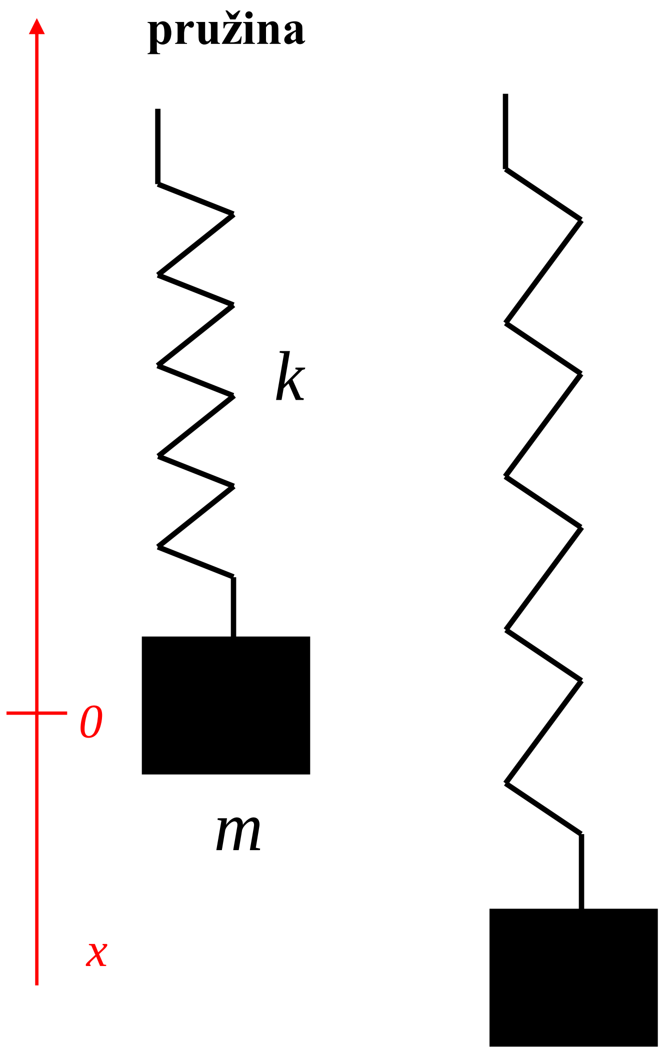
Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(t=0) = -A$$
$$v_x(t=0) = 0$$ **počáteční podmínky**

řešení

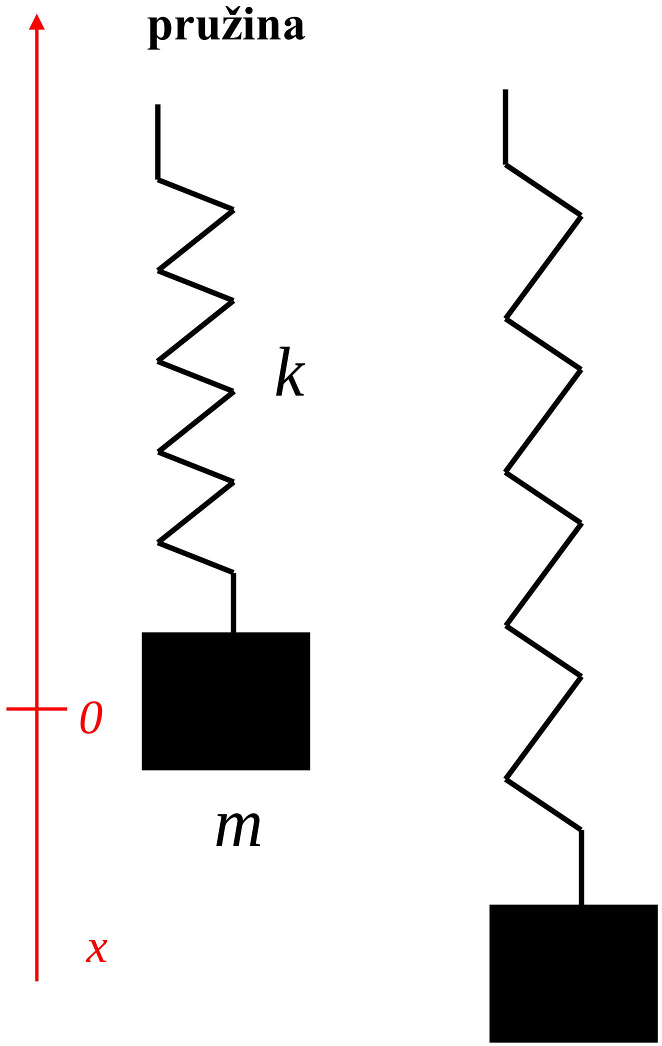
$$x(t) = C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_2 t \qquad \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

z počátečních podmínek dostáváme $C_1 = 0 \quad C_2 = -A$

$$x(t) = -A\cos\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Harmonický oscilátor – pružina

pružina



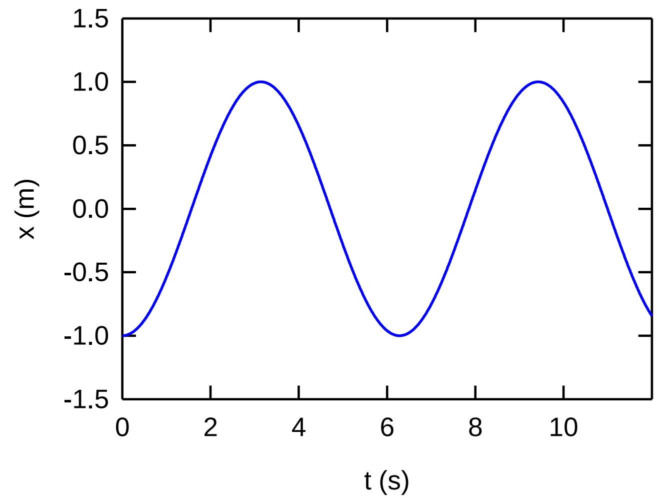
$$x(t) = -A\cos\omega t$$

$$v_x(t) = A\omega\sin\omega t$$

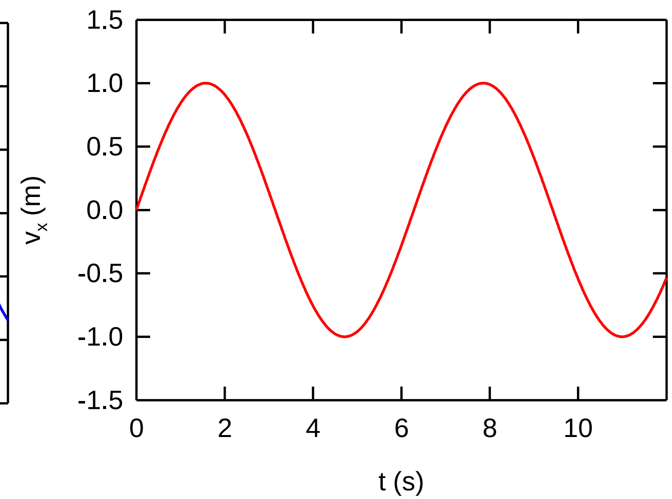
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Př. k = 1, m = 1

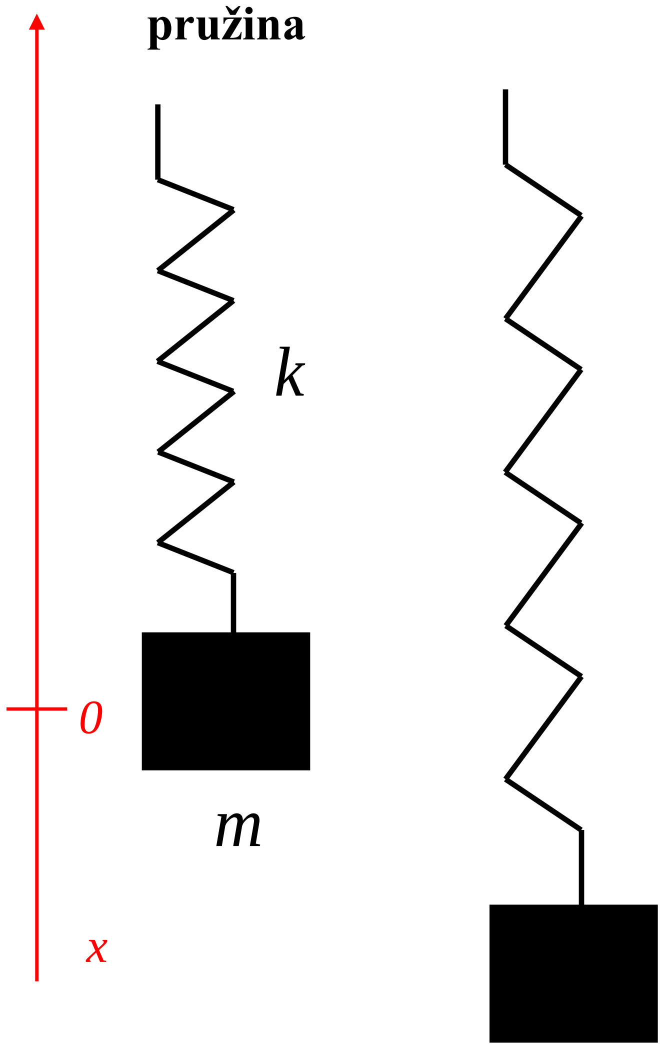
poloha



rychlost



Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

$$x(t=0) = -A$$
$$v_x(t=0) = 0$$
počáteční podmínky

$$x(t) = -A\cos\omega t$$

perioda kmitů: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Setrvačná a gravitační hmotnost

- 2. Newtonův zákon: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m_s}$

m_s – setrvačná hmotnost

= míra setrvačnosti tělesa

- gravitační zákon: $F = \kappa \dfrac{M_{g_1} M_{g_2}}{r_{12}^2}$

M_g – gravitační hmotnost

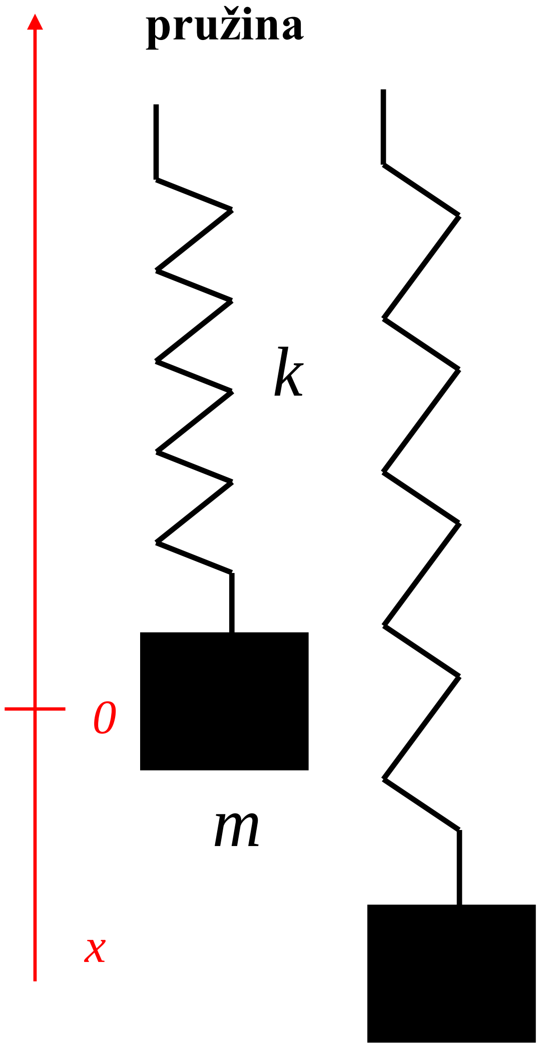
= míra velikosti gravitační síly

$$\frac{m_s}{M_g} = \text{konst.}$$

ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti

slabý princip ekvivalence

Setrvačná a gravitační hmotnost



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_s}$$

m_s – setrvačná hmotnost

= míra setrvačnosti tělesa

- změříme pomocí periody kmitání pružiny

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_s}{k}}$$

$$F = \kappa \frac{M_{g_1} M_{g_2}}{r_{12}^2}$$

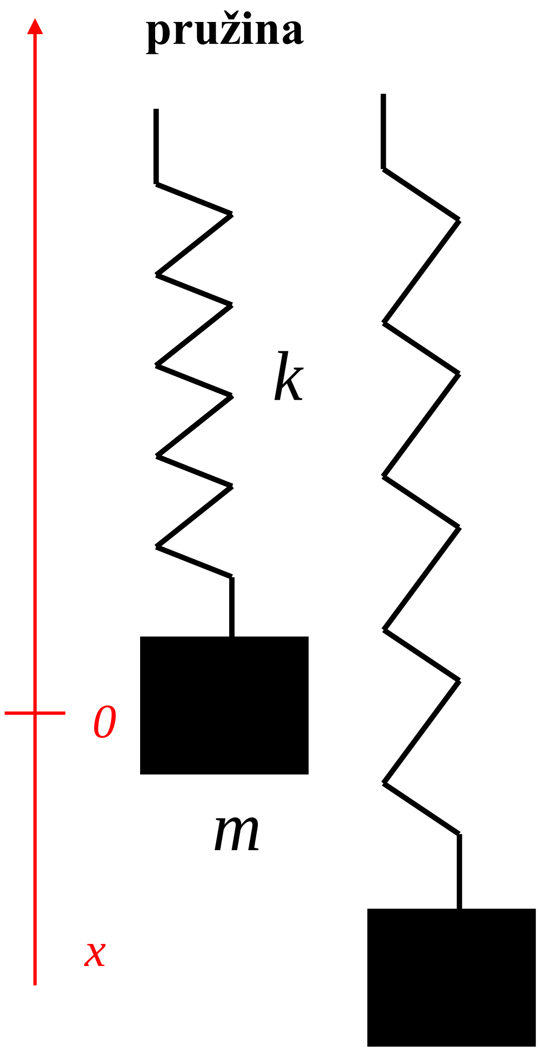
M_g – gravitační hmotnost

= míra velikosti gravitační síly

- změříme natažení pružiny

$$x_0 = \frac{\kappa}{k} \frac{M_{g_1} M_{g_2}}{R^2}$$

Setrvačná a gravitační hmotnost



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_s}$$

$\boldsymbol{m_s}$ **– setrvačná hmotnost**

= míra setrvačnosti tělesa

- změříme pomocí periody kmitání pružiny

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_s}{k}}$$

$$F = \kappa \frac{M_{g_1} M_{g_2}}{r_{12}^2}$$

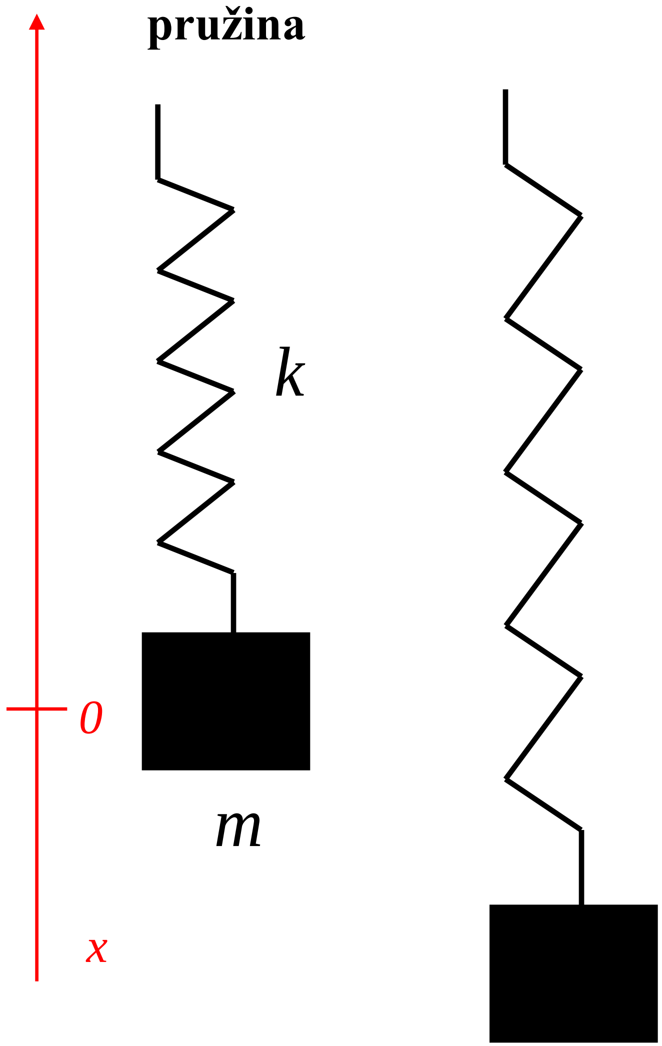
$\boldsymbol{M_g}$ **– gravitační hmotnost**

= míra velikosti gravitační síly

- změříme natažení pružiny

$$x_0 = \frac{M_{g_2}}{k} g \quad \text{(na Zemi)}$$

Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ **pohybová rovnice**

obecné řešení:

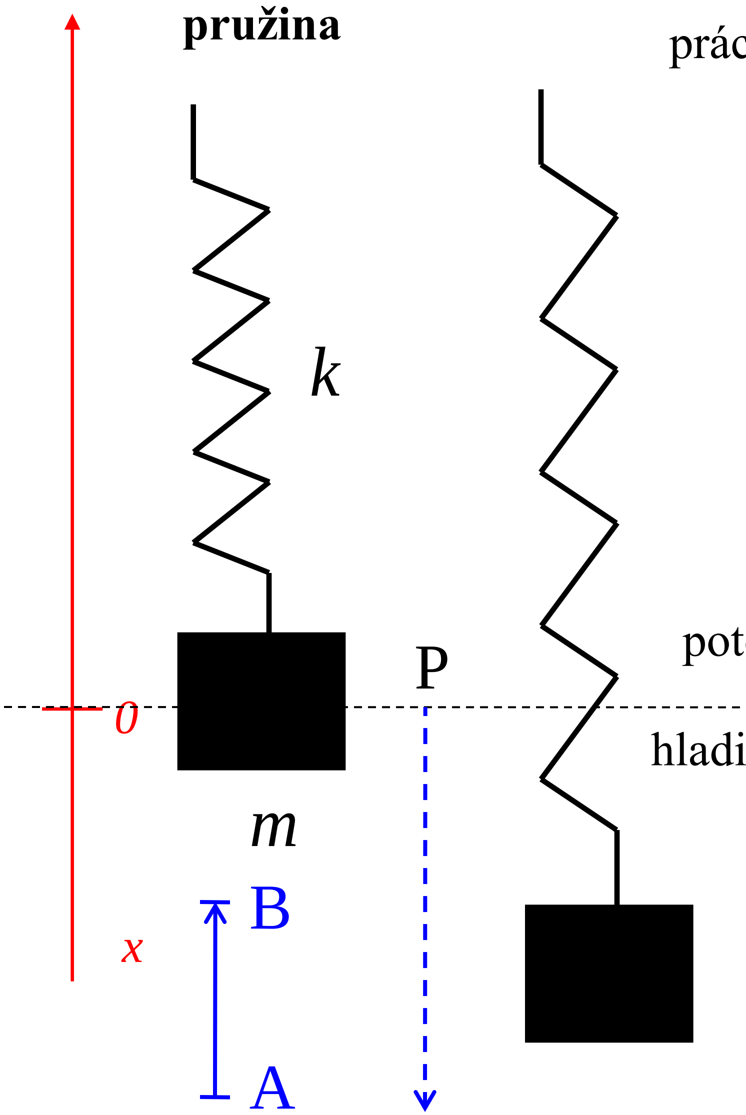
$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

fázový posuv

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

Harmonický oscilátor – pružina



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z A do B:

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

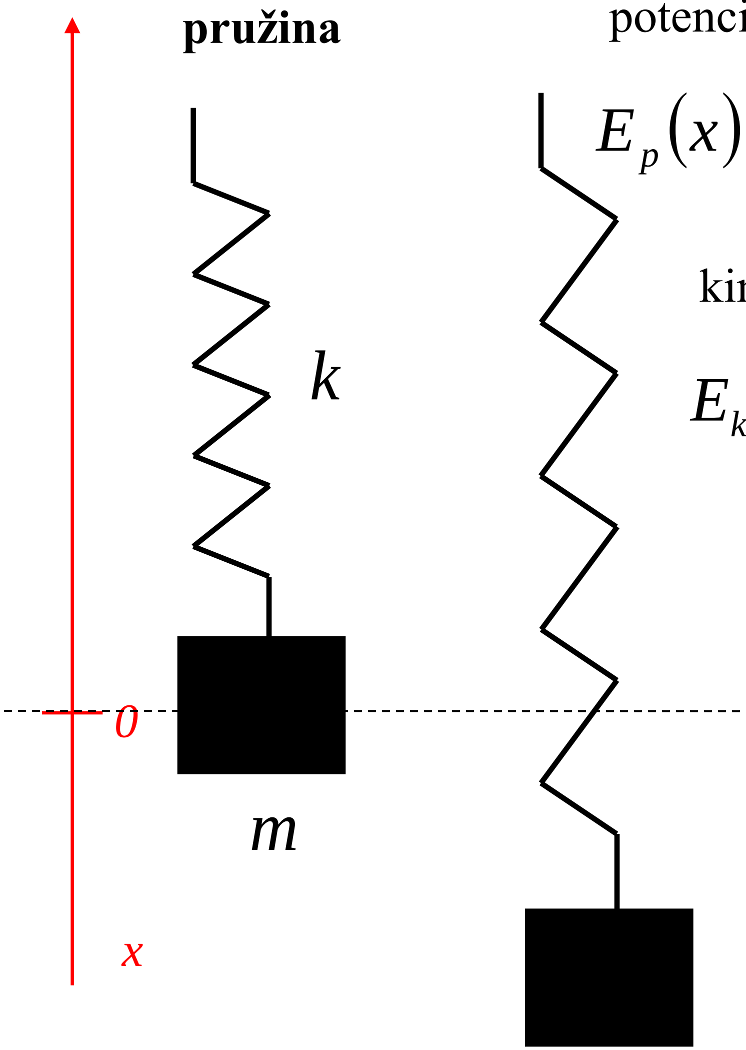
$$W_{PA} = \int_{x_P}^{x_A} -kx \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}k\left(x_A^2 - x_P^2\right) = -\frac{1}{2}k\,x_A^2$$

potenciální energie v bodu A: $E_p\left(A\right) = -A_{PA} = \frac{1}{2}kx_A^2$

hladina nulové potenciální energie

potenciální energie pružiny: $E_p\left(x\right) = \frac{1}{2}kx^2$

Harmonický oscilátor – pružina



potenciální energie:

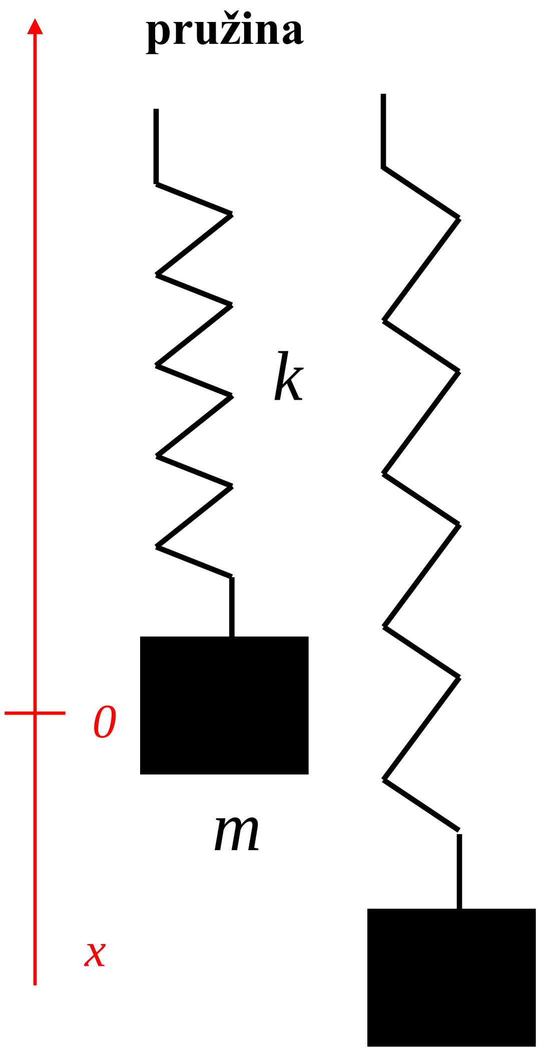
$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

celková energie pružiny: $E_k + E_p = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$

Tlumené kmity



$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{h}{m}\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}$$

řešení hledáme ve tvaru: $x = Ce^{\alpha t}$

charakteristická rovnice: $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

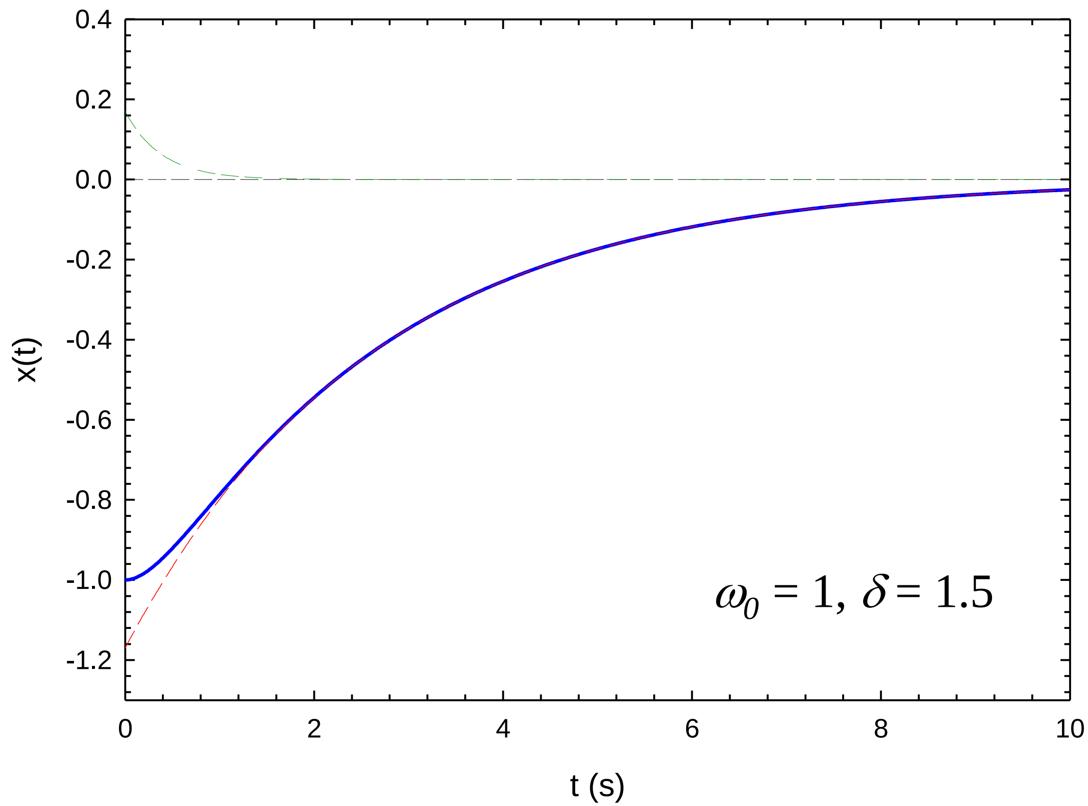
Tlumené kmity – aperiodický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta \dot{x}$$

aperiodický pohyb: $D > 0$

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$



konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -a$ $\qquad C_1 + C_2 = -a$ $\qquad C_1 = \dfrac{a\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$

$\dot{x}(0) = 0$ $\qquad C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 = 0$ $\qquad C_2 = \dfrac{-a\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$

$$x = \frac{a\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{a\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t}$$

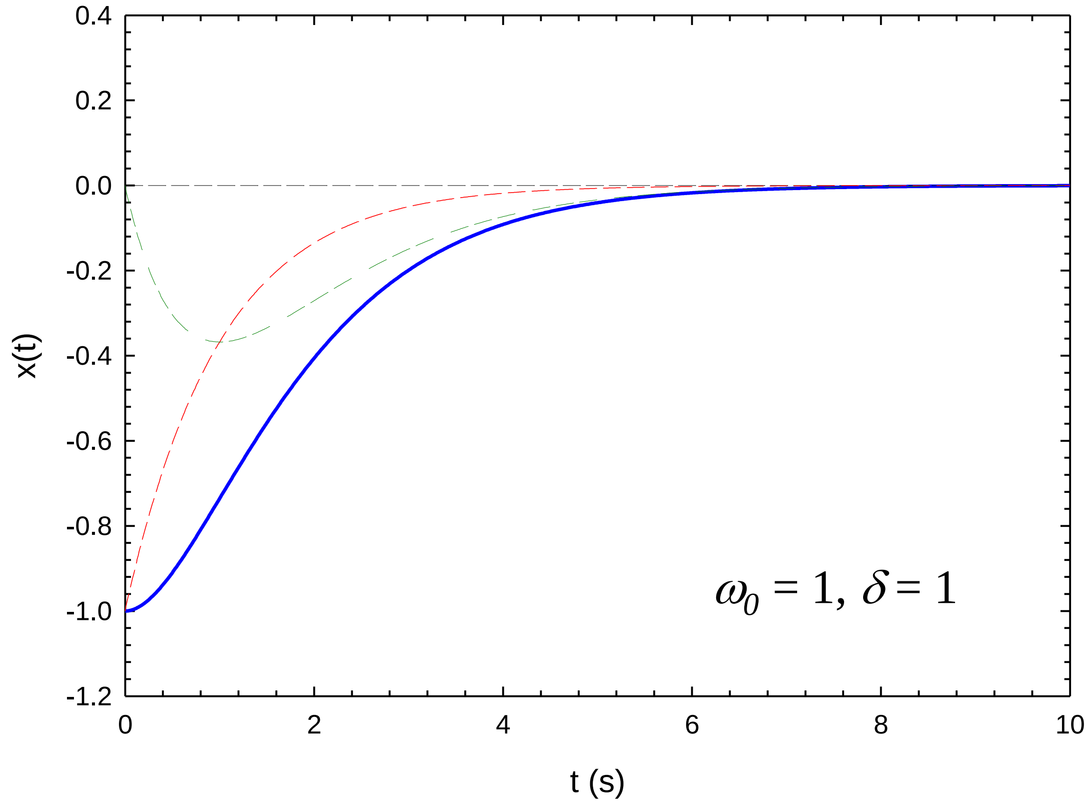
Tlumené kmity – mezní aperiodický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}$$

mezní aperiodický pohyb: $D = 0$

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -\delta$$



konstanty C_1, C_2 určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -a$ $\quad C_1 = -a$

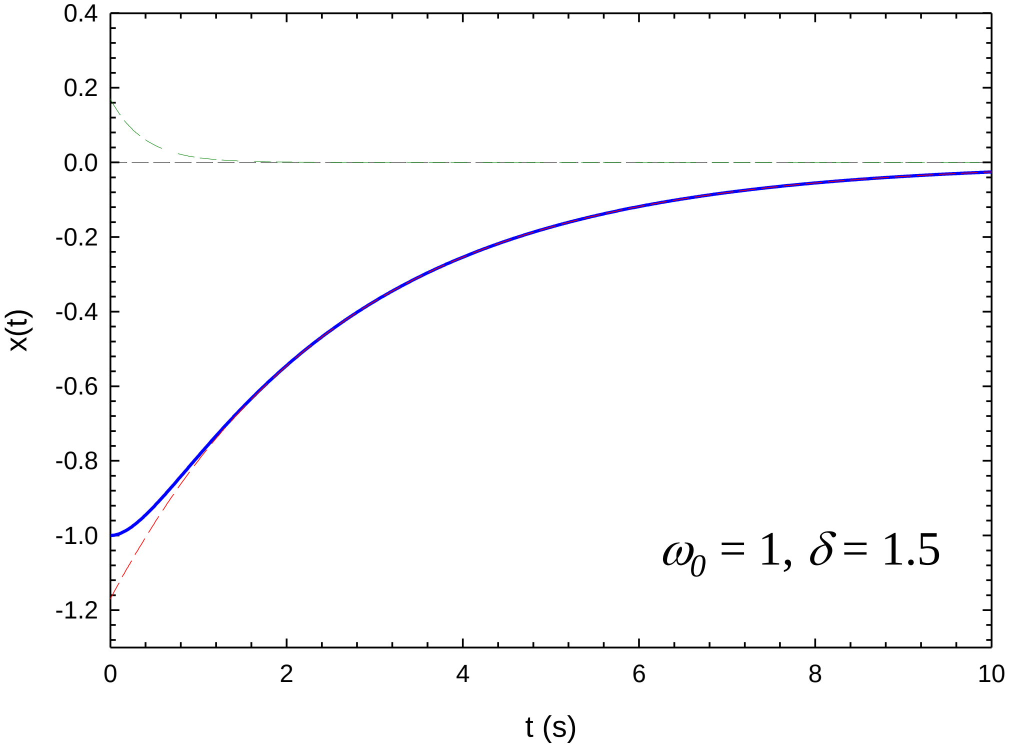
$\dot{x}(0) = 0$ $\quad C_1\alpha + C_2 = 0$

$$C_2 = a\alpha$$

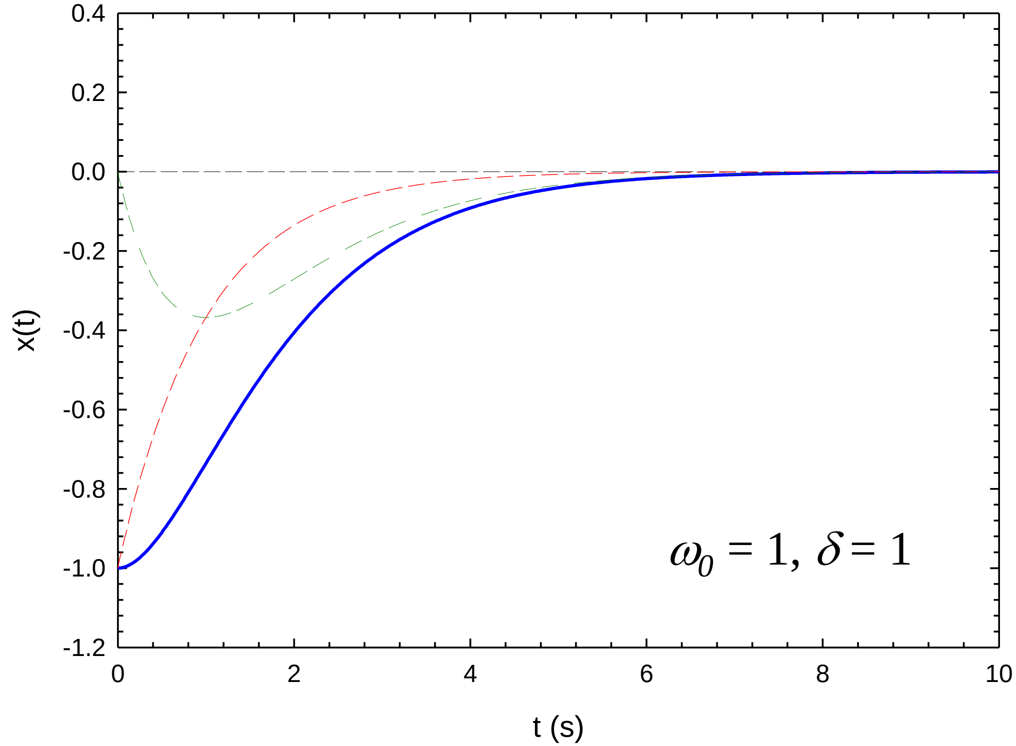
$$x = -ae^{-\delta t} - a\delta t e^{-\delta t}$$

Tlumené kmity

aperiodický pohyb



mezní aperiodický pohyb



Komplexní čísla

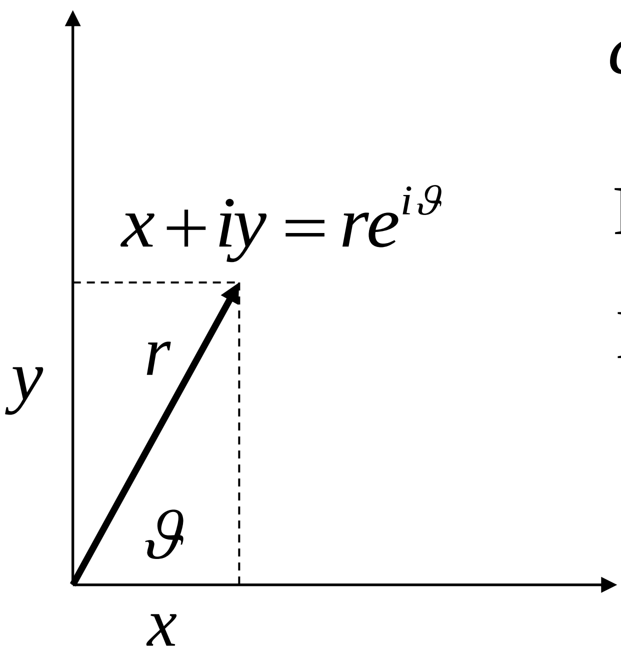
- **přirozená čísla**

	algebraická operace	inverzní operace		
• sčítání	$a + x = c$	$x = c - a$	$\longrightarrow$	***celá čísla***
• násobení	$ax = c$	$x = \dfrac{c}{a}$	$\longrightarrow$	***racionální čísla***
• umocňování	$x^a = c$	$x = \sqrt[a]{c}$	$\longrightarrow$	***iracionální čísla***
			$\longrightarrow$	***komplexní čísla***
• umocňování	$a^x = c$	$x = \log_a c$		$\downarrow$

stačí pro řešení všech algebraických rovnic

Komplexní čísla

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$



$$c = x + iy = re^{i\vartheta} = r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta$$

$$\mathrm{Re}\{c\} = x = r\cos\vartheta$$

$$\mathrm{Im}\{c\} = y = r\sin\vartheta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{y}{x}$$

Tlumené kmity – tlumený harmonický pohyb

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\delta\dot{x}$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

tlumený harmonický pohyb: $D < 0$

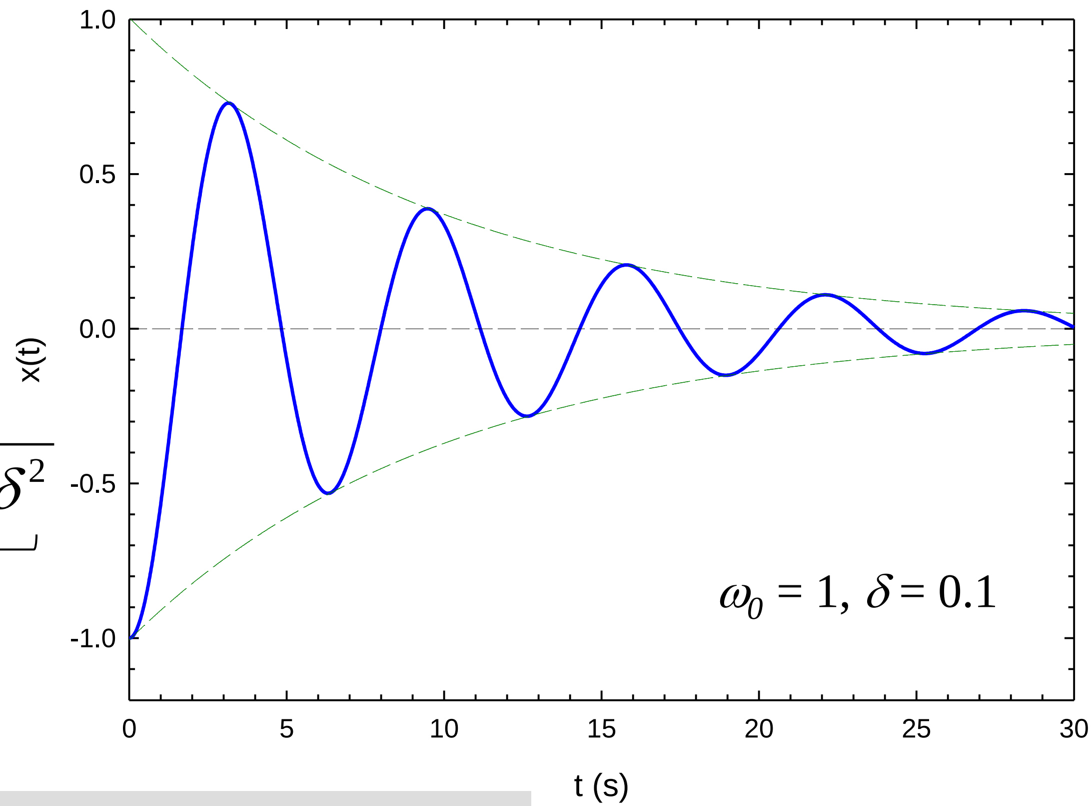
$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}_{\omega}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$$

$$x = C_1 e^{-\delta t} e^{i\omega t} + C_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$$

$$x = e^{-\delta t}\left(D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= C_1 + C_2 \\ D_2 &= i\left(C_1 - C_2\right) \end{aligned}\right\} \quad C_2 = C_1^*$$



$$x = Ae^{-\delta t}\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

Konstanty A, φ určíme z počátečních podmínek:

např. $x(0) = -a$ $\qquad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\delta} \qquad A = \dfrac{-a}{\sin\varphi}$

$\dot{x}(0) = 0$