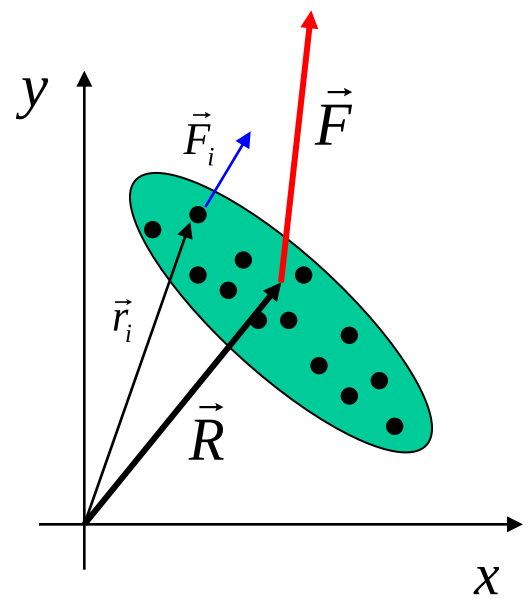
Soustava hmotných bodů

Těleso – soustava hmotných bodů

Tuhé těleso - pevný předmět jehož rozměry se nemění



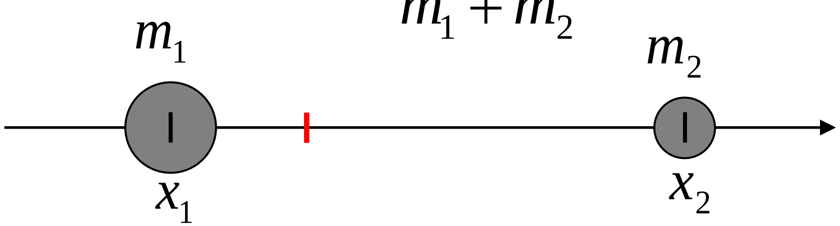
- každé těleso se skládá z mnoha částic
- síla působící na *i*-tou částici $\vec{F}_i = m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$
- výsledná síla působící na předmět $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$

- **výsledná síla** $\vec{F} = M \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$
- **hmotný střed** $\vec{R} = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \qquad M = \sum_i m_i$

Hmotný střed

- **hmotný střed** $$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$X_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$m_1 = m_2 \quad \rightarrow \quad X_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- **Země-Měsíc:**

m_1 = 5.97 × 10^{24} kg
m_2 = 7.35 × 10^{22} kg = 0.0123 m_1

střední vzdálenost Země – Měsíc:
394 × 10^3 km (vzdálenost středů)

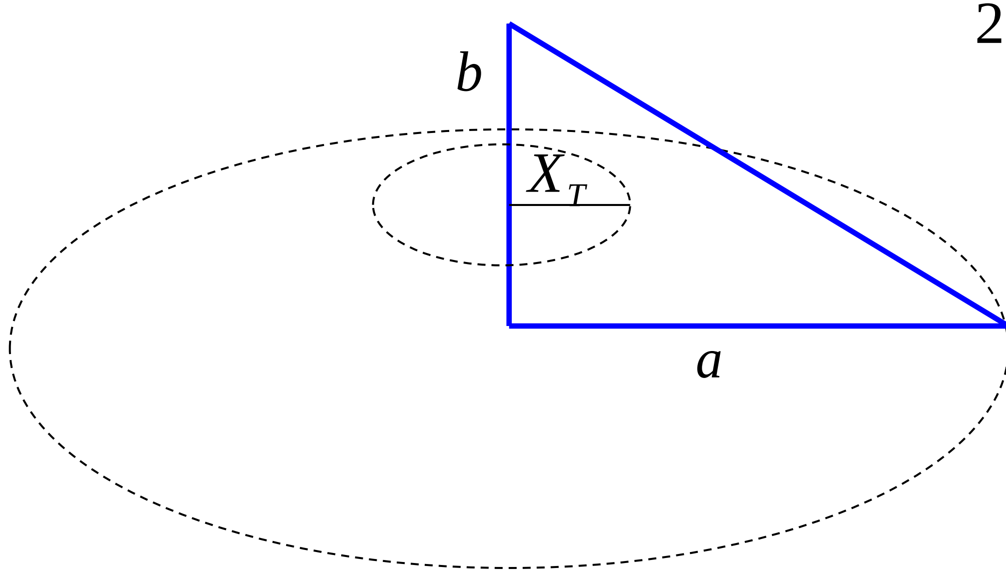
X_T =(0 + 0.0123 × 394 × 10^3) / 1.0123 = 4880 km

1500 km pod povrchem Země

Hmotný střed

- **hmotný střed** $$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

- **Pappova věta**



$$2\pi X_T \frac{1}{2} ab = \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

$$X_T = \frac{a}{3}$$

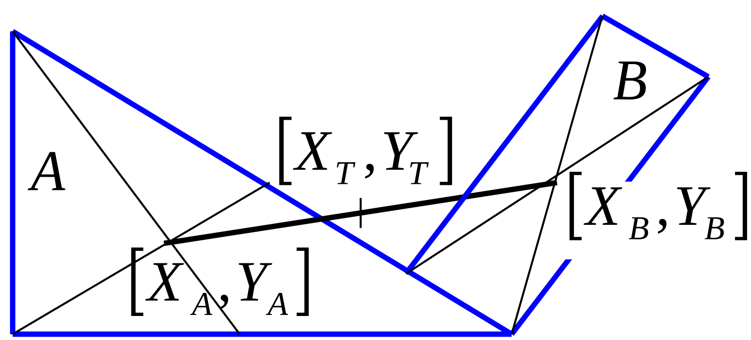
$$Y_T = \frac{b}{3}$$

Hmotný střed

- **hmotný střed** $$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

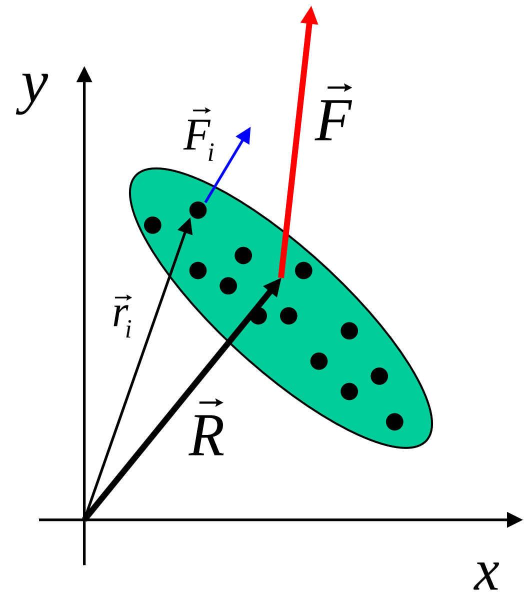
$$MX_T = \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i = M_A X_A + M_B X_B$$

$$MY_T = \sum_A m_i y_i + \sum_B m_i y_i = M_A Y_A + M_B Y_B$$



Soustava hmotných bodů

• síla působící na *i*-tou částici $\vec{F}_i = m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$



$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,E} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{i,k}^{\,I}$$

výslednice vnějších sil působících na *i*-tý bod

vnitřní síly, kterými působí *k*-tý hmotný bod na *i*-tý

$$\vec{F}_{i,i} = 0$$

$$\vec{F}_{i,k} = -\vec{F}_{k,i}$$

3. Newtonův zákon

• celková hybnost soustavy $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M \dfrac{d\vec{R}}{dt}$

• **1. impulsová věta** $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,E} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$

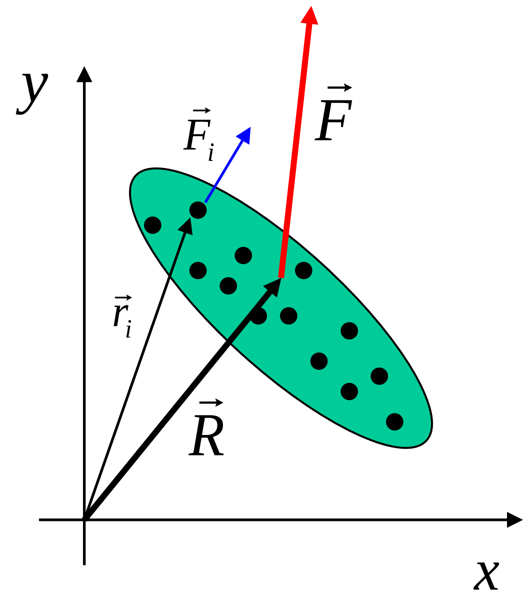
Časová derivace celkové hybnosti soustavy je rovna výslednici vnějších sil působících na soustavu.

výslednice vnějších sil

Zákon zachování hybnosti

- **1. impulsová věta** $$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,E} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$$

- celková hybnost soustavy $$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\,\frac{d\vec{R}}{dt}$$

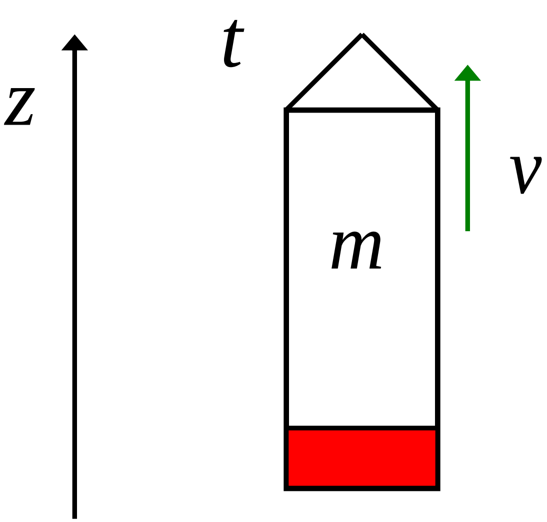


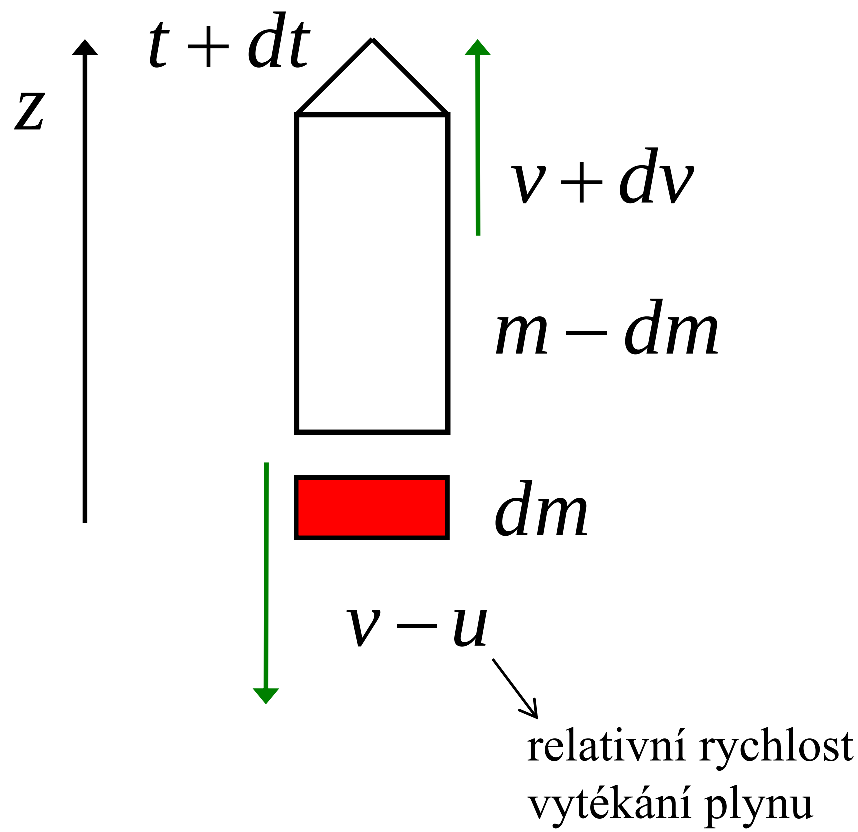
- pokud je $\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{konst.}$

- **zákon zachování hybnosti**

- celková hybnost izolované soustavy se nemění

Pohyb rakety





$$P = mv$$

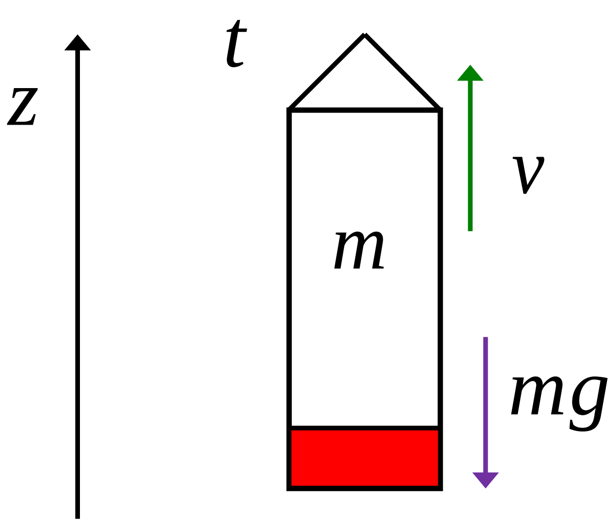
$$ma = u\frac{dm}{dt}$$

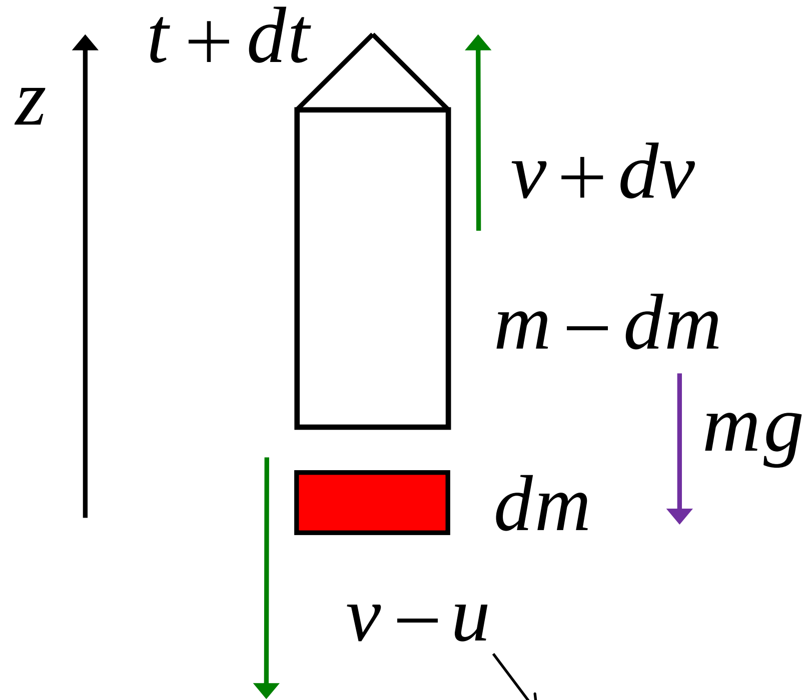
$$P = (m - dm)(v - dv) + dm(v - u)$$

$$\Delta v = u \ln \frac{m_i}{m_f}$$

Ciolkovského rovnice

Pohyb rakety v tíhovém poli





relativní rychlost vytékání plynu

$$P = mv$$

raketa musí překonat gravitační sílu

$$ma = u\frac{dm}{dt} - mg$$

$$P = (m-dm)(v-dv) + dm(v-u)$$

$$\Delta v = u \ln\frac{m_i}{m_f} - gt$$

Ciolkovského rovnice

Pohyb rakety

$$\Delta v = u \ln \frac{m_i}{m_f}$$

Ciolkovského rovnice

Příklad: **jednostupňová raketa**, bez gravitace

u = 4.5 km s^{-1}

Δv = 9.7 km s^{-1}

$$\frac{m_i - m_f}{m_i} = 1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right)$$

$$\frac{m_i - m_f}{m_i} = 88.4\,\%$$

11.6 % zbývá pro náklad rakety

$$\Delta v = u \ln \frac{m_i}{m_f} - gt$$

Příklad: **jednostupňová raketa**, start z povrchu Země

u = 4.5 km s^{-1} t = 2 min

Δv = 9.7 – 1.2 = 8.5 km s^{-1}

Pokud bych chtěl dosáhnout rychlosti 9.7 km s^{-1} musím mít palivo jako na dosažení rychlosti Δv = 9.7 + 1.2 = 10.9 km s^{-1} bez gravitace

$$\frac{m_i - m_f}{m_i} = 91.1\,\%$$

8.9 % zbývá pro náklad rakety