Příklad 8.1.

• pole homogenního disku (na ose) $K_z = -2\pi\sigma\varkappa\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$

• pole nekonečné homogenní roviny $K_z = -2\pi\sigma\varkappa$

$R \to +\infty$

• pole roviny s dírou ve tvaru disku $K_z = -2\pi\sigma\varkappa - \left(-2\pi\sigma\varkappa\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right)$

ODEČTEME POLE DISKU

$$K_z = -2\pi\sigma\varkappa + 2\pi\sigma\varkappa - 2\pi\sigma\varkappa\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$K_z = -2\pi\sigma\varkappa\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

* potenciál disku $\varphi(z) = -2\pi\sigma\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)$ // nulový potenciál v ∞

* potenciál roviny $\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa z$

$$K_z = -\frac{\partial\varphi_z}{\partial z}$$

* potenciál roviny s dírou $\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa z - \left(-2\pi\sigma\varkappa\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)\right)$

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa z + 2\pi\sigma\varkappa\sqrt{R^2+z^2} - 2\pi\sigma\varkappa z$$

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma\varkappa\sqrt{z^2+R^2}$$

Velikost gravitační síly, kterou působí Země na družici, je rovna:

$$F_{gZ} = \frac{\kappa M_Z m}{r^2},$$

podobně můžeme napsat velikost gravitační síly, kterou na družici působí Měsíc:

$$F_{gM} = \frac{\kappa M_M m}{(R-r)^2} = \frac{\kappa M_M m}{(r-R)^2}.$$

V rovnováze mají obě síly stejnou velikost a opačný směr.

$$\frac{\kappa M_Z m}{r^2} = \frac{\kappa M_M m}{(R-r)^2}$$

$$(R-r)^2 = \frac{M_M}{M_Z} r^2$$

$$R - r = \pm\sqrt{\frac{M_M}{M_Z}} r$$

$$r_1 = \frac{R}{1+\sqrt{\frac{M_M}{M_Z}}}$$

$$r_1 = \frac{9}{10} R = 354\,825 \text{ km}$$

$$r_2 = \frac{R}{1-\sqrt{\frac{M_M}{M_Z}}}$$

$$r_2 = \frac{9}{8} R = 443\,531 \text{ km}$$

Vzdálenost $r_1 < R$ je naší hledanou polohou na spojnici středů Země a Měsíce.

Celková potenciální energie gravitačního pole je rovna součtu příspěvku od gravitačního pole Země a gravitačního pole Měsíce. Pro družici je potenciální energie gravitačního pole Země rovna:

$$E_{pZ1} = -\frac{\kappa M_Z m}{r_1},$$

podobně opět můžeme napsat potenciální energii gravitačního pole Měsíce:

$$E_{pM1} = -\frac{\kappa M_M m}{R - r_1}.$$

Pro zjednodušení výpočtu si poměr hmotností Měsíce a Země označme jako $\mu = \frac{M_M}{M_Z}$.

Celková potenciální energie je rovna:

$$E_{p_1} = E_{p_{Z1}} + E_{p_{M1}}$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{r_1}\left(1 + \frac{M_M}{M_Z}\frac{r_1}{R - r_1}\right)$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{\frac{R}{1+\sqrt{\mu}}}\left(1 + \mu\frac{\frac{R}{1+\sqrt{\mu}}}{R - \frac{R}{1+\sqrt{\mu}}}\right)$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{R}(1+\sqrt{\mu})\left(1 + \mu\frac{\frac{1}{1+\sqrt{\mu}}}{1 - \frac{1}{1+\sqrt{\mu}}}\right)$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{R}(1+\sqrt{\mu})\left(1 + \mu\frac{1}{1+\sqrt{\mu}-1}\right)$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{R}(1+\sqrt{\mu})\left(1 + \frac{\mu}{\sqrt{\mu}}\right)$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{R}(1+\sqrt{\mu})^2$$

$$E_{p_1} = -\frac{\kappa M_Z m}{R}\left(1 + \sqrt{\frac{M_M}{M_Z}}\right)^2$$

$$E_{p_1} \doteq -1.3 \times 10^8 \text{ J}$$

V obou případech dochází k přeměně kinetické energie E_k tělesa v potenciální energii gravitačního pole E_p.
(a) V homogenním gravitačním poli je potenciální energie rovna $E_p = mgh$ a platí tedy:

$$\frac{1}{2}hv^2 = mgh$$
$$h \equiv h_0 = \frac{v^2}{2g}$$

(b) V centrálním gravitačním poli Země je potenciální energie tělesa ve vzdálenosti r od středu Země rovna $E_p = -\frac{\kappa M_Z m}{r}$. Kinetická energie se přemění na rozdíl potenciální energií na povrchu Země ($r = R$) a ve výšce h nad zemským povrchem ($r = R + h$).

$$E_k = E_p(R+h) - E_p(R)$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{\kappa M_Z m}{R+h} + \frac{\kappa M_Z m}{R}$$
$$\frac{v^2}{2\kappa M_Z} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}$$
$$\frac{1}{R+h} = \frac{1 - \frac{v^2 R}{2\kappa M_Z}}{R}$$
$$R + h = \frac{R}{1 - \frac{v^2 R}{2\kappa M_Z}}$$
$$h = R\frac{\frac{v^2 R}{2\kappa M_Z}}{1 - \frac{v^2 R}{2\kappa M_Z}}$$

Pro zjednodušení posledního výrazu si vyjádřeme gravitační zrychlení na povrchu Země

$$g = \frac{\kappa M_Z}{R^2}$$

a dosaďme do výrazu vyustupujícím ve vztahu pro výšku h.

$$\frac{v^2 R}{2\kappa M_Z} = \frac{v^2}{2R}\frac{R^2}{\kappa M_Z} = \frac{1}{R}\frac{v^2}{2g} = \frac{h_0}{R}$$

Výsledná výška h je tedy:

$$h = R\frac{\frac{h_0}{R}}{1 - \frac{h_0}{R}}$$
$$h = h_0\frac{R}{R - h_0}$$

Vidíme, že pro malé výšky je $h_0 << R$ a $h \approx h_0$, gravitační pole tedy můžeme aproximovat polem homogenním.

výpočet intenzity

vně:
$$K_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\varkappa M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = +\varkappa M\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot 2x$$

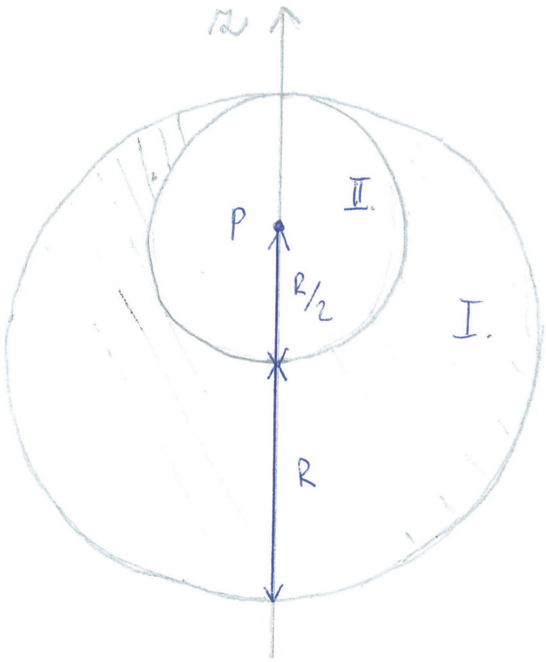
$$\left.\begin{aligned} K_x &= -\frac{\varkappa M}{r^3}x \\ K_y &= -\frac{\varkappa M}{r^3}y \\ K_z &= -\frac{\varkappa M}{r^3}z \end{aligned}\right\} \quad \vec{K} = -\frac{\varkappa M}{r^3}\vec{r}$$

podobně

uvnitř:
$$K_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\varkappa M}{2R^3}\left(3R^2-x^2-y^2-z^2\right)\right) = \frac{\varkappa M}{2R^3}(-2x)$$

$$\left.\begin{aligned} K_x &= -\frac{\varkappa M}{R^3}x \\ K_y &= -\frac{\varkappa M}{R^3}y \\ K_z &= -\frac{\varkappa M}{R^3}z \end{aligned}\right\} \quad \vec{K} = -\frac{\varkappa M}{R^3}\vec{r}$$

podobně:



potenciál uvnitř homogenní koule: $\varphi(r) = -\frac{\varkappa M}{2R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$

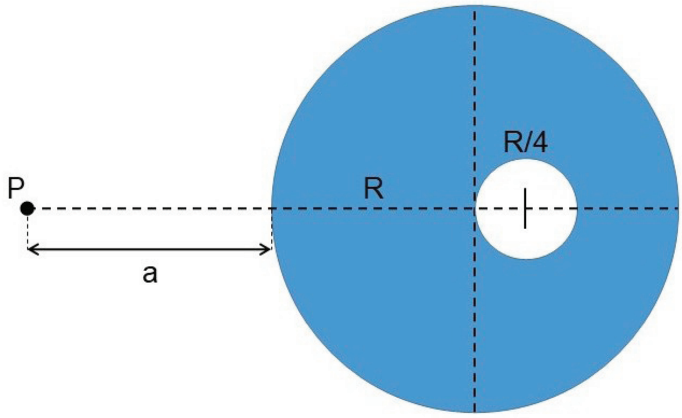
I. plná koule: $R_I = R$ $\quad r_I = R/2$ $\quad M_I = M$

$$\Rightarrow \varphi_I(P) = -\frac{\varkappa M}{2R^3}\left(3R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) = -\frac{\varkappa M}{R}\cdot\frac{11}{8}$$

II. dutina: $R_{II} = R/2$ $\quad r_{II} = 0$ $\quad M_{II} = \frac{1}{8}M$

$$\Rightarrow \varphi_{II}(P) = -\frac{\varkappa M/8}{2\left(\frac{R}{2}\right)^3}\left(3(R/2)^2 - 1\right) = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{\varkappa M}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \text{koule s dutinou} \quad \varphi(P) = \varphi_I - \varphi_{II} = -\frac{\varkappa M}{R}\cdot\left(\frac{11}{8} - \frac{3}{8}\right) = -\frac{\varkappa M}{R}$$



Jak známo gravitační pole (intenzita a potenciál) homogenní plné koule o hmotnosti M vně této koule má stejný tvar jako gravitační pole hmotného bodu o stejné hmotnosti M umístěného do jejího středu. Hodnota x-ové složky intenzity gravitačního pole velké koule bez dutiny v bodě P je tedy:

$$K_x^{(1)}(P) = \frac{\kappa M}{(a+R)^2} = g.$$

Pro malou kouli na místě dutiny a o stejné velikosti jako dutina má x-ová složka intenzity gravitačního pole v bodě P velikost:

$$K_x^{(2)}(P) = \frac{\kappa m}{\left(a + R + \frac{R}{4}\right)^2}.$$

Poznamenejme, že z důvodu symetrie je y-ová i z-ová složka obou intenzit gravitačního pole nulová. Mezi hmotnostmi m malé koule a M velké koule platí vztah:

$$m = \varrho V_2 = M\frac{V_2}{V_1} = M\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{64}$$

Výsledná hledaná hodnota x-ové složky intenzity gravitačního pole v bodě P pro zadanou kouli s dutinou je rovna rozdílu intenzit $K_x^{(1)}(P)$ a $K_x^{(2)}(P)$.

$$K_x(P) = K_x^{(1)}(P) - K_x^{(2)}(P)$$

$$K_x(P) = \frac{\kappa M}{(a+R)^2} - \frac{\kappa m}{\left(a + \frac{5}{4}R\right)^2}$$

$$K_x(P) = \frac{\kappa M}{(a+R)^2}\left(1 - \frac{(a+R)^2}{64\left(a + \frac{5}{4}R\right)^2}\right)$$

$$K_x(P) = g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]$$