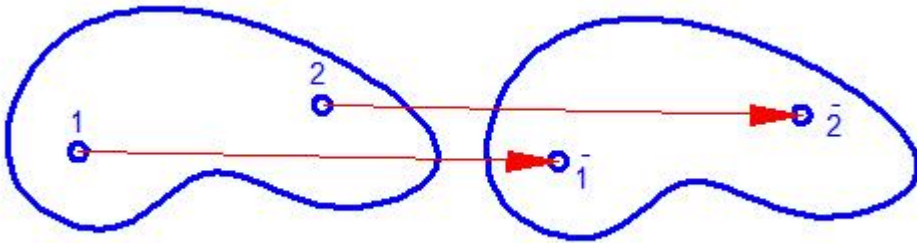


# Otáčení a posunutí

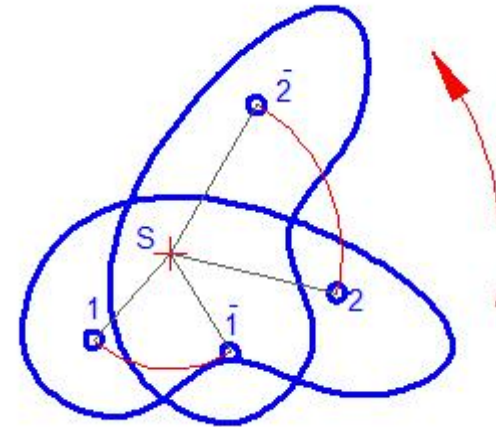
## posunutí (translace)

- všechny body tělesa se pohybují po rovnoběžných trajektoriích



## otočení (rotace)

- všechny body tělesa se pohybují po kružnicích okolo osy otáčení



# Analogie otáčení a posunutí

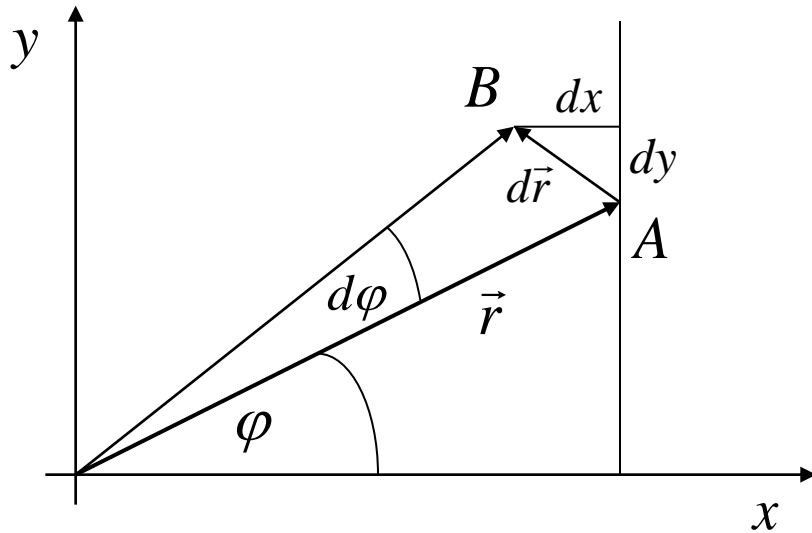
## posunutí (translace)

- vzdálenost  $x$  o kolik se těleso posunulo
- rychlost  $v = dx / dt$
- zrychlení  $a = d^2x / dt^2$
- síla  $F = m d^2x / dt^2$

## otočení (rotace)

- úhel  $\varphi$  o kolik se těleso otočilo okolo osy
- úhlová rychlost  $\omega = d\varphi / dt$
- úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$

# Analogie otáčení a posunutí



$$dx = -|AB| \sin \varphi = -r d\varphi \sin \varphi = -y d\varphi$$

$$dy = |AB| \cos \varphi = x d\varphi$$

rychlost:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -y \frac{d\varphi}{dt} = -y\omega$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = x \frac{d\varphi}{dt} = x\omega$$

velikost rychlosti:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega r$$

# Analogie otáčení a posunutí

## posunutí (translace)

- vzdálenost  $x$  o kolik se těleso posunulo
- rychlost  $v = dx / dt$
- zrychlení  $a = d^2x / dt^2$
- síla  $F = m d^2x / dt^2$
- práce:  $dW = \vec{F} d\vec{r}$

## otočení (rotace)

- úhel  $\varphi$  o kolik se těleso otočilo
- úhlová rychlost  $\omega = d\varphi / dt$
- úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$
- moment síly  $N_z = x F_y - y F_x$

$$dW = F_x dx + F_y dy = (x F_y - y F_x) d\varphi$$

$$\text{moment síly: } \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

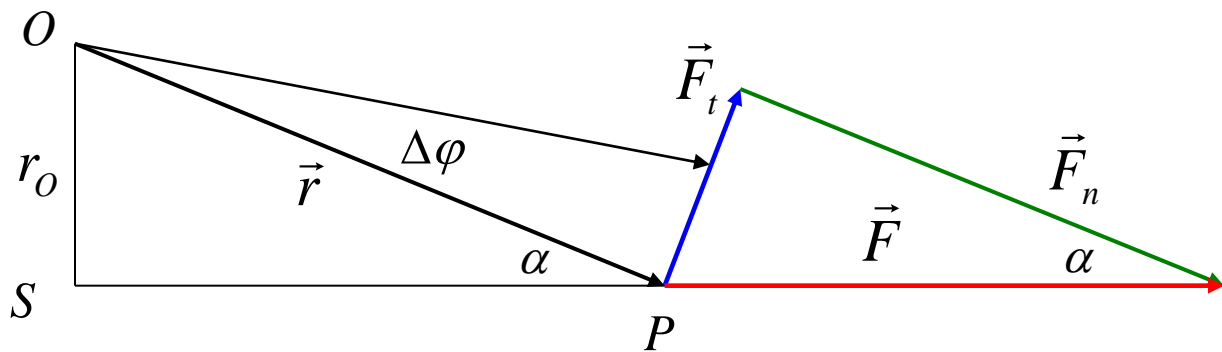
$$\text{celkový moment síly: } \vec{N} = \sum_i \vec{N}_i$$

# Moment síly

moment síly:  $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$N = rF \sin \alpha = rF_t = r_o F$$

$r_o$  – rameno síly



# Analogie otáčení a posunutí

## posunutí (translace)

- vzdálenost  $x$  o kolik se těleso posunulo
- rychlost  $v = dx / dt$
- zrychlení  $a = d^2x / dt^2$
- síla  $F = m d^2x / dt^2$

- 2. Newtonův zákon:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$N_z = xF_y - yF_x = mx \frac{d^2y}{dt^2} - my \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( mx \frac{dy}{dt} - my \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \underbrace{(xp_y - yp_x)}$$

**moment hybnosti:**  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

## otočení (rotace)

- úhel  $\varphi$  o kolik se těleso otočilo
- úhlová rychlost  $\omega = d\varphi / dt$
- úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$
- moment síly  $N_z = x F_y - y F_x$

**moment hybnosti  $L$**

# Analogie otáčení a posunutí

## posunutí (translace)

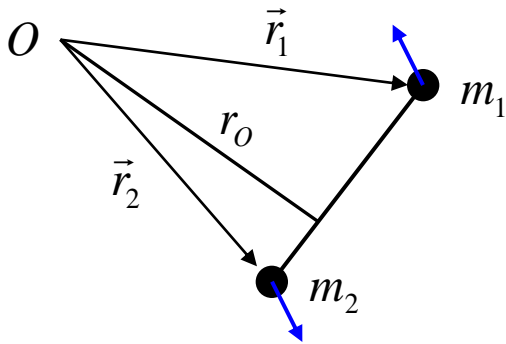
- vzdálenost  $x$  o kolik se těleso posunulo
- rychlost  $v = dx / dt$
- zrychlení  $a = d^2x / dt^2$
- síla  $F$
- hybnost  $p$
- 2. Newtonův zákon  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

## otočení (rotace)

- úhel  $\varphi$  o kolik se těleso otočilo
- úhlová rychlost  $\omega = d\varphi / dt$
- úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$
- moment síly  $N_z = x F_y - y F_x$
- moment hybnosti  $L_z = x p_y - y p_x$
- 2. Newtonův zákon  $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

# Celkový moment hybnosti

celkový moment hybnosti: 
$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



**2. impulsová věta:**

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \vec{N}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Rychlost změny celkového momentu hybnosti vzhledem ke kterékoliv ose je rovna celkovému momentu vnějších sil vzhledem k téže ose.



# Zákon zachování momentu hybnosti

## 2. impulsová věta:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \vec{N}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Rychlost změny celkového momentu hybnosti vzhledem ke kterékoliv ose je rovna celkovému momentu vnějších sil vzhledem k téže ose.

- pokud je  $\vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.}$
- **zákon zachování momentu hybnosti**
- Je-li vzhledem k některému bodu soustavy výsledný moment vnějších sil nulový, pak se celkový moment hybnosti vzhledem k uvažovanému bodu zachovává.
- důsledek symetrie fyzikálních zákonů vůči otočení v prostoru
- analogie zákona zachování hybnosti pro případ rotace

# Analogie otáčení a posunutí

## posunutí (translace)

- vzdálenost  $x$  o kolik se těleso posunulo
- rychlost  $v = dx / dt$
- zrychlení  $a = d^2x / dt^2$
- síla  $F$
- hybnost  $p$
- 2. Newtonův zákon  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

## otočení (rotace)

- úhel  $\varphi$  o kolik se těleso otočilo
- úhlová rychlost  $\omega = d\varphi / dt$
- úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$
- moment síly  $N_z = x F_y - y F_x$
- moment hybnosti  $L_z = x p_y - y p_x$
- 2. Newtonův zákon  $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

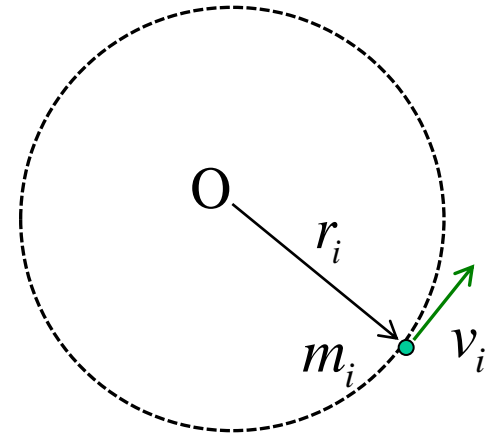
# Moment setrvačnosti

hmotný bod:  $m_i$   $[x_i, y_i]$

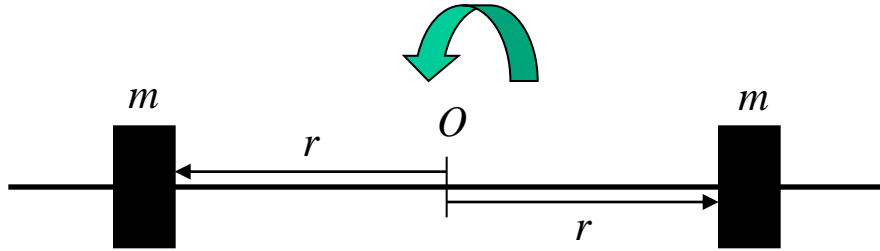
moment hybnosti:  $L_i = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega$

součet pro všechny hmotné body:  $L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = J \omega$

**moment setrvačnosti:**  $J = \sum_i m_i r_i^2$



# Moment setrvačnosti

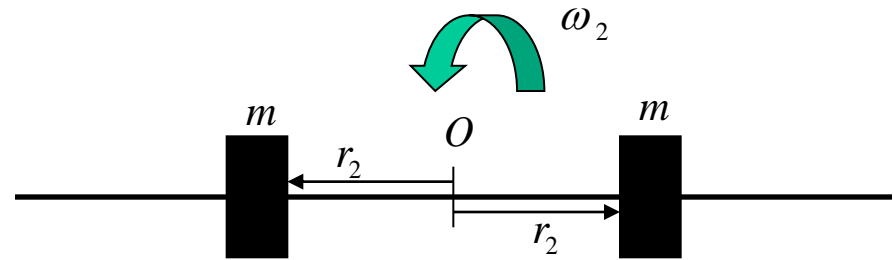
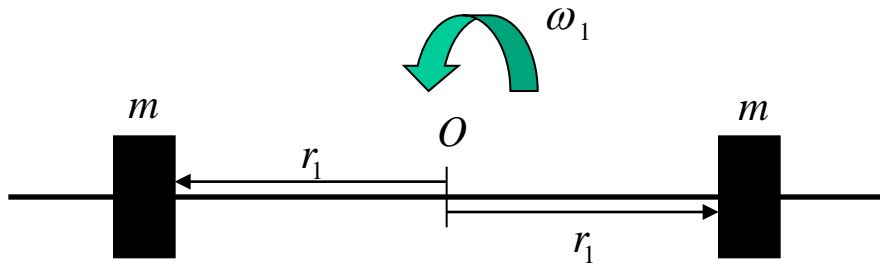


moment setrvačnosti:  $J = 2mr^2$

zákon zachování momentu hybnosti:  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

zde konkrétně:  $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$

# Zákon zachování momentu hybnosti



- moment setrvačnosti:  $J = 2mr^2$
- zákon zachování momentu hybnosti:  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

- zde konkrétně:  $r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$

- kinetická energie:  $\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = mr_1^2\omega_1^2$

$$\frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = mr_2^2\omega_2^2$$

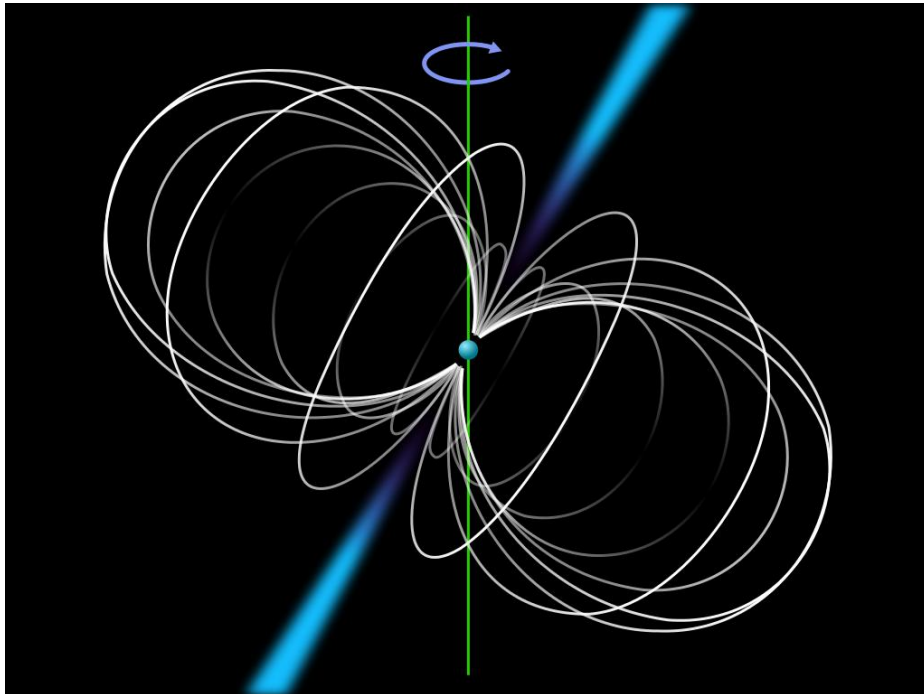
- jestliže platí  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

- nemůže současně platit  ~~$J_1\omega_1^2 = J_2\omega_2^2$~~

- **při přesunutí otáčejících se závaží se koná práce**

# Neutronová hvězda

- hmotnost  $\sim 1.5 M_{\text{Slunce}}$
- průměr  $\sim 20$  km
- perioda rotace  $\sim$  ms



*pulsar v Krabí mlhovině*

# Analogie otáčení a posunutí

## posunutí (translace)

- vzdálenost  $x$  o kolik se těleso posunulo

- rychlost  $v = dx / dt$        $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- zrychlení  $a = d^2x / dt^2$        $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

- síla  $F$        $\vec{F}$

- hybnost  $p$        $\vec{p}$

- 2. Newtonův zákon       $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

- hmotnost       $m$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

## otočení (rotace)

- úhel  $\varphi$  o kolik se těleso otočilo

- úhlová rychlost  $\omega = d\varphi / dt$        $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2}$

- úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$        $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

- moment síly       $N_z = x F_y - y F_x$        $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$

- moment hybnosti       $L_z = x p_y - y p_x$        $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

- 2. Newtonův zákon       $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- moment setrvačnosti       $J = \sum_i m_i r_i^2$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

# Moment setrvačnosti

- moment setrvačnosti tyče délky  $l$
- pro osu otáčení na kraji

$$J = \int x^2 dm = \rho S \int_0^l x^2 dx$$

$$J = \frac{1}{3} M l^2$$

- moment setrvačnosti tyče délky  $l$
- pro osu otáčení na kraji

$$J = \int x^2 dm = 2\rho S \int_0^{l/2} x^2 dx$$

$$J = \frac{1}{12} M l^2$$

