Cvičení 8 - gravitační pole

1. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole nekonečné homogenní roviny s kruhovou dírou o poloměru R v přímce kolmé na tuto rovinu a procházející středem kruhového otvoru.

[*řešení:*
intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = -2\pi\sigma\kappa\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$,
potenciál: $\varphi = 2\pi\sigma\kappa\sqrt{z^2 + R^2}$, kde σ je plošná hustota roviny.]

2. Uvažujme družici o hmotnosti $m = 100$ kg, která se pohybuje (bez vlastního pohonu) ve společném gravitačním poli Země a Měsíce. Gravitační působení Slunce a okolních těles zanedbejme.
Nalezněte bod na spojnici středů Země a Měsíce, ve kterém je výsledná gravitační síla působící na družici nulová.
Vypočítejte potenciální energii družice v tomto bodě.

Poznámka: Střední vzdálenost (středů) Země a Měsíce je $R = 394\,250$ km, hmotnost Země je $M_Z = 6 \times 10^{24}$ kg, poměr hmotností Měsíce a Země je $\frac{M_M}{M_Z} = \frac{1}{81}$.

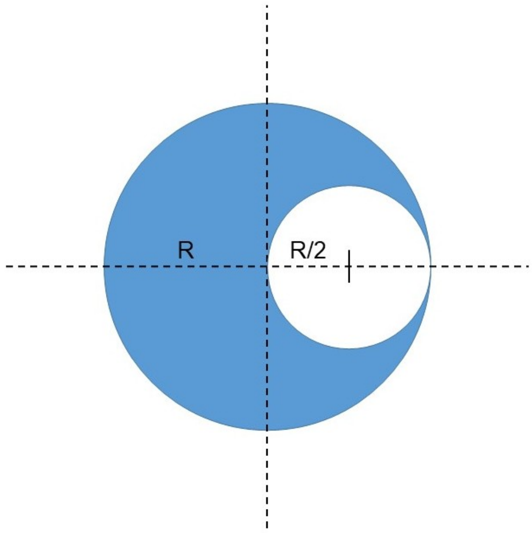
[*řešení:* vzdálenost od středu Země: $r = \frac{9}{10}R \doteq 354\,825$ km,
potenciální energie: $E_p = -\frac{10}{9}\frac{\kappa M_Z m}{R} \doteq -1.13 \times 10^8$ J]

3. Z povrchu Země vystřelíme těleso svisle vzhůru rychlostí 1 km s^{-1}.
Do jaké výšky vystoupá těleso
(a) v homogenním gravitačním poli Země,
(b) v nehomogenním gravitačním poli Země?
Poloměr Země je 6371 km, hmotnost Země je 6×10^{24} kg a gravitační zrychlení při povrchu Země je 9.81 m s^{-2}.

[*řešení:* v homogenním gravitačním poli: $h_0 = \frac{v^2}{2g}$, v centrálním gravitačním poli: $h = h_0\frac{R}{R-h_0}$.]

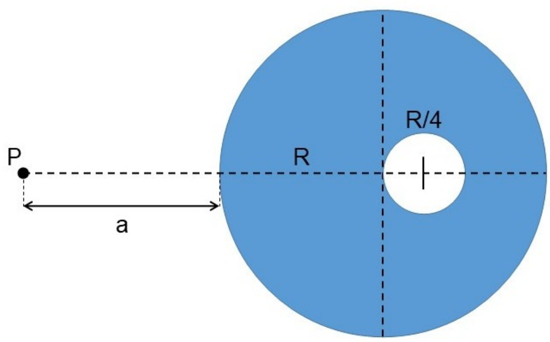
4. Potenciál gravitačního pole homogenní koule o poloměru R a hmotnosti M je ve vzdálenosti r od středu koule roven:
$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{2R^3}(3R^2 - r^2)$ pro $r < R$ (uvnitř koule),
$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{r}$ pro $r \geq R$ (vně koule).
Vypočítejte intenzitu gravitačního pole uvnitř a vně této koule.
[*řešení:* uvnitř koule $r < R$: $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M\vec{r}}{R^3}$, vně koule $r \geq R$: $\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M\vec{r}}{r^3}$.]

5. Vypočítejte intenzitu a potenciál gravitačního pole ve středu kulové díry v homogenní kouli o poloměru R, viz obrázek.



[*řešení:* Označme horizontální osu jako z a M jako hmotnost celé plné koule. Potom: intenzita: $\vec{K} = (0, 0, K_z)$, $K_z = -\frac{\kappa M}{2R^2}$, potenciál: $\varphi = -\frac{\kappa M}{R}$.]

6. Uvnitř koule o poloměru R a hustotě ϱ je kulová dutina o poloměru $R/4$ ve vzdálenosti $R/4$ od středu koule (viz obrázek který je řezem v rovině procházející středy obou koulí). Jaká je velikost gravitačního zrychlení v bodě P (vzdálenost a od povrchu koule), když pro stejnou kouli, ale bez dutiny je v bodě P velikost gravitačního zrychlení g?



[*řešení:* $a_g(P) = K(P) = g\left[1 - \left(\frac{a+R}{8a+10R}\right)^2\right]$]

Základní vztahy a údaje

Gravitační pole hmotného bodu

intenzita gravitačního pole	$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{r^3}\vec{r}$
	$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}(\vec{r}-\vec{r}')$
potenciál gravitačního pole	$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{r}$
	$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa m}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$
vztah intenzity a potenciálu	$\vec{K}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$
	$K_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$
	$K_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$
	$K_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

Gravitační pole tělesa

intenzita gravitačního pole	$\vec{K}(\vec{r}) = -\int_V \kappa\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}\varrho\,\mathrm{d}V'$
potenciál gravitačního pole	$\varphi(\vec{r}) = -\int_V \kappa\frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert^3}\varrho\,\mathrm{d}V'$

Gravitační pole homogenního disku o poloměru R a hmotnosti M

v ose disku (vzdálenost z od středu)	$K_z = \frac{2\kappa M}{R^2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-1\right)$
	$\varphi = -\frac{2\kappa M}{R}\left(\sqrt{\frac{z^2}{R^2}+1}-\frac{z}{R}\right)$

Gravitační pole homogenního koule o poloměru R a hmotnosti M

uvnitř koule $r < R$	$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M\vec{r}}{R^3}$
	$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{2R^3}(3R^2-r^2)$
vně koule $r \geq R$	$\vec{K}(\vec{r}) = -\frac{\kappa M\vec{r}}{r^3}$
	$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\kappa M}{r}$