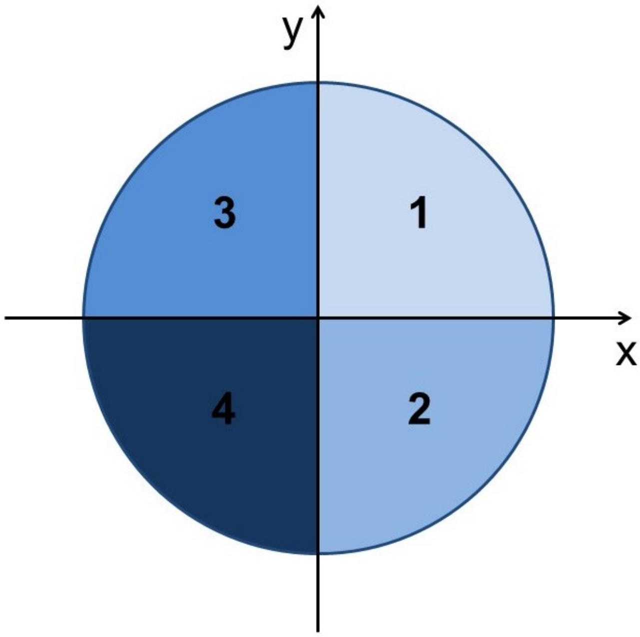
Cvičení 9 - soustava hmotných bodů, tuhé těleso

1. Disk o poloměru R byl vytvořen slepením 4 čtvrtkruhů vyrobených z různých materiálů. Hustoty materiálů jednotlivých částí jsou v poměru 1:2:3:4 podle obrázku. Najděte hmotný střed tohoto tělesa.



[*řešení:* $[x_T, y_T] = \left[-\frac{8R}{15\pi}, -\frac{4R}{15\pi}\right]$]

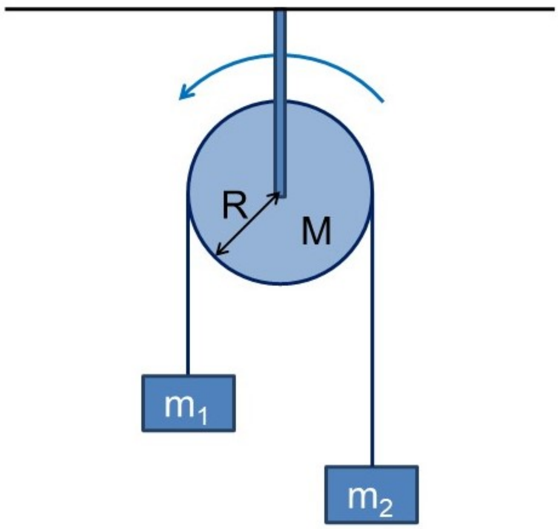
2. Vypočítejte polohu hmotného středu homogenní polokoule o poloměru R.
[*řešení:* $[x_T, y_T, z_T] = \left[0, 0, \frac{3}{8}R\right]$, původní koule má střed v počátku soustavy souřadnic a je rozdělena rovinou xy.]

3. Závaží o hmotnosti m se pohybuje po hladké vodorovné ploše stolu. K závaží je přivázána nit, která je vedena malým otvorem ve stole směrem dolů. Na počátku je závaží ve vzdálenosti r_1 od otvoru a pohybuje se po kružnici rychlostí v_1. Potom za nit zespoda zatáhneme a závaží se přiblíží k otvoru na vzdálenost r_2.
(a) Jaká bude rychlost v_2 závaží ve vzdálenosti r_2 od otvoru?
(b) Jakou práci W jsme vykonali při přitažení závaží do vzdálenosti r_2 od otvoru?
(c) Jaká je hmotnost závaží m_2, které bychom museli na nit připevnit, aby poloměr kružnice po níž se pohybuje závaží m zůstával r_2?
[*řešení:* (a) $v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$, (b) $W = \frac{1}{2} m v_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right)$, (c) $m_2 = \frac{m}{g} \frac{v_1^2 r_1^2}{r_2^3}$]

4. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenních těles o hmotnosti M:
(a) tyč o délce L vzhledem k ose kolmé na tyč a procházející jejím koncem
(b) válec o poloměru podstavy R a výšce h vzhledem k ose procházející středy obou podstav
(c) kužel o poloměru podstavy R a výšce h vzhledem k ose procházející středem podstavy a vrcholem kuželu
(d) koule o poloměru R vzhledem k ose procházející jejím středem
(e) koule o poloměru R vzhledem k ose, která je tečnou k povrchu koule

[*řešení:* (a) tyč: $J = \frac{1}{3}ML^2$, (b) válec: $J = \frac{1}{2}MR^2$, (c) kužel: $J = \frac{3}{10}MR^2$, (d) koule (střed): $J = \frac{2}{5}MR^2$, (e) koule (tečna): $J = \frac{7}{5}MR^2$]

5. Závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšeny na pevné kladce o poloměru R a hmotnosti M podle obrázku. Tření v ose otáčení kladky a hmotnost vlákna můžeme zanedbat. Najdete zrychlení závaží m_1 a m_2.



[*řešení:* zrychlení soustavy: $a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$, uvažujeme kladku jako homogenní válec.]

6. Na nakloněnou rovinu se sklonem α umístíme válec a kouli o stejné hmotnosti m a poloměru R. Obě tělesa vypuštěna ve stejný okamžik a pohybují se bez prokluzování. Vypočítejte, které těleso dorazí na konec nakloněné roviny dříve.

[*řešení:* zrychlení tělesa: $a = g\frac{\sin\alpha}{1 + \frac{J}{mR^2}}$, pro válec $J = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$, pro kouli $J = \frac{2}{5}mR^2 \Rightarrow a = \frac{5}{7}g\sin\alpha$. Rychlejší bude koule.]

Základní vztahy a údaje

Soustava hmotných bodů a tuhé těleso

hmotný střed	$\vec{R}_T = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r}\, \mathrm{d}V$
	$x_T = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{1}{V} \int_V x\, \mathrm{d}V$
	$y_T = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{1}{V} \int_V y\, \mathrm{d}V$
	$z_T = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i = \frac{1}{V} \int_V z\, \mathrm{d}V$
moment setrvačnosti	$J = \sum_i m_i r_{\perp,i}^2 = \frac{M}{V} \int_V r_\perp^2\, \mathrm{d}V$
	$r_\perp$ je kolmá vzdálenost hmotného bodu od osy otáčení

Analogie otáčení a posuvu

moment hybnosti	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J\vec{\omega}$
moment síly	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
2. impulzová věta	$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$
	$\vec{\tau} = J\vec{\varepsilon} = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$

Pappova věta (o hmotném středu rovinného útvaru)

$2\pi x_T \cdot S = V,$

kde S je povrch rovinného útvaru, V je objem tělesa, které vznikne jeho rotací, a x_T je kolmá vzdálenost hmotného středu od osy otáčení.

Steinerova věta

$I_o = I_T + MR_T^2,$

kde I_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o_T procházející hmotným středem tělesa, I_o je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o, která je rovnoběžná s osou o_T a její kolmá vzdálenost od hmotného středu je R_T.