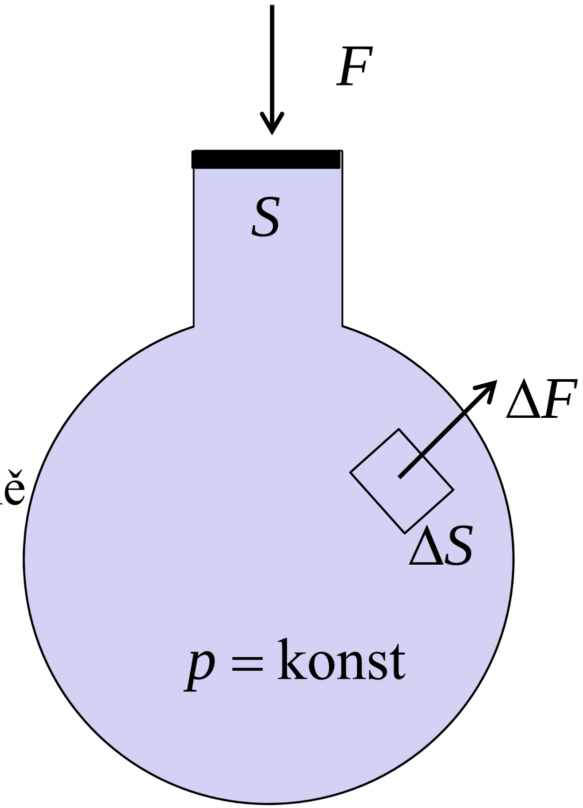
Hydrostatika

• Tlak $p = \frac{F}{S}$

$$[\mathrm{Pa}] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

• ideální kapalina je nestlačitelná $\rho = \mathrm{konst}$

• Tlak v kapalině uzavřené v nádobě se šíří ve všech směrech stejně



Pascalův zákon

• Každá změna tlaku v kapalině uzavřené v nádobě se šíří nezměněná do všech míst v kapalině

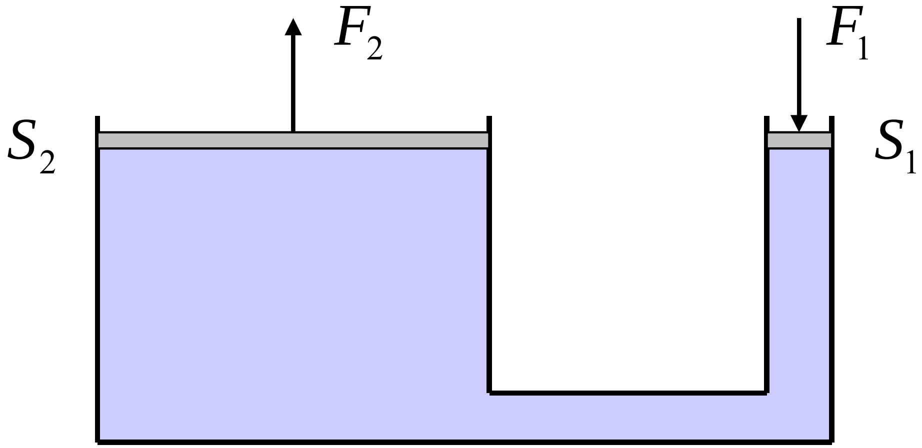
pokud neuvažujeme gravitaci p = konst

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Pascalův zákon

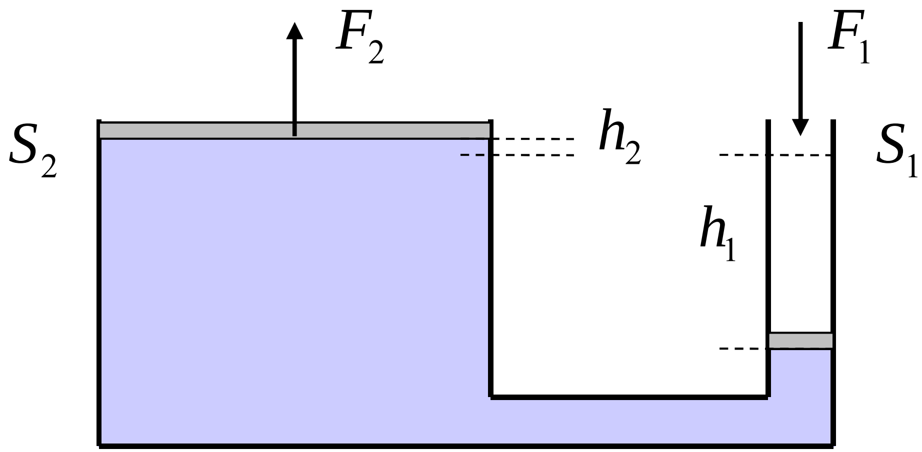
- hydraulický lis

$$p_1 = p_2 \qquad \text{(Pascalův zákon)}$$



$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

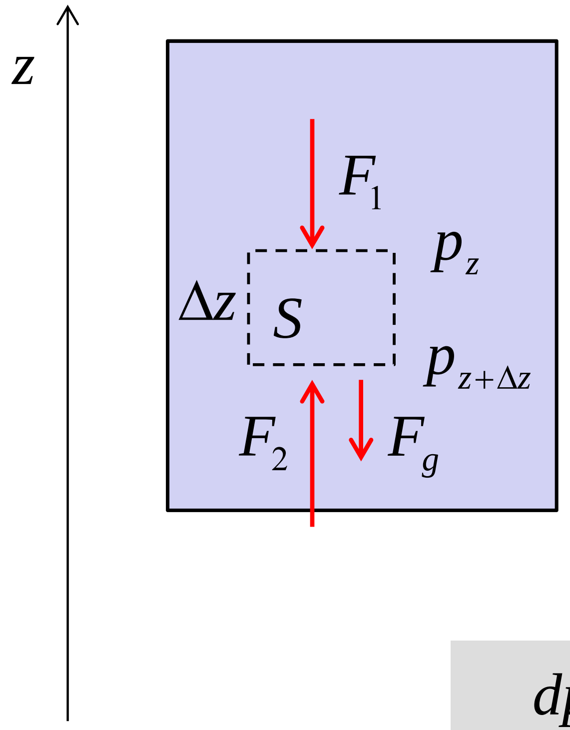
- práce $\quad F_1 h_1 = F_2 h_2$



Pascalův zákon

- Tlak vyvolaný vnější silou, která působí na kapalinu v uzavřené v nádobě, je ve všech místech kapaliny stejný

- Tlak vyvolaný gravitační silou → hydrostatický tlak



$$-F_1 + F_2 - F_g = 0 \quad \text{rovnováha}$$

$$F_g = \Delta m g = \rho_z S \Delta z g$$

$$F_1 = p_z S$$

$$F_2 = p_{z+\Delta z} S$$

$$\frac{p_{z+\Delta z} - p_z}{\Delta z} = \rho_z\, g$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho_z\, g \qquad \text{hydrostatický tlak}$$

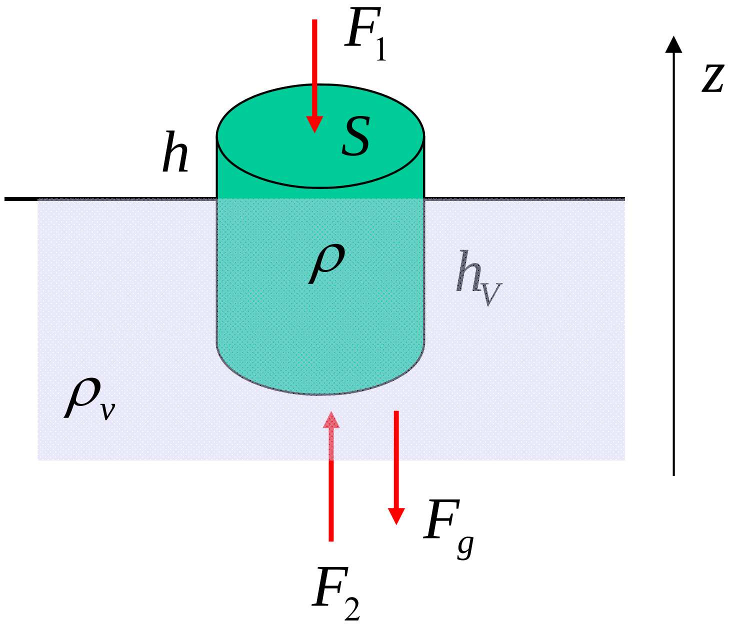
- pro ideální kapalinu $\rho =$ konst.

$$\frac{dp}{dz} = \rho\, g$$

$$\Delta p = \rho\, g \Delta z$$

v hloubce h pod hladinou vzroste hydrostatický tlak o $\rho\, g\, h$

Archimédův zákon



- rovnováha $F_2 - F_1 - F_g = 0$

- hydrostatická vztlaková síla:

$$F_2 - F_1 = \Delta p S = \underbrace{\rho_V h_V S g}_{\text{tíha kapaliny vytlačené tělesem}}$$

- tíha tělesa: $F_g = \rho h S g$

$$\rho_V h_V = \rho h$$

- podmínka plavání: $h_V \leq h$

$$\Rightarrow \quad \rho \leq \rho_V$$

Archimédův zákon

Těleso ponořené v kapalině je nadlehčováno silou, která se rovná tíze tekutiny o stejném objemu jako ponořená část tělesa.

Archimédův zákon – měření hustoty

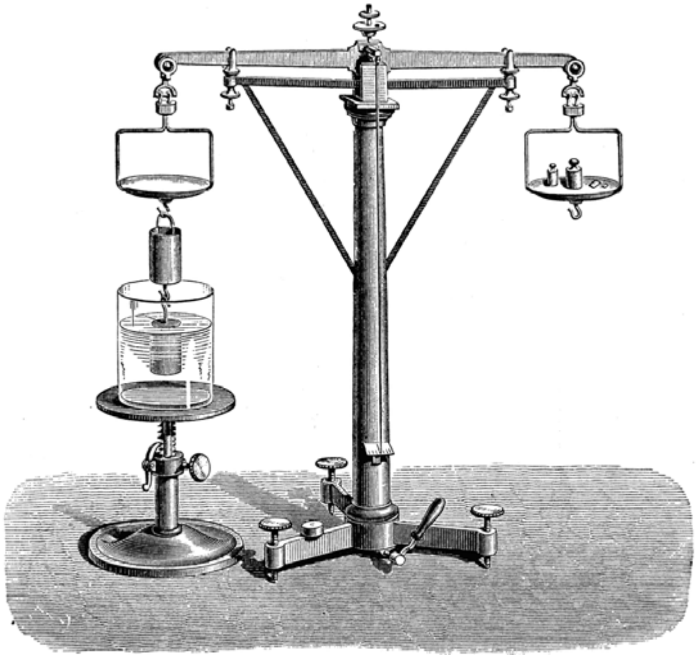
- vážení na vzduchu: $mg = \rho V g$

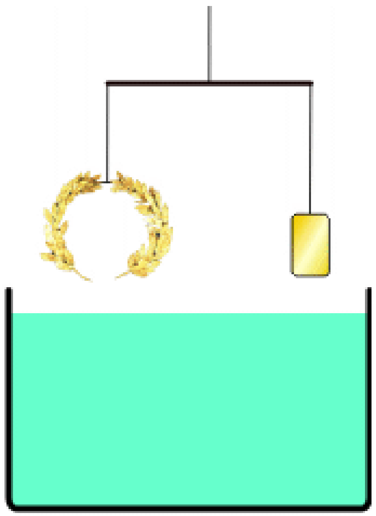
- vážení ve vodě: $mg - F_{\mathrm{vztlak}} = \rho V g - \rho_v V g$

$m_1 = \rho V$

$m_2 = \rho V - \rho_v V$

$$\rho = \frac{m_1}{m_1 - m_2}\rho_v$$





- Archimédes, Syrakusy (287-212 př. n.l.)

$\rho_{Au} = 19.3\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$

$\rho_{Ag} = 10.49\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$

Hydrodynamika

• ustálené proudění

• rychlost tekutiny se v žádném místě nemění $\longrightarrow$ $\vec{v}$ je statické vektorové pole

• proudnice – čáry k nimž je rychlost neustále tečnou

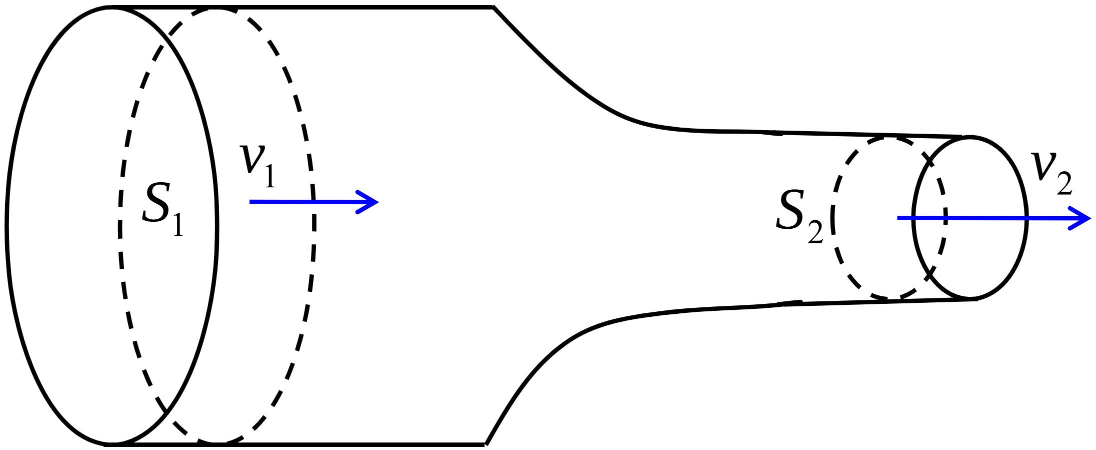
• při ustáleném proudění jsou proudnice skutečné trajektorie částic tekutiny

• Průtok $dQ = \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S}$

Rovnice kontinuity

• hmotnost kapaliny, která proteče za čas Δt

$$\Delta m = \rho S_1 v_1 \Delta t = \rho S_2 v_2 \Delta t$$



• zákon zachování hmotnosti

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

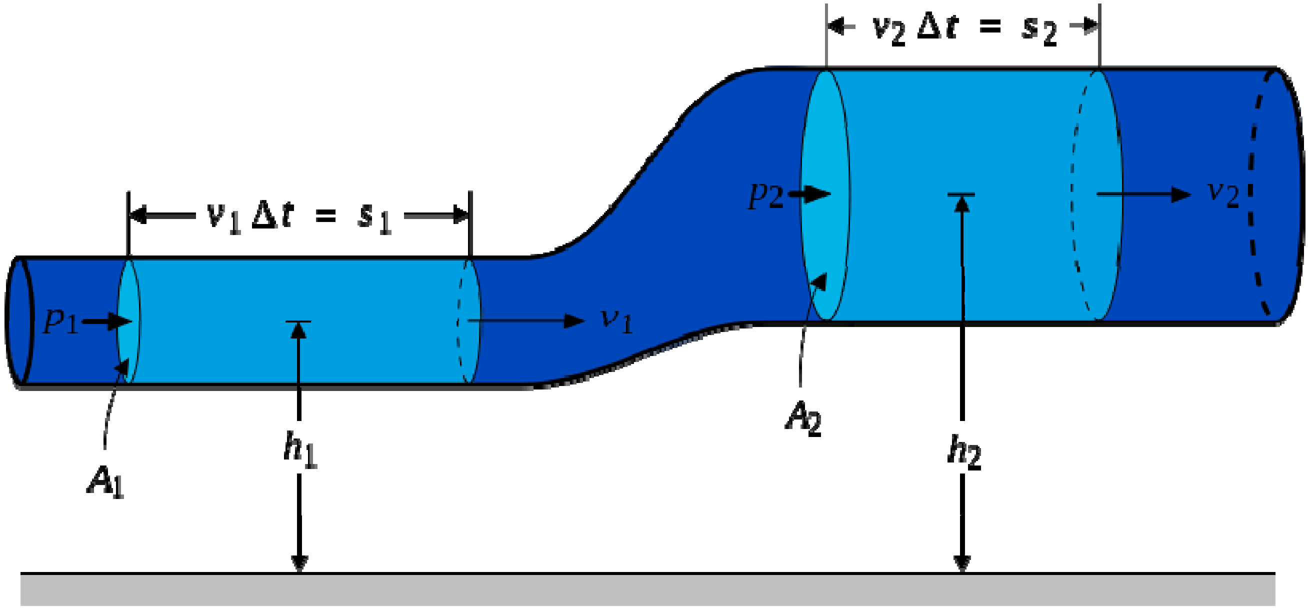
rovnice kontinuity

$$Q = \text{konst}$$

Bernoulliova rovnice

- ideální (nestlačitelná) kapalina

- kdyby kapalina stála



$$p_2 - p_1 = \rho g\left(h_2 - h_1\right) = \rho g\, h$$

potenciální energie na jednotku objemu: $\dfrac{E_p}{V}$

práce, kterou vykoná tlaková síla při přemístění jednotkového objemu do výšky *h*: $\dfrac{W}{V}$

$$dW = p\, dV$$

- pokud voda teče rychlostí v je kinetická energie ne jednotku objemu: $\dfrac{E_K}{V} = \dfrac{1}{2}\rho v^2$

- zákon zachování energie: $\dfrac{E_p}{V} + \dfrac{E_K}{V} + p = \text{konst.}$

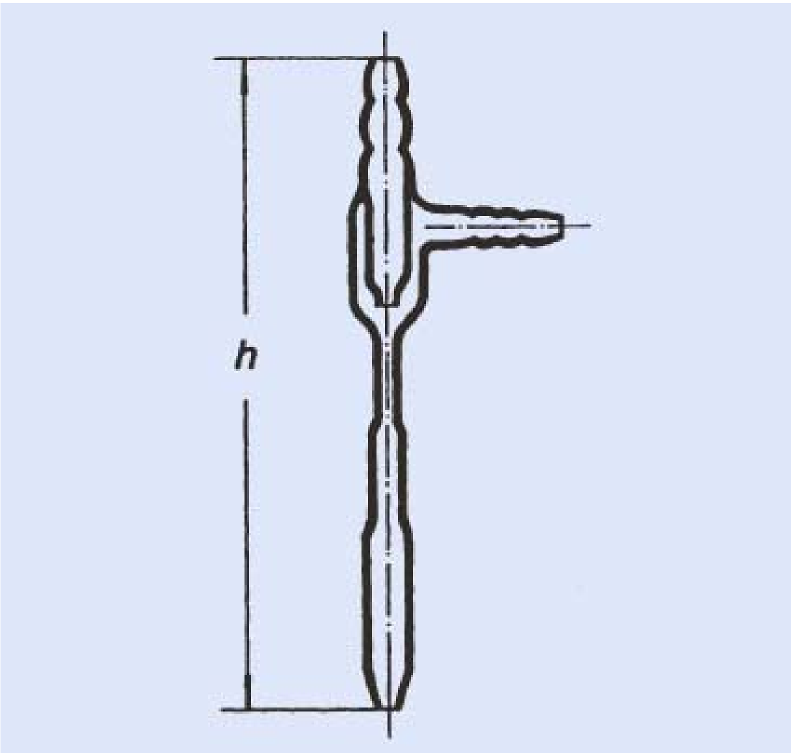
- **Bernoulliova rovnice:** $\dfrac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = \text{konst}$

Bernoulliova rovnice

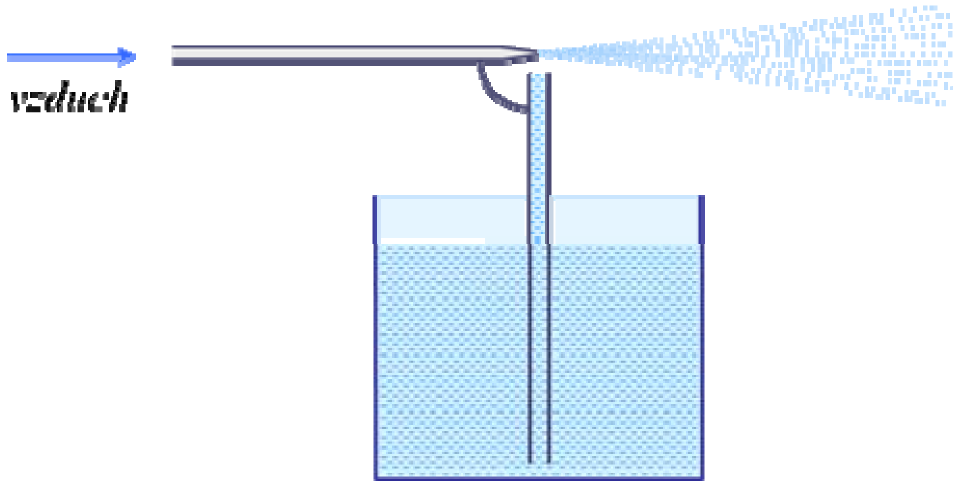
- pokud se nemění výška ($W_g = 0$)

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

- Vodní vývěva



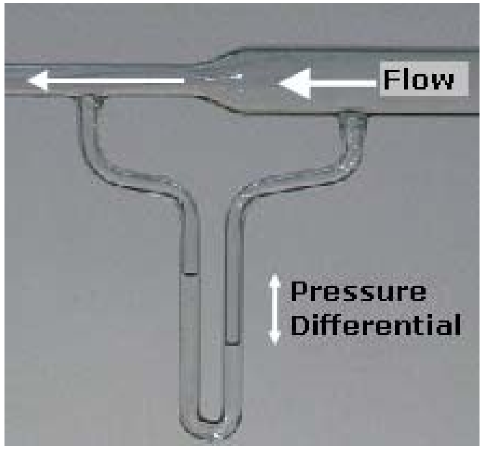
- stříkací pistole

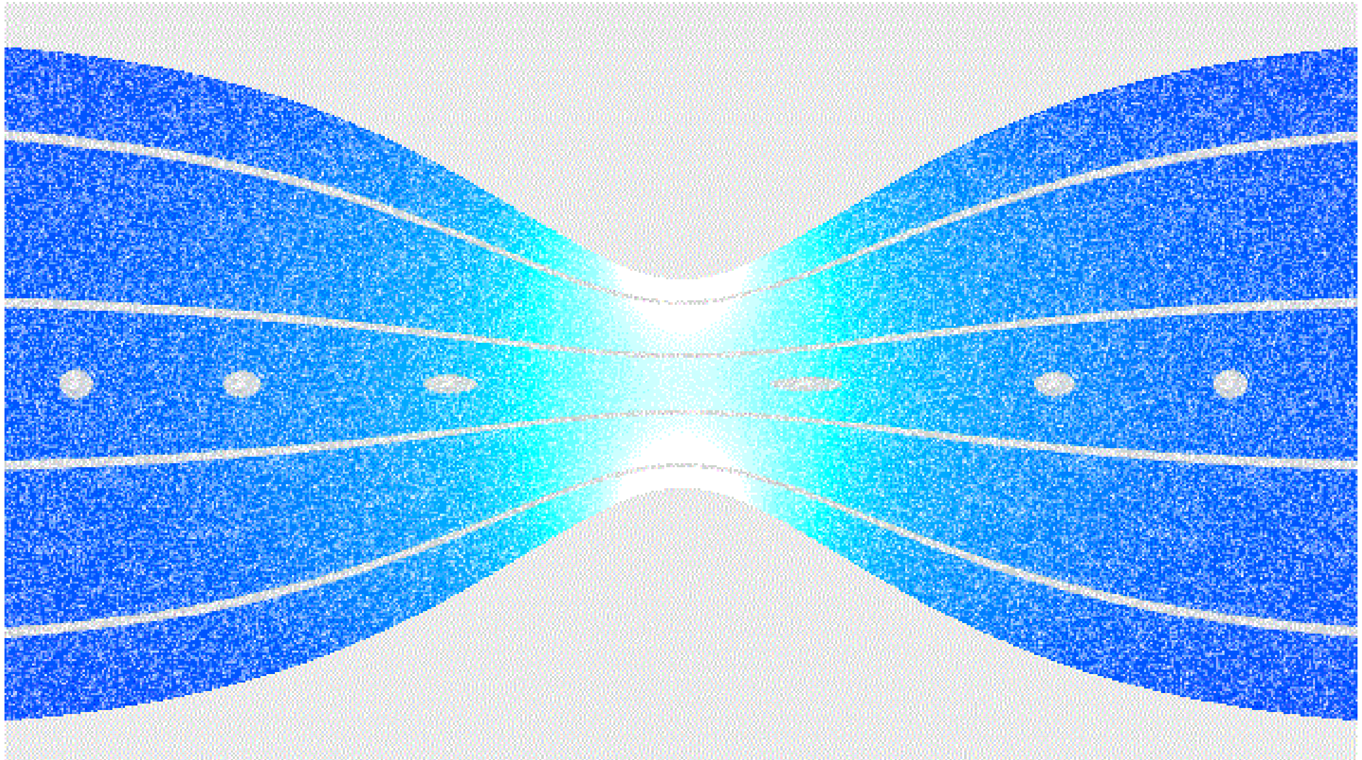


Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($W_g = 0$)
- Venturiho efekt

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{dynamický tlak}} + \underbrace{p}_{\text{statický tlak}} = \text{konst}$$



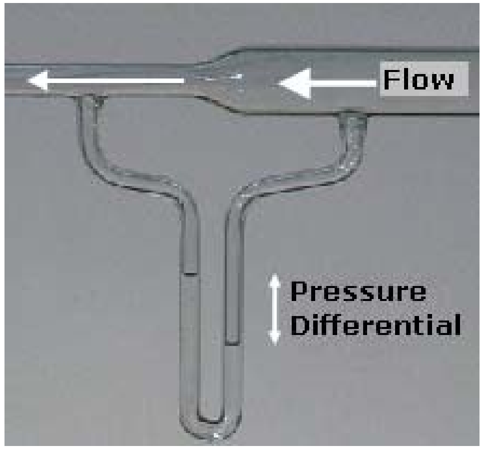


Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($W_g = 0$)

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

dynamický tlak　　statický tlak



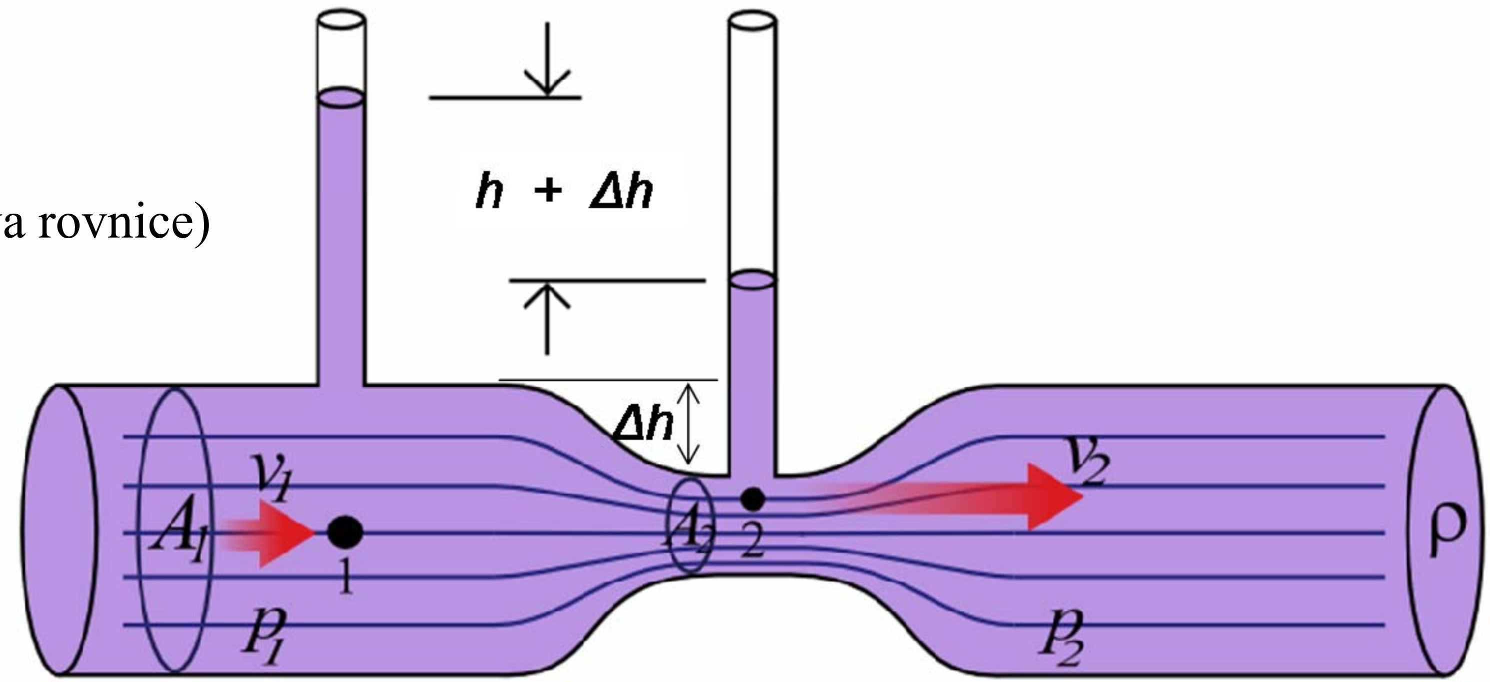
- Venturiho efekt

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$ (rovnice kontinuity)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$$



Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($W_g = 0$)

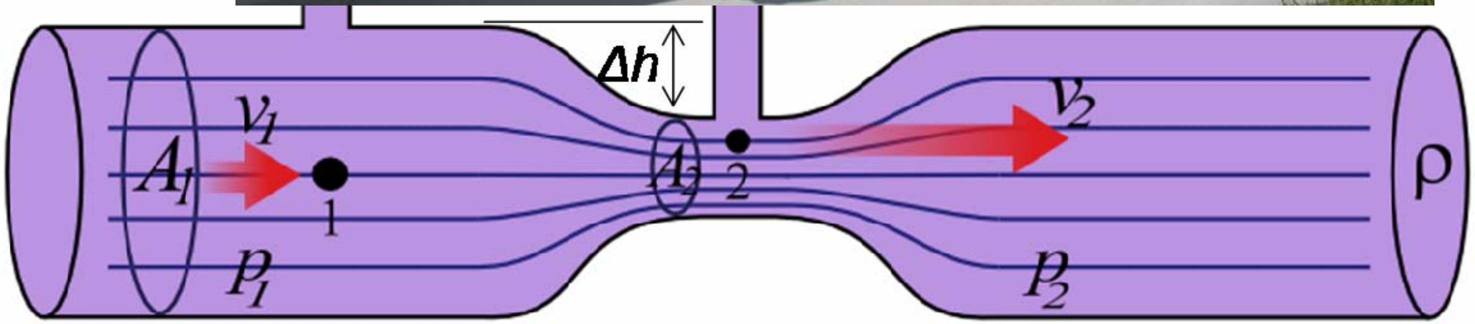
- Venturiho efekt

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$ (rovnice kontinuity)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$$



Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($W_g = 0$)

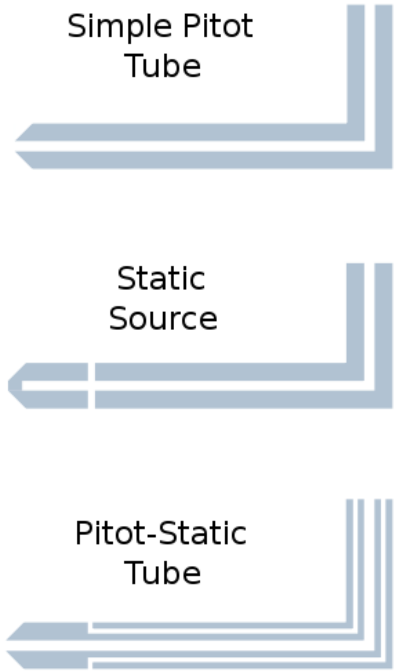
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

dynamický tlak   statický tlak

Pitotova trubice

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = p_{\text{tot}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p_{\text{tot}} - p)}{\rho}}$$

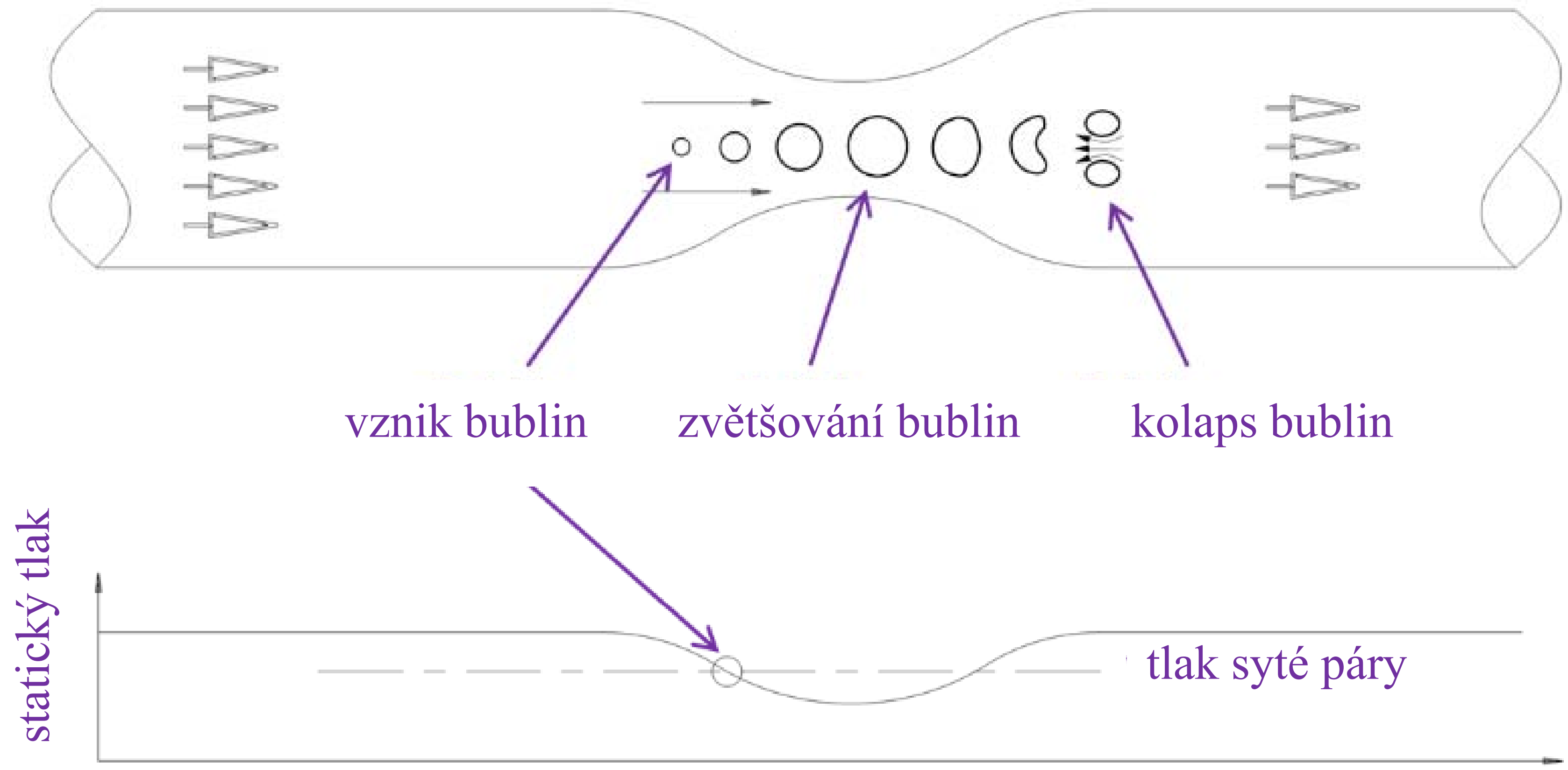


Bernoulliova rovnice

• pokud se nemění výška ($W_g = 0$)

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$

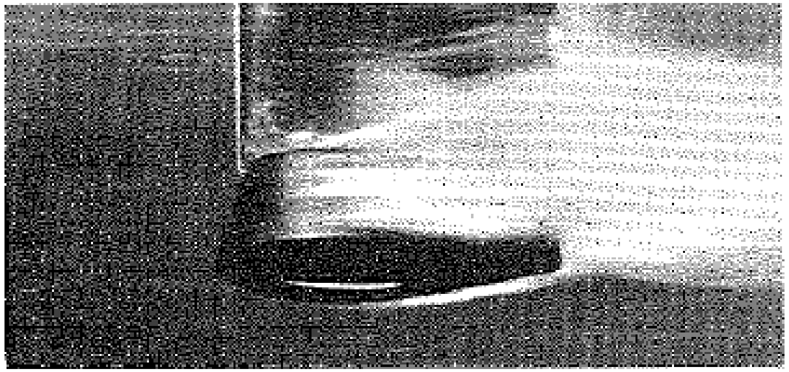
dynamický tlak   statický tlak

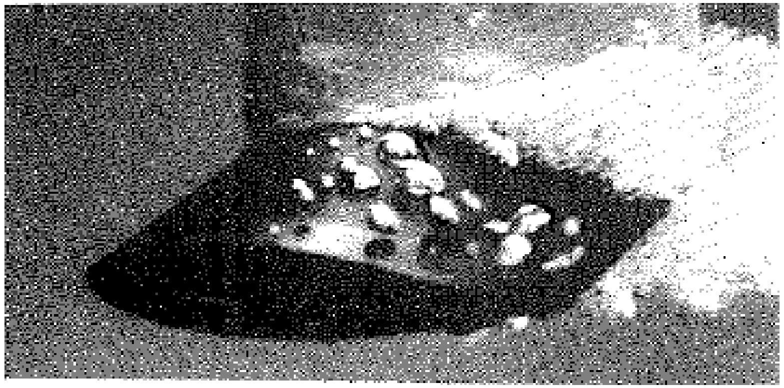


Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($W_g = 0$)

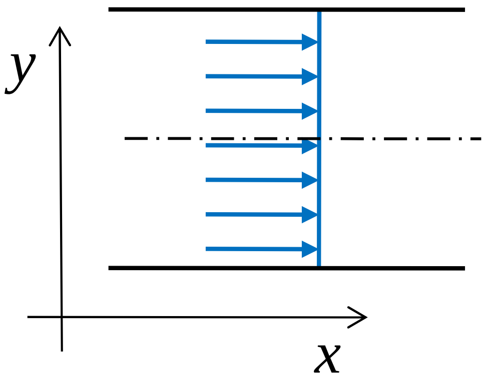
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{konst}$$





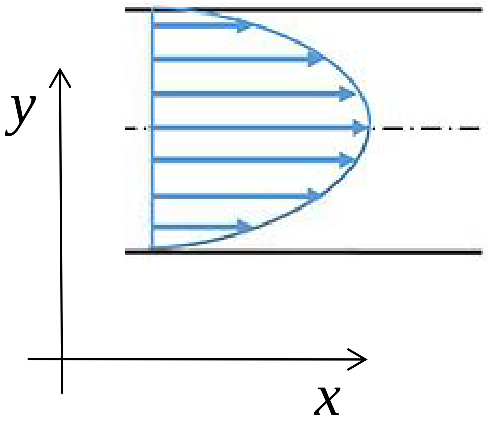
Proudění reálné kapaliny

• proudění ideální kapaliny



• stejná rychlost ve všech místech průřezu

• laminární proudění reálné kapaliny



• rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření

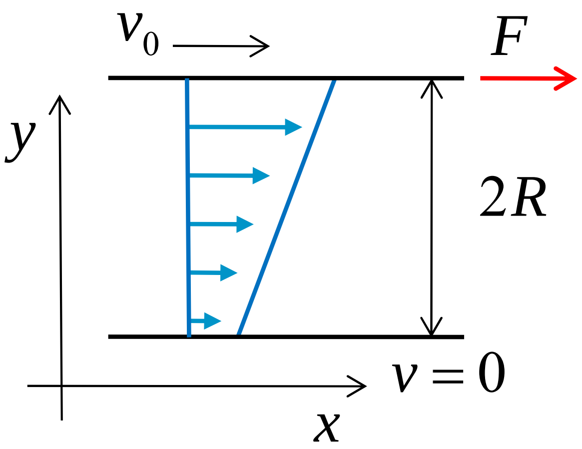
• nejvyšší rychlost uprostřed potrubí, směrem ke krajům klesá k nule

• tečné napětí: $\tau = \eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ (Newtonovské kapaliny)

• dynamická viskozita: $\eta = Ae^{B/T}$

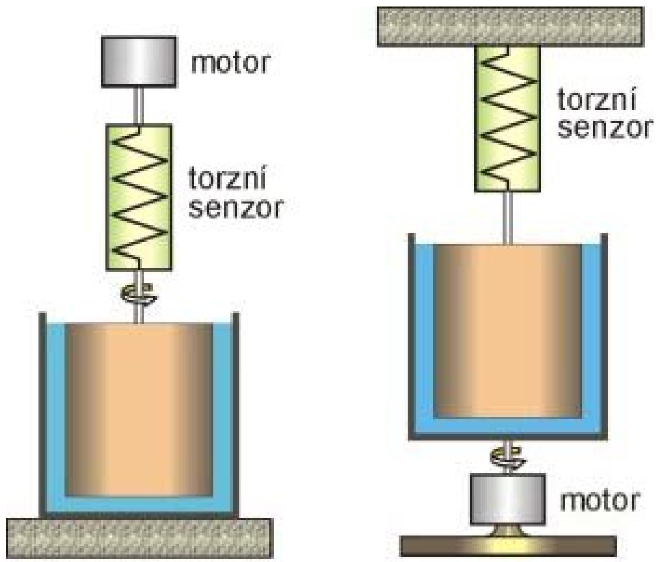
Proudění reálné kapaliny

• měření dynamické viskozity



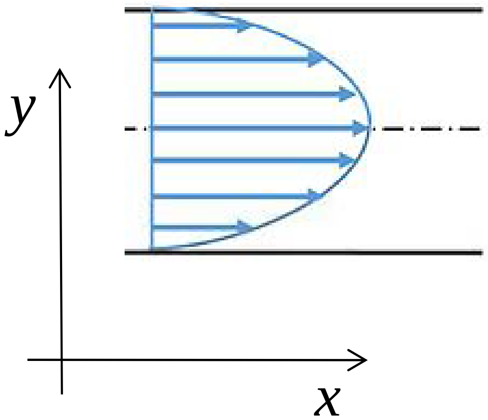
$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{2R}$$

• rotační viskozimetry



$$\varphi = K\eta\omega$$

• laminární proudění reálné kapaliny



• rychlost proměnná kvůli vnitřnímu tření

• nejvyšší rychlost uprostřed potrubí, směrem ke krajům klesá k nule

• tečné napětí: $\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ (Newtonovské kapaliny)

• dynamická viskozita: $\eta = Ae^{B/T}$

Proudění reálné kapaliny

• dynamická viskozita při 20°C

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$ (Newtonovské kapaliny)

• voda: $\eta = 1\times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s}$

• etanol: $\eta = 1.2\times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,s}$

• glycerín: $\eta = 1.48\ \mathrm{Pa\,s}$

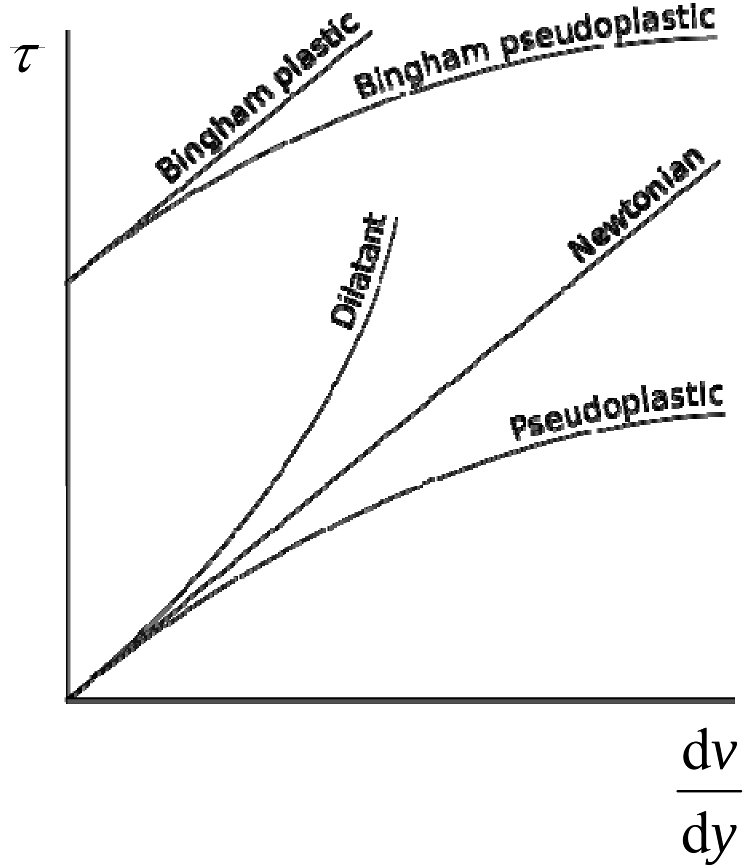
• med: $\eta = 2-10\ \mathrm{Pa\,s}$

• nenewtonovské kapaliny

  • dilatantní: η narůstá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (kukuřičný škrob)

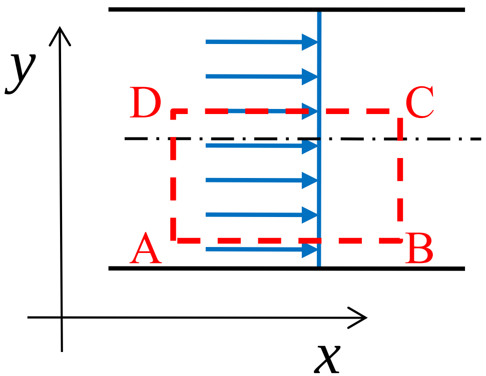
  • pseudoplastické: η klesá s rostoucí rychlostí změny smykového napětí (krev, barva)

  • Binghamské tekutiny: potřebují určitou prahovou hodnotu smykového napětí aby začaly téci (jíl, zubní pasta, majonéza)



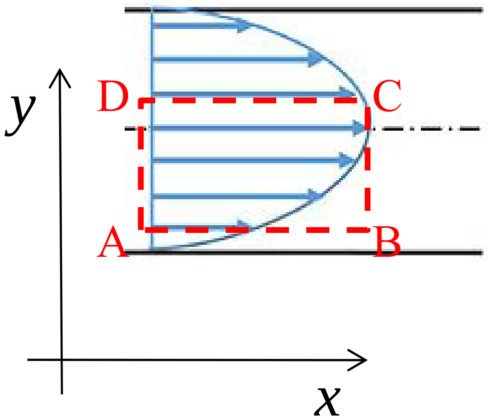
Proudění reálné kapaliny

- proudění ideální kapaliny



$$\oint v \, \mathrm{d}r = 0$$

- laminární proudění reálné kapaliny



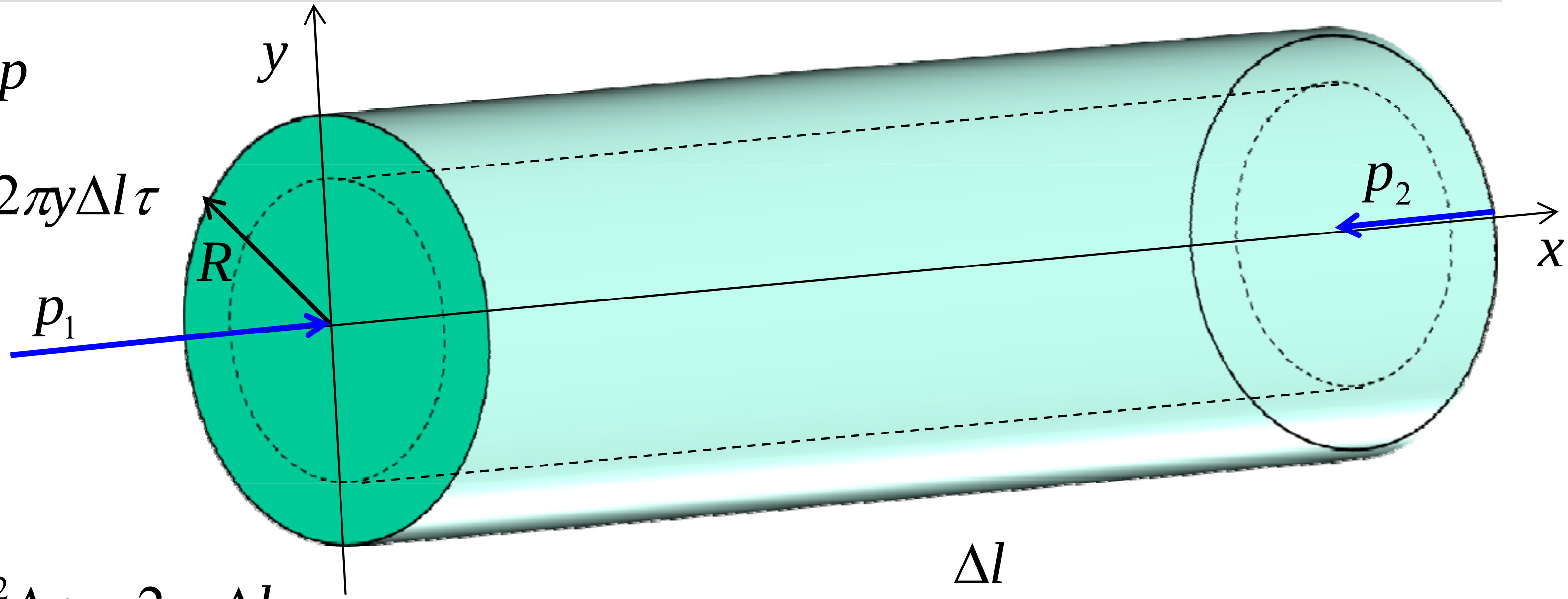
$$\oint v \, \mathrm{d}r \neq 0$$

- cirkulace vektoru rychlosti

$$\oint v \, \mathrm{d}r = \int_A^B v \, \mathrm{d}r + \underbrace{\int_B^C v \, \mathrm{d}r}_{0} + \int_C^D v \, \mathrm{d}r + \underbrace{\int_D^A v \, \mathrm{d}r}_{0}$$

Laminární proudění reálné kapaliny

- tlaková síla: $F_p = \pi y^2 \Delta p$
- síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi y \Delta l\, \tau$

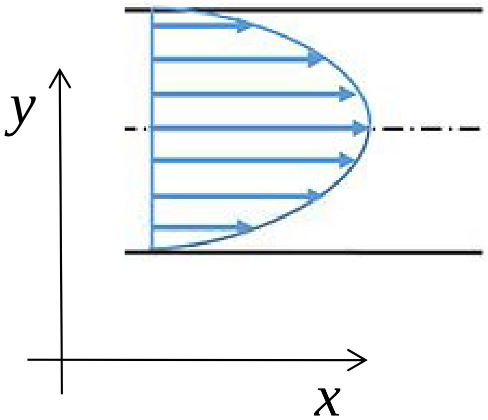


- laminární proudění: $\pi y^2 \Delta p = 2\pi y \Delta l\, \tau$

$$\tau = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \longrightarrow \mathrm{d}v = -\frac{\Delta p}{2\Delta l\, \eta} y\, \mathrm{d}y$$

$$v = -\frac{\Delta p}{4\Delta l\, \eta} y^2 + C$$

$$v(R) = 0 \quad \downarrow \quad C = \frac{\Delta p}{4\Delta l\, \eta} R^2$$



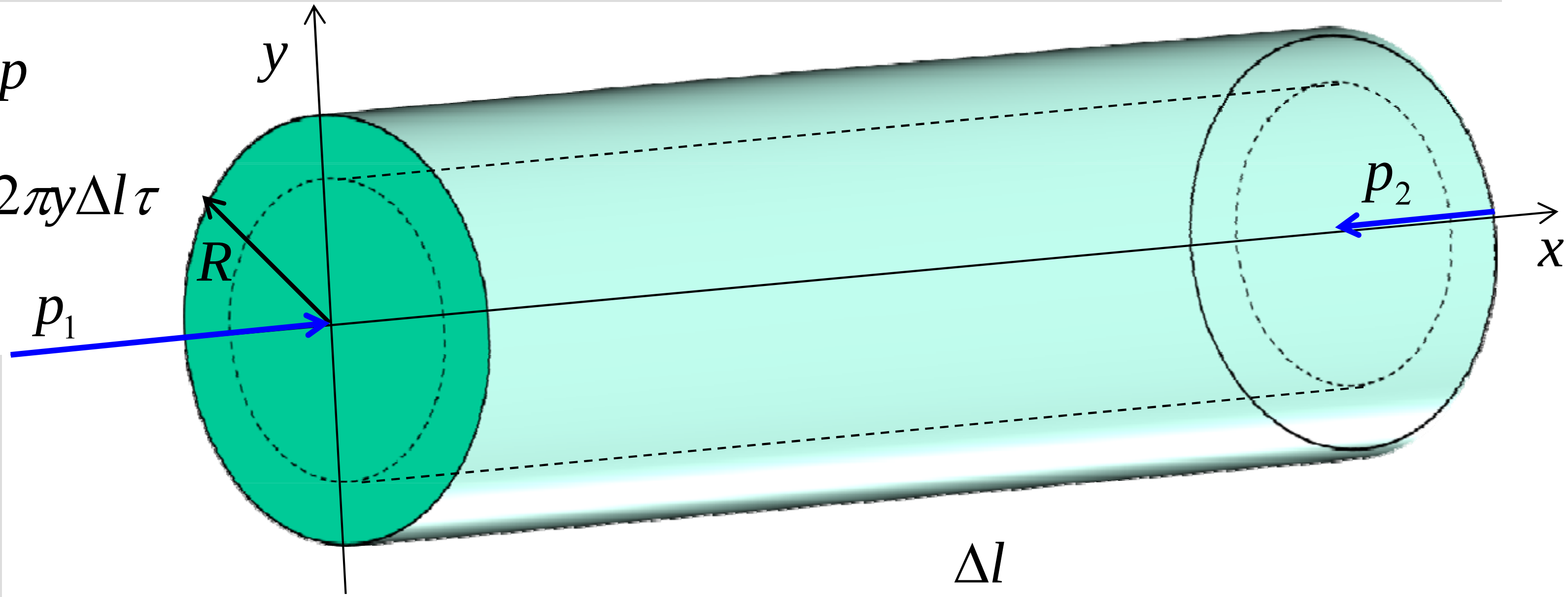
$$v = \frac{\Delta p}{4\Delta l\, \eta}\left(R^2 - y^2\right)$$

parabolický rychlostní profil

Laminární proudění reálné kapaliny

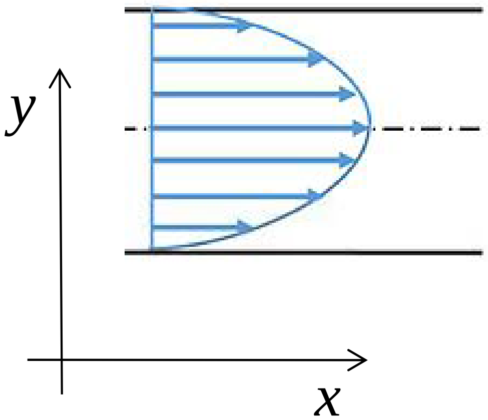
• tlaková síla: $F_p = \pi y^2 \Delta p$

• síla vnitřního tření: $F_t = 2\pi y \Delta l\, \tau$



$$v = \frac{\Delta p}{4\Delta l\, \eta}\left(R^2 - y^2\right)$$

parabolický rychlostní profil



• Objemový průtok potrubím Q

$$\mathrm{d}Q = v\,\mathrm{d}S = \frac{\Delta p}{4\Delta l\, \eta}\left(R^2 - y^2\right) 2\pi\, y\,\mathrm{d}y$$

• **Hagen-Poiseuillův zákon**

$$Q = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\Delta l\, \eta}\left(R^2 - y^2\right) 2\pi\, y\,\mathrm{d}y = \frac{\pi \Delta p}{8\Delta l\, \eta} R^4$$

• **střední rychlost proudění**

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

jakou rychlostí by kapalina musela proudit s celém potrubí aby se dosáhlo stejného Q