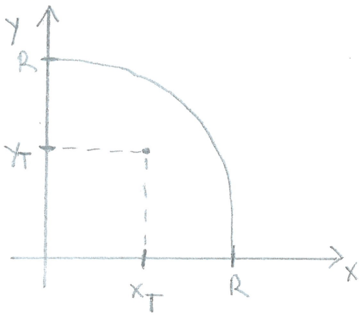
- čtvrtkruh



$$x_T = \frac{1}{M}\sum_i x_i m_i = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

$$dm = \sigma \cdot dS = \frac{M}{S}\,dS$$

plošná hustota

$$x_T = \frac{1}{S}\int x\,dS$$

$$y_T = \frac{1}{S}\int y\,dS$$

polární souřadnice

$$x = r\cos\varphi \qquad \varphi \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$y = r\sin\varphi \qquad r \in [0, R]$$

$$dS = r\,dr\,d\varphi$$

$$\Rightarrow x_T = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\cos\varphi\; r\,dr\,d\varphi$$

$$x_T = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^R r^2\,dr$$

$$x_T = \frac{4}{\pi R^2}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{\pi R^2}\cdot 1\cdot\frac{R^3}{3}$$

$$x_T = \frac{4R}{3\pi}$$

podobně

$$y_T = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi R^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\sin\varphi\; r\,dr\,d\varphi$$

$$y_T = \frac{4}{\pi R^2}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4R}{3\pi}$$

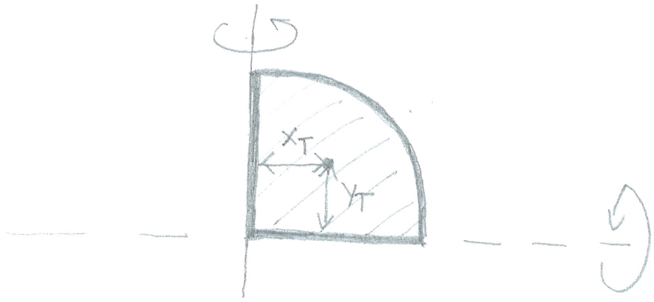
→ pomocí Pappovy věty

$$2\pi \, x_T \, S = V$$

S: plocha $\frac{1}{4}$ kruhu

V: rotační těleso vzniklé rotací $\frac{1}{4}$ kruhu

x_T: vzdálenost ~~hmotného~~ hmotného středu od osy otáčení



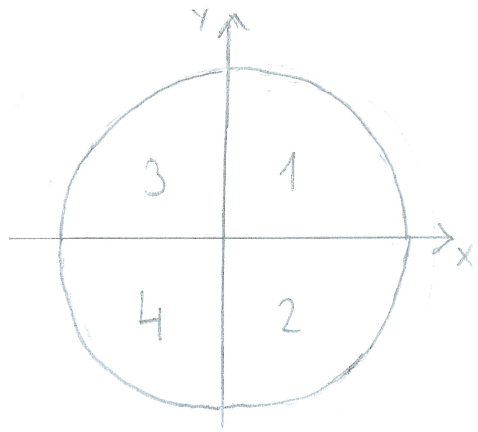
$$2\pi \, x_T \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{2} \, \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\underline{x_T = \frac{4R}{3\pi}}$$

$$\underline{y_T = \frac{4R}{3\pi}}$$

stejné

• 4 čtvrtkruhy



hmotné středy čtvrtkruhů

1. $x_{T1} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (+1)$
   $y_{T1} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (+1)$
2. $x_{T2} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (+1)$
   $y_{T2} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (-1)$
3. $x_{T3} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (-1)$
   $y_{T3} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (+1)$
4. $x_{T4} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (-1)$
   $y_{T4} = \frac{4R}{3\pi} \cdot (-1)$

$\downarrow$

hmotný střed kotouče

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 x_{T1} + m_2 x_{T2} + m_3 x_{T3} + m_4 x_{T4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_T = \frac{1\cdot\left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 2\cdot\left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 3\cdot\left(-\frac{4R}{3\pi}\right) + 4\cdot\left(-\frac{4R}{3\pi}\right)}{1+2+3+4} = \frac{4R}{3\pi}\,\frac{1+2-3-4}{1+2+3+4} = \frac{4R}{3\pi}\,\frac{-4}{10}$$

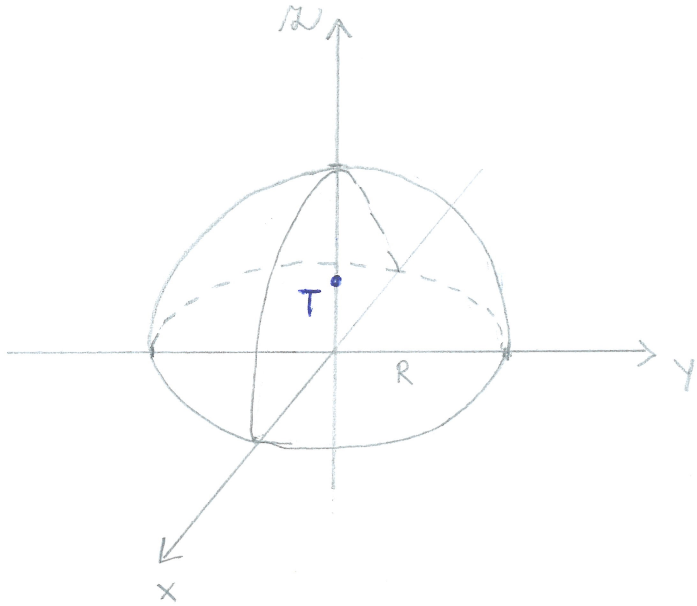
$$\underline{\underline{x_T = -\frac{8R}{15\pi}}}$$

$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 y_{T1} + m_2 y_{T2} + m_3 y_{T3} + m_4 y_{T4}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$y_T = \frac{1\cdot\left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 2\left(-\frac{4R}{3\pi}\right) + 3\left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 4\left(-\frac{4R}{3\pi}\right)}{1+2+3+4} = \frac{4R}{3\pi}\cdot\frac{1-2+3-4}{1+2+3+4} = \frac{4R}{3\pi}\,\frac{-2}{10}$$

$$\underline{\underline{y_T = -\frac{4R}{15\pi}}}$$

Příklad 9.2.



- ze symetrie $x_T = 0$

  $y_T = 0$

- počítáme pouze $z_T = \dfrac{1}{V} \displaystyle\int_{\text{polokoule}} z \, dV$

- sférické souřadnice

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

- meze

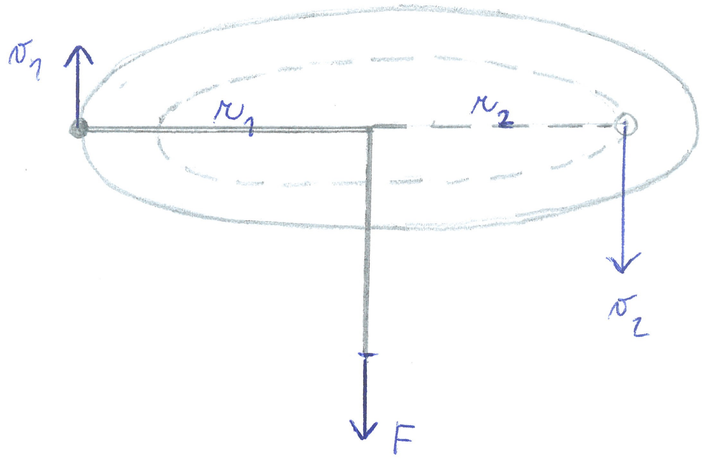
$$r \in [0, R]$$
$$\theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \ldots \underline{\text{polokoule}}$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow z_T = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \underbrace{r \cos\theta}_{z} \; \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}_{dV}$$

$$z_T = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr$$

$$r_T = \frac{3}{2\pi R^3} \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$r_T = \frac{3}{\cancel{2\pi} \cancel{R^3}} \cancel{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{R^4}}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{8} R}}$$



a) zákon zachování momentu hybnosti :

$$L_1 = L_2$$

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

$$I = mr^2 \qquad \omega = v/r \quad \Rightarrow \quad m r_1^2 \frac{v_1}{r_1} = m r_2^2 \frac{v_2}{r_2}$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}}}$$

b) $W = \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} m v_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right)}}$

$$= \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m r_2^2 \frac{v_2^2}{\cancel{r_2^2}} - \frac{1}{2} m \cancel{r_1^2} \frac{v_1^2}{\cancel{r_1^2}}$$

c) rovnováha tíhové a odstředivé síly :

$$F_G = F_{od}$$

$$m_2 g = m \frac{v_2^2}{r_2}$$

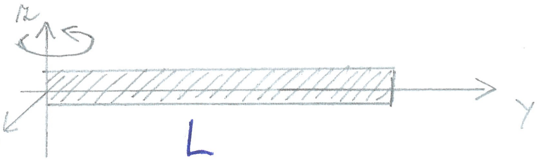
$$m_2 = \frac{m}{g} \frac{v_2^2}{r_2}$$

$$\underline{\underline{m_2 = \frac{m}{g} \frac{v_1^2 r_1^2}{r_2^3}}}$$

moment setrvačnosti: $I = \sum_i m_i r_{i,\perp}^2 = \int r_\perp^2 \, dm$

$$I = \frac{M}{V} \int_V r_\perp^2 \, dV$$

a) tyč



• kartézské souřadnice $dV = dx\,dy\,dz$

⊛ rozměry v $\overset{a}{x}$-ovém a $\overset{b}{z}$-ovém směru zanedbatelné vzhledem k L

• meze
$x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$
$y \in [0, L]$
$z \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$

• kolmá vzdálenost od osy otáčení $r_\perp = Y$

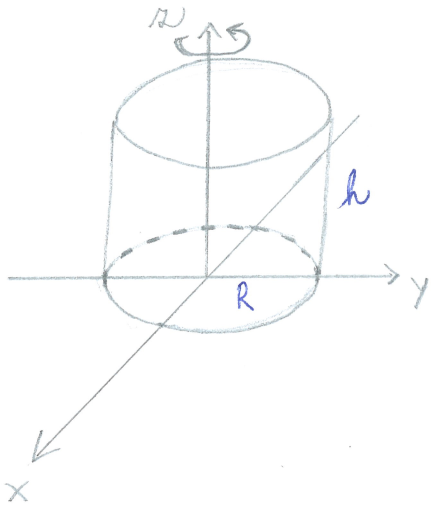
$$\Rightarrow I = \frac{M}{a \cdot b \cdot L} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 \, dx\,dy\,dz$$

$$I = \frac{M}{a \cdot b \cdot L} [z]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$I = \frac{M}{a \cdot b \cdot L} \cdot b \cdot \frac{L^3}{3} \cdot a = \underline{\underline{\frac{1}{3} M L^2}}$$

⊛ nebo rovnou: $I = \frac{M}{L} \int_0^L y^2 \, dy =$

b) válec



• cylindrické souřadnice

$$x = r\sin\varphi$$
$$y = r\cos\varphi$$
$$z = z$$

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

• meze

$$r \in [0, R]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$
$$z \in [0, h]$$

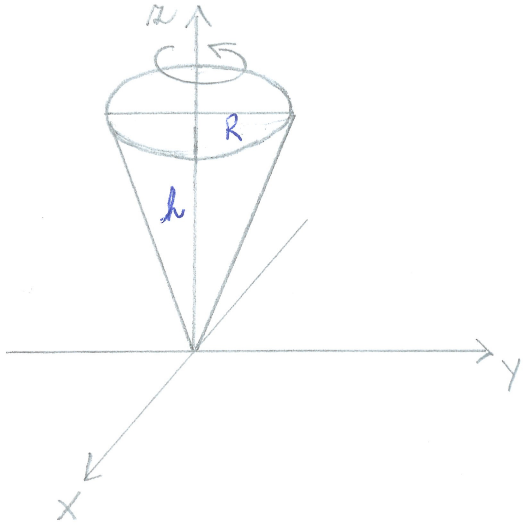
• kolmá vzdálenost od osy otáčení $\quad r_\perp = r$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2\, r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$I = \frac{M}{\pi R^2 h} \left[z\right]_0^h \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$I = \frac{M}{\pi R^2 h}\, h \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} M R^2}}$$

c) kužel



• cylindrické souřadnice

$x = r\cos\varphi$

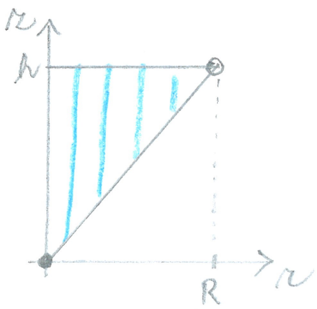
$y = r\sin\varphi$

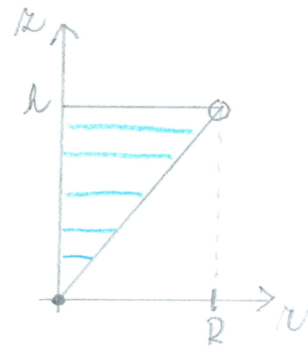
$z = z$

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

• meze — buď $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \left[\frac{h}{R}r, R\right]$ — nebo $r \in \left[0, \frac{R}{h}z\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, h]$

→ proč? ... lineární závislost z a r





$z = a \cdot r + b$

$0 = 0a + b \Rightarrow b = 0$

$h = a \cdot R + b \Rightarrow a = \frac{h}{R}$

$\Leftarrow$ $z = \frac{h}{R} r$, $r = \frac{R}{h} z$

• kolmá vzdálenost od osy otáčení $\quad r_\perp = r$

první meze $\Rightarrow$ $$I = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \int_{\frac{h}{R}r}^{h} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} r^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

- nejprve integruji podle φ ... nezávislá mez

  poté integruji podle z ... mez závisí na r

  nakonec integruji podle r

$$I = \frac{3M}{\pi R^2 h} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\int_0^R z \, r^3 \, dr \right]_{\frac{h}{R}r}^{h}$$

$$I = \frac{3M}{\pi R^2 h} 2\pi \int_0^R \left(h r^3 - \frac{h}{R} r^4\right) dr = \frac{6M}{R^2 h} \left[h \frac{r^4}{4} - \frac{h}{R} \frac{r^5}{5} \right]_0^R$$

$$I = \frac{6M}{R^2 h} \left(h \frac{R^4}{4} - h \frac{R^4}{5} \right) = \frac{6M}{R^2 h} h R^4 \frac{1}{20} = \underline{\underline{\frac{3}{10} M R^2}}$$

druhé meze $\Rightarrow$ $$I = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{h}z} r^2 \, r \, dr \, d\varphi \, dz$$

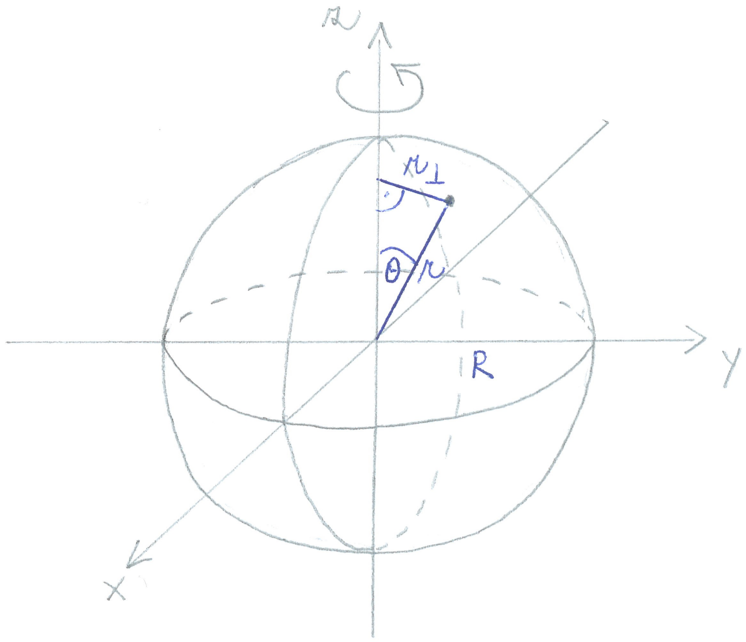
- nejprve integruji φ $\rightarrow$ potom r $\rightarrow$ potom z

$$I = \frac{3M}{\pi R^2 h} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \left[\int_0^h \frac{r^4}{4} \, dz \right]_0^{\frac{R}{h}z}$$

$$I = \frac{3M}{\pi R^2 h} 2\pi \int_0^h \left(\frac{R^4}{4h^4} z^4 \right) dz = \frac{6M}{R^2 h} \left[\frac{R^4}{4h^4} \frac{z^5}{5} \right]_0^h$$

$$I = \frac{6M}{R^2 h} \frac{R^4}{4h^4} \frac{h^5}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{10} M R^2}}$$

d) koule (osa jdoucí těžištěm)



• sférické souřadnice

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

• meze

$$r \in [0, R]$$
$$\theta \in [0, \pi]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

• kolmá vzdálenost od osy otáčení $\quad r_\perp = r \sin\theta$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin^2\theta \; r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^{R} r^4 \, dr$$

$*$

$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{R}$$

$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot 2\pi \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{R^5}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{5} M R^2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta \left(1-\cos^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta\right) d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

OK.

vnější funkce

derivace vnitřní funkce

$\Rightarrow$ ZKUS $\left(\cos^3\theta\right)' = -3\cos^2\theta\sin\theta$

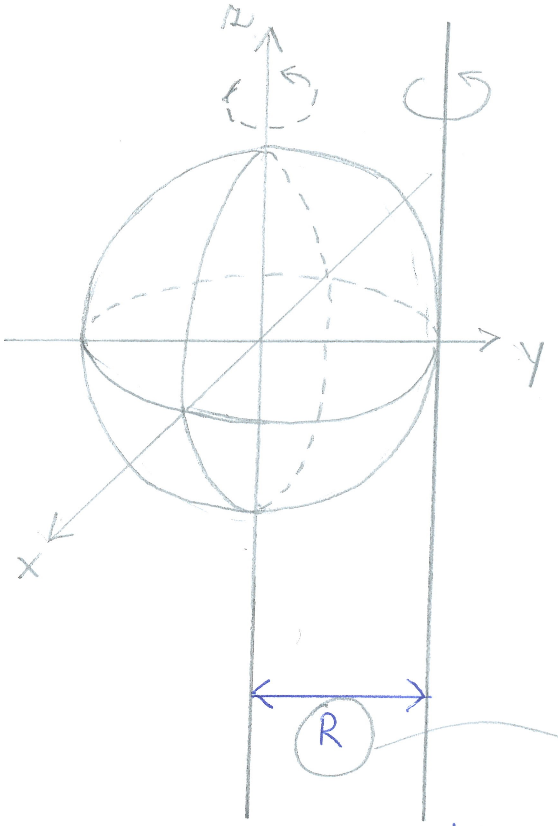
nebo

$$t = \cos\theta$$
$$dt = -\sin\theta \, d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \left(\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta \, d\theta\right) = \int_1^{-1} \left(-1 + t^2\right) dt = \left[-t + \frac{1}{3}t^3\right]_1^{-1}$$

$$= \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}$$

e) koule (osa tečna koule)



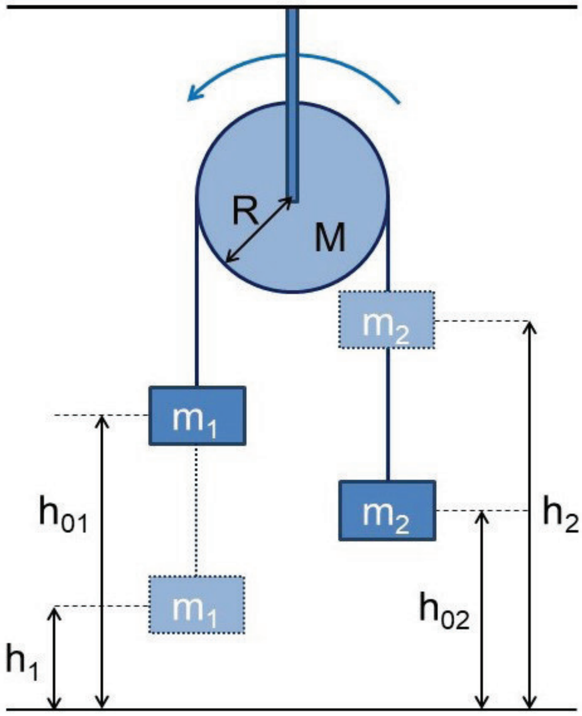
o_T	o'
↓	↓
osa otáčení procházející těžištěm	osa otáčení vzdálená R
$J_T = \frac{2}{5}MR^2$	$J_{o'}$

→ Steinerova věta $\quad J_{o'} = J_T + MR^2$

$$J_{o'} = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \underline{\underline{\frac{7}{5}MR^2}}$$

Počítejme příklad pomocí zákona zachování mechanické energie. Na počátku je závaží m_1 ve výšce h_{01} a závaží m_2 ve výšce h_{02}. Rychlost obou závaží je nulová stejně jako úhlová rychlost otáčení kladky. Celková mechanická energie na počátku je tedy dána pouze potenciální energií závaží m_1 a m_2.

$$E_0 = E_{p_0} = m_1 g h_{01} + m_2 g h_{02} \tag{1}$$



Na konci je závaží m_1 ve výšce h_1 a závaží m_2 ve výšce h_2. Obě závaží urazily stejnou dráhu h.

$$h = h_{01} - h_1 = h_2 - h_{02} \tag{2}$$

Obě závaží se pohybují stejnou rychlostí v. Při otáčení kladky bez prokluzování vlákna je úhlová rychlost $\omega = \frac{v}{R}$. Celková mechanická energie na konci je rovna součtu potenciální energie závaží m_1 a m_2, kinetické energie závaží m_1 a m_2 a kinetické energie otáčení kladky.

$$E = E_p + E_k = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 \tag{3}$$

Soustava koná rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a.

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$
$$v = at$$

Po dosazení do zákona zachování energie můžeme dopočítat zrychlení a.

$$\begin{aligned}
E_0 &= E \\
m_1 g h_{01} + m_2 g h_{02} &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \\
m_1 g (h_{01} - h_1) - m_2 g (h_2 - h_{02}) &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} \frac{J}{R^2} v^2 \\
(m_1 - m_2) g h &= \frac{1}{2} v^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right) \\
\frac{1}{2} a t^2 (m_1 - m_2) g &= \frac{1}{2} a^2 t^2 \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right) \\
a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} g \qquad (4)
\end{aligned}$$

Do rovnice (4) můžeme dosadit moment setrvačnosti kladky (homogenního válce) $J = \frac{1}{2} M R^2$ a dopočítat zrychlení a.

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} g \qquad (5)$$

Valení válce spočítáme nejprve přes energie. Na počátku se válec (jeho hmotný střed) nachází ve výšce h v klidu. Veškerá jeho mechanická energie je rovna potenciální energii. Na konci se válec (jeho hmotný střed) nachází v nulové výšce a jeho potenciální energie je nulová. Potenciální energie se kompletně přeměnila na kinetickou energii posuvného pohybu hmotného středu válce s rychlostí v a rotačního pohybu válce s úhlovou frekvencí ω.

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{1}$$

Jelikož se válec valí bez prokluzování, pro posuvnou rychlost a úhlovou frekvenci otáčení platí $v = \omega R$. Hmotný střed válce koná rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}at^2 \\ v &= at \end{aligned}$$

Dráhu s můžeme vyjádřit pomocí počáteční výšky h a úhlu α.

$$s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

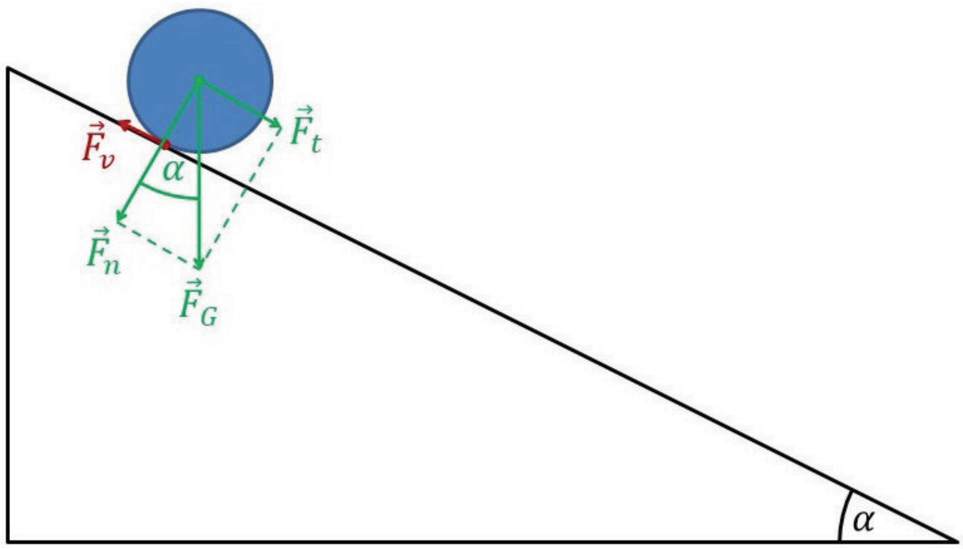
Dosadíme-li postupně do rovnice (1), dostaneme zrychlení a.

$$\begin{aligned} Mgs\sin\alpha &= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2} \\ \frac{1}{2}Mgat^2\sin\alpha &= \frac{1}{2}Ma^2t^2\left(1 + \frac{J}{MR^2}\right) \\ a &= g\sin\alpha\frac{1}{1 + \frac{J}{MR^2}} \qquad (2) \end{aligned}$$

Do rovnice (2) můžeme dosadit moment setrvačnosti homogenního válce $J = \frac{1}{2}MR^2$ a dopočítat zrychlení a:

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha, \tag{3}$$

což je o třetinu méně než v případě posuvného pohybu bez valení.



Stejný výsledek dostaneme i při výpočtu pomocí sil. Podle 2. impulzové věty je válec roztáčen momentem síly F_v s ramenem síly R.

$$\begin{aligned} \tau &= J\varepsilon \\ F_v R &= J\varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

Při valení válce bez prokluzování platí pro jeho zrychlení a a úhlové zrychlení ε:

$$a = \varepsilon R.$$

Podle 1. impulzové věty působí na válec ve směru pohybu tečná složka tíhové síly a proti směru pohybu síla F_v.

$$\begin{aligned} F &= Ma \\ F_t - F_v &= Ma \\ Mg\sin\alpha - F_v &= Ma \end{aligned} \tag{5}$$

Dohromady platí tedy:

$$\begin{aligned} Ma &= Mg\sin\alpha - \frac{J}{R}\frac{a}{R} \\ a &= g\sin\alpha\frac{1}{1+\frac{J}{MR^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Dostali jsme tedy stejný výsledek jako v rovnici (2).