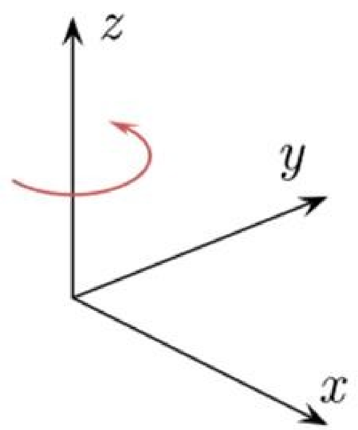
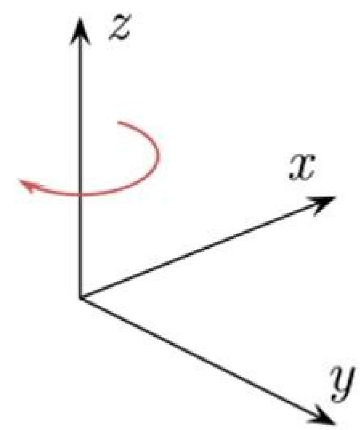
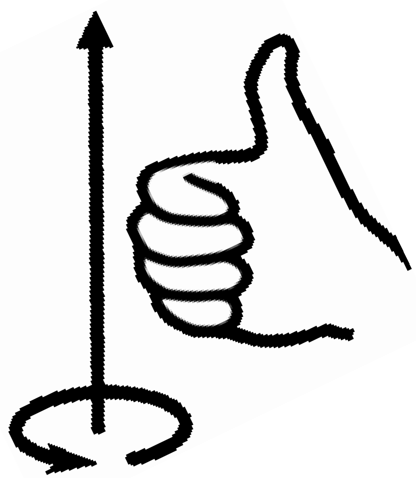
Kartézská soustava souřadnic

Pravotočivá



Levotočivá





jednotkové vektory ve směru souřadnicových os

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Kartézská soustava souřadnic

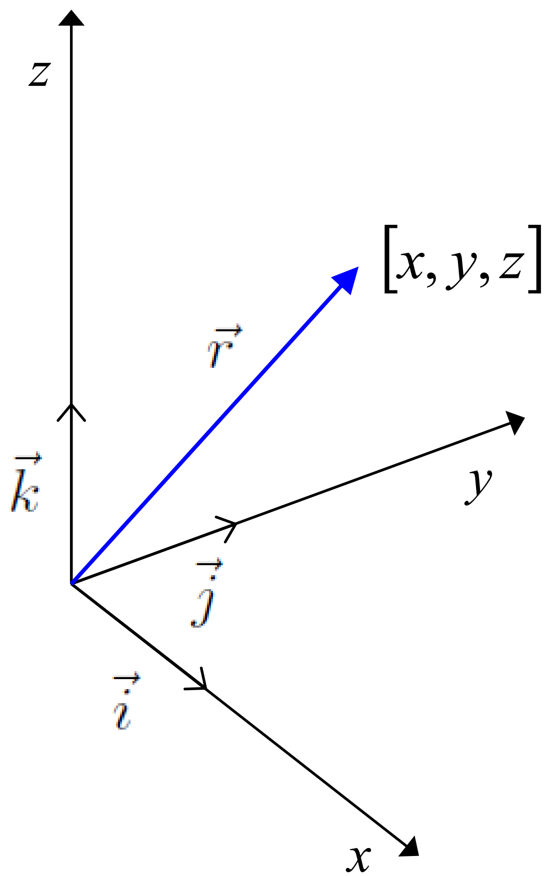
• ortonormální báze

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{i}\,\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}\,\vec{k} = 0$$

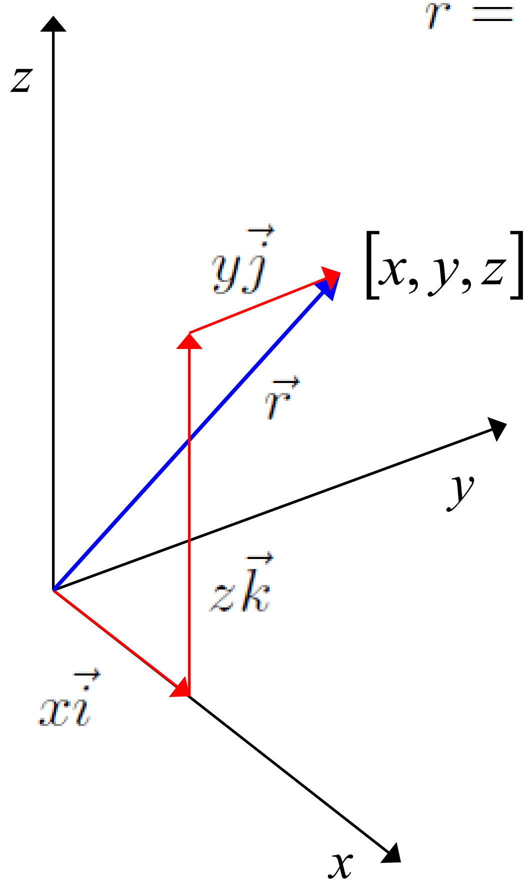
$$\vec{j}\,\vec{k} = 0$$



Kartézská soustava souřadnic

- **polohový (radius) vektor**

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$



velikost polohového vektoru:

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Obecné souřadnice

- kartézské souřadnice: *x*, *y*, *z*
- obecné souřadnice: q_1, q_2, q_3

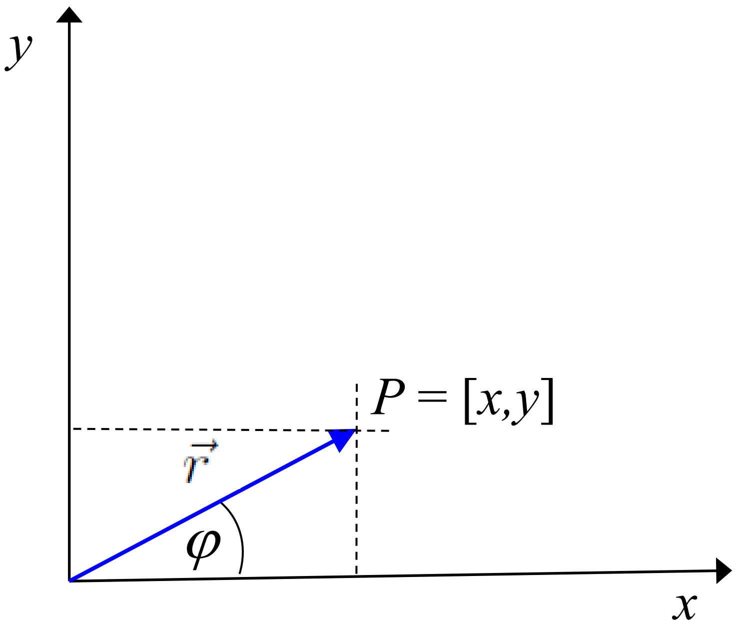
$$x = x(q_1, q_2, q_3) \qquad q_1 = q_1(x, y, z)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) \qquad q_2 = q_2(x, y, z)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3) \qquad q_3 = q_3(x, y, z)$$

Polární soustava souřadnic

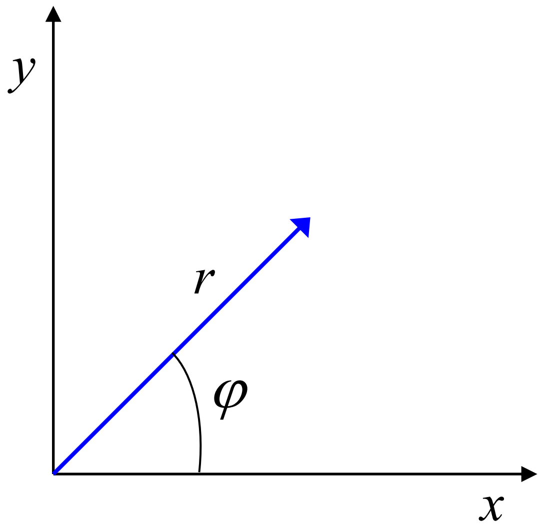
- kartézská soustava souřadnic: x, y
- polární soustava souřadnic: r, φ



$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

ω - úhlová rychlost

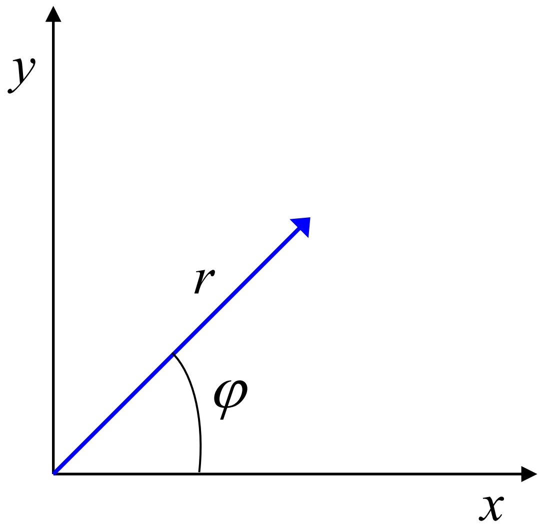
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ - perioda

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

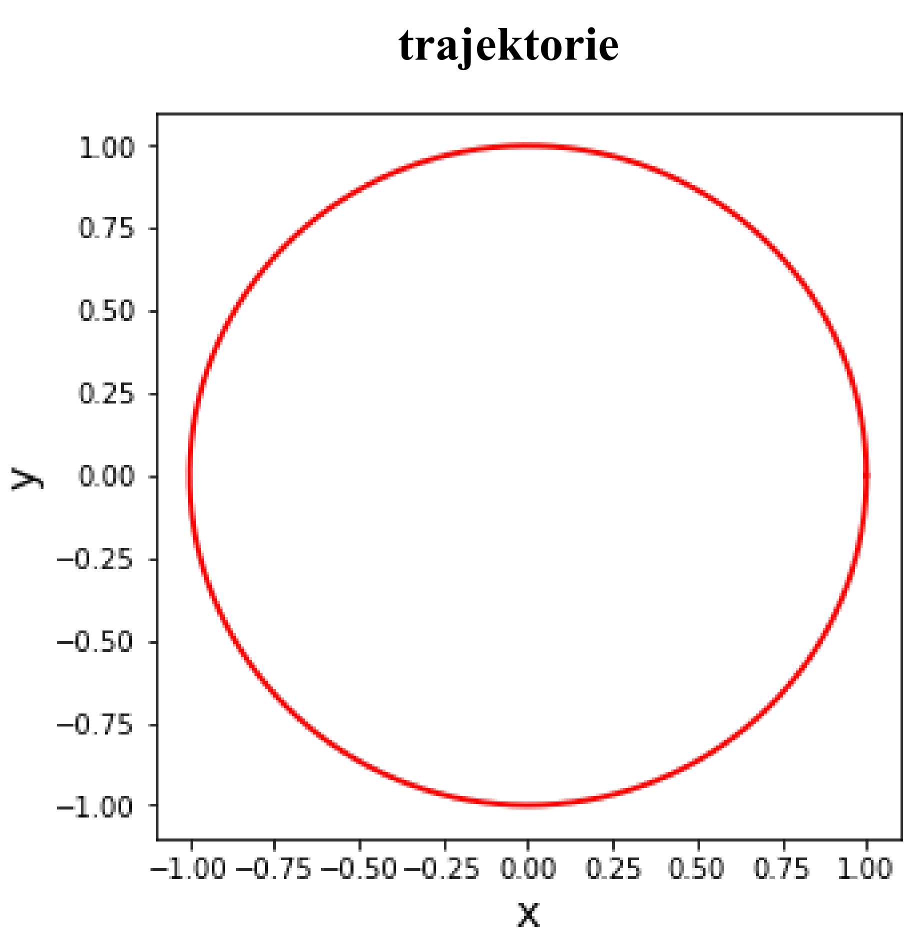
$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

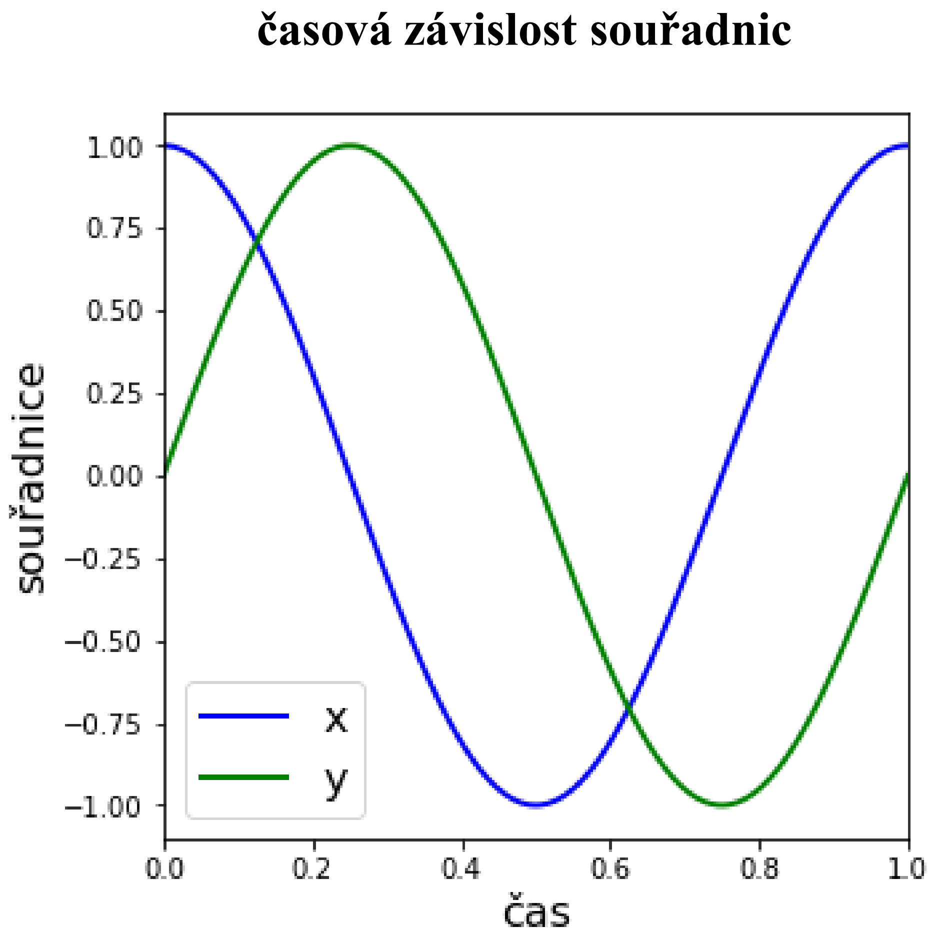
$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

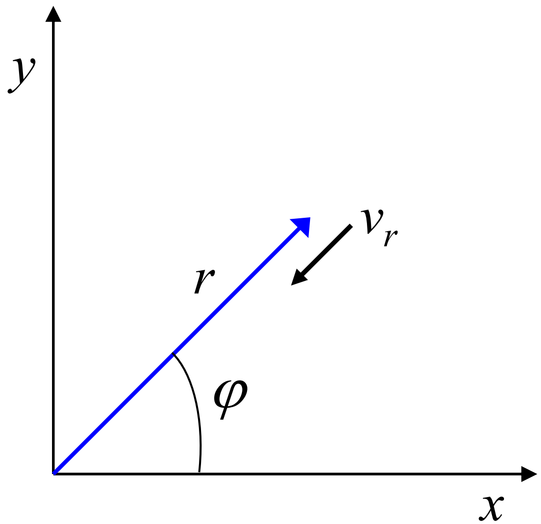
Rovnoměrný pohyb po kružnici





kruhovy-pohyb.py

Rovnoměrný pohyb po kružnici + zmenšování *r*



polární souřadnice

$$r(t) = r_0 - v_r t$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

ω - úhlová rychlost

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ - perioda

kartézské souřadnice

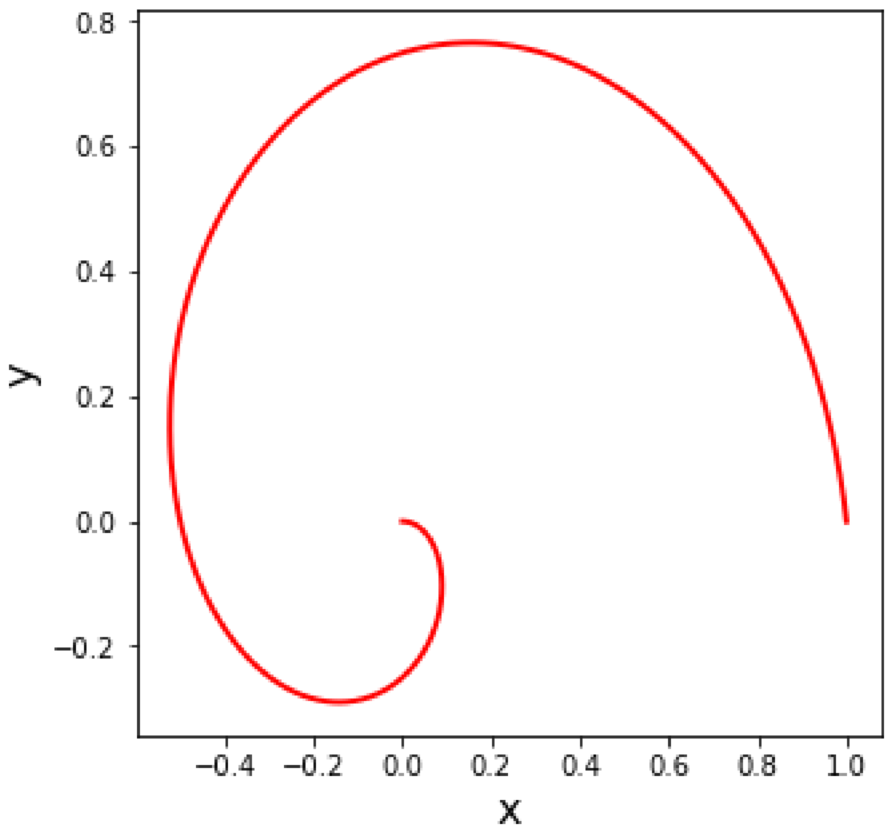
$$x(t) = r\cos\varphi = (r_0 - v_r t)\cos(\omega t)$$

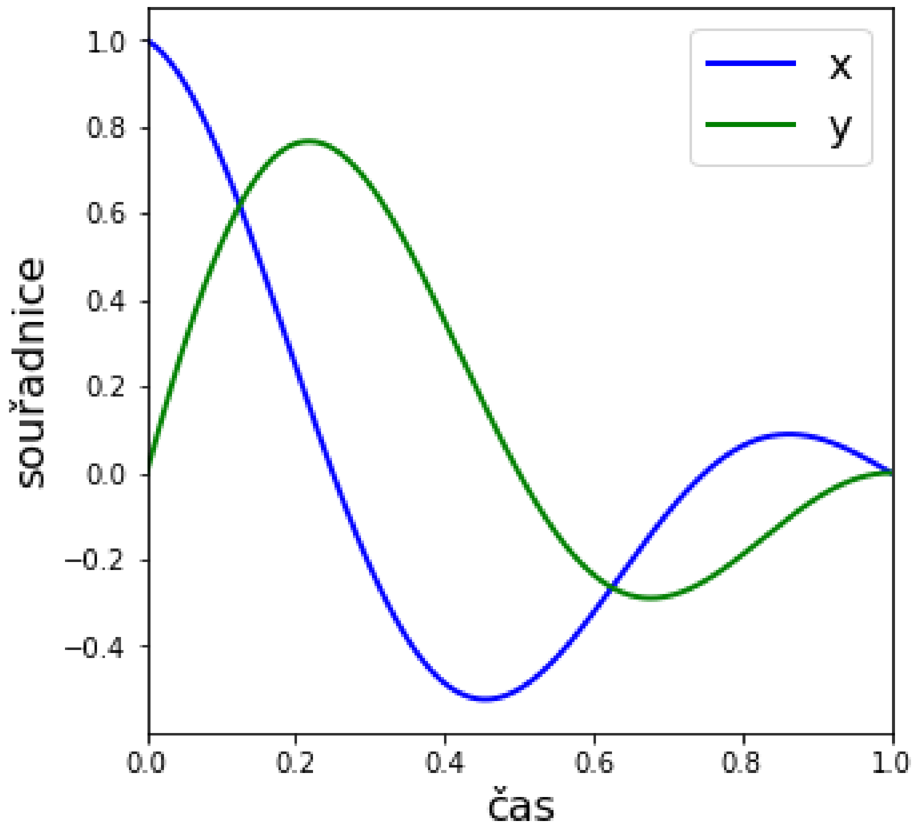
$$y(t) = r\sin\varphi = (r_0 - v_r t)\sin(\omega t)$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici + zmenšování r

$$v_r = \frac{r_0}{T} = \frac{r_0}{2\pi}\omega$$

za jednu otočku: $r_0 \rightarrow 0$



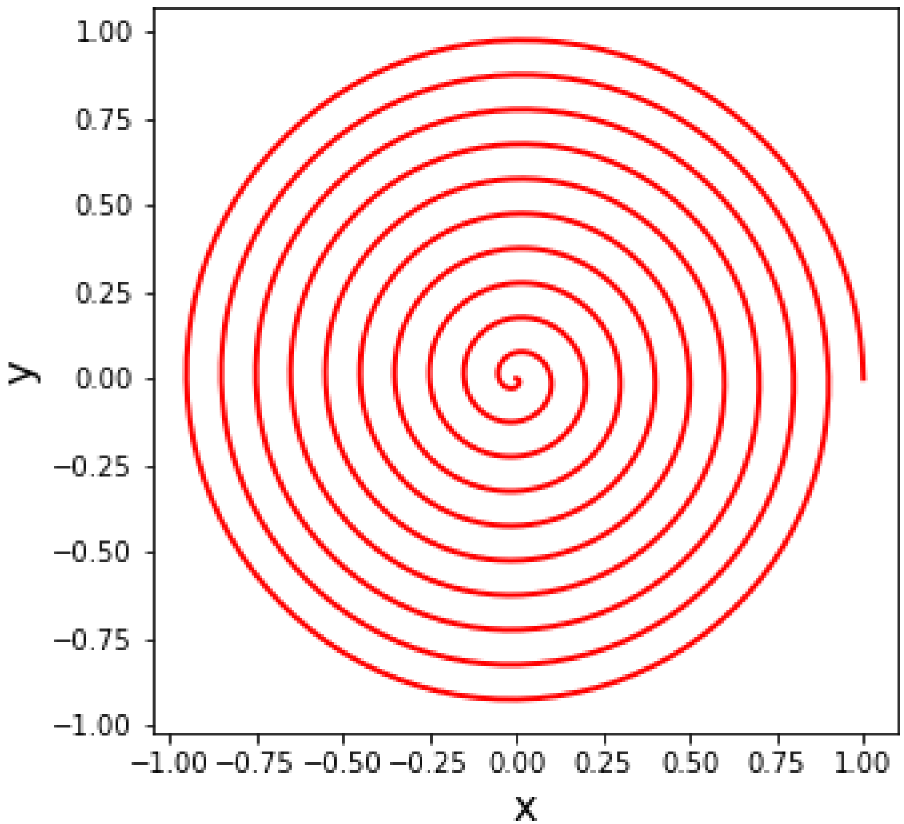


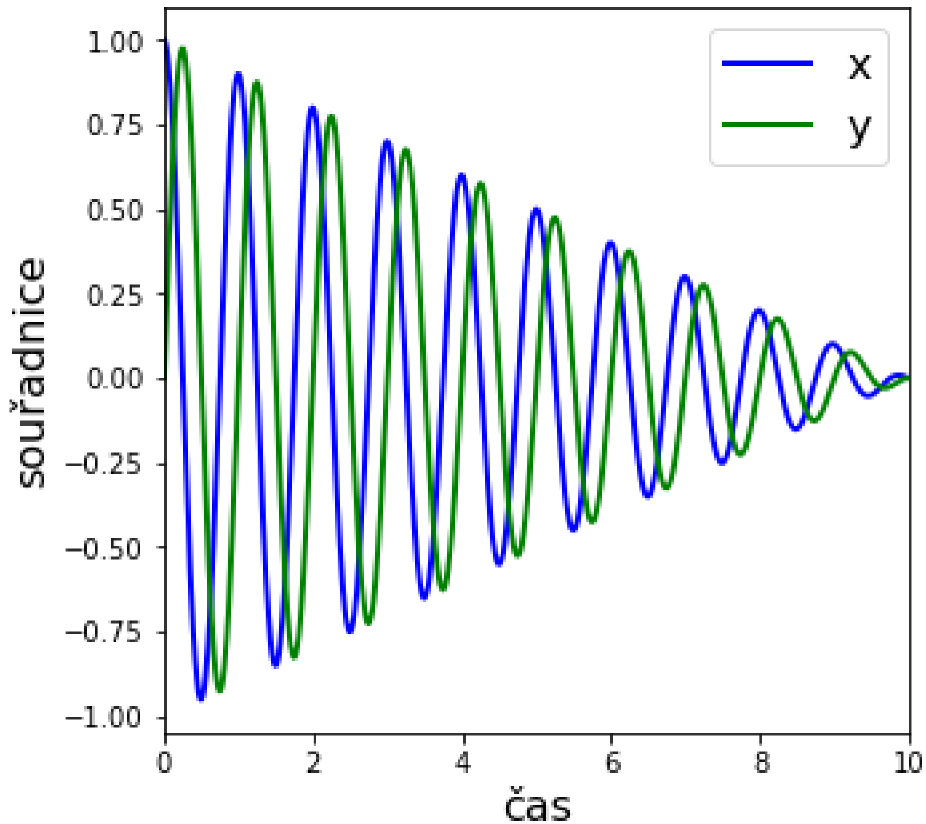
`spirala.py`

Rovnoměrný pohyb po kružnici + zmenšování r

$$v_r = \frac{r_0}{10T} = \frac{r_0}{20\pi}\omega$$

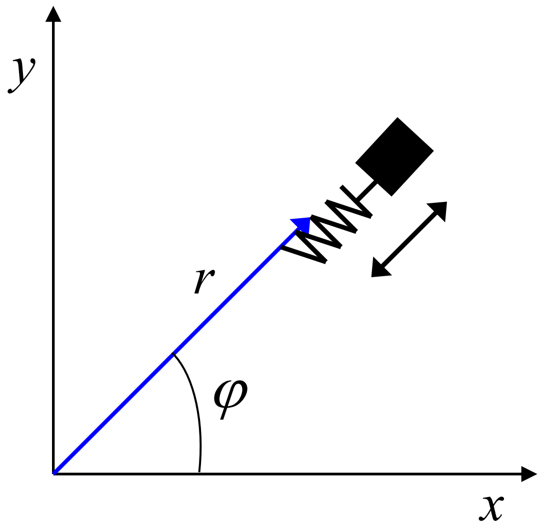
za jednu otočku: $r_0 \rightarrow 0.9\, r_0$

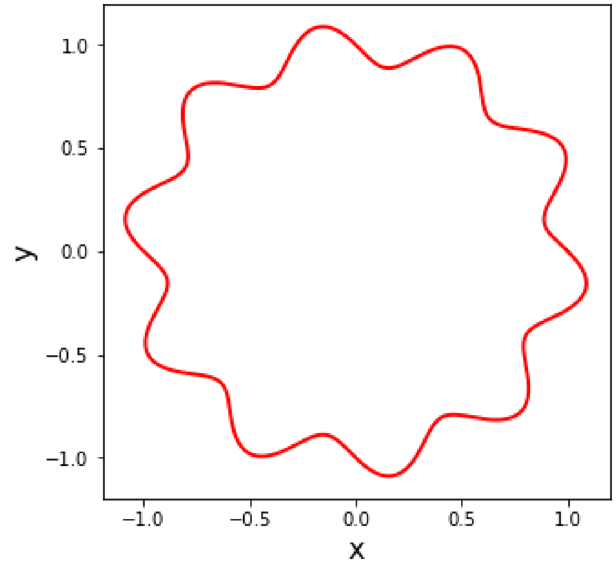




spirala.py

Kruhový pohyb + kmity





$$A = 0.1 r_0$$

$$f_r = \frac{10\omega}{2\pi}$$

pruzina.py

polární souřadnice

$$r(t) = r_0 + A\sin(2\pi f_r t)$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

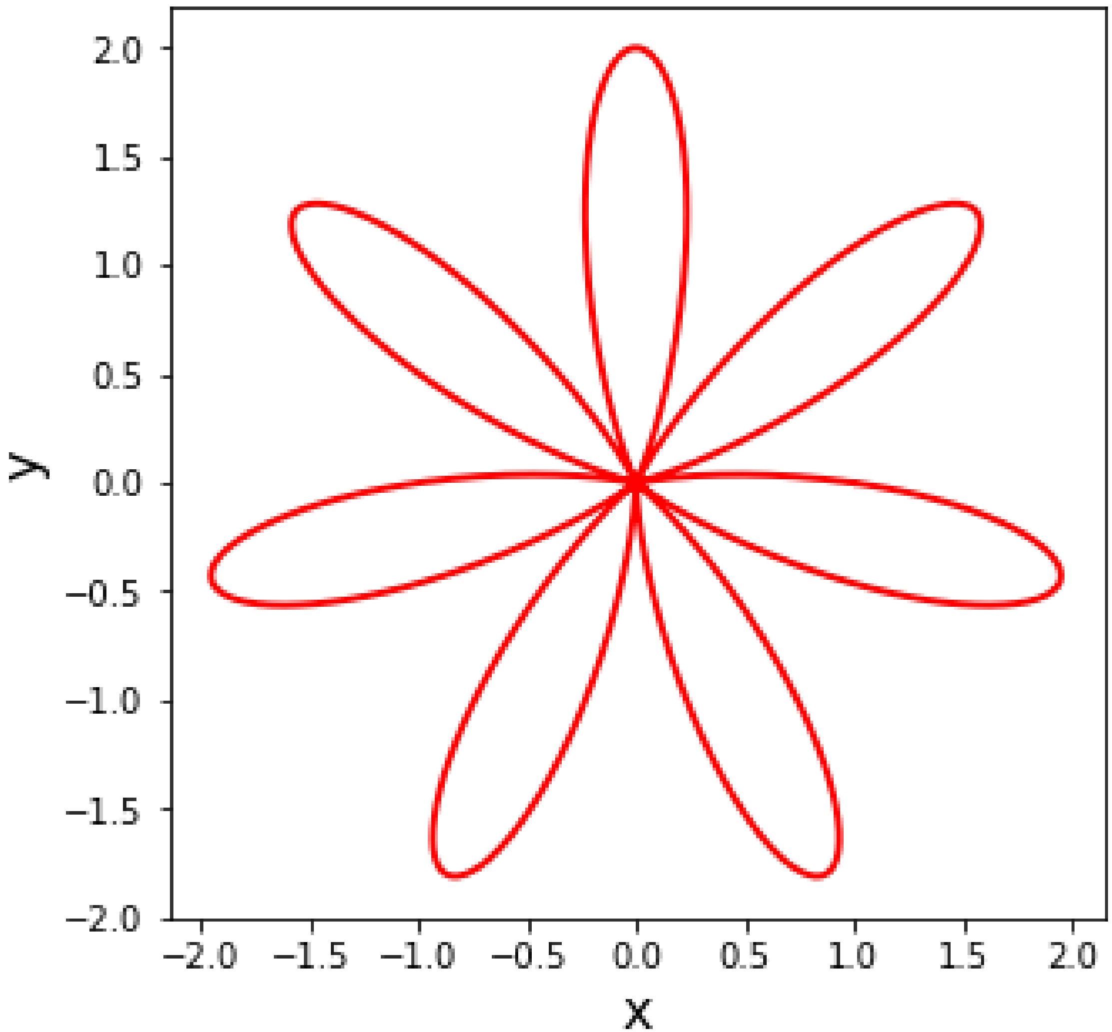
$$x(t) = (r_0 + A\sin(2\pi f_r t))\cos(\omega t)$$

$$y(t) = (r_0 + A\sin(2\pi f_r t))\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost $\qquad$ f_r - frekvence kmitů

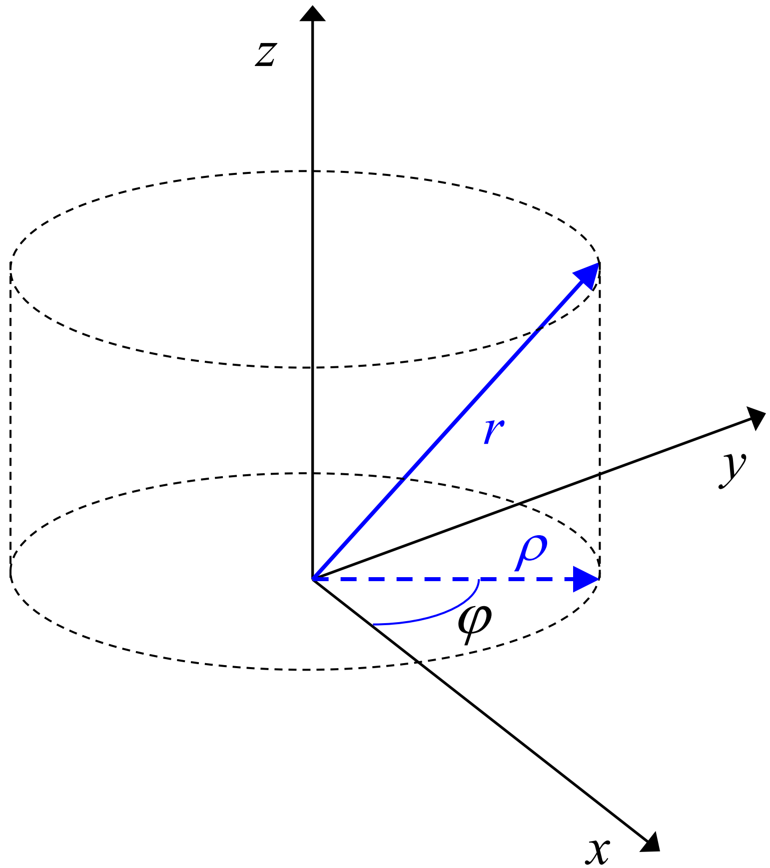
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda $\qquad$ A - amplituda kmitů

Trajektorie



Cylindrická soustava souřadnic

- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- cylindrická (válcová) soustava souřadnic: ρ, φ, z



$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$
$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Cylindrická soustava souřadnic

kartézské souřadnice

$$x(t) = \rho \cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = \rho \sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

$$z(t) = v_z\, t$$

cylindrické souřadnice

$$\rho(t) = r$$

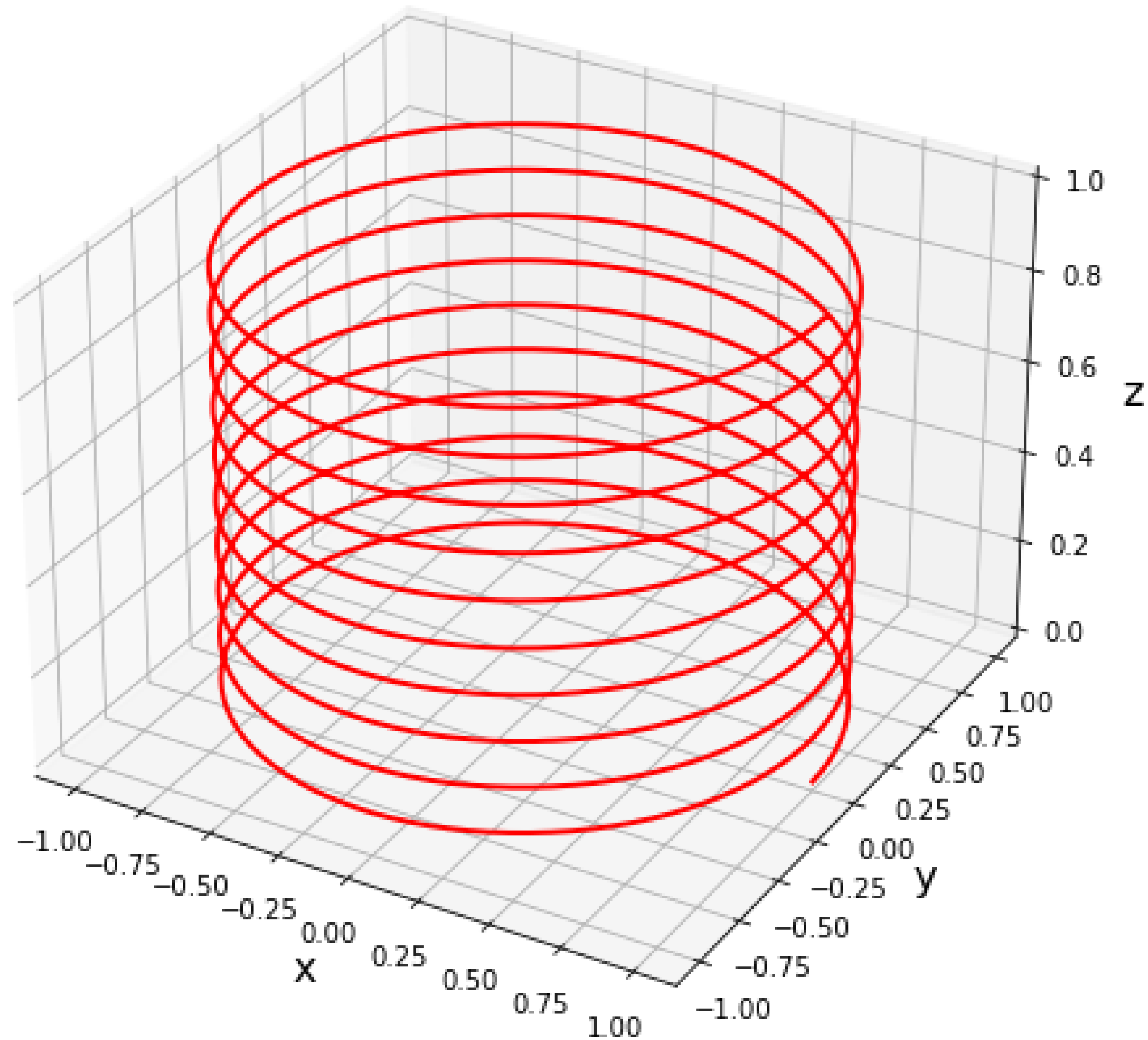
$$\varphi(t) = \omega t$$

$$z(t) = v_z\, t$$

ω - úhlová rychlost

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - perioda

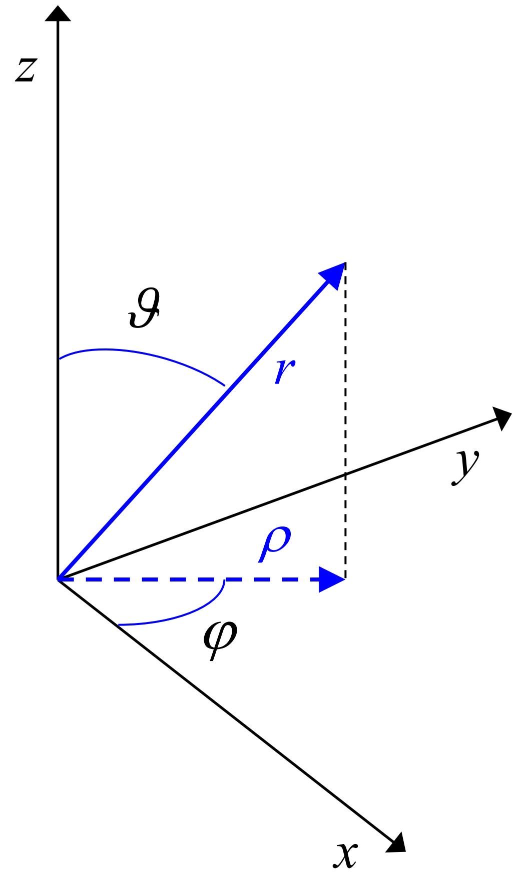
v_z – rychlost stoupání



sroubovice.py

Sférická soustava souřadnic

- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- sférická soustava souřadnic: r, ϑ, φ



$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Kinematika

- **hmotný bod:** těleso s nekonečně malými rozměry, ale nenulovou hmotností,
  tj. žádné otáčení, žádná deformace atd.

- popis pohybu hmotného bodu – tj. poloha hmotného bodu v závislosti na čase

- polohový (radius) vektor $\vec{r}$

- **trajektorie**: křivka, kterou vytváří koncový bod polohového vektoru

- parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

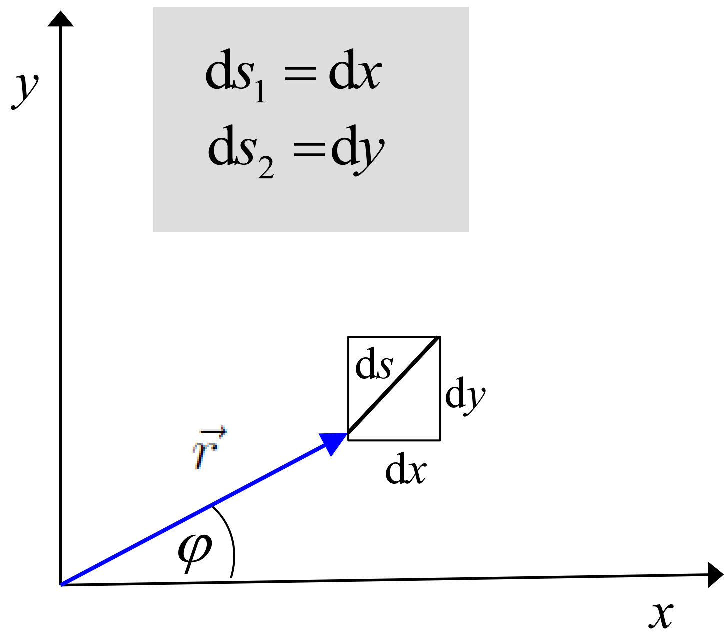
kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

Ortogonální obloučky

kartézské souřadnice:

$$\mathrm{d}s = \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}s_1 = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}s_2 = \mathrm{d}y$$

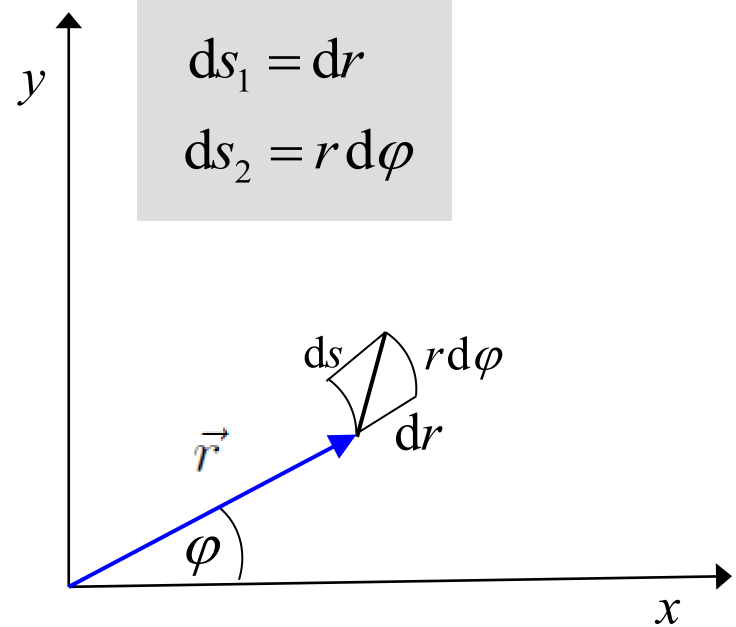


polární souřadnice:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}y = \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\mathrm{d}s = \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)^{1/2} = \left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}s_1 = \mathrm{d}r$$
$$\mathrm{d}s_2 = r\,\mathrm{d}\varphi$$



Ortogonální obloučky

kartézské souřadnice:

$$ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2}$$

$$dV = ds_1\, ds_2\, ds_3$$

$ds_i = h_i\, dq_i$ $\quad h_i$ – Laméovy koeficienty

soustava souřadnic	h_1	h_2	h_3	q_1	q_2	q_3
kartézská	1	1	1	x	y	z
cylindrická	1	ρ	1	ρ	φ	z
sférická	1	r	$r \sin \vartheta$	r	ϑ	φ

např. sférická soustava souřadnic

objemový element: $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$

element prostorového úhlu: $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$