Odraz vlnění

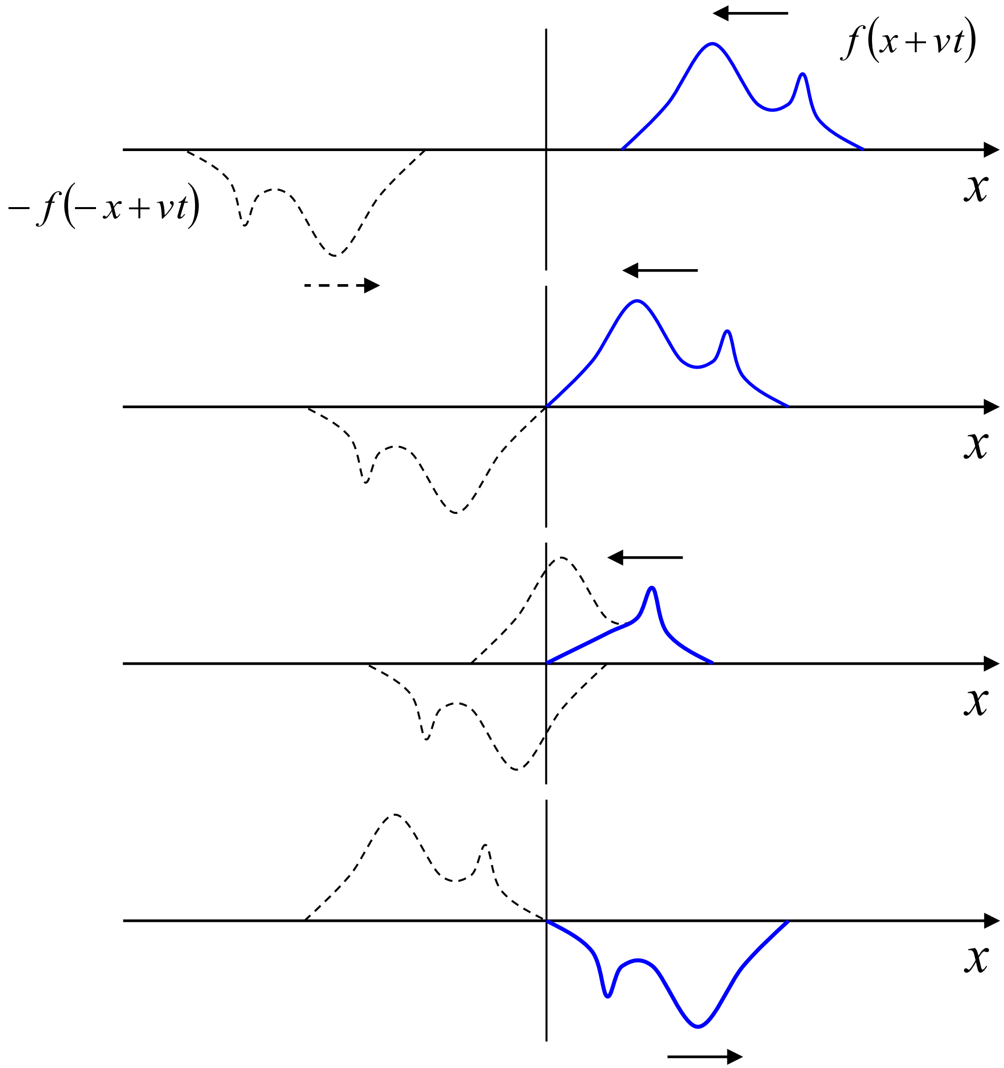
• obecná vlna

$$y = f(x+vt) + g(x-vt)$$

• $x = 0 \rightarrow y = 0$

$$g(-vt) = -f(vt)$$

$$y = f(x+vt) - f(-x+vt)$$



Stojaté vlnění

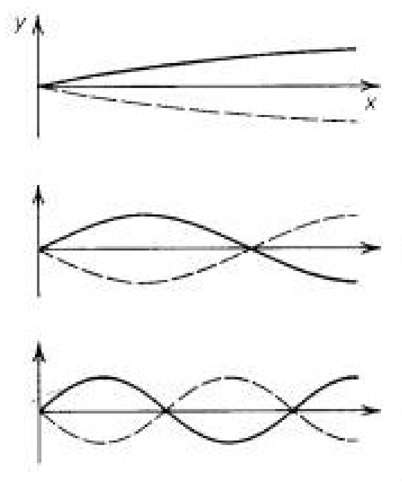
• odraz periodické vlny

$$y = f(x+vt) - f(-x+vt)$$

$$f(x+vt) = e^{i\omega(t+x/v)}$$

$$-f(-x+vt) = -e^{i\omega(t-x/v)}$$

$$y = 2e^{i\omega t}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) = 2e^{i\omega t}\sin(kx)$$



• uzly $\frac{\omega x}{v} = kx = \pi n$ $\quad n = 0,1,2,3,$

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

Stojaté vlnění

• vlny v ohraničené oblasti

• struna délky L upevněná na obou koncích

$$y = 2e^{i\omega t}\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) = 2e^{i\omega t}\sin(kx)$$

• uzly musí být v $x = 0$ a $x = L$

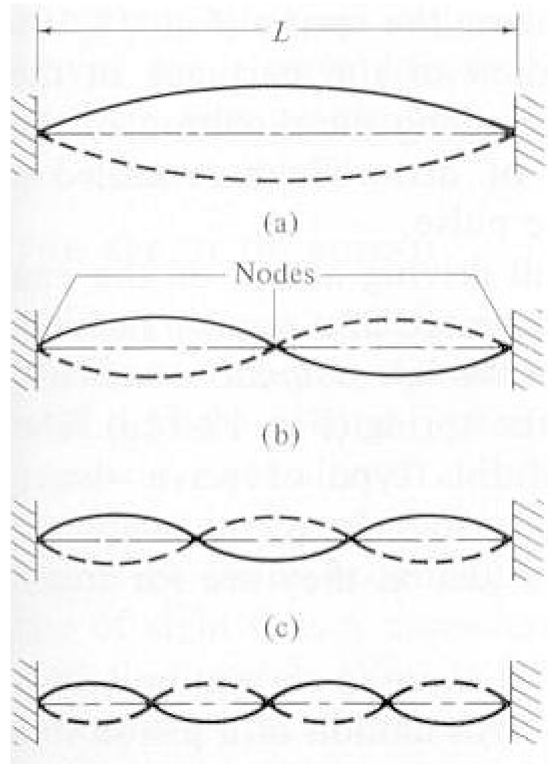
$$\downarrow$$

$$\frac{\omega L}{v} = kL = \pi n \qquad n = 1,2,3,$$

$$k = \frac{\pi n}{L}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1,2,3,$$



módy

$n = 1$

$\lambda_1 = 2L \quad \omega_1 = \omega_0$

$n = 2$

$\lambda_2 = L \quad \omega_2 = 2\omega_0$

$n = 3$

$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \quad \omega_3 = 3\omega_0$

$n = 4$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}L \quad \omega_4 = 4\omega_0$

$$\omega_n = n\pi\frac{v}{L} = n\omega_0 \qquad n = 1,2,3,$$

$$\omega_0 = \pi\frac{v}{L}$$ základní frekvence

Stojaté vlnění

$$\omega_n = n\pi\frac{v}{L} = n\omega_0 \qquad n = 1,2,3,$$

$$\omega_0 = \pi\frac{v}{L} \qquad \text{základní frekvence}$$

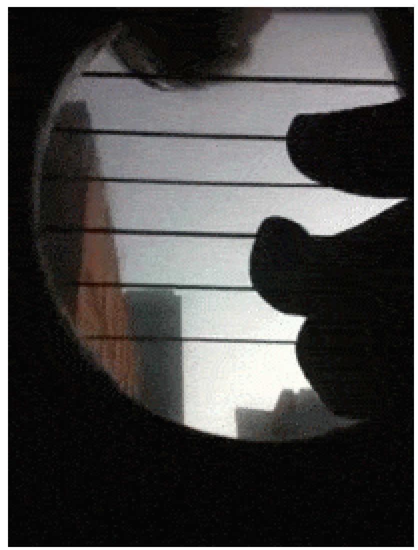
rychlost šíření vlny ve struně

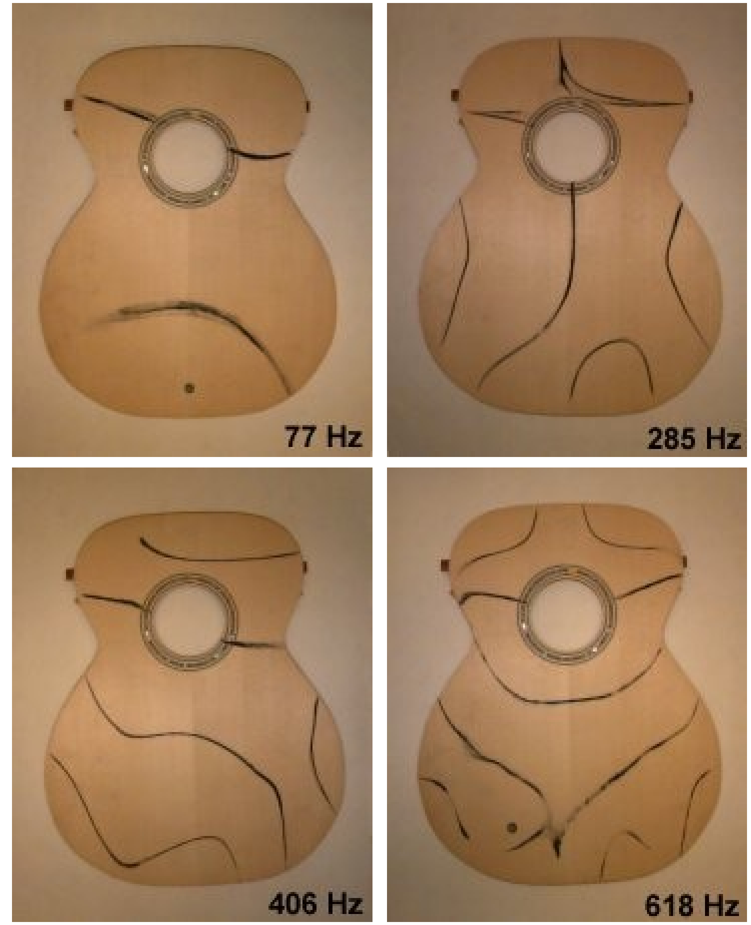
$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

F_t – napěťová síla struny
μ – hmotnost struny na jednotku délky

základní frekvence

$$\omega_0 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

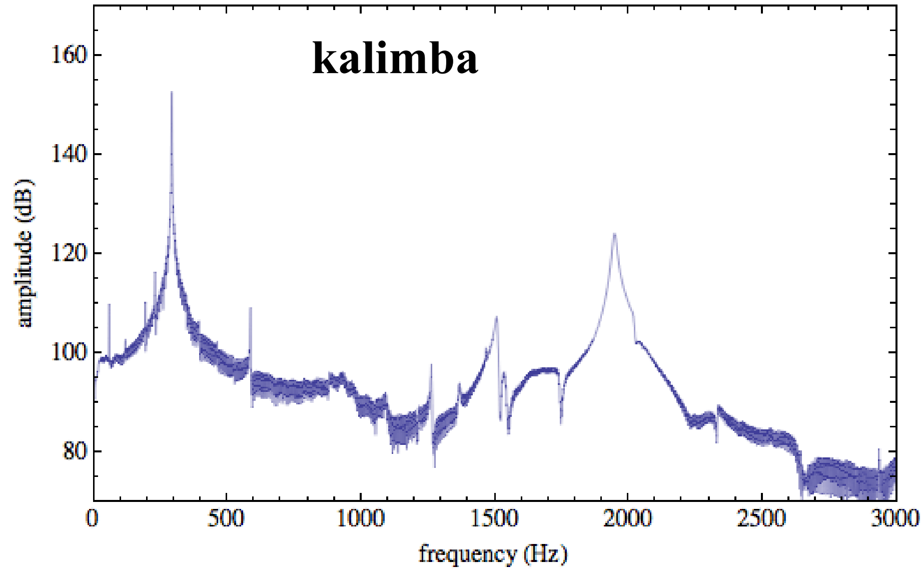


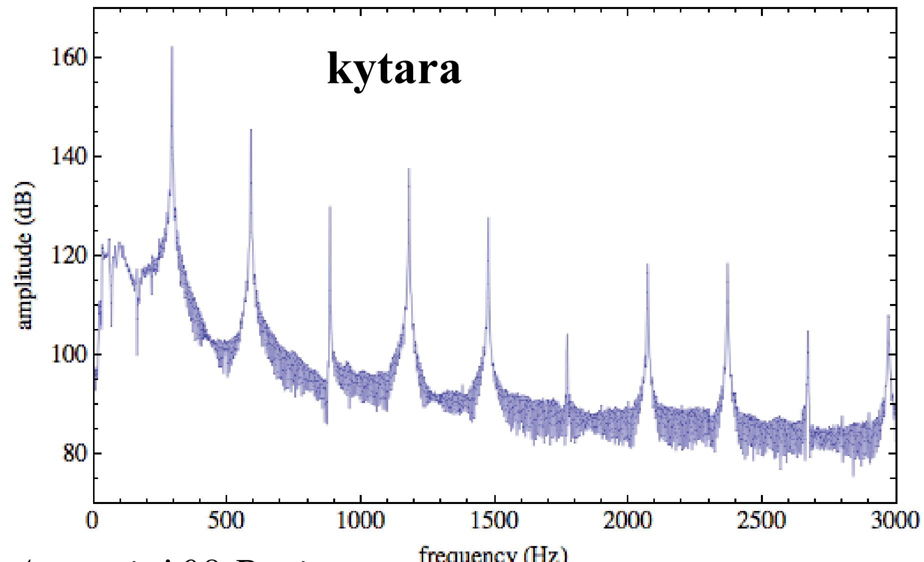


Chladniho obrazce na ozvučné desce kytary

Stojaté vlnění

- **tón D4**
- 293.7 Hz

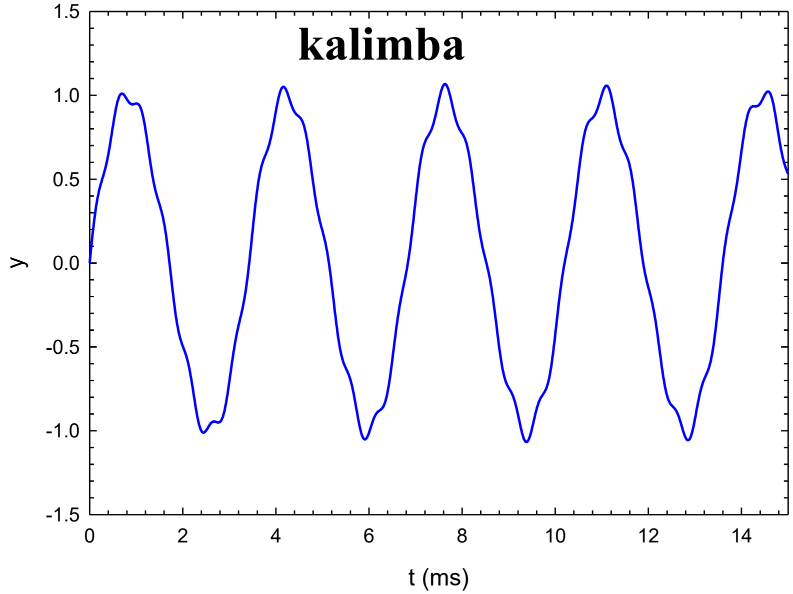


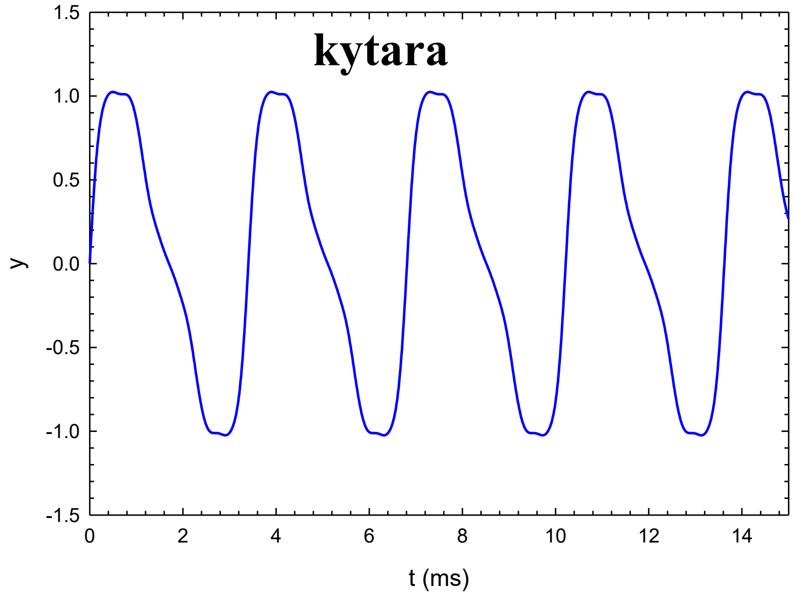


D. Chapman, Acoustic' 08 Paris

Stojaté vlnění

- **tón D4**
- 293.7 Hz





Fourierova řada

- periodickou funkci můžeme napsat jako součet harmonických vln

$$f(t) = f(t+T)$$

- **Fourierova řada**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{a_0}{2}\cos(m\omega t)\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_1\cos(\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t + \quad \overbrace{+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a_m\cos^2(m\omega t)\mathrm{d}t}^{\substack{\text{jediný nenulový člen} \\ \frac{a_m}{2}}} +$$

$$+ \quad + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} b_1\cos(\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t + \quad + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} b_m\cos(m\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t +$$

Fourierova řada

• periodickou funkci můžeme napsat jako součet harmonických vln

$$f(t) = f(t+T)$$

• **Fourierova řada**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

• **Fourierovy koeficienty**

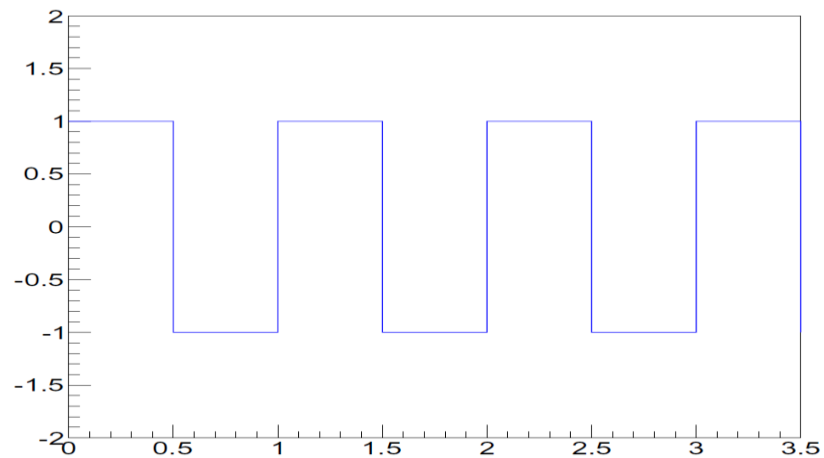
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Fourierova řada

- příklad: obdélníkové kmity



$$a_n = 0 \qquad b_{2n} = 0 \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\omega}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \qquad\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)\omega t\right]$$

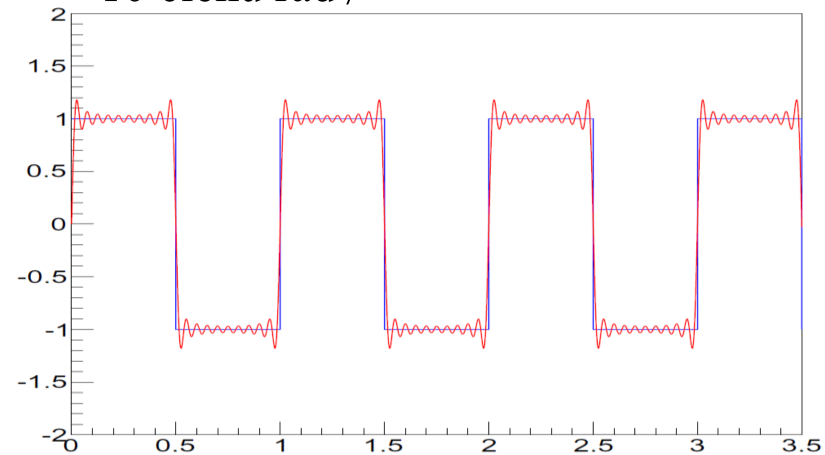
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Fourierova řada

- příklad: obdélníkové kmity

10 členů řady

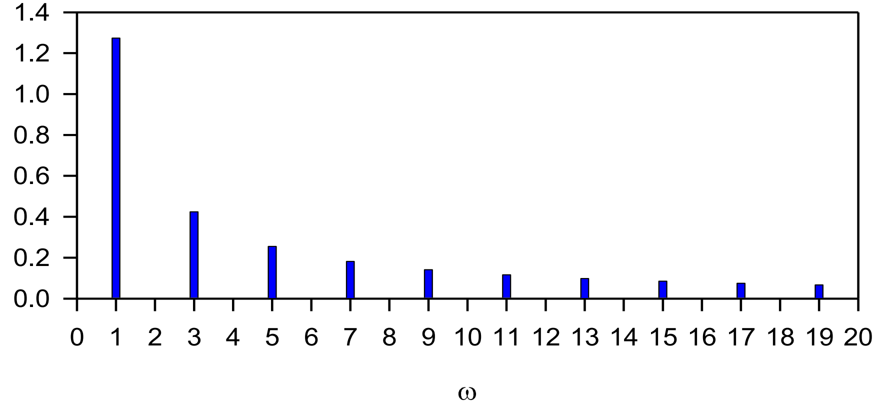


$$a_n = 0 \qquad b_{2n} = 0 \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\omega}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \qquad\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)\omega t\right]$$

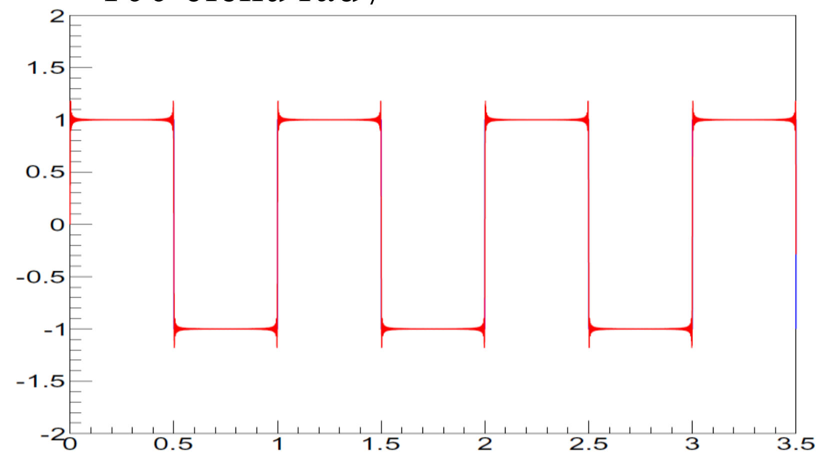
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Fourierova řada

- příklad: obdélníkové kmity

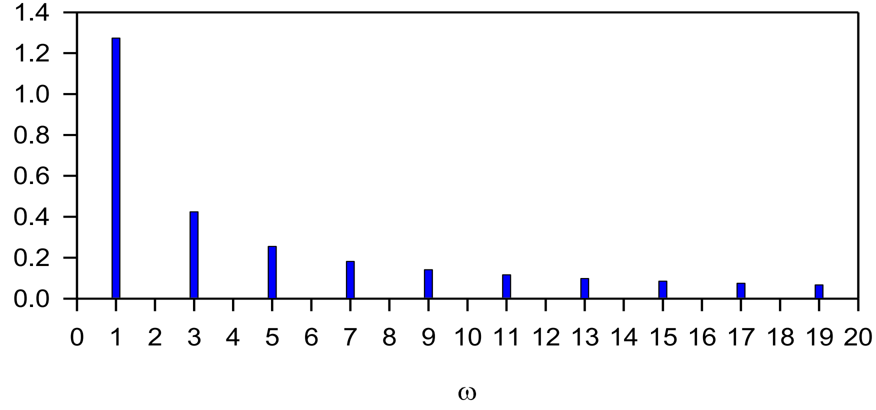


$$a_n = 0 \qquad b_{2n} = 0 \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\omega}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \quad\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\omega t]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

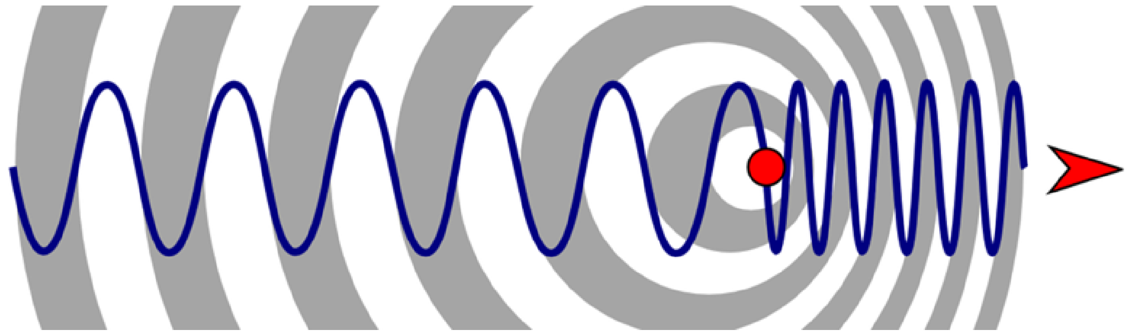
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



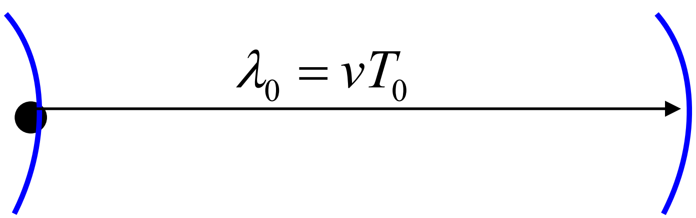
Dopplerův jev

- Christian Doppler, Praha 1842

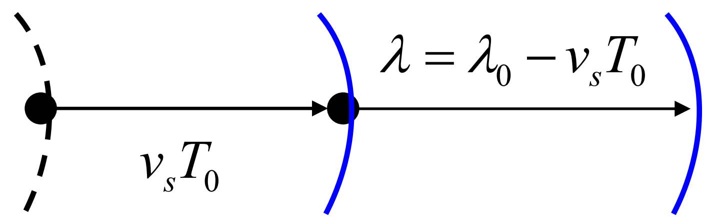
- pohybující se zdroj vlnění



- **zdroj v klidu**
- perioda vlnění: T_0
- frekvence: $f_0 = 1 / T_0 = v / \lambda_0$



- **zdroj v pohybu**
- perioda vlnění: T
- frekvence: $f = 1 / T = v / \lambda$



$$f = f_0 \frac{v}{v - v_s}$$

Dopplerův jev

- Christian Doppler, Praha 1842

- zdroj se pohybuje *k nám*:

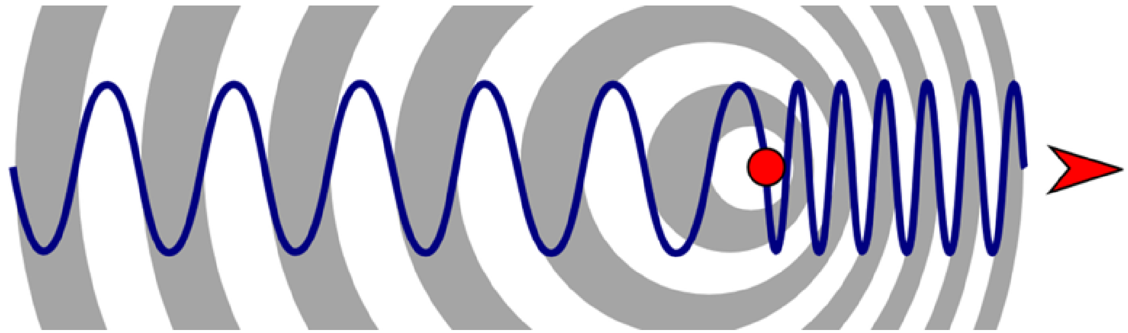
- frekvence: $$f = f_0 \frac{v}{v - v_s}$$

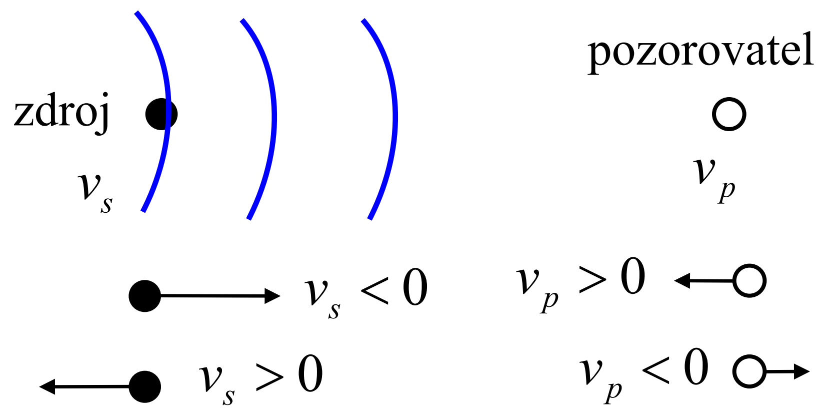
- vlnová délka: $$\lambda = \lambda_0 - v_s T_0$$

- zdroj se pohybuje *od nás*:

- frekvence: $$f = f_0 \frac{v}{v + v_s}$$

- vlnová délka: $$\lambda = \lambda_0 + v_s T_0$$

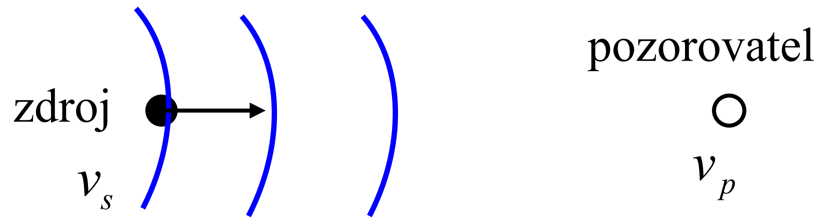




- frekvence vlnění $$f = f_0 \frac{v + v_p}{v + v_s}$$

Dopplerův jev

• frekvence vlnění $$f = f_0 \frac{v + v_p}{v + v_s}$$



• zdroj se pohybuje ke stojícímu pozorovateli rychlostí zvuku

$$v_s = -v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f = \infty$$

• zdroj se pohybuje od stojícího pozorovatele rychlostí zvuku

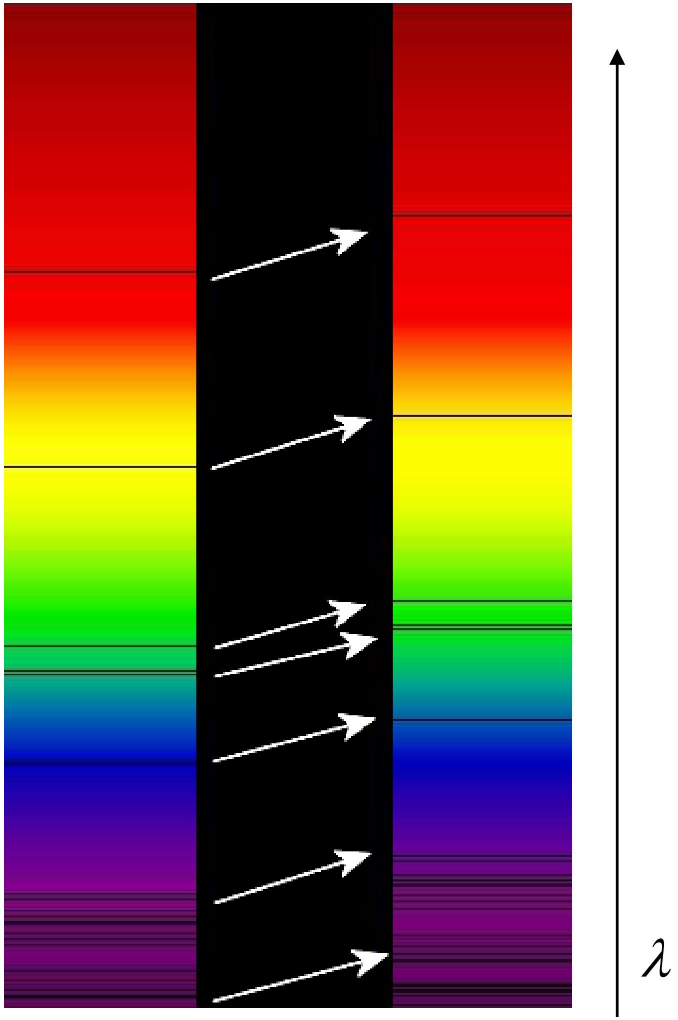
$$v_s = v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f = \frac{1}{2} f_0$$

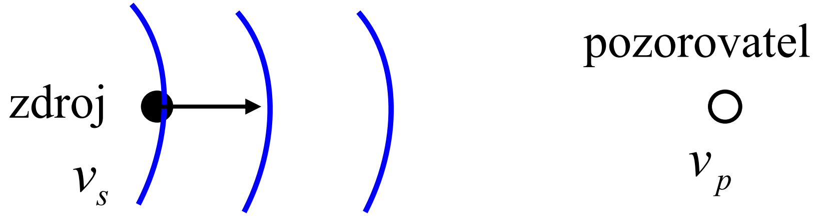
• zdroj se pohybuje ke stojícímu pozorovateli rychlostí převyšující rychlost zvuku

$$v_s < -v \qquad v_p = 0 \longrightarrow f < 0$$

Rudý a modrý posuv

- absorbční spektra hvězd





- rudý posuv – hvězda letící od nás

- modrý posuv – hvězda letící k nám