Harmonický oscilátor – komplexní reprezentace

harmonický kmit: $x = A\sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

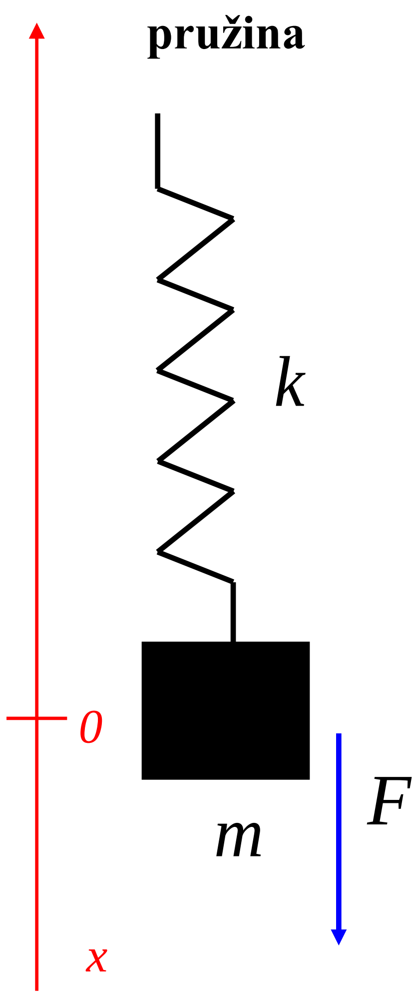
amplituda (A), úhlová frekvence (ω), fázový posuv (φ)

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi)$$

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)} = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = \hat{A}e^{i\omega t}$$

komplexní amplituda ($\hat{A}$)

Nucené kmity



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

pohybová rovnice

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

- budící síla: $F = F_0 \sin(\Omega t) = F_0 e^{i\Omega t}$
- obecné řešení: $x = A \sin(\omega t + \varphi) + x_p$
- partikulární řešení: $x_p = \hat{x}_p e^{i\Omega t}$

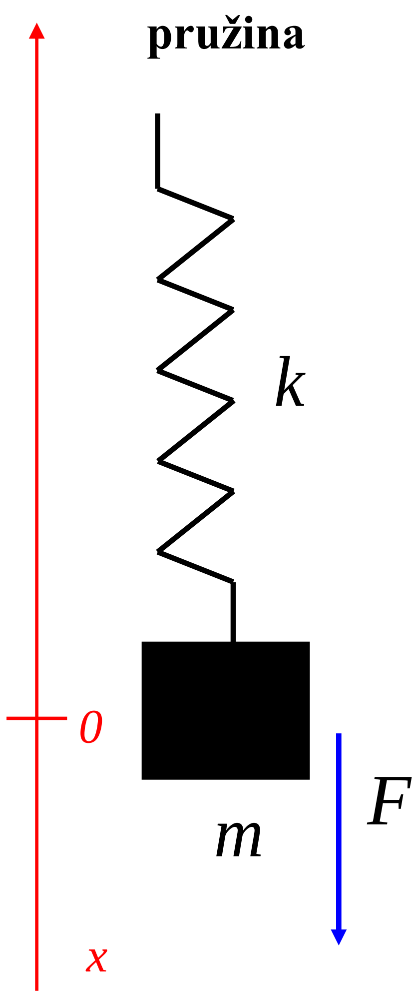
komplexní amplituda

partikulární řešení:

$$\hat{x}_p = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}$$

$$x_p = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)} \sin(\Omega t)$$

Nucené kmity s tlumením



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{h}{m}\dot{x} = \frac{F}{m}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

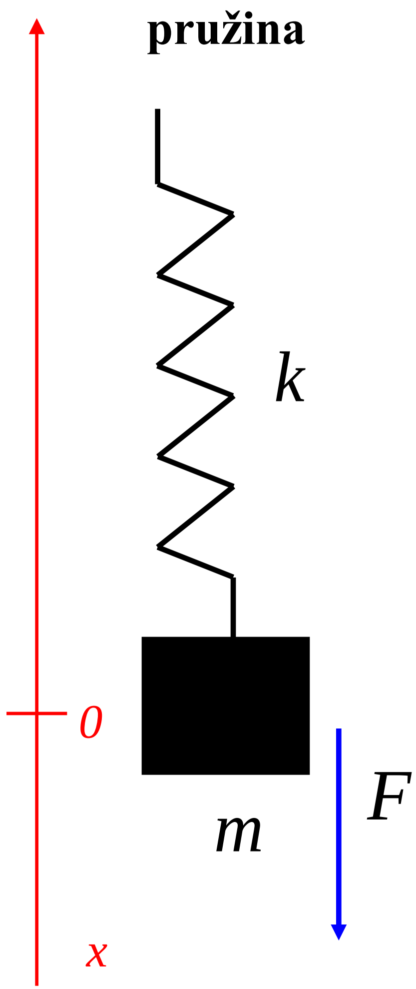
pohybová rovnice

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} = \frac{F}{m}$$

- budící síla: $F = F_0 \sin \Omega t = F_0 e^{i\Omega t}$
- partikulární řešení: $x = A_0 \sin\left(\Omega t + \vartheta\right) = A_0 e^{i\vartheta} e^{i\Omega t} = \hat{A} e^{i\Omega t}$
- po dosazení: $\hat{A}\underbrace{\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\delta\Omega\right)}_{\mathbf{K} = K_0 e^{i\beta}} = \frac{F_0}{m}$

$$K_0 = \left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{1/2} \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Nucené kmity s tlumením



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{h}{m}\dot{x} = \frac{F}{m}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

$$A_0 K e^{i\beta} = \frac{F_0}{m} e^{-i\vartheta}$$

pohybová rovnice

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\delta\dot{x} = \frac{F}{m}$$

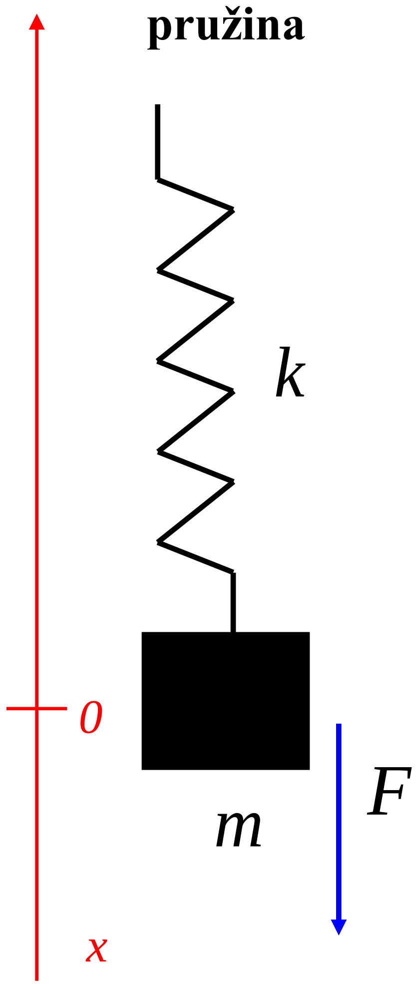
stacionární stav:

$$A_0 = \frac{F_0}{m}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2}$$

$$\vartheta = -\beta \longrightarrow \operatorname{tg}\vartheta = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

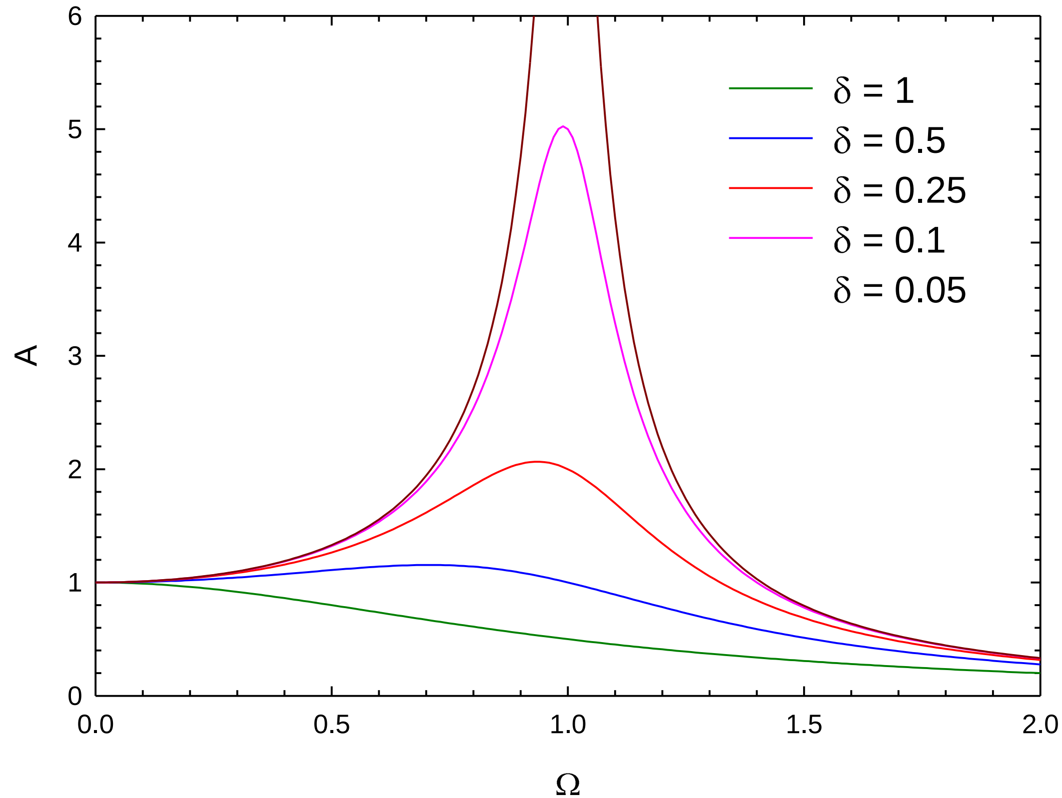
$$x = A_0 e^{i\vartheta} e^{i\Omega t} = A_0 \sin\left(\Omega t + \vartheta\right)$$

Nucené kmity s tlumením



• **amplituda kmitů**

$\omega_0 = 1, F_0 = 1, m = 1$



Nucené kmity s tlumením

• **amplituda kmitů**

$$\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2F_0\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2\right)\Omega}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}\Omega} = 0$$

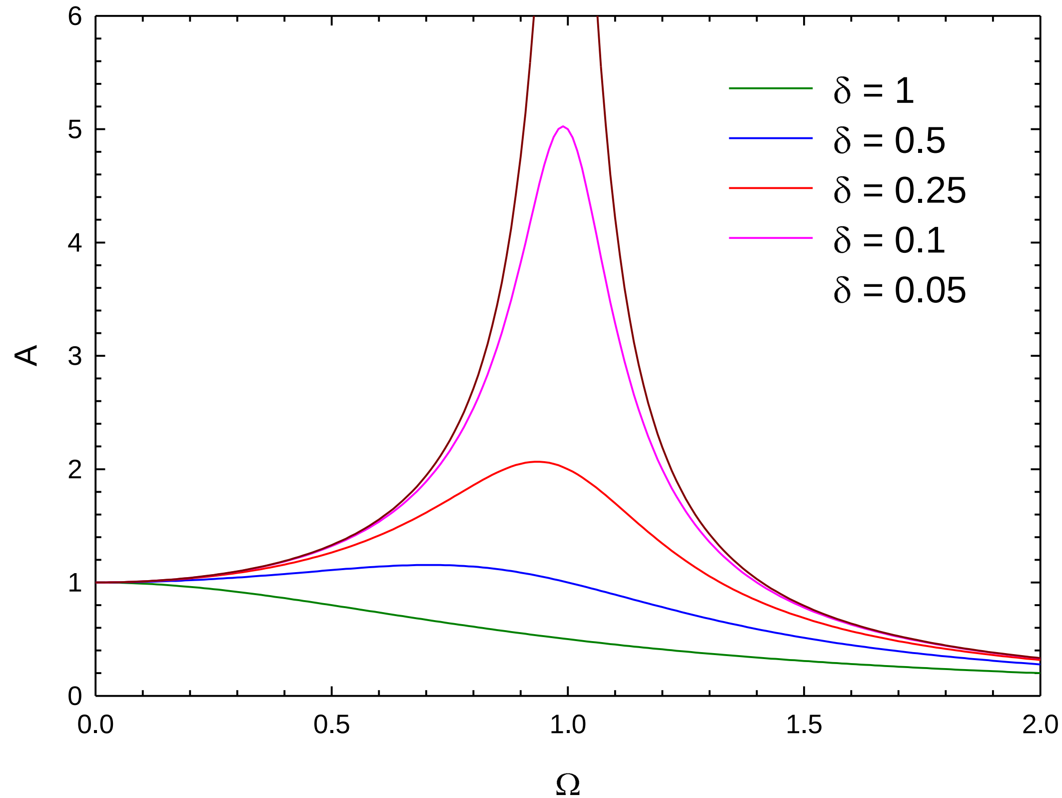
$$\downarrow$$

• **rezonance amplitudy**

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_0(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{1/2}}$$

$\omega_0 = 1,\ F_0 = 1,\ m = 1$

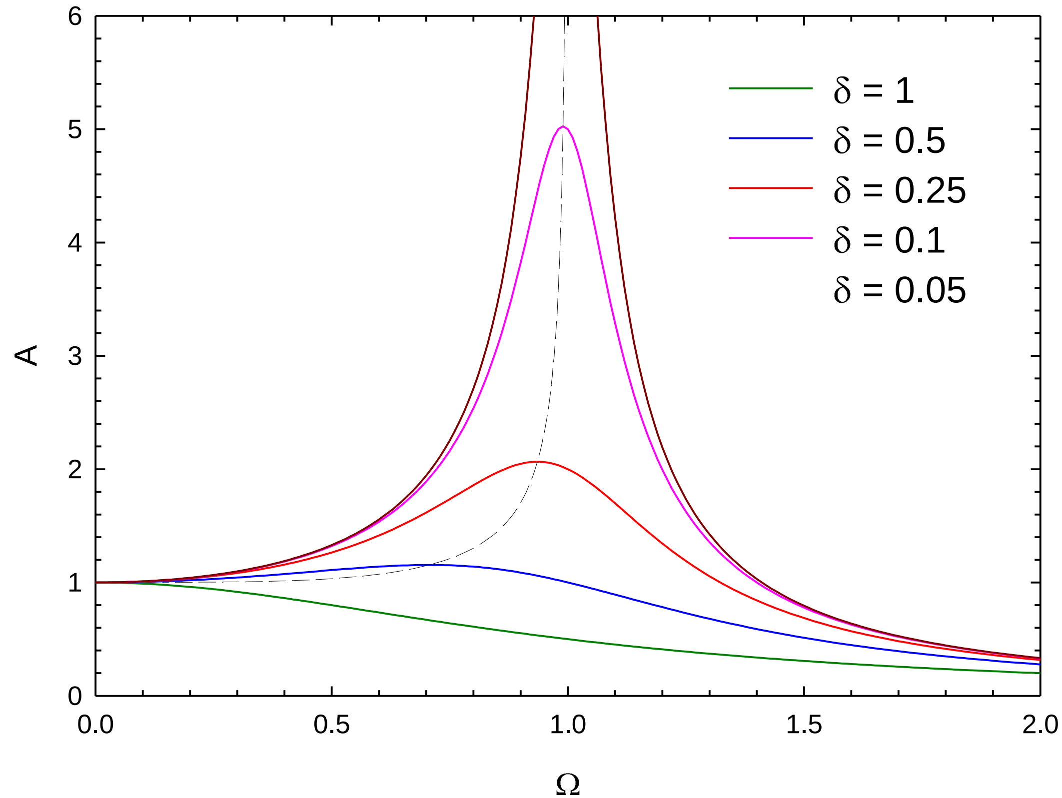


Nucené kmity s tlumením

• **amplituda kmitů**

$\omega_0 = 1,\ F_0 = 1,\ m = 1$

$$\frac{dA_0}{d\Omega} = \frac{2F_0\left(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2\right)\Omega}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}}$$



$$\frac{dA_0}{d\Omega} = 0$$

$$\downarrow$$

• **rezonance amplitudy**

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_0(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)^{1/2}}$$

Nucené kmity s tlumením

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

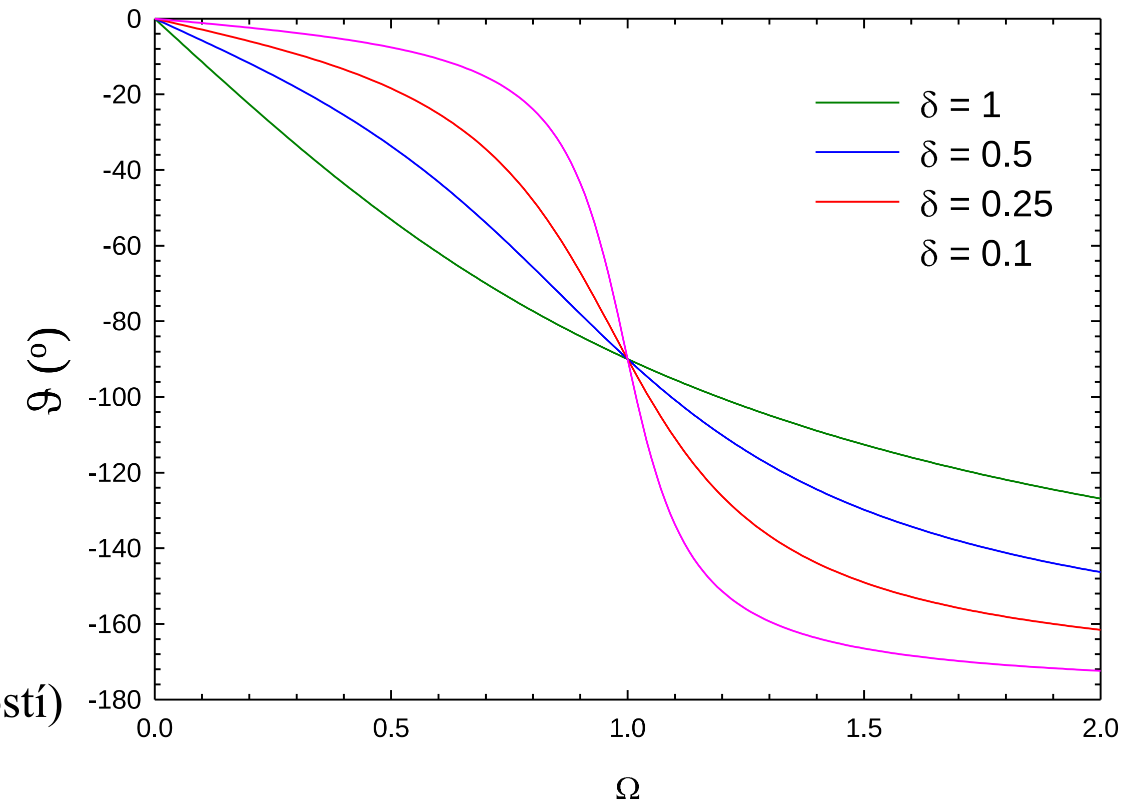
$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\vartheta(\Omega_r) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{\Omega_r}{\delta}\right)$$

- malé Ω: pohyb přibližně ve fázi s vynucující silou
- oblast rezonance $\Omega \approx \omega_0$: fázové zpoždění $-\pi/2$ (pohyb je přibližně ve fázi s rychlostí)
- velké Ω: fázové zpoždění $-\pi$

- **fázový posuv**

$\omega_0 = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$



Nucené kmity s tlumením

• mechanická energie:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

• z časem klesá:

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \left(m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx \right) \longrightarrow \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -h \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2$$

• pokles energie za periodu T:

$$\Delta E_m = \int_o^T h \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 \mathrm{d}t = \int_o^T h A_0^2 \Omega^2 \cos^2 (\Omega t + \vartheta) \mathrm{d}t = -h A_0^2 \Omega^2 \frac{T}{2}$$

$$\frac{h}{m} \equiv 2\delta \quad T \equiv \frac{2\pi}{\Omega} \longrightarrow \Delta E_m = -2\pi \delta m A_0^2 \Omega$$

tuto ztracenou energii musí dodat vynucující síla, tj. tuto práci musí vykonat aby udržela kmity

• výkon vynucující síly: $P_F = \dfrac{-\Delta E_m}{T} = \delta m A_0^2 \Omega^2$

Nucené kmity s tlumením

• výkon vynucovací síly:

$$P_F = \delta m A_0^2 \Omega^2 = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_F}{\mathrm{d}\Omega} = 0 \longrightarrow$$

rezonance výkonu nastává pro

$$\Omega = \omega_0$$

• průměrná mechanická energie vynuceného harmonického kmitu:

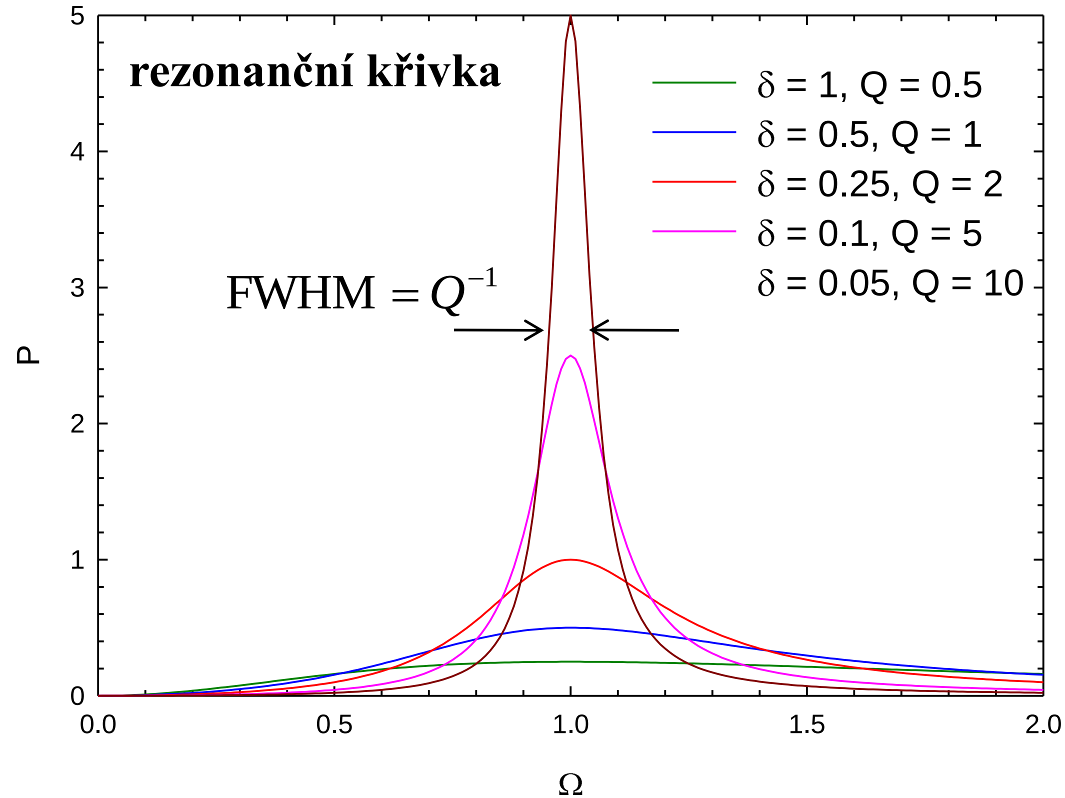
$$E_m = \frac{1}{2} m A_0^2 \Omega^2$$

• činitel jakosti

$$Q = \frac{2\pi \overline{E}_m}{\left|\Delta E_m\right|} = \frac{2\pi \overline{E}_m}{P_F T} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$$\Delta E_m = 2\pi \delta m A_0^2 \Omega$$

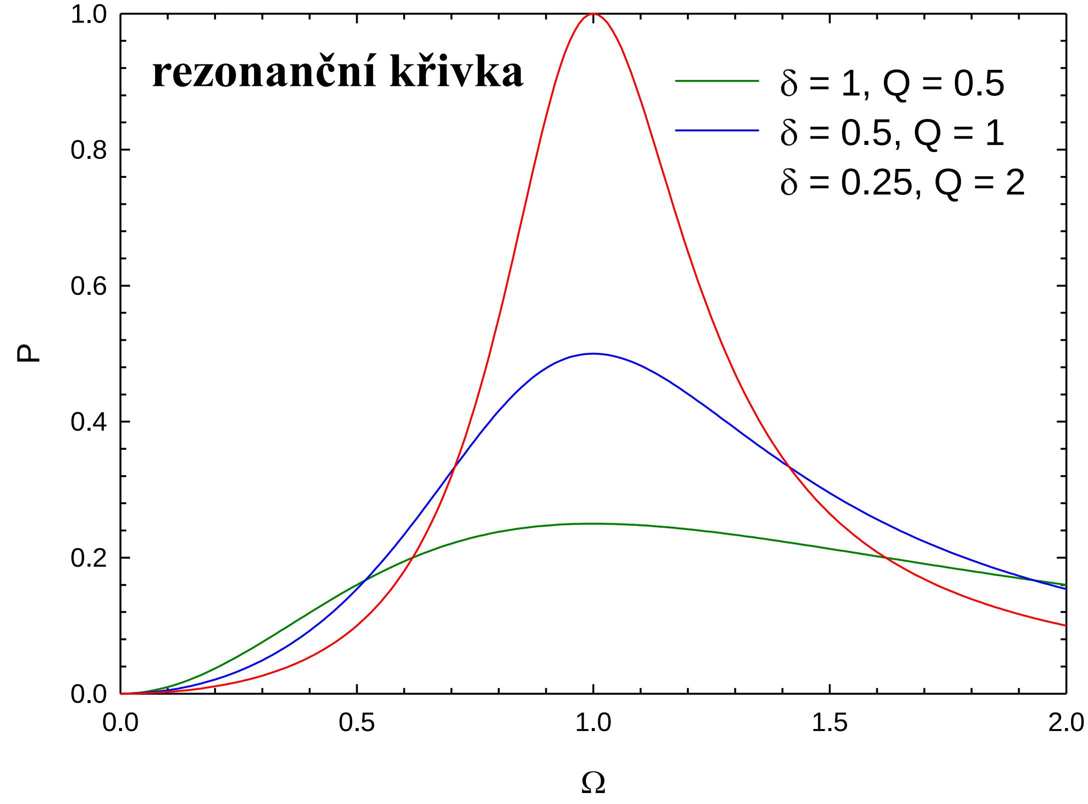
při rezonanci $\Omega = \omega_0$



Nucené kmity s tlumením

• výkon vynucovací síly:

$$P_F = \delta m A_0^2 \Omega^2 = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 \Omega^2\right]}$$



Nucené kmity s tlumením

• výkon vynucovací síly:

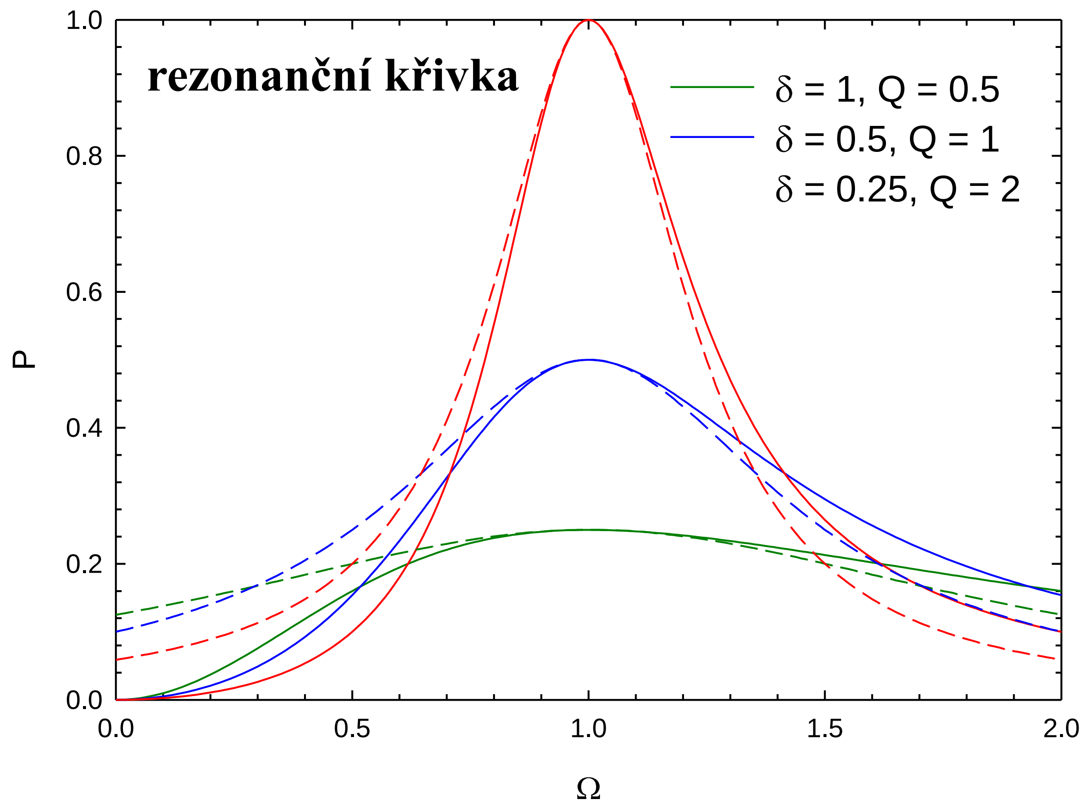
$$P_F = \delta m A_0^2 \Omega^2 = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$$

• v blízkosti rezonance $\Omega \approx \omega_0$:

Lorentzián

$$P_F \approx \frac{F_0^2 \delta}{4m\left[\left(\omega_0 - \Omega\right)^2 + \delta^2\right]}$$

$$\mathrm{FWHM} = 2\delta = \frac{\omega_0}{Q}$$



Nucené kmity s tlumením

• pokud přestane působit vynucovací síla bude amplituda kmitů klesat jako $e^{-\delta t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

• za jednu periodu poklesne faktorem $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T} = e^{-\frac{\pi}{Q}}$

Q – za kolik cyklů se amplituda zmenší faktorem $e^{-\pi}$