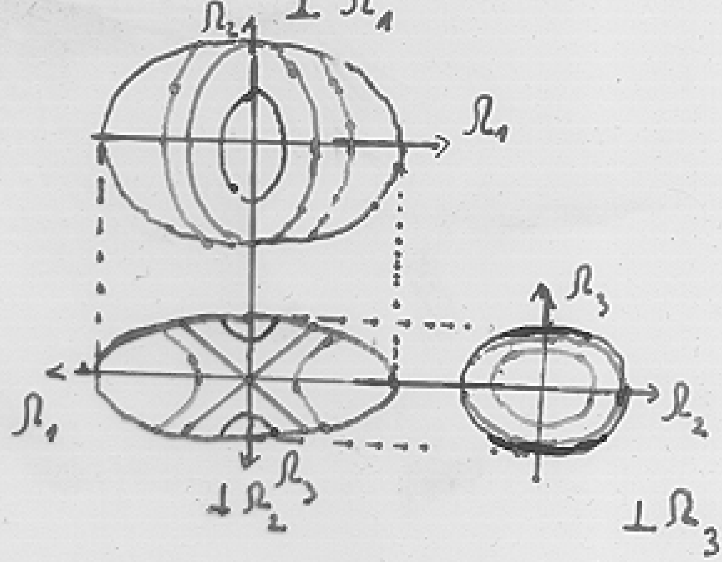
$$2E_{kk} J_3 = J_1 J_3 A^2 + J_3^2 \Omega^2 > 2E_{kp} J_3$$

je-li $J_3 > J_1$

Asymetrický setrvačník (volný)

$$\sum J_i \Omega_i^2 = 2E$$
$$\sum J_i^2 \Omega_i^2 = B^2$$

$J_1 < J_2 < J_3$



$$\Downarrow$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2EJ_3 - B^2}{J_1(J_3 - J_1)}}\ \mathrm{cn}\,\tau$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{2EJ_3 - B^2}{J_2(J_3 - J_2)}}\ \mathrm{sn}\,\tau$$

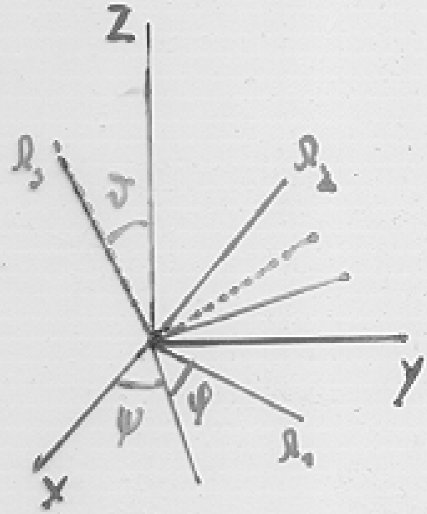
$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{B^2 - 2EJ_1}{J_3(J_3 - J_1)}}\ \mathrm{dn}\,\tau$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{(J_3 - J_2)(B^2 - 2EJ_1)}{J_1 J_2 J_3}}$$

Vlastní popis pohybu – Eulerovy úhly

nebudem dělat

$\varphi, \vartheta, \psi\ (t)$



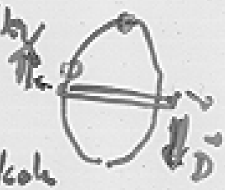
Těžký symetrický setrvačník

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}_G = \vec{r}_s \times M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\Omega}_p \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad \Omega_p = \frac{r_s M g}{B} = \frac{r_s M g}{J_3 \omega}$$

Regulérní precese – pseudoreg. p., nutace

Názorný výklad chování setrvačníku (gyroskop. efekt)



Využití: stabilizace střel, lodí, jízda (na kole), kutálení kola, gyrokompas

KONTINUUM – spojité prostředí

Základní pojmy

Ignoruje se atomová struktura, pracuje se s jakousi střední hodnotou veličiny v každém bodě.

Kinematika: a) $\underset{\text{poloha v čase } t}{y_j} = y_j(\underset{\text{poloha v čase } 0}{x_i}, t)$ – Lagrangeův popis

b) $v_i = v_i(y_j, t)$ – Eulerův popis

v_i – rychlost v bodě (nebo v_i – posunutí)

lze zavést proudnice tečna v každém bodě má směr v_i ve vybraném okamžiku

trajektorie bodů – pro stacionární proudění se shodují s proudnicí

1. Helmholtzova věta – Pohyb kontinua v okolí určitého bodu lze rozložit na pohyb translační (posuvný), rotační (otáčivý) a deformační pohyb ← hlavní náplň mechaniky kontinua

Deformace $y_j = y_j(x_i, t)$: $y_j = y_j(x_i, 0) = x_j$

$$y_j = y_j(x_i, \Delta t) = y_j(x_i)$$

vektor posunutí $u_i = y_i - x_i$, jeho závislost na poloze bodu $x_i \to y_i$: má zajímá

$u_j = u_j(x_i)$

$y_j + dy_j = x_j + dx_j + u_j + du_j \qquad dy_j = dx_j + du_j$ *

$$du_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i \qquad dy_j = \underbrace{\left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)}_{\text{tensor 2. řádu}} dx_l$$

Změna délky: $dy_j dy_j - dx_j dx_j = \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) \cdot dx_l dx_k - dx_j dx_j$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)}_{2\varepsilon_{lk} \text{ – tensor velkých deformací (symetrický)}} dx_l dx_k$$

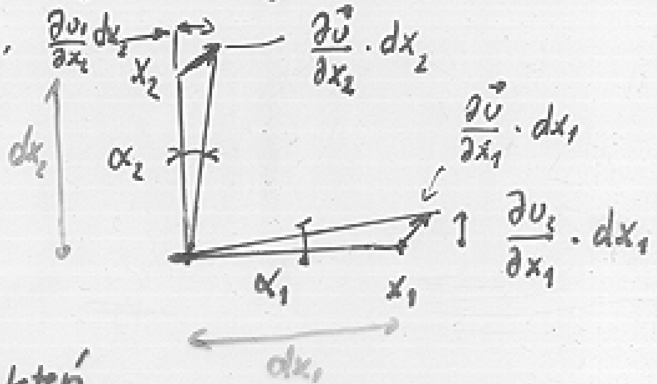
podobně $\overline{\varepsilon}_{lk} = \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l}{\partial y_k} + \frac{\partial u_i}{\partial y_l}\frac{\partial u_i}{\partial y_k}$. derivace podle "deformovaných" souřadnic

pro malé $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$ je součin mnohem menší než první dva členy →

zavádí se tensor malých deformací $e_{lk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$

smysl složek - diagonální $\frac{1}{2}\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \doteq \frac{l - l_0}{l_0}$ relat. prodloužení ve směru os

nediagonální



$e_{12} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\gamma}{2}$

$= \frac{1}{2}$ úhlu smyku γ

(úhel smyku - úhel, o který se změní úhel os, původně pravý úhel)

Hlavní směry tenzoru malých deformací

Veličiny $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ tvoří tenzor 2. ř. ($du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$) vektory

- lze rozložit na část symetrickou $e_{ik} = e_{ki}$

a na část antisymetrickou $a_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$

$a_{ik} = -a_{ki}$ "symetrie" i "antisymetrie" se při transformacích zachová → obě části rozkladu lze často pokládat za "fyzikálně odlišné" veličiny.

Speciálně tedy: symetrická část charakterizuje deformaci danou antisymetrická část — " — rotaci

(pro rotaci $\vec u = \vec\omega \cdot dt \times \vec r$ → matice $\partial_k u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ je
$u_1 = \omega_2 dt\, x_3 - \omega_3 dt\, x_2$

$$\begin{pmatrix} 0, & \omega_3 dt, & -\omega_2 dt \\ -\omega_3 dt, & 0, & \omega_1 dt \\ \omega_2 dt, & -\omega_1 dt, & 0 \end{pmatrix}$$

↑ skutečně $e_{ik} = 0$
ale
$a_{ik} = \varepsilon_{ikl}\,\omega_l \cdot dt$
ještě jinak
rot $\vec u = \nabla \times \vec u = 2\vec\omega\, dt$
operátor rotace skutečně "vyjadřuje rotaci" vlastně

Pro zajímavost pozn. antisym. tenzor 2. řádu si odpovídá v ortonormálních bazích s pseudovektorem

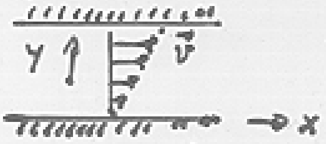
Pro kapalinu: $\vec{u}$ se mění s časem, za čas dt vzroste vektor deformace z hodnoty $\vec{0}$ na hodnotu $\vec{u} = \vec{v}\cdot dt$ – pro dostatečně malé dt jsou $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ malé a lze užít tenzor malých deformací $e_{ij} = D_{ij}\cdot dt$, kde

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i}{\partial y_j}\right)$$

tenzor rychlosti deformace

(poznámka: na počátku odečítání času v podstatě nezáleží)

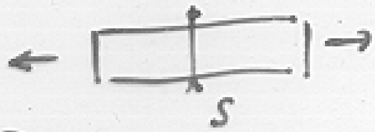
Spec. pro Couette-ovo proudění



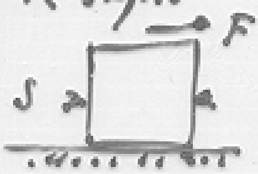
$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2}\frac{dv_x}{dy}$

ostatní D nulové

Napětí v kontinuu vystihuje působení sil – v tahu – tyč $T = \frac{F}{S}$



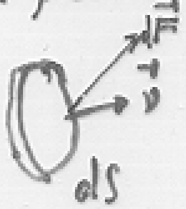
v tlaku obdobně, ve smyku



opět F/S

obecně síla působící na obecnou plochu uvnitř tělesa

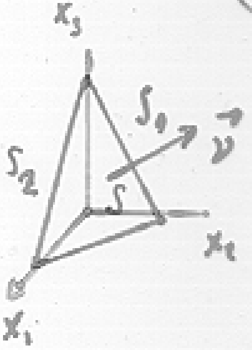
(typy: čistý tah
čistý tlak
čistý smyk
obecné tahové napětí
obecné tlakové napětí



$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

spec. plochy v pravoúhlé souř. soustavy

$$\vec{\sigma}_1 \quad \vec{\sigma}_2 \quad \vec{\sigma}_3$$



$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + V\vec{G} = 0$$

($\vec{G} = \lim_{V\to 0} \frac{\vec{F}_0}{V}$ objemové síly

$$\vec{\sigma} S - \vec{\sigma}_1 S_1 - \vec{\sigma}_2 S_2 - \vec{\sigma}_3 S_3 + \frac{Sh}{3} = 0$$

, $S_i = \nu_i S \Rightarrow$ (lim $h \to 0$)

$$\vec{\sigma} = \nu_1 \vec{\sigma}_1 + \nu_2 \vec{\sigma}_2 + \nu_3 \vec{\sigma}_3$$ neboli síla

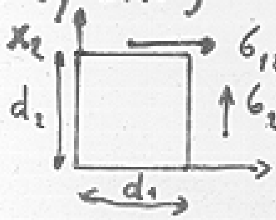
$$\vec{F} = \vec{\sigma}_1 S_1 + \vec{\sigma}_2 S_2 + \vec{\sigma}_3 S_3$$

$\vec{\sigma}_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i})$

$$F_i = \sigma_{ij} S_j \quad \text{neboli} \quad \vec{F} = \overleftrightarrow{\sigma}\vec{S}$$

opět tenzor 2. řádu – tenzor napětí

Opět symetrický ??! Ano!



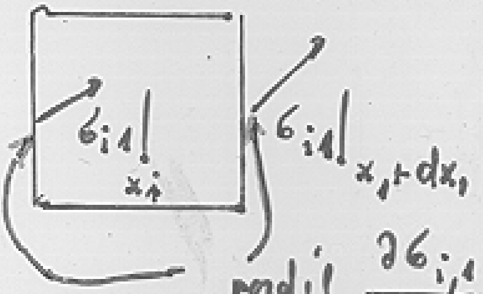
σ_{12} → síla $S_2\sigma_{12}$ → moment $d_2 S_2 \sigma_{12}$
σ_{21} → síla $S_1\sigma_{21}$ → moment $d_1 S_1 \sigma_{21}$

ale $S_2 d_2 = S_1 d_1 = V$ (objem kvádru) tedy $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

(Jiný důkaz při odmocnění podmínek momentů)

Opět lze najít hlavní $\begin{Bmatrix}\text{osy}\\ \text{směry}\end{Bmatrix}$ napětí, hlavní napětí a hlavní roviny napětí, pro něž tečná složka napětí ($\vec{\tau}$) je nulová. Totéž pro malé deformace

Rovnice rovnováhy a pohybové rovnice



$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0 \quad \text{rovnováha}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = \rho \frac{d^2 u_j}{dt^2}$$

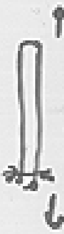
rozdíl napětí $\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} \cdot dx_1$ $\Big|$ · plocha $dx_2\, dx_3$

obdobně x_2, x_3, objem. síla – příspěvek $G_i\, dx_1 dx_2 dx_3$ a limita pro objem kvádru → 0

(jiné odvození přes Gaussovu větu „zobecněnou")

Vztahy mezi deformací a napětím

Robert Hooke 1678 : „Ut tensio, sic vis"

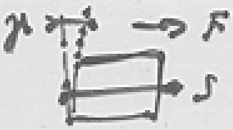


$\frac{F}{S} = Ee$

příčná kontrakce $\mu_p \cdot e$

↑ Poissonovo číslo ([illegible])

tah/tlak



$\frac{F}{S} = G\gamma$

smyk

obecně lineární vztah mezi σ a e $\quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl}$

81 konstant $\xrightarrow{\text{symetrie tenzorů}}$ 21

izotropie: 2 konstanty

Hookeův zákon

$$\sigma_{ij} = \lambda e_I \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

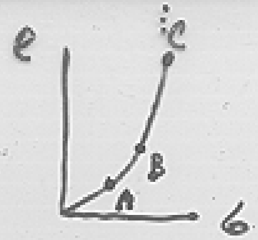
kde $e_I = e_{ii}$ lineární invariant $\left(e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{V - V_0}{V_0}\right.$ relat. změna objemu$\left.\right)$

inverze: viz str. 53

(jinak

$$\sigma_{ij} = \frac{G(E-2G)}{3G-E}\, e_I \delta_{ij} + 2G e_{ij}$$

$\left(\mu_p = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right)$



Poznámky k Hookovu zákonu

1) mez úměrnosti, pružnosti (elasticity), pevnosti

2) rozklad tenzoru (symetr. 2. řádu) na izotropní část a deviátor

třeba $$e_{ij} = \underbrace{\frac{e_I \delta_{ij}}{3}}_{} + \underbrace{\left(e_{ij} - \frac{e_I \delta_{ij}}{3}\right)}_{}$$

isotropní část $e^{(s)}_{ij}$
objemová deformace

deviátor tenzoru malých deformací $e^{(0)}_{ij}$
tvarová deformace

totéž pro napětí $\sigma^{(0)}_{ij} + \sigma^{(s)}_{ij}$ – konstanty $\sigma^{(s)}_{ij} = K_1 e^{(s)}_{ij}$

(je $\frac{K_1 - K_2}{3} = \lambda$ $\quad K_2 = 2\mu = 2G$) $\qquad \sigma^{(0)}_{ij} = K_2 e^{(0)}_{ij}$

přitom první vztah znamená $\sigma_I = K_1 e_I$ a protože $\sigma_I = -3p$,
je $K_1/3 = k$ modul stlačitelnosti

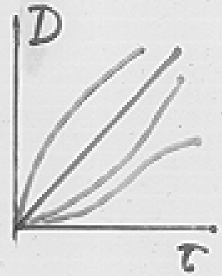
a druhý vztah → pro jednoduchý smyk elementární Hookův zákon, $\qquad \left(k = -V_0 \frac{dp}{dV}\right)$

$$e_s = \frac{\sigma_s}{2G} \to \gamma = \frac{\tau}{G}$$ – smyk. napětí

úhel smyku

Další zajímavější látky (ideální kapalina a absolutně tuhé těleso lze vynechat)
– viskozní tekutiny, spec. v. kapaliny

Newtonův viskozní zákon $\quad D_s = \frac{\sigma_s}{2\eta}$ – koeficient viskozity $\quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\tau}{\eta}$

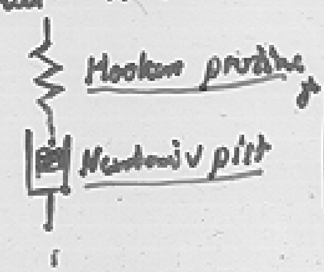


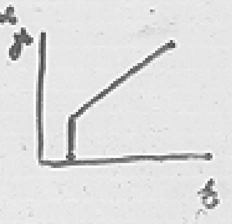
odchylky od lineární závislosti
nenewtonovské viskozní látky čili nelineární visk. látky
(empirické aproximace: Ostwald-de Waele $D = \frac{(\tau)^n}{2\eta^*}$

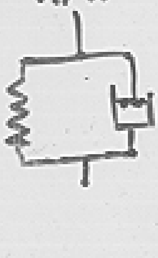
Dále: viskoelastické látky $\qquad$ Reologie

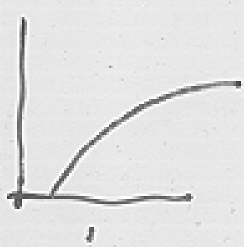
Viskoelastické modely (lineární)

Maxwellův model H–N $\qquad$ Kelvinův model H/N

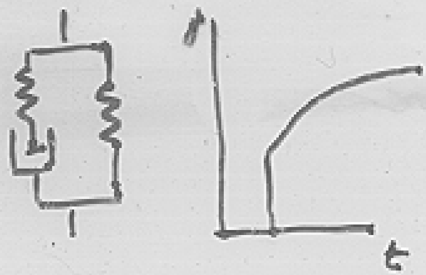


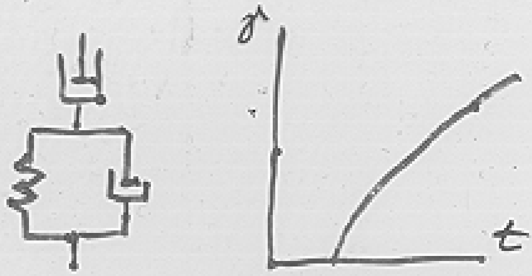




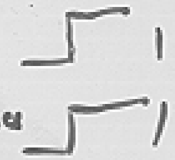


– seriové $\qquad$ / paralelní zapojení





testy: toky creep
síla (zátěž)
důsledky: relaxace napětí (deformace)



dynamické měření – sinusové průběhy síly i deformace

a komplikovanější modely nelze obecně popsat vztahy pro lineární odezvu !!

Komplikovanější případ, když odezva není lineární

„obecné reologické modely"

Saint Venantův model

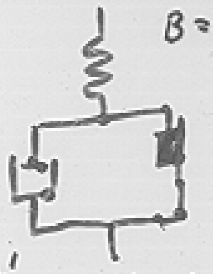
$\gamma = 0$, $D = 0$ pro $\tau < \tau_0$
$D \neq 0$ pro $\tau = \tau_0$

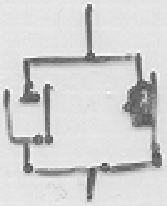
(smykové tření)

Prandtlův model
$P = H - StV$

(plasticita kovů)

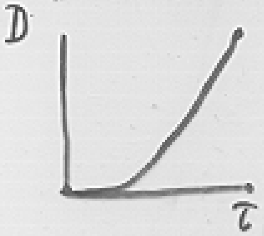
Binghamův model
$B = H - (StV/N)$

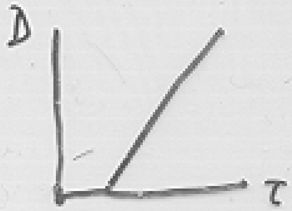




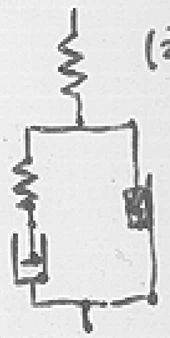
← $D = 0$ pro $\tau < \tau_0$ mezní napětí + viskozita
$D = \frac{\tau - \tau_0}{2\eta}$ pro $\tau > \tau_0$

(binghamské plastické kapaliny)

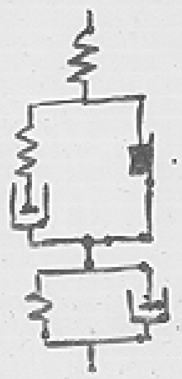




Schwedof
$Schw = H - (StV/M)$
(želatina)

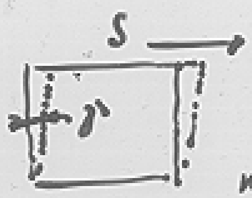


Schofield a Scott-Blair
$SSB = Schw - K$
(mouční těsto)



$$\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} e_{ll} + 2\mu e_{ik}$$

$$\mu = G = \frac{F/S}{\gamma}$$



namáhání ve smyku
modul smyku (torze) G

inverze: nejprve vyjádřit „lineární invariant" e_{ll} pomocí σ_{ik}

$$\sigma_{ll} = (3\lambda + 2\mu) e_{ll}$$

smysl $e_{ll} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ = relativní změna objemu $\frac{dV}{V_0}$

$(V = V_0(1+e_{11})(1+e_{22})(1+e_{33}))$

isotropní tlak: $\sigma_{ll} = -3p$

modul objem. pružnosti $\varkappa = \frac{p}{\frac{dV}{V_0}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

invertovaný vztah

$$e_{ik} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ik} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ik}$$

Pro namáhání v tahu: $\sigma_{11} \neq 0$, ostatní nulové

$$e_{11} = \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right) \sigma_{11} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{11}$$

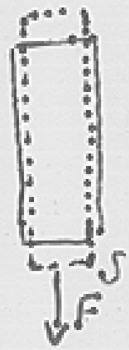
tedy modul pružnosti v tahu (a tlaku)

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{11}$$

tedy Poissonovo číslo (Poissonův poměr)

příčného zkrácení $\mu_p = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$



zpětně $\lambda = \frac{G(E-2G)}{3G-E}$ $E = \frac{F/S}{\Delta l / l}$

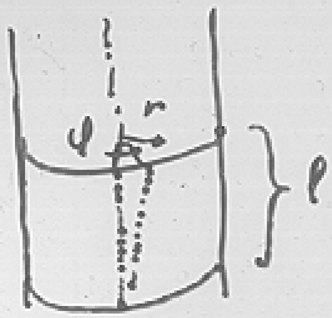
$\lambda > 0$, $\mu > 0$ $\Rightarrow$ $\mu_p < \frac{1}{2}$, $2G < E < 3G$ — mezní hodnoty pro $\lambda \to \infty$ nestlačitelné těleso ($\varkappa \to \infty$)

Poznámky: rozklad tensorů napětí a deformace na izotropní část a deviátor – viz str 51

Formulace základní úlohy teorie pružnosti – najít σ_{ij}, u_i splňující podmínky rovnováhy (3), Hookeův zákon (6) a okrajové podmínky, nebo σ_{ij}, e_{ij} splňující totéž + podmínky kompatibility

Saint-Venantův princip

Torse tyče s kruhovým průřezem

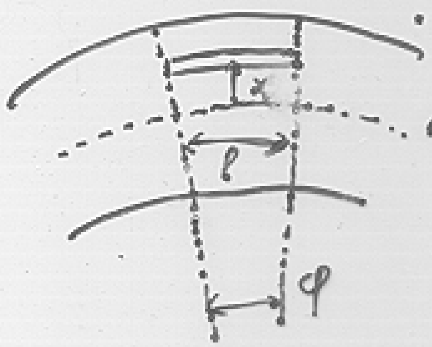


moment

$$M = \int_0^R r\cdot\underbrace{2\pi r\,dr}_{\text{plocha}}\cdot\underbrace{G\cdot\frac{\overbrace{r\varphi}^{\text{úhel }\gamma}}{l}}_{\text{napětí}} =$$

$$= \frac{2\pi G\varphi}{l}\int_0^R r^3\,dr = \underbrace{\frac{\pi G R^4}{2l}}_{k\,=\,\text{direkční moment}}\varphi = k\varphi$$

Ohyb tyče   1) MOMENT ⟺ ZAKŘIVENÍ



relativní prodloužení $\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{x\cdot\varphi}{l}$

← neutrální vlákno ("střednice") neutrální rovina

napětí $\sigma_{11} = E e_{11}$

Celková síla $F = \int_{\text{průřez } P}\sigma_{11}\,dS = \frac{E\varphi}{l}\int_P x\,dS$

je nulová, je-li $\int_P x\,dS = 0$ → neutrální vlákno prochází těžištěm plochy průřezu

Moment síly: $M = \int_P x\sigma_{11}\,dS = \frac{E\varphi}{l}\underbrace{\int_P x^2\,dS}_{} = \frac{E\varphi}{l} I_p$

"plošný moment" ("setrvačnosti") I_p
(poznámka o hlavních osách)

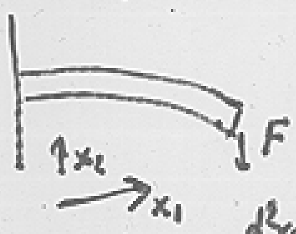
$\frac{\varphi}{l} = \frac{1}{R} = k$ křivost; R poloměr křivosti

$M = E I_p k$ (obecněji $E I_p (k-k_0)$; k_0 křivost na počátku, např. v hodinkách)

2) TVAR NAMÁHANÉ TYČE

Namáhání momentem → kruhový tvar

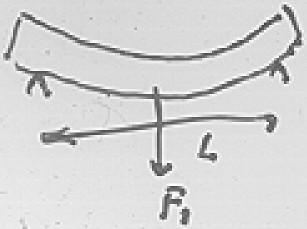
Vetknutý nosník



$$k = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2x_2}{dx_1^2}}{\left(1+\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2\right)^{3/2}} \doteq \frac{d^2x_2}{dx_1^2}$$

tedy průhyb neutrál. vlákna $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{1}{EI_p}\cdot M(x_1) = \frac{1}{EI_p}F(l-x_1)$ ⇒ integrace

$$x_2 = \frac{F}{EI_\rho}\left(\frac{l x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{6}\right) \Rightarrow x_l = \frac{F l^3}{3 E I_\rho}$$



průhyb nosníku

$$d = \frac{F_1 L^3}{48 E I_\rho}$$

Tekutiny

dokonalá tekutina $\quad \sigma_{ij} = -\delta_{ij}\, p \quad (p \geq 0)$

dokonalá kapalina : navíc $\rho = konst.$, t.j nestlačitelná, t.j $e_I = 0$, $K_1 = \infty$

modul stlačitelnosti $K = \infty$

"dokonalý" plyn : $\rho = \rho(p)$ v libovolném místě – barotropní (plyn, tekutina)

rovnováha $\quad -\frac{\partial p}{\partial y_i} + G_i = 0 \quad$ t.j $\quad$ grad $p = \vec{G}$ – zobecněná intenzita $\vec{I}$

$\frac{1}{\rho}$ grad $p = \vec{I}$ ← intenzita silového pole

rovnice hydrostatické rovnováhy

aditivní konstanta v p neurčená rovnováhou ⇒ Pascalův zákon o šíření tlaku všemi směry

hydraulický lis $\quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$

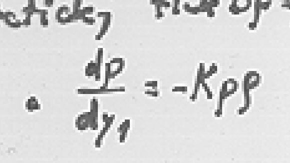
tíhové pole : $p = -\rho g y_1 + k$ ⇒ hydrostatický tlak $\Delta p = p - b = \rho g h$

plyn: $pV = k$ a $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \underbrace{\frac{m}{k}}_{K} p$ a $\frac{dp}{dy_1} = -K p g$

$$p = A e^{-K g y_1} = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g y_1}$$ barometrická rovnice

rovnováha objemových a plošných sil – ponořené těleso – Archimedův zákon – vztlak

(Stevinova úvaha) plavání těles – stabilita – metacentrum



kapalina v rotující nádobě

Proudění ideální tekutiny

$v_i = v_i(y_j, t)$ opakování: proudnice x trajektorie,
pro stacionární proudění se shodují a nemění s časem

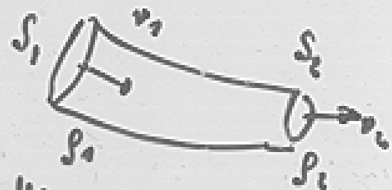
$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \neq 0 \text{, t.j. } \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{v}}_{\text{vír rychlosti } \vec{\Omega}} \neq \vec{0}$$ proudění vířivé (v nějaké oblasti)

(rotace, curl $\vec{v}$)

naopak: $\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$ značí **proudění nevířivé** $\Rightarrow \vec{v} = \mathrm{grad}\, f \quad \left(v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

f … rychlostní potenciál – proudění potenciální

Rovnice kontinuity



pro proudovou trubici (stac) $S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$

obecně: $\displaystyle\int_S \vec{v}\,d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, d$ $\qquad \displaystyle\int_S \vec{A}\,d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,A\, dV$

$\vec{v}\,d\vec{S} \to \vec{v}\cdot dS$

tok vektoru plochou pro uzavřenou plochu — Gaussova věta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} \to \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{lokální}} + \underbrace{\vec{v}\,\mathrm{grad}\,\rho}_{\text{konvektivní}}$$

změna

Spec. nestlačitelná kapalina

$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

Pohybové rovnice

$$\partial_j \tau_{ji} + G_i = \rho\frac{d^2 u_i}{dt^2} \Rightarrow \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\,p + \vec{G}$$

$\partial_j \tau_{ji} \to -\mathrm{grad}\,p$

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y_i} + G_i$$

Eulerovy hydrodynamické rovnice

$$\underbrace{\frac{dv_i}{dt}}_{\substack{\text{individuální}\\\text{(substanciální)}}} = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{lokální}} + \underbrace{v_j\frac{\partial v_i}{\partial y_j}}_{\text{konvektivní}} = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_i}$$

zrychlení

s rovnicí kontinuity 4 rovnice pro 4 neznámé v_i, p

Pro stacionární případ a konzervativní silové pole $\vec{I} = -\mathrm{grad}\,V$ lze získat integrací podél proudnice 1. integrál: – Bernoulliova rovnice

$$\frac{v^2}{2} + V + \int\frac{dp}{\rho} = \text{konst}$$

Pro kapalinu

$$\underset{\text{kinet.}}{\frac{1}{2}\rho v^2} + \underset{\text{potenc.}}{\rho V} + \underset{\text{tlaková energie}}{p} = \text{konst}$$

pro $V = gh$ případ tíhového pole

pro isotermické proudění plynu $\rho = kp$:

$$\frac{v^2}{2} + V + \frac{\ln p}{k} = \text{konst} \qquad \text{a.t.p.}$$

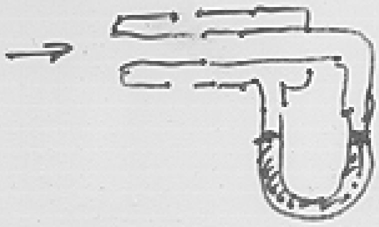
otázky zobecnění a podmínky $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ (neplatí pro Couettův tok)

konstanta stejná pro celé proudění

hydrodynamické paradoxon

(vodní výtrysky, rozprašovače, karburátory atd.)

Venturiho vodoměr, Prandtlova trubice



Viskosní tekutina

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \tau'_{ij}$$

$$\tau'_{ij} = \underset{\text{isotropní}}{\tau'^{(S)}_{ij}} + \underset{\text{deviátor}}{\tau'^{(D)}_{ij}}, \qquad \tau'^{(S)}_{ij} = k D^{(S)}_{ij}$$

tedy $\tau_{ij} = -\delta_{ij} p + k D^{(S)}_{ij} + 2\eta D^{(D)}_{ij} = -\delta_{ij} p + \frac{1}{3} k \delta_{ij} D_I +$

$$+ 2\eta D_{ij} - \frac{2}{3}\eta D_I \delta_{ij} \qquad \text{kde } D_I = \operatorname{div} \vec{v}$$

pro nestlačitelnou tekutinu $= 0$

tedy pak $\tau_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\eta D_{ij}$

Navier-Stokesovy rovnice:

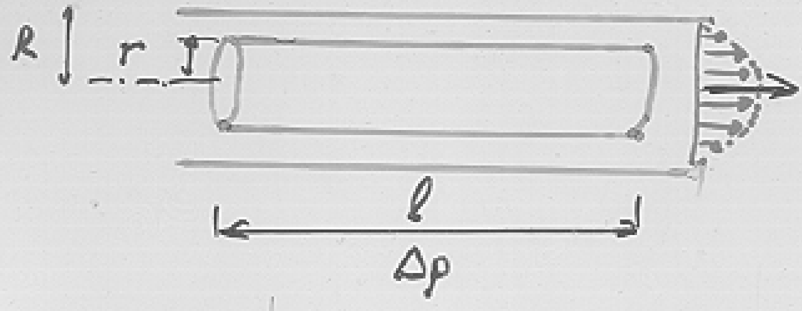
a $\quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{I} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$ a pro stlačitelnou

—— " —— $\qquad + \frac{k+\eta}{3\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$

($\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$)

$\frac{\eta}{\rho}$ kinematická viskosita

Proudění trubicí $-\Delta p \cdot \pi r^2 = 2\pi r l \eta \cdot \frac{dv}{dr} \Rightarrow -\frac{\Delta p}{2l\eta} \cdot r \cdot dr = dv$



$v = k - \frac{\Delta p r^2}{4\eta l}$

$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$

a objem V za čas t:

$$\frac{V}{T} = \int_0^R v \cdot 2\pi r\,dr = \frac{2\pi\Delta p}{4\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr$$

$$\downarrow \frac{R^4}{4}$$

tedy $\frac{V}{t} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l}$

$\Delta p = \frac{8\eta l V}{\pi R^4 t}$ Poiseuilleův vztah (vzorec)

..... $(+ m\rho \bar{v}^2$ čili $+ \frac{m\rho V^2}{\pi^2 R^4 t^2}$ Hagenova korekce

Hagenův-Poiseuilleův vztah)

Proudění laminární $Re = \frac{2R\bar{v}}{\nu} = \frac{2R\bar{v}\rho}{\eta}$ Reynoldsovo číslo (bezrozměrné proměnné)

pro $Re < Re_{kr}$

↑ kritické hodnota 1000 až 2000 (až 20000) ??

běžné

× turbulentní

(pak odpor $\sim v^2$)

Obtékání koule: $F = 6\pi\eta r v$ Stokesův vztah

větší rychlosti - opět turbulentní proudění ($Re = \frac{vR}{\nu} = \frac{vR\rho}{\eta}$

$Re_k = ?$

$\sim$ Newtonův vztah $F = \frac{C}{2}\rho S v^2$

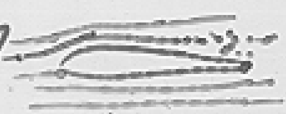
↑ příčný průřez

Odvození: $F \cdot v = \frac{1}{2} v^2 \cdot \rho v S$)

Aerodynamika

Odpor a vztlak, křídla

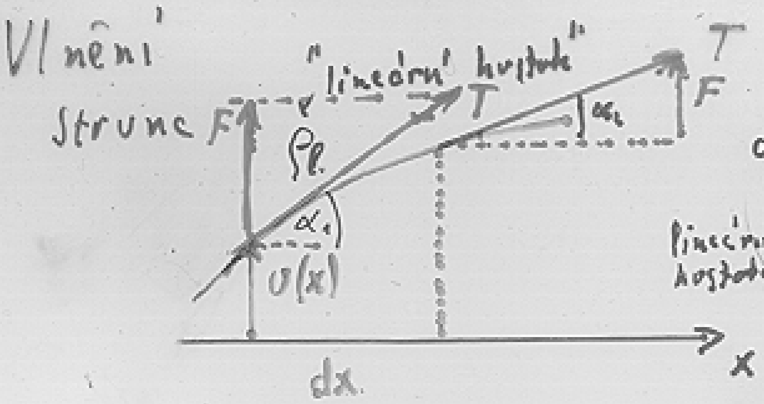
odtržení mezní vrstvy



Metoda podobnosti

modely

Vlnění struny



$$F = \overset{\text{tah}}{T}\sin\alpha \doteq T\,\mathrm{tg}\,\alpha = T\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$dx\cdot\rho_l\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x+dx)-F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}dx$$

lineární hustota

$$\rho_l\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{, tedy}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{či také} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

je t.zv. <u>vlnová rovnice</u> (je to lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu hyperbolického typu)

kde jsme označili $c = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$ – <u>fázová rychlost vlny</u>

Řešení různými způsoby:

1) D'Alembertův vztah $u = f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$ — na rozdíl od obyčejných dif. r. namísto konstant nastupují libovolné funkce

dvě <u>postupné vlny</u> s opačným směrem

analogie s el. vedením

(další důležité proměnné

$u \leftrightarrow$ <u>síla</u> F <u>rychlost</u> $v = \frac{\partial u}{\partial t} \leftrightarrow i$

rovnice $\frac{\partial F}{\partial t} = T\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho_l}\frac{\partial F}{\partial x}$

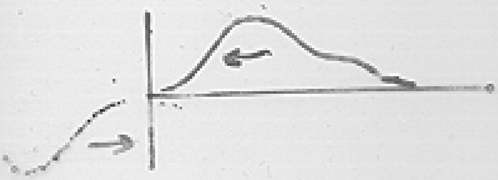
– <u>výkon $P = F\cdot v$</u> = <u>tok energie</u>

– pro post. vlnu f_2 je poměr

$$\frac{F}{v} = \frac{T}{c} = \rho_l c = \sqrt{T\rho_l}$$

<u>vlnová impedance vedení</u>

určení f_1, f_2:



<u>odraz na konci</u> – <u>okrajové</u> podmínky, <u>počáteční</u> podmínka

$u(0) = 0$ nulová výchylka → opačná fáze

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ nulová síla → shodná fáze

vlnová impedance → bez odrazu (přizpůsobení)

2) Separace proměnných $u(x,t) = f_x(x)\,f_t(t)$

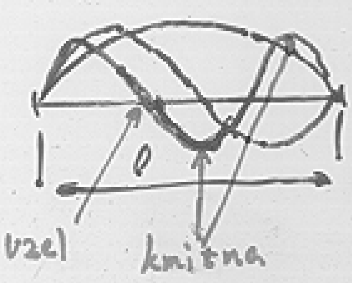
$$\frac{1}{v^2}f_x(x)f_t''(t) = f_x''(x)\,f_t(t)$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{f_t''(t)}{f_t(t)} = \frac{f_x''(x)}{f_x(x)} = C_0 \Rightarrow f_x(x) = C_1\cos(kx+\varphi_1)$$

$$f_t(t) = C_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$u = C_3\cos(kx+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)$$ <u>stojaté vlny</u>

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad k$$



$k\cdot l = n\pi \quad n = (0), 1, 2, 3, \ldots$

Splnění počáteční podmínky – rozklad funkce (periodické) na Fourierovu řadu.

Harmonické postupné vlne: $u = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\nu$$

opět $v = \frac{\omega}{k}$ — f: kmitočet čili frekvence — k: vlnový vektor (v jednorozměrném případě) — ν: vlnočet

komplexní zápis:

$$u = A e^{i(\omega t - kx)}$$

Zobecnění na 3 rozměry: $$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}}_{\Delta u \,=\, \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u}$$

Laplaceův operátor

řešení ve tvaru

$$u = A e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

rovinné monochromatické vlny

vektor $\vec{k} \perp$ k vlnoplochám a velikost splňuje opět $v = \frac{\omega}{k}$

Vlnění v pružném prostředí:

$$\rho\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \partial_k\sigma_{ik} = \lambda\partial_i e_{ll} + \underbrace{2\mu\,\partial_k e_{ik}}_{\mu\underbrace{\partial_k\partial_i u_k}_{\partial_i\partial_l u_l} + \mu\,\partial_k\partial_k u_i}$$

$e_{ll} = \partial_l u_l$

$$\sigma_{ik} = \delta_{ik}\cdot\lambda e_{ll} + 2\mu e_{ik}$$

tedy (zanedbáme konvekt. změnu) $$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\partial_i\partial_l u_l + \mu\,\partial_l\partial_l u_i$$

Předp.: $\vec{u}$ závisí jen na x_1:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\partial_1\partial_1 u_1 + \mu\,\partial_1\partial_1 u_1 = (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$ – podélné vlnění – rychlost $c_l = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \mu\,\partial_1\partial_1 u_2 = \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}$$ příčné rychlosti $c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

podobně s u_3 – polarizace

šíření kmitů v tyči $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ v tekutině $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ modul objem. stlačitelnosti

odvoz $dp = -\frac{\partial p}{\partial \rho}\rho\frac{d\rho}{\rho}$

$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = -\frac{\partial u}{\partial x}$

$p = -\frac{\partial p}{\partial \rho}\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

Princip superpozice

interference: konstruktivní
destruktivní
částečná

- Stejné frekvence + stejný vln. vektor – ekvivalentní skládání kmitů (u příčného vlnění v různých směrech – vznik polarizace (lineární, kruhové, eliptické)
- opačné vlnové vektory – možnost vzniku částečně či úplného stojatého vlnění $e^{i(\omega t+kx)} + e^{i(\omega t-kx)} = e^{i\omega t}\cdot 2\cos(kx)$
(třeba při odrazu – pojem stojatých vln
- málo se lišící vlnové vektory a frekvence – důležité pro případ kdy obecná závislost $\omega=\omega(k)$ není jednoduchá přímá úměrnost – "disperzní zákon"

$$e^{i(\omega t-kx)} + e^{i((\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x)} = e^{i((\omega+\frac{\Delta\omega}{2})t-(k+\frac{\Delta k}{2})x)}\underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta k}{2}x\right)}_{\text{modulace amplitudy}}$$

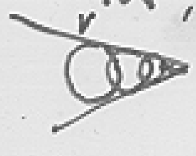
maximum se pohybuje s grupovou rychlostí $c_G=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ a volíme-li $\Delta\omega$ malé $c_G=\frac{d\omega}{dk}$. Zobecnění – v trojrozměrném případě při superpozici více vhodně zvolených vln lze vytvořit vlnový balík (klubko), který se pohybuje grupovou rychlostí $\vec{c}_G = \mathrm{grad}_{\vec{k}}\,\omega$ (závislost $\omega(\vec{k})$ je pak fcí vektoru $\vec{k}$)

(důležité v kvant. mechanice – pásová teorie pevných látek, fonony, a.t.d.)

- Sférické (kulové) vlny – v isotropním prostředí (ἴσος = stejný
τρόπος = poloha, směr)
(rozbíhavá)
$$u(r,t)=\frac{a}{r}e^{i(\omega t-kr)}$$

Huygensův – Fresnelův princip
$t+\Delta t$.. obálka kulových elementárních vlnoploch

loď, rázová vlna



Použití: zákon lomu a odrazu (Huygensova konstrukce)
– jde to udělat i přes vlnové vektory – tečné složky se musí shodovat
ohybové jevy. Podrobné odvození – Kirchhoffův vzorec.

monochromatické vlnění $u = U e^{i\omega t}$

$$\underline{\Delta U = -k^2 U} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

(okraj podmínky: vlastní kmity i pro membrány a desky Chladniho obrazce)

Kirchhoffův vzorec:

z Gaussovy věty

$$\int_S (U\nabla V - V\nabla U)\,d\vec{S} = \int_V \nabla(U\nabla V - V\nabla U)\,dV =$$

Greenova věta

$$= \int_V \left(U\Delta V + (\nabla U)\cdot(\nabla V) - (\nabla U)\cdot(\nabla V) - V\Delta U\right)dV = \int_V (U\Delta V - V\Delta U)\,dV$$

a splňují-li U i V vlnovou rovnici, rovná se to 0

dále položit $V = \frac{e^{-ikr}}{r}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{grad}\, V = -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right) e^{-ikr}\,\frac{\vec{r}}{r}$

$$\int \ldots d\vec{S} + \int \ldots dS = 0$$

vnější plocha S_1 — koule S_2

Pro poloměr koule $R_k \to 0$

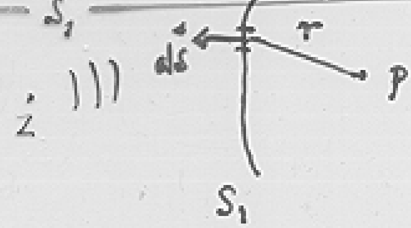
$$\int_{\text{koule } S_2} U\,\mathrm{grad}\, V\, d\vec{S} \to U(P)\cdot 4\pi R_k^2 \cdot \left(\frac{1}{R_k^2} + \frac{ik}{R_k}\right) \to 4\pi U_P$$

$$\int_{\text{koule } S_2} V\,\mathrm{grad}\, U\, d\vec{S} \to 0$$

tedy Kirchhoffův vzorec

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\,\mathrm{grad}\, U - U\,\mathrm{grad}\,\frac{e^{-ikr}}{r}\right)d\vec{S}$$

a dále pro $U = \frac{e^{-ikr_2}}{r_2}$



$$\mathrm{grad}\, U = -\left(\frac{1}{r_2^2} + \frac{ik}{r_2}\right) e^{-ikr_2}\,\frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

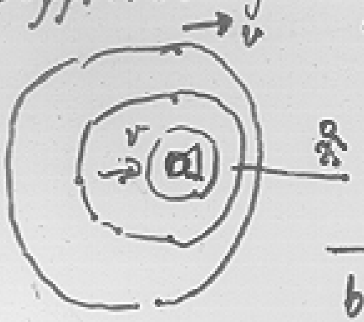
a pro $kr \gg 1$, $kr_2 \gg 1$

$$U_P = \frac{i}{2\lambda}\int \frac{e^{-ik(r+r_2)}}{r r_2}\left(\cos(\vec{r}\,\vec{n}) - \cos(\vec{r}_2\,\vec{n})\right)dS$$

$$= \int_S U(\vec{r}_s)\,G(\vec{r}_s, \vec{r})\,dS$$

Greenova funkce

Dopplerův jev



a) pohyb zdroje

ze stanov. urazí
zvuk c
zdroj v

$\left(\lambda = \frac{c - v}{\nu} \quad \nu' = \right.$

zkrácení v poměru $\frac{c}{c-v}$

$$\nu' = \nu \cdot \frac{c}{c - v} = \frac{\nu}{1 - \frac{v_z}{c}}$$

b) pohyb pozorovatele

$\left(\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \nu' = \frac{c - v}{\lambda}\right)$

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_p}{c}\right)$$

obecně $\quad \nu' = \nu \frac{c - v_p}{c - v_z}$

využití: měření rychlosti (radarová kontrola), Hubbleův rudý posuv

$v > c$
Machův kužel
Machovo číslo
loď

akustika, intenzita zvuku $\quad P = \frac{1}{2} \underbrace{\rho c}_{\text{vlnová impedance}} \, v_m^2$, $\; v_m^2 = (\omega s_m)^2$

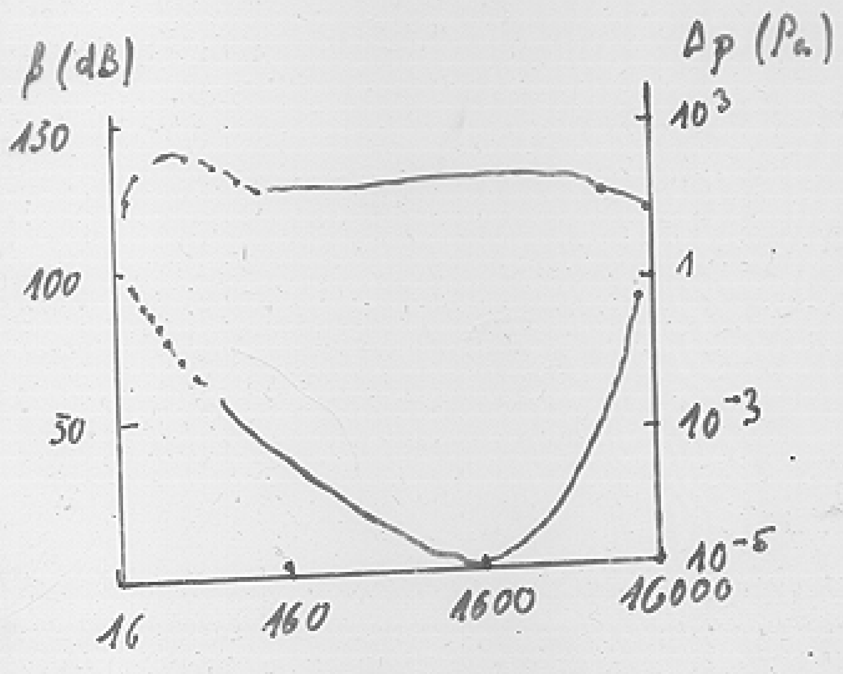
$I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$ ref. hladina + logaritmická stupnice

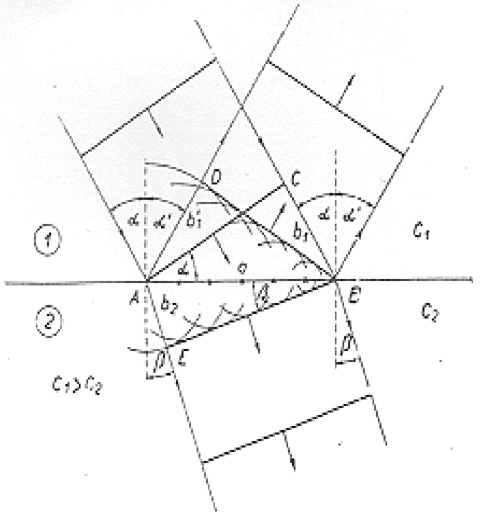
hladina intenzity zvuku $\quad \beta = (10\,dB) \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$

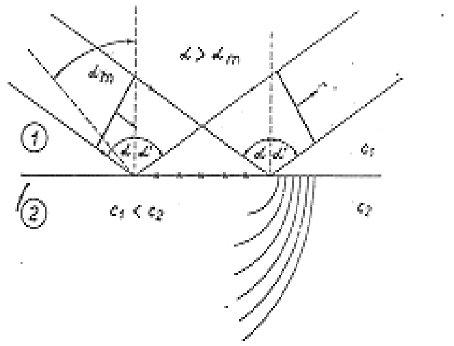
Hudební nástroje
zdroje — struna, píšťala, deska, membrána

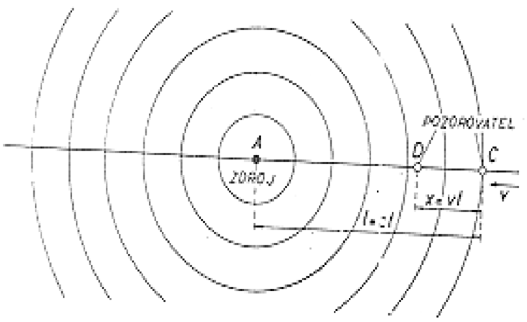
zvuk 16 Hz – 16 kHz, ultrazvuk (kavitace), infrazvuk

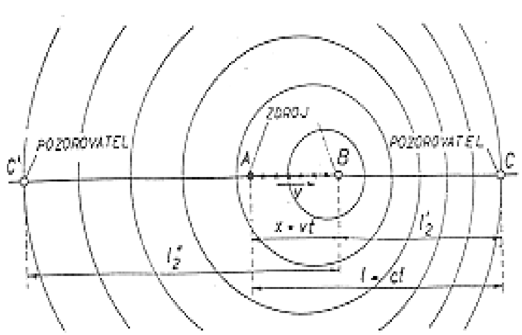
práh slyšitelnosti, práh bolesti

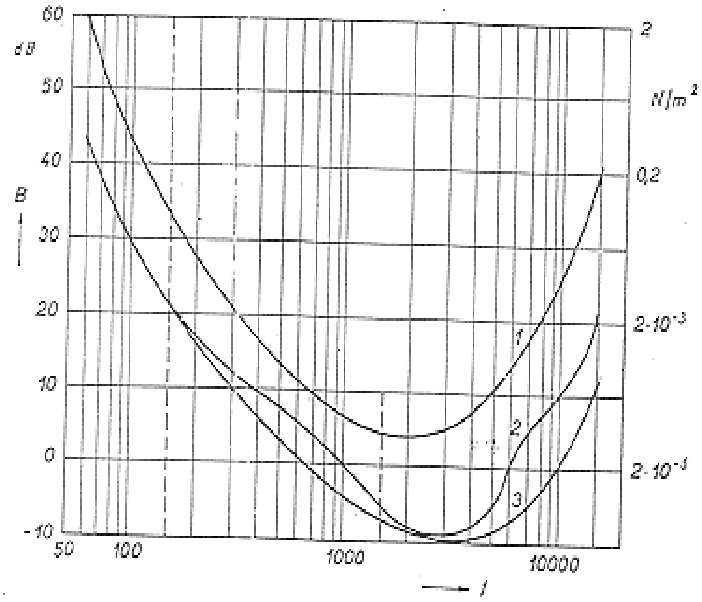










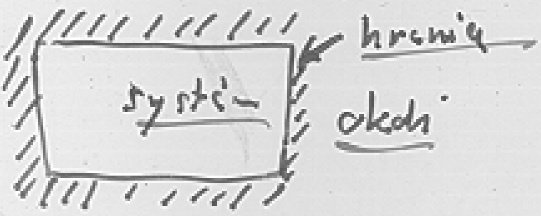


25,10 Závislost sluchového prahu na kmitočtu.

1 — Monaurální práh sluchu vyjádřený zvukovým tlakem při bubínku 2 — Binaurální práh ve volném poli při odrazu ze předu 3 — Binaurální práh při dopadu ze všech směrů.

Základní pojmy termodynamiky

– zabývá se vzájemnými přeměnami práce a energie včetně energie předávané mezi sledovaným systémem, t.j. termodynamickou soustavou, a okolím – zejména ve formě tepla. Je to fenomenologická nauka – zkoumá vztahy mezi přímo pozorovatelnými vlastnostmi systémů (objem, délka, tlak, polarizace), t.j. makroskopickými vlastnostmi, které charakterizují systém jako celek. Závěry proto mají obecný charakter nezávislý na detailní mikroskopické povaze systému



příklady termodynamického systému
plyn v nádobě
zahřívaná a deformovaná tyč
roztok

hranice: stěny nádoby, hladina

složka – látka "jednoho druhu", chemické individuum (voda, cukr)
fáze – homogenní část systému s definovanou hranicí (kapalina, pára, roztok)

Interakce systému s okolím
a) práce (stlačování, magnetizace, polarizace)
b) vedení tepla (zahřívání plamenem, ponoření do tepelné lázně)

adiabatické stěny (nepropouští teplo – dewarka)
diathermické stěny – tep. kontakt (např. kovové)

termodynamická rovnováha – neprobíhají mechanické změny ani výměna tepla s okolím

Pak lze popsat stav stavovými veličinami

St. veličiny
- intenzivní (def. v 1 bodě – teplota, tlak, hustota, el. pole)
- extenzivní (vztahují se na celý systém – objem, hmotnost, vnitřní energie)

jiné dělení:
- vnitřní (charakterizují vnitřní stav – hustota, energie, polarizace)
- vnější (závisí na stavu okolí – objem, intenzita el. pole)

počet stupňů volnosti – počet nezávislých stavových veličin určujících stav systému

děje – kvazistatické (systém je v každém okamžiku v rovnováze)
vratné
nevratné

Termodynamika

Termodynamická soustava – teplotní rovnováha $A\sim B,\ B\sim C \Rightarrow A\sim C$

Teplota, "nultý zákon termodynamiky" (tranzitivnost tepelné rovnováhy)

teplotní stupnice, $^\circ C$ $^\circ R$ ($80^\circ R \equiv 100^\circ C$) a $^\circ F$ ($0^\circ C \equiv 32^\circ F$, $100^\circ C \equiv 212^\circ F$)

teploměr rtuťový, (líh, toluen, ...), plynový, termodynamická stupnice → "ideální plynová teplota"

T_3 (trojný bod vody) $\equiv$ 273,16 K (kelvin) K

(odporový Pt teploměr, termočlánky) IPTS-68, pevné body, sekundární body

Teplotní roztažnost tuhých látek – délková, objemová, bimetal, invar a j. aplikace,

$$l = l_0(1+\alpha t) \qquad V = V_0(1+\beta t) \qquad \beta = 3\alpha$$

kapaliny – objem. roztažnost β – anomálie vody $\gamma \doteq \frac{1}{273{,}15\,K} = \frac{1}{T_0}$ $T = T_0 + t$

plyny – isobarický děj – roztažnost $V = V_0(1+\gamma t) = V_0 \frac{T}{T_0}$ Gay-Lussac

isochorický děj – rozpínavost $p = p_0(1+\gamma t) = p_0 \frac{T}{T_0}$ Charles

isotermický děj – $pV =$ konst – Boyle-Mariotte

(rozpínání – expanze, stlačení – komprese)

odchylky – menší pro nižší tlaky → ideální plyn (blízko – vodík)

↓ stavová rovnice $pV = nRT$

reálný plyn

počet molů

mol – počet atomů ^{12}C ve 12 g této látky

$6{,}02 \cdot 10^{23}$ Avogad. konst.

teplo – nějaký fluidum (kalorikum)

fluidová teorie (problém s latentní teplo)

Rumford 1798 – teplo vzniklé při vrtání děla

Joule 1840-73 mechanický ekvivalent tepla

Mayer 1842 – rozdíl $J(c_p - c_v) = p_0 \Delta v = p_0 v_0 \gamma = \frac{p_0 v_0}{T_0}$

$(C_p - C_v = R)$ $J = 4{,}186\ J/cal$

Helmholtz 1847 – ekvivalence ($J=1$) Mayerův vztah

princip energie

tepelný ekvivalent práce $K = \frac{1}{J} = 0{,}2389\ cal/J$

1. hlavní věta termodynamická teplo = druh energie, může se měnit v práci a obráceně

termodynamická soustava – může konat práci či dodávat teplo z její "vnitřní energie" U, U závisí pouze na stavu – stavové veličiny

$U_2 - U_1 = Q - A$ Q – teplo dodané systému, A práce vykonaná systémem

Q, A „dějové" veličiny

$\text{đ}Q = dU + \underbrace{p\,dV}_{\text{đ}A}$

dU – totální (úplný) diferenciál

đQ ne (Pfaffova forma $\text{đ}Q = \sum A_i(q_k)\,dq_i$)

Ohřívání/ochlazení: tepelná kapacita $C = \frac{\text{đ}Q}{dT}$ (Dewarovy nádoby)

měrná — " —

molární — " —

kalorimetry (směšovací, ledový, parní, elektrický)

pro plyny se výrazně liší C_V ... při stálém objemu

C_p ... tlaku

$$C_p - C_V = R$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + \underbrace{p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}_{R}$$

tedy vlastně Mayerův vztah platí pouze

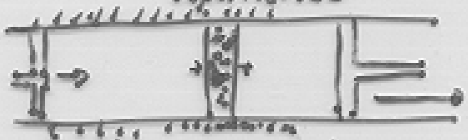
je-li $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$ ...? To by patrně obecně neplatilo, pokud by U záviselo i na V (resp. p) –

– pokus Gay-Lussacův

plyn nekoná práci

Jouleův-Thomsonův protlačování plynu přelinitou přepážkou (vata?)

tepel. izolace



posuny tak, aby $p_1 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 \Rightarrow$ plyn nekoná práci

Nejjednodušší děj – idealizace (v každém okamžiku rovnováha) – kvazistatický děj

! ideální plyn – splňuje stav. rovnici ideál. plynu a jeho vnitřní energie závisí pouze na teplotě $\Rightarrow U = C_V T + \text{konst}$

↓

isothermický děj: $T = \text{konst}$ $\quad \text{đ}Q = \text{đ}A = p\,dV$

$$Q = A = \int p\,dV = RT\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V} = RT\ln\frac{V_1}{V_0} = RT\ln\frac{p_0}{p_1}$$

isochorický děj: $V = \text{konst}$

$A = 0 \qquad Q = C_V(T_1 - T_0)$

isobarický děj: $p = \text{konst}$

$$dQ = C_V\,dT + p\,dV = (C_V + R)\,dT = C_p\,dT$$

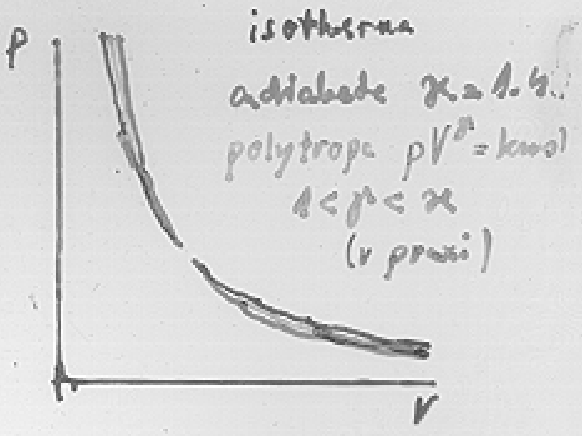
$$Q = (C_V + R)(T_1 - T_0) = C_p(T_1 - T_0)$$

adiabatický děj: $\text{đ}Q = 0 \qquad C_V\,dT + p\,dV = 0 \qquad C_V\,dT + \frac{RT}{V}dV = 0$

$$\frac{C_V\,dT}{T} + \frac{R\,dV}{V} = 0 \qquad C_V\ln T + R\ln V = \text{konst.} \Rightarrow T\cdot V^{\frac{R}{C_V}} = k'$$

$$pV^{1+\frac{R}{C_V}} = k''$$

tedy (Poissonova) rovnice $pV^{\varkappa} = k''$, kde $\varkappa = \frac{C_p}{C_V}$



Výměna tepla: teplotní rozdíl

děje nevratné

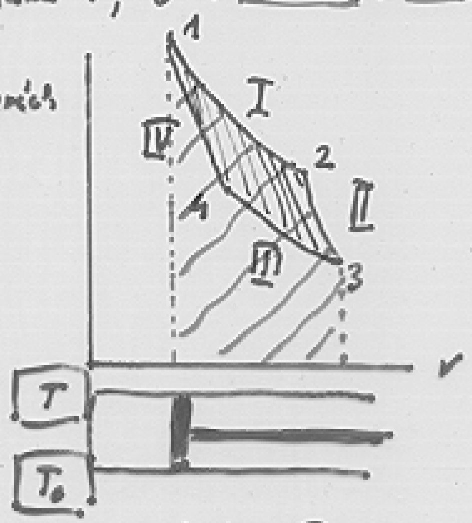
vratné - opět idealizace

Tepelný stroj – chladnička

Sadi Carnot 1824: účinnost přeměny tepla v práci největší pro vratný stroj

Clausius 1850 zpočátku I. věty

Carnotův cyklus mezi teplotami T, T_0 (isothermy, adiabaty)



ohřívač T

chladič T_0

I isothermická expanze – konání práce

$$Q = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = A_I$$

II adiabatická expanze

$$A_{II} = U_2 - U_3 = C_v (T - T_0)$$

III isothermická komprese

$$Q_0 = RT_0 \ln \frac{V_3}{V_4} = A_{III}$$

IV adiabatická komprese

$$A_{IV} = U_1 - U_4 = C_v (T - T_0) = A_{II}$$

Cyklická práce:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad p_2 V_2^{\varkappa} = p_3 V_3^{\varkappa}, \quad p_3 V_3 = p_4 V_4 \quad p_4 V_4^{\varkappa} = p_1 V_1^{\varkappa}$$

$$\Rightarrow V_2^{\varkappa-1} V_4^{\varkappa-1} = V_1^{\varkappa-1} V_3^{\varkappa-1} \Rightarrow V_2 V_4 = V_1 V_3 \quad \text{t.j.} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Bilance: odebráno Q z ohřívače Q_0 předáno chladiči,

práce $A = A_I - A_{III} = Q - Q_0$ a účinnost $\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{T - T_0}{T}$

(lednička: chladicí faktor $K = \frac{|Q_0|}{A} = \frac{T_0}{T_1 - T_0}$

tep. pumpa: $K = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_0}$)

II věta termodynamická

Clausius (1850) Teplo nemůže samo sebou přejít z tělesa studenějšího na teplejší!

Thomson (lord Kelvin 1851): Není možné získat kruhovým dějem práci jen tím, že by se jedno těleso ochlazovalo na nižší teplotu, než je nejstudenější místo v okolí

Planck: nelze sestrojit periodický stroj, který by pouze ochlazoval tepelnou lázeň a konal rovnocennou práci.

Carnotova věta: všechny vratné stroje pracující mezi dvěma teplotami mají stejnou účinnost, všechny nevratné stroje mají účinnost menší;

Ekvivalence různých formulací

Důsledek: pro vratný Carnotův cyklus je $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

nezávisí na látce systému $\Rightarrow$ termodynamická stupnice teplot

(kdyby vzít plynný teploměr, je shodná s ideální plynovou teplotou

Dále: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ (dodané, odvedené) $\to$ pro teplo dodané (systému)

$$\frac{Q_1}{T_1} + 0 + \frac{Q_2}{T_2} + 0 = 0$$

tedy $\oint_{uzavř} \frac{dQ}{T} = 0$ pro vratné děje

$\Rightarrow$ existence stavové funkce S takové, že $\frac{dQ}{T} = dS$ - entropie

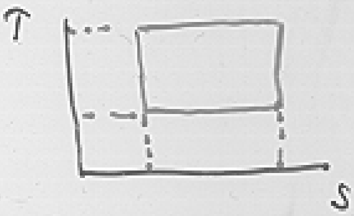
($\frac{1}{T}$ je integrační faktor Pfaffovy formy dQ)

Nevratné děje: $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} < 0$, t.j. $\oint \frac{dQ}{T} < 0$

a $\int\limits_{0,\ nevr}^{K} \frac{dQ}{T} < \int\limits_{0,\ vratn}^{K} \frac{dQ}{T} = S_K - S_0$ a pro izol. systém $S_K - S_0 > 0$

při nevrat. ději entropie izol. systému roste

Carnotův cyklus v diagramu $T - S$

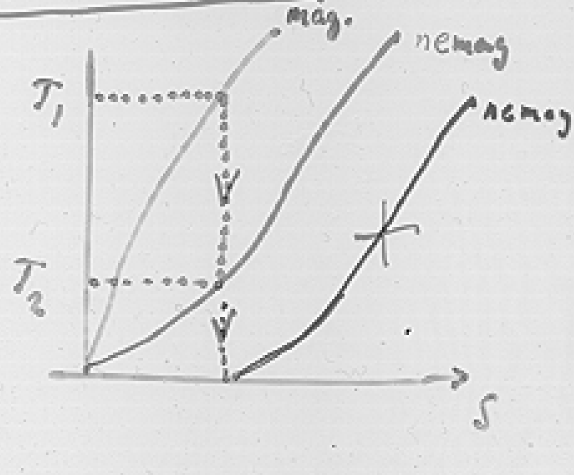


III věta termodynamická - nedosažitelnost absolutní nuly - chování systému v blízkosti absol. nuly

- nelze snížit teplotu libovolného systému nebo jeho části k absolutní nule konečným počtem kroků

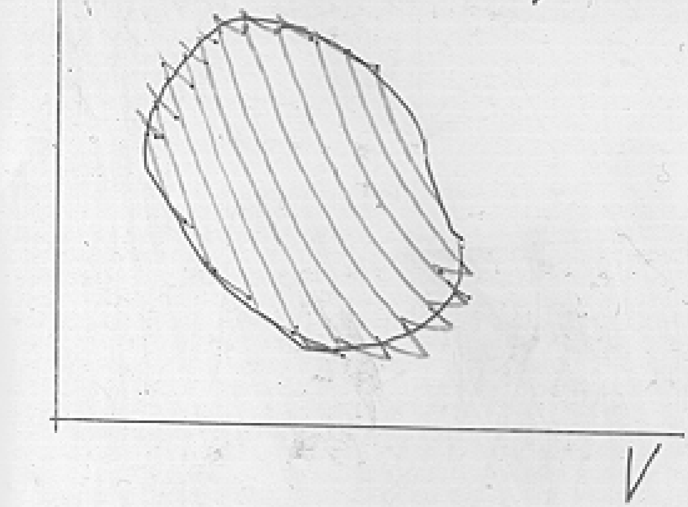
$\equiv \lim_{T \to 0} (\Delta S) = 0$ - pro $T \to 0$ se rozdíly entropií různých stavů blíží k nule

Příklad: adiabatická demagnetizace



$$\text{đ}Q = dU(T,V) + p(T,V)\, dV$$

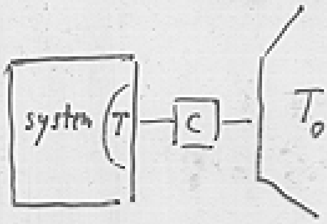
$$\partial_T U\, dT + (\partial_V U + p)\, dV$$

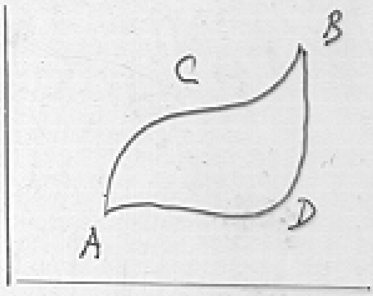


$$\oint \frac{\text{đ}Q}{T} = 0 \quad \text{reverz.}$$

$$< 0 \quad \text{irreverzib.}$$

(Clausiova věta)





$$\int_{ACBDA} \frac{\text{đ}Q_{rev}}{T} = 0$$

$$S_B - S_A = \int_{ACB} \frac{\text{đ}Q_{rev}}{T} = \int_{ADB} \frac{\text{đ}Q_{rev}}{T}$$

$$dS = \frac{\text{đ}Q_{rev}}{T}$$

$$\geq \int_{ADB} \frac{\text{đ}Q}{T}$$

$$\geq \frac{dQ}{T}$$

$$\underline{TdS = dU + p\,dV}$$

$$dU = TdS - p\,dV$$

$$dU = TdS + \sum X_i\, dx_i$$

$dS \geq 0$ pro izolovaný systém

degradace energie

Důsledky 2. věty termodyn.:

$$T dS = dU + p dV \qquad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \qquad (*)$$

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \underbrace{\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)}_{\downarrow} dV$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} \qquad \qquad \frac{\partial S}{\partial V}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\downarrow \quad = \quad \frac{\partial}{\partial T}\downarrow$$ (záměnnost 2. derivací)

$$\cancel{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\right) = -\frac{1}{T^2}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right) + \cancel{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$ vztah mezi stavovou rovnicí a tepelnými vlastnostmi

tedy $pV = nRT \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$

nebo obráceně pokud $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ (vnitřní energie závis. jen na teplotě)

a $pV = f(T)$ (Boyle-Mariotte), pak

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = T \cdot \frac{f'(T)}{V} = p = \frac{f(T)}{V}$$

$$\frac{df(T)}{f(T)} = \frac{dT}{T}, \qquad \ln f(T) = \ln T + konst$$

a $f(T) = k' \cdot T$, t.j. platí stavová rovnice ideál. plynu

Jiná forma $(*)$

$dU = T dS - p dV$ v proměnných S, V: $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$, $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

– proměnné T, V:

$F = U - TS$ – volná energie $\qquad dF = -S dT - p dV$

(Legendreova transformace) (při vratném izotermickém ději změna v.e. = vykonaná práce

– proměnné S, p

$H = U + pV$ <u>enthalpie</u> (tepelný obsah) $dH = TdS + Vdp$

změna = přijaté teplo při izobarickém ději

(id. plyn: $H = C_p T + H_0$

proměnné T, p

$G = U + pV - TS$ <u>Gibbsův termodynamický potenciál</u> $dG = -SdT + Vdp$

(také volná enthalpie)

při změně skupenství (konst. T, p) spojitý

Kinetické teorie

mikroskopický výklad tepelných jevů – atomy, molekuly, tepelný pohyb
úvahy již začátkem 17. století, rozpracování R. E. Clausius, J. C. Maxwell
(rozdělení rychlostí 1860), koncem 19. stol. J. Gibbs a L. Boltzmann
nejjednodušší případ plyny, pak krystalické tuhé látky, nejhorší
kapaliny (+ amorfní tuhé látky)

představa molekul jako kulové částice s konečným poloměrem
srážky molekul (nepříliš časté) – jinak rovnoměrný přímočarý pohyb
z hlediska použití rovnic klas. mechaniky problém prakticky neřešitelný
(i kdyby modely – zjednodušení)

$\Rightarrow$ statistické metody → statistická fyzika

(pojmy z teorie pravděpodobnosti – pravděpodobnost $w_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n}$
ψ hustota pravděpodobnosti $dw(s) = \psi(s)\,ds$

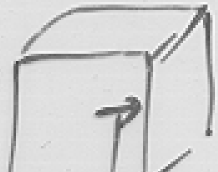
sčítání pravděpodobností,
násobení " — $w(a_i, b_j) = p(a_i)\,q(b_j)$

střední hodnota $\overline{f(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,dw(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\psi(s)\,ds$

rozptyl $\overline{(a-\bar{a})^2} = \overline{a^2} - \bar{a}^2$

tlak plynu – jednoduše (Krönig 1856):

$$p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}$$



přesněji

$$p = \int_{v_x=0}^{\infty} 2mv_x \cdot nv_x \cdot \psi(v_x)\,dv_x = mn\int_{v_x=-\infty}^{\infty} v_x^2\,\psi(v_x)\,dv_x = \rho\overline{v_x^2}$$

$\frac{1}{6}$ molekul rychlostí $(\pm v, 0, 0)$
tedy na $1\,m^2$ za sekundu $\frac{1}{6}n \cdot v$ molekul
změna hybnosti – $2mv$
celková změna hybnosti $\frac{1}{3}nmv^2$
$= \frac{1}{3}\rho v^2$

ale $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} \Rightarrow p = \frac{\rho}{3}\overline{v^2}$

vztah mezi mikroskopickým popisem a fenomenologickou veličinou p

Vztah mezi teplotou a rychlostí molekul

$$pV = \frac{1}{3} m \cdot N_A \cdot \overline{v^2} = RT$$

tedy $\overline{v^2} = \frac{3RT}{M}$ a střed. kvadrat. rychlost $v_k = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

molární hmotnost

(př.: pro H_2 je $M \doteq 2\,g\,mol^{-1}$ a při $T = 300K$ je $v_k = 1900\,m/s$
> rychlost střely z pušky – pro rtuť cca 10x menší)

Vnitřní energie ideál. plynu

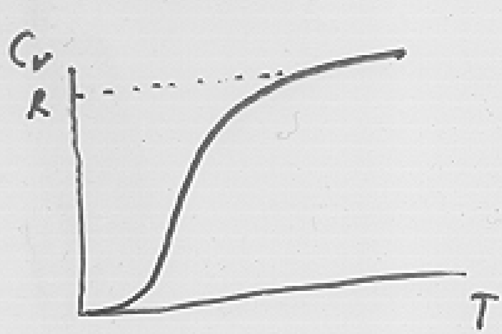
kinet. energie $E_k = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{m_i}{2} v_i^2 = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N_A} v_i^2 = \frac{mN_A}{2}\overline{v^2} = \frac{3}{2}RT$

pro jednoatomový plyn $U = E_k \Rightarrow C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}R = N_A \frac{3}{2}k$

víceatomový plyn – rotační stupně volnosti – lineární (+2 st.v.) (třeba CO_2)
prostorové molekuly (+3 st.v.)

Ekvipartiční princip (teorém?) na každý stupeň volnosti (translační či rotační) molekuly připadá energie $\frac{1}{2}kT$
+ na každý vibrační st.v. připadá energie kT (odpovídá dvěma členům ve výrazu pro energii – energii potenciální + kinetickou vibrací)
tedy pro j kvadrat. členů by $U = \frac{j}{2}RT$, $C_V = \frac{j}{2}R$

plyn	C_V	C_p	$\varkappa$
1atomový	$\frac{3R}{2}$	$\frac{5}{2}R$	5/3
2atomový (3+2+1 vibr.s.v.)	$\frac{7R}{2}$	$\frac{9}{2}R$	9/7
3atomový lin.	$13R/2$	$\frac{15}{2}R$	15/13
3atomový nelin.	$12R/2$	$\frac{14}{2}R$	14/12
n-atomový	$(3n-3)R$	$(3n-2)R$	$(3n-2)/(3n-3)$
bez vibrací lineární	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5} \sim 1{,}4$
nelineární	$\frac{6}{2}R$	$\frac{8}{2}R$	$\frac{8}{6} \sim 1{,}33$



(Einstein), kvantový harmonický oscilátor

celkem $3n$, z toho 3 pohyb těžiště, zbytek vnitřní stupně vol.

	lineární	nelineární
rotační	2	3
vibrační	$3n-5$	$3n-6$

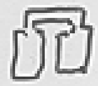
Souvislost entropie a mikroskopické pravděpodobnosti

(L. Boltzmann) $S \longleftrightarrow W$ – termodynamická pravděpodobnost
– počet různých realizací daného stavu

počet realizací stavu: v 1. místě / x v obou

$$S_1 + S_2 \longleftrightarrow W_1 \cdot W_2$$

tedy $\underline{S = \text{konst} \cdot \ln W}$ $\qquad \left(\frac{p\,dV}{T} = R \frac{dV}{V} \right)$



$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \left(\frac{C_v\,dT}{T} + \frac{p\,dV}{T} \right) = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Gay-Lussacova expanze $\Delta S = R \cdot \ln 2$

$2 \qquad \ln \frac{W_2}{W_1} = \ln 2^{N_A}$

$dQ = dU + p\,dV$

$\text{konst} = \frac{R}{N_A} = k$ Boltzmannova k.

Boltzmannův vztah $\underline{S = k \cdot \ln W}$

tedy entropie – míra pravděpodobnosti
růst S odp. přechodu do pravděpodobn. stavu

otázky reverzibility dějů – zdůvodnit, proč je děj ireverzibilní, když zákony mechaniky jsou reverzibilní, otázky informace – reverzibilita by vyžadovala detailní znalost konfigurace do detailů, které nelze získat – přístup teorie informace – minimalizace informace maximalizuje entropii (Prigogine)

otázky fluktuací, Maxwellův démon, porušení II. věty termody

Statistické rozdělení

Maxwellovo rozdělení (Maxwellovo odvození 1860 (!!)

pravděpodobnost
$v_x \in (v_x, v_x + dv_x) \ldots\ldots \psi(v_x)\,dv_x$
$v_y \in (v_y, v_y + dv_y) \ldots\ldots \psi(v_y)\,dv_y$
$v_z \in (v_z, v_z + dv_z) \ldots\ldots \psi(v_z)\,dv_z$

současná platnost – $\vec{v}$ padne do objemu $dv_x\,dv_y\,dv_z$: $\underbrace{\varphi(v^2)}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$
závisí jen na velikosti v

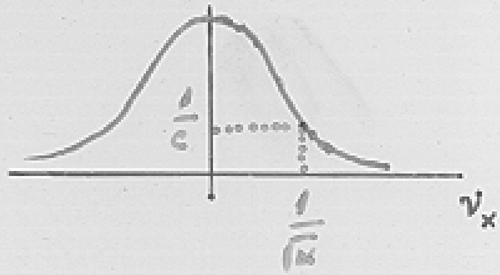
$$\underbrace{\psi(v_x)\,\psi(v_y)\,\psi(v_z)}_{\text{nezávislé události !!???}} = \varphi(v^2)$$

parciální derivace podle v_x: $\psi'(v_x)\,\psi(v_y)\,\psi(v_z) = 2\varphi'(v^2)\,v_x$

a vydělení $\frac{1}{v_x} \frac{\psi'(v_x)}{\psi(v_x)} = 2 \frac{\varphi'(v^2)}{\varphi(v^2)}$, totéž pro v_y, v_z

tedy $= \underline{-2\alpha}$ a integrační konstanta

a $\underline{\psi(v_x) = A e^{-\alpha v_x^2}}$, podobně $\psi(v_y) = A e^{-\alpha v_y^2}$
$\psi(v_z) = A e^{-\alpha v_z^2}$



a $\underline{\psi(v) = A^3 e^{-\alpha v^2}}$

Normovací konstanta A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\psi(v_x)\,dv_x = 1 \Rightarrow A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2}\,dv_x = 1$$

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi}_{I = \sqrt{\pi}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

(důkaz:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}d\eta = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+\eta^2)}d\xi\,d\eta}_{\text{integrál přes plochu}} = \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2}\,2\pi\varrho\,d\varrho =$$

polární souřadnice ϱ, φ

$d\xi\,d\eta = \varrho\,d\varphi\,d\varrho$

$\pi \cdot d(\varrho^2)$

subst. $\varrho^2 = \sigma$

$$\pi\int_0^{\infty} e^{-\sigma}d\sigma = \pi$$

určení α: $$\overline{v_x^2} = A\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2}dv_x = \frac{A}{\alpha^{3/2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2\alpha}$$

[integrace per partes $$\int \overset{u'}{\xi^n}\,\overset{v}{e^{-\xi^2}}d\xi = \overset{uv}{\frac{\xi^{n+1}e^{-\xi^2}}{n+1}} + \overset{-uv'}{\frac{2}{n+1}\int \xi^{n+2}e^{-\xi^2}d\xi}$$

$n = 0$: $$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$]

ale $\overline{v_x^2} = \frac{RT}{M} = \frac{kT}{m}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{2\overline{v_x^2}} = \frac{m}{2kT}$ a

$$\psi(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}$$

Vlastní Maxwellovo rozdělení

$$n_v\,dv = 4\pi v^2 \varphi(v^2)\,dv = 4\pi A^3 \underbrace{e^{-\alpha v^2} v^2}\,dv$$

charakteristiky:

střední kvadratická rychlost

$$v_k = \sqrt{\overline{v^2}} = \int_0^\infty 4\pi v^2 \varphi(v^2)\cdot v^2\,dv = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Rozptyl:

$$\overline{(v-\bar{v})^2} = \overline{v^2} - \bar{v}^2 = \left(3-\frac{8}{\pi}\right)\frac{kT}{m} \doteq 0{,}454\,\frac{kT}{m}$$

(střed. kvadrat. odchylka)

střední rychlost

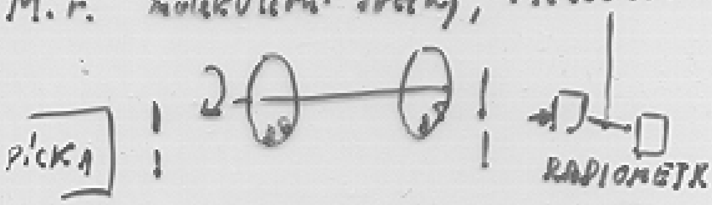
$$\bar{v} = \int_0^\infty 4\pi v^2 \varphi(v^2)\, v\,dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

nejpravděpodobnější rychlost

$$\frac{d}{dv}\left(v^2 e^{-\alpha v^2}\right) = 0 \Rightarrow 2v e^{-\alpha v^2} - v^2\cdot 2\alpha v e^{-\alpha v^2} = 0 \Rightarrow \alpha v_p^2 = 1$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Experimentální ověřování M. r. molekulární svazky, Fizeauova metoda



Maxwellovo – Boltzmannovo odvození – ze srážek molekul (Záviška, Bakule)
(1860) (1868)

před srážkou $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ → po srážce $\vec{v}_1'$ $\vec{v}_2'$

$$f(\vec{v}_1)\cdot f(\vec{v}_2)\cdot d\tilde{v}_1\, d\tilde{v}_2 = f(\vec{v}_1')\, f(\vec{v}_2')\, d\tilde{v}_1'\, d\tilde{v}_2'$$

($d\tilde{v}_1$ označuje 3rozměrný element $d\tilde{v}_1 = dv_{1x}\,dv_{1y}\,dv_{1z}$)

Boltzmannova funkce H $= V\int f(v_1)\,dv_1 \log f(v_1) = -\frac{S}{k} + \text{konst}$

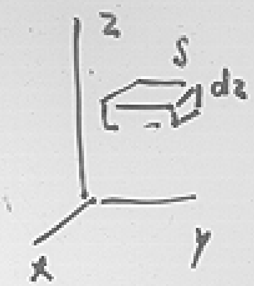
pro srážky lze ukázat $d\tilde{v}_1\, d\tilde{v}_2 = d\tilde{v}_1'\, d\tilde{v}_2' \Rightarrow f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) = f(\vec{v}_1')f(\vec{v}_2')$

z toho lze opět odvodit Maxwellovo rozdělení

(další Boltzmannovy úvahy: funkce H $= V\int (\log f(\vec{v}))\cdot f(\vec{v})\,d\tilde{v} = -\frac{S}{k} + \text{konst}$

(viz Záviška) vlastnosti: H s časem v důsledku srážek klesá, minimální hodnotu pro Maxwellovo rozdělení. souvislost s entropií:

Změna koncentrace částic s výškou



$$S\, n(z)\,\psi(v_z)\, dv_z\, dz$$

$$n(z)\,\psi(v_z)\,dv_z\,dz = n(z')\,\psi(v_z')\,dv_z'\,dz'$$

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dz'}{v_z'}$$

$$\frac{m}{2}v_z^2 + mgz = \text{konst} \Rightarrow v_z\,dz = v_z'\,dz' \Rightarrow \frac{n(z')}{n(z)} = \frac{\psi(v_z)}{\psi(v_z')} = e^{-\frac{m(v_z^2 - v_z'^2)}{2kT}}$$

$$\frac{n(z')}{n(z)} = e^{-\frac{mg(z'-z)}{kT}} =$$

$$p = nkT \Rightarrow p = p_0\, e^{-\frac{mgh}{kT}}$$ Barometrická formule

$$n(E_p) = n_0\, e^{-\frac{E_p}{kT}}$$ Boltzmannovo rozdělení

$$n_i = \text{konst}\; e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

Fluktuace $\overline{(\Delta v^2)^2} = \overline{v^4} - (\overline{v^2})^2 = 6\left(\frac{kT}{m}\right)^2$

$$\overline{v^4} = \frac{15}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \qquad \overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

relat. fluktuace

$$\delta(v^2) = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta v^2)^2}}}{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Relat. fluktuace $\overline{E} = N_A E_1 = \frac{3}{2} N_A kT$

$$\overline{(\Delta E)^2} = \Delta\Big(\sum_{(N_A)} E_1\Big)^2 = \sum_{N_A} \overline{(\Delta E_1)^2} = \sum_{N_A}\left(\frac{1}{2} m \Delta v^2\right)^2 = \frac{6}{4} N_A (kT)^2$$

relat. fluktuace energie v 1 molu

$$\delta E = \frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{E} = \sqrt{\frac{2}{3N_A}} \sim \frac{1}{\sqrt{N_A}}$$

Brownův pohyb

$$\overline{\Delta x^2} = \sqrt{\frac{kT}{3\pi\eta r}}\cdot t$$

Transportní jevy: vnitřní tření – vedení tepla – difuze

(transport hybnosti energie hmoty)

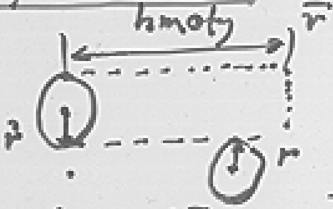
Obecné schema:

$$i = -\alpha \frac{dp}{dx}$$

"množství veličiny" přenesené za jednotku času jednotkovou plochou

součinitel transp. jevu

gradient veličiny



střed. počet srážek molekuly za jednotku času $\bar{z} = 4\pi r^2 \bar{v} n_0 = \frac{\bar{v}}{\bar{l}}$

$\downarrow \cdot\sqrt{2}$

srážky molekul střed. volná dráha $\bar{l} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2} r^2 n_0}$

(faktor $\sqrt{2}$: zavedení střední relativní rychlosti molekul jedné vůči druhé

$$\overline{v_{xl}} = \int_0^\infty \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x\, dx = \frac{\bar{v}}{4}$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow v_r^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2$$

$$\overline{v_r^2} = \overline{v_1^2} + \overline{v_2^2}$$ při středování dá nulu

$\overline{v_r^2} = \sqrt{2}\cdot\overline{v_1^2}$ a stejný vztah pro $\overline{v_r} = \sqrt{2}\,\overline{v_1}$

Výsledek lze upravit: $\bar{l} = \frac{1}{\pi\sqrt{2} d^2 n_0}$ kde $d = 2r$ je účinný průměr molekuly

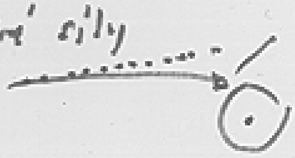
(pro dusík či vzduch za normálních podmínek $\bar{l} = 9.10^{-8}$ m,

roste nepřímo úměrně tlaku $\bar{l} = \bar{l}_n \cdot \frac{p_n}{p}$

pro $p = 1$ Pa je $\bar{l} \sim 1$ cm – srovnatelné se součástmi vakuových aparatur

vliv teploty – Sutherlandův vzorec

$$d^2 = d_\infty^2\left(1 + \frac{A}{T}\right)$$ (přitažlivé síly

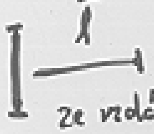


(samo) difuze

$$i(x,t) = -D\frac{dc(x,t)}{dx}$$

gradient koncentrace

součinitel (koeficient) difuze



ze vzdálenosti $\bar{l}$

počet částic prošlých za jednotku času jednotkovou plochou → difuzní tok

$$D = \frac{\bar{l}\bar{v}}{2}$$

(přesnější Chapman (1915), Enskog (1917)) $D = 0{,}599\,\bar{l}\bar{v}$

Určení poloměru molekuly

Termodifuse – lehčí molekuly ve směru stoupání (gradientu) teploty

Difuse ve dvousložkové směsi $D_{AB} = D_{BA} = D$ (vliv celkového toku plynu)

$$D = y_B D_A + y_A D_B \qquad y - \text{molární podíly}$$

$$D_A = \frac{1}{2} \bar{v}_A \bar{l}_A \,, \quad D_B = \frac{1}{2} \bar{v}_B \bar{l}_B$$

<u>viskozita</u> přenos hybnosti – Couette flow

$$i = \frac{F}{S} = -\eta \frac{dv}{dx} \qquad \eta = \overset{0{,}499}{\frac{1}{2}} \varrho \bar{v} \bar{l}$$

viskozita $\quad$ $m \cdot n_0$ hustota plynu

(nezávisí na tlaku pro $\bar{l} \ll$ rozměry aparatury)

klouzání plynu

tepelná vodivost

$$q = \frac{Q}{S} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

součinitel tepelné vodivosti

$$\lambda = \frac{1}{2} \varrho \bar{v} \bar{l} c_v$$

1,261 $\quad$ opět nezávisí na tlaku plynu

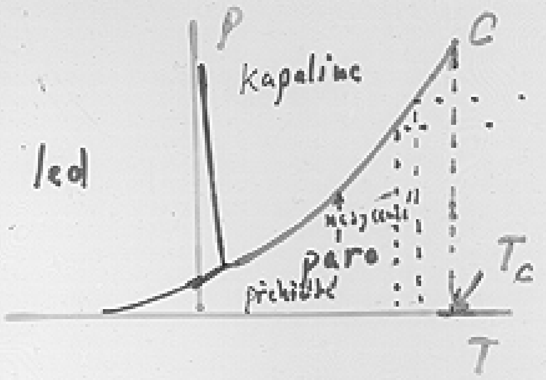
ale při nízkých tlacích

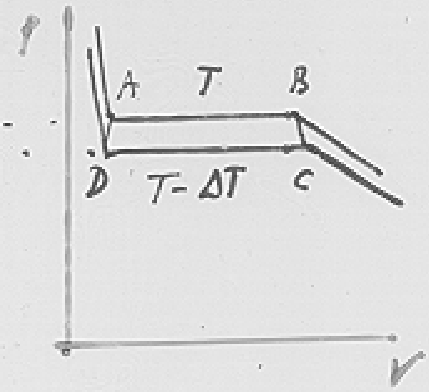
přímo úměrně začne klesat

molekulární proudění atd

Fázové přechody

Fázový diagram pro jednosložkovou soustavu (voda)





Počet stupňů volnosti $v = 2$ (třeba p, T)

Rovnováha 2 fází → sníží počet stupňů volnosti o 1

(podmínka rovnováhy fází – představa kinetické rovnováhy, termodynamická formulace za rok)

Další složka – zvýší v o 1: tedy

Gibbsovo fázové pravidlo

$$v = 2 + s - f$$

Pro $s = 1$ $f = 1 \Rightarrow v = 2$ soustava bivariantní

$f = 2 \Rightarrow v = 1$ univariantní

$f = 3 \Rightarrow v = 0$ invariantní

Křivka nasycených par

- tlak ("tenze") nasycených par
  - nezávisí na objemu, závisí na teplotě

Skupenské teplo (molární, měrné)

$$L = \underbrace{U_2 - U_1}_{\text{vnitřní}} + \underbrace{p(V_2 - V_1)}_{\text{vnější}} = H_2 - H_1$$

(mimochodem – při přechodu p i T konst.

$dG = -S\,dT + V\,dp = 0$

G kapaliny i páry v rovnováze stejné)

Carnotův cyklus mezi teplotami T, $T + dT$

$$\eta = \frac{dT}{T} = \frac{A}{Q} = \frac{dp\,(V_2 - V_1)}{L}$$

jak dokázat ?

$\Delta G_{kap} = \Delta G_{páry}$

a rovnice Clausiusova – Clapeyronova

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}$$

důsledky: 1) pro přechod led → voda $V_1(\text{led}) > V_2(\text{voda}) \rightarrow \frac{dp}{dT} < 0$

2) průběh <u>křivky nas. par</u> (měření Toricelliho trubicí)

$V_1 \ll V_2 = \frac{RT}{p}$ dává $\frac{dp}{p} = \frac{L\,dT}{RT^2}$ a při konstantní L

$$\underline{\log p = -\frac{A}{T} + B}$$ (Augustova rovnice
semiempirický vztah
dobrý souhlas)

Poznámky:

1) pojem fáze – různé krystalické modifikace: různé fáze
enantiomorfní formy (pravotočivé a levotočivé krystaly): stejné
kapalina a amorfní pevná (tuhá) látka představují fáze stejnou fázi

2) vícesložkové soustavy – fázi představuje třeba homogenní roztok, směsný krystal
– pokud probíhají chemické reakce, sníží se tím počet nezávislých složek (jsou vázány reakcí)
– fázové diagramy se komplikují – moc proměnných

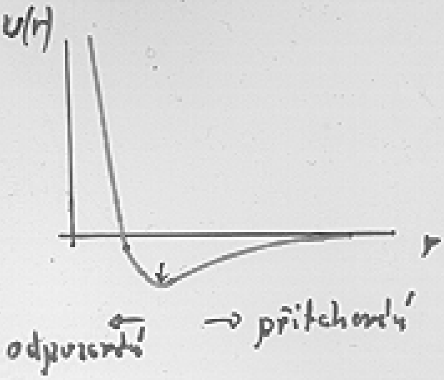
3) skupenské teplo vypařování, <u>var</u>, skupenské teplo varu –
zárodky plynné fáze, rozpuštěné plyny
nejsou-li – přehřátá kapalina – proti tomu varná tělíska (keramika)

podobně přechlazená kapalina zárodky krystalů

souvislost s tlakem nasyc. par nad zakřiveným povrchem

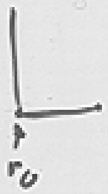
Reálné plyny

mezimolekulární síly — nenabité molekuly (obě mají permanentní dipól. moment
1 má dipól. moment
bez dipólových momentů
— přitahování
překryvové interakce
— odpuzování

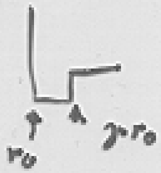


$u = -Ar^{-6} + Br^{-n}$ Lennard-Jonesův potenciál (běžně 6-12: $n = 12$)

aproximace tuhých koulí



modifikace



Van der Waalsova rovnice

— jednoduché odvození přímo z viriálové věty (Clausius)

viriál $= \frac{1}{2}\sum m v^2 = -\frac{1}{2}\sum \vec{r}\vec{F}$ ← střední časová hodnota
$\vec{r}$ poloha molekuly
$\vec{F}$ síla na ni působící

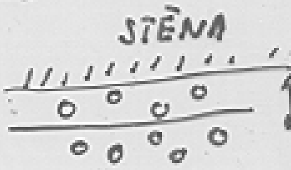
viz třeba Zdvižka

$$pV = RT$$

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

kohezní tlak p_i

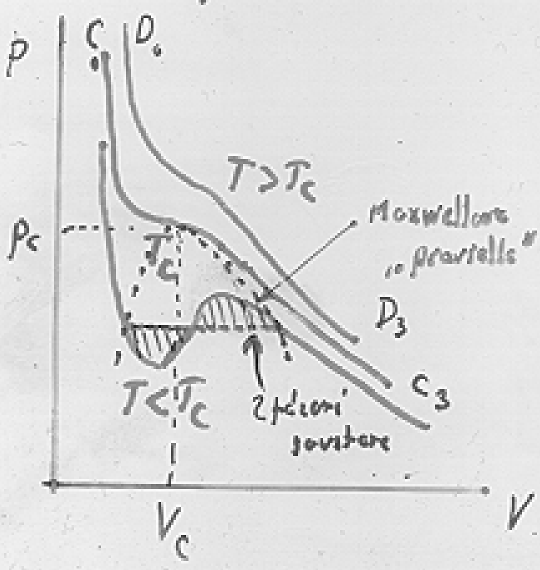
„kovolum" pro tvrdé koule = 4× vlastní objem koulí



dosah přitažlivých sil
$p_i \sim$ počtu molekul narážejících
$\sim$ — " — těmto přitahujících

(pro ν molů samozřejmě

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \quad)$$



$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

$$V^3 - \left(\frac{RT}{p} + b\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0$$

až tři kořeny pro V

kritická isoterma musí dát $(V - V_c)^3 = 0$

tedy $3V_k = \frac{RT_k}{p_k} + b$, $3V_k^2 = \frac{a}{p_k}$, $V_c^3 = \frac{ab}{p_k}$

tedy $V_k = 3b$, $p_k = \frac{a}{27b^2}$, $T_k = \frac{8a}{27bR}$

Ve skutečnosti se bere R jako nezávislé určení, a tabulkové hodnoty a, b se počítají

$$a = \frac{27 R^2 T_k^2}{64 p_k} \qquad b = \frac{R T_k}{8 p_k}$$

a protože $V_k = 3b$ musí být

$$\frac{p_k V_k}{T_k} = \frac{3}{8} R$$

Zavedení redukovaných stavových veličin

$$\pi = p/p_k \;, \quad \omega = V/V_k \;, \quad \vartheta = T/T_k$$

redukovaná v. d. Waalsova rovnice

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\vartheta$$

teorém korespondujících stavů (srovnávání různých látek se stejnými hodnotami redukovaných veličin

- s v.d.W rovnicí
- mezi sebou

V.d.W lze užít k odhadu odchylek od chování ideálního plynu.

Jiné stavové rovnice

Berthelot $\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT$

Dieterici $p \exp\left(\frac{a}{VRT}\right)(V - b) = RT$ (lepší než v.d.W okolo normálního tlaku 0,1 MPa)

Redlich-Kwong $\left(p + \frac{a}{V(V+b)\sqrt{T}}\right)(V - b) = RT$

viriální stavová rovnice (1901 Kammerlingh-Onnes)

(kompresibilitní faktor z) $\frac{pV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \frac{D(T)}{V^3}$

B druhý viriálový koeficient

C třetí

⋮

v.d.W $B = b - \frac{a}{RT}$, $C = b^2$

koeficienty lze uvést v souvislost se silovým působením

např. $B(T) = 2\pi N_A \int_0^\infty \left(1 - \exp\left(\frac{u(r)}{kT}\right)\right) r^2 dr$

Povrchové napětí, kapilární jevy

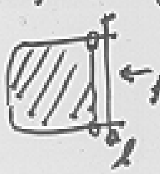
kapaliny: na rozdíl od plynů: podstatně větší hustota, tím i menší stlačitelnost a větší uplatnění kohezních i repulzivních sil

na rozdíl od (krystalických) pevných látek: neuspořádané umístění molekul (rozlišení od amorfních látek – "rychlejší" molekulární pohyby – má spíše pouze kvantitativní charakter – spojitý přechod do skelného stavu)

(poznámka: ale u vody určité krátkodosahové uspořádání i v kapalném stavu $\leftrightarrow$ anomálie roztažnosti! podobně kapalné krystaly)

– molekulární tlak (H_2O ~ 2,03 GPa) – s tím souvisí

povrchové napětí $\sigma = \frac{f}{2l}$ práce $dW = f \cdot dx = 2\sigma l\,dx$

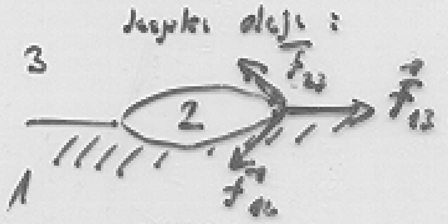


$$\sigma = \frac{dW}{2l\,dx} = \frac{dW}{dS}$$ plošná hustota povrchové energie

s rostoucí teplotou klesá, při $T_k = 0$

experimenty s jehlou na vodní hladině

kapky oleje:



$$\vec f_{12} + \vec f_{23} + \vec f_{13} = 0$$

pro parafínový olej $\sigma_{12} + \sigma_{23} > \sigma_{13}$ vytvoří kapku

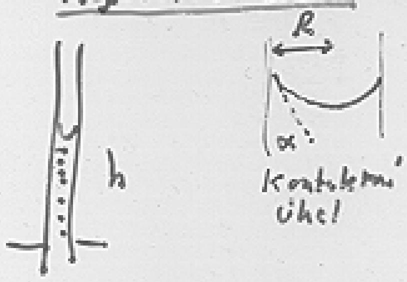
pro lehký olivový olej $\sigma_{12} + \sigma_{23} < \sigma_{13}$ – roztéká se

zakřivený povrch: kapilární tlak

$p_k = \frac{2\sigma}{R}$ (či obecně $\sigma \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$) – pro kulový povrch lze snadno odvodit

mýdlové bubliny – "větší požírají menší"

kapilární elevace a deprese – v prvním případě smáčivost/nesmáčivost



$$h = \frac{2\sigma}{r(\rho - \rho_0)g} = \frac{2\sigma\cos\alpha}{R(\rho - \rho_0)g}$$ a pro dobře smáčející kap. $\cos\alpha \to 1$

a $h = \frac{2\sigma}{R(\rho - \rho_0)g}$

obdobně deprese (u rtuti)